

第三种边界（周期边界）条件的三次样条插值的稀疏矩阵特性以及有效的高斯消除求解（第五题）

陈浚铭（20337021）

2021-5-31

目录

1	实验目的	1
2	实验题目	1
3	实验原理	1
3.1	背景	1
3.2	方程推导	2
4	高斯消除方程推导	3
4.1	Sherman Morrison 公式	4
4.2	利用 Sherman-Morrison 方程解出三次样条插值函数	5
4.3	方法的时间复杂度	6
5	实验内容	6
6	实验结果	7
7	Conclusion	8

1 实验目的

1. 深入了解三次样条插值算法 2. 设计有效的高斯消除算法，从而研究有关三次样条插值函数求解过程 3. 利用数据计算三次样条插值函数，并与Lagrange插值函数比较结果

2 实验题目

对于使用第三种边界条件的三次样条插值，讨论形成“三弯矩”方程系数矩阵的特点，对这种稀疏矩阵的特点，编成实现一种有效的高斯消除求解算法。自己构造一组插值数据，测试编写的程序，绘出相应的三次样条插值曲线。

3 实验原理

3.1 背景

定义：设 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ，如果 $S(x)$ 满足条件：

- (1) 2 阶导数连续，则 $S''(x) \in C[a,b]$;
- (2) 在每一个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$) 上， $S(x)$ 为三次多项式，则称 $S(x)$ 为关于节点 x_0, x_1, \dots, x_n 的三次样条函数。如果给定 $y_i = f(x_i)$, $\Phi_i = 0, 1, \dots, n$), 和三次样条函数 $S(x)$ 满足

$$S(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。

从定义要求指， $S(x)$ 在每个个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 确定了四个待定系数，而共有 n 个小区间，故应确定 $4n$ 个参数。根据 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足连续性条件：

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), S''(x_j - 0) = S''(x_j + 0)$$

这里共有 $3n - 3$ 个条件，再加上 $S(x)$ 的插值条件 1, 共有 $4n - 2$ 个条件，因此还需要加上 2 个条件才能确定 $S(x)$ 。对于第三个边界条件（周期边

界条件), 要求 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数, 这要求 $S(x)$ 也是相同周期的2阶倒数连续的函数, 则,

$$S(x_0 + 0) = S(x_n - 0) \quad (2)$$

$$S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0) \quad (3)$$

$$S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0) \quad (4)$$

3.2 方程推导

利用 $S''(x)$ 的2阶导数 $S''(x_j) = M_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 表达 $S(x)$. 由 $S(x)$ 在区间 $[x_j, x_{j+1}]$, 故 $S''(x)$ 为线性函数, 表示为

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j} \quad (5)$$

首先我们计算在中间节点 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} 中的参数 M_j :

为确定 $M_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 的值把 $S''(x)$ 两次积分有 $S(x)$,

$$S(x) = \frac{M_j(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + \frac{M_j(x - x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j} \quad (6)$$

再求导, 得到 $S'(x)$,

$$S'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j; \quad (7)$$

因此得到, 在 $[x_j, x_{j+1}]$,

$$S'(x_j + 0) = \frac{-h_j}{3} M_j - \frac{h_j}{6} M_{j+1} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} \quad (8)$$

$$S'(x_j - 0) = \frac{h_{j-1}}{6} M_{j-1} - \frac{h_j}{6} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \quad (9)$$

由导函数连续性 (3.1):

$S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0)$, 有

$$u_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

其中,

$$u_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} h_{j-1} + h_j, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j},$$

$$d_j = 6 \frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j+1} + h_j} = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}], j = 1, 2, \dots, n-1$$

我们因此从(10)得到n-1 个方程。之后, 我们从边界条件来求出 M_0 和 M_1 :

对于第三种界条件, 由 $S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$, 有

$$M_0 = M_n,$$

利用 (8), (9) 和边界条件(3)来推:

$$-\frac{h_0}{3} M_0 - \frac{h_0}{6} M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

$$\frac{h_0 + h_{n-1}}{3} M_n + \frac{h_0}{6} M_1 + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

$$\text{当中, 均差 } f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{h_0}, f[x_{n-1}, x_n] = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

把上式除于 $\frac{h_0 + h_{n-1}}{6}$, 有

$$\frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}} M_1 + \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}} M_{n-1} + 2M_n = 6 \frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}$$

因此, 我们得到了 n+1个方程。

4 高斯消除方程推导

我们从这方程组得到矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & u_1 \\ u_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & u_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

当中称系数矩阵为”三弯形 “ 矩阵。我们发现系数矩阵是一种稀疏矩阵，但它不是三对角矩阵，他是一个循环三对角线性方程组的矩阵。考虑到时间复杂度的问题，我们知道直接利用高斯消元法， LU 分解过程的时间复杂度为 $O(n^3)$ ，并不如理想。从稀疏矩阵的特性，我们可以用较为时间复杂度较低的算法。我们讨论 **sherman morrison**公式来求解。

4.1 Sherman Morrison 公式

假设我们得到方矩阵A 的 inverse A^{-1} ，而我们想改变一个元素 a_{ij} ，或一行，一行等，我们发现是有办法来计算对 A^{-1} 的改变，而不用重新计算 A^{-1}

$$A \rightarrow (A + u \times v) \quad (12)$$

对于一些向量 u, v. 如果 u 为单元向量 e_i ，则 12 把 v 的元素加到 i 的行。

如果 v 为单元向量 e_j ，则 12 把 u 的元素加到 j 的列。

如果 u 和 v 分别都为 e_i, e_j 的比例，那A只有一个元素 a_{ij} 被加。

Sherman-Morrison 公式给出 $(A + u \times v)^{-1}$ 的表达式：

$$\begin{aligned} (A + u \times v)^{-1} &= (1 + A^{-1} \cdot u \times v)^{-1} \cdot A^{-1} \\ &= (1 - A^{-1} \cdot u \times v + A^{-1} \cdot u \times v \cdot A^{-1} \cdot u \times v - \dots) \cdots A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1} \cdot u \times v \cdot A^{-1} (1 - \lambda + \lambda^2 - \dots) \\ &= A^{-1} - \frac{(A^{-1} \cdot u) \times (v \cdot A^{-1})}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (13)$$

当中，

$$\lambda = v \cdot A^{-1} \cdot u \quad (14)$$

要利用4.1：已给出 A^{-1}, u, v , 我们需要

$$z = A^{-1} \cdot uw = (A^{-1})^T \cdot v\lambda = v \cdot z \quad (15)$$

从而得到新的 inverse:

$$A^{-1} \rightarrow A^{-1} - \frac{z \times w}{1 + \lambda} \quad (16)$$

如果想改变一个元素，由 $u \times v$, 要解

$$(A + u \times v) \cdot x = b \quad (17)$$

利用

$$A \cdot y = b, \quad A \cdot z = u \quad (18)$$

解向量 y 和 z . 得到

$$x = y - \left[\frac{v \cdot y}{1 + (v \cdot z)} \right] z \quad (19)$$

和 (4.1) 相乘得到 b 。

4.2 利用 Sherman-Morrision 方程解出三次样条插值函数

我们观察到在(11)中的”三弯形”矩阵 A 为循环三对角矩阵。透过**Sherman-Morrision** 方程, 可把”三弯形”矩阵 A 化为三对角矩阵, 然后使用”追赶

法“来求解，推导如下：对于(11) 求解矩阵方程 (17), 利用矢量

$$u = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_n \gamma \end{bmatrix} \quad (20)$$

假设 γ 为任意数，因此”三弯形”矩阵A 化为三对角矩阵 A' , 当中系数都为相同，除了只有四个系数被改变：

$$A'_{1n} = 0, \quad A'_{n1} = 0, \quad A'_{11} = 2 - \gamma, \quad A'_{nn} = 2 - \frac{\lambda_n u_n}{\gamma} \quad (21)$$

则,

$$A' = \begin{bmatrix} 2 - \gamma & \lambda_1 & & & \\ u_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & u_n & 2 - \frac{\lambda_n u_n}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (22)$$

把 A' 代 A , 利用”追赶法”解(18), 由(19)就能求解 (11)

4.3 方法的时间复杂度

利用Sherman-Morrison方程把 (11) 的系数矩阵变成三对角矩阵时间复杂度为 $O(n^2)$, 而”追赶法”也是 $O(n^2)$ 。因此整个算法的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。

5 实验内容

我们利用了C++ (spline.cpp) 编写求解(11)的程序，让后利用Haskell (splineAndGraph.hs) 写出三次样条函数，并用来绘出曲线的图形。并利用Matlab (lagrangetest.m)来写Lagrange插值函数的程序，绘出曲线，并利用数据来判断各插值函数的特性。

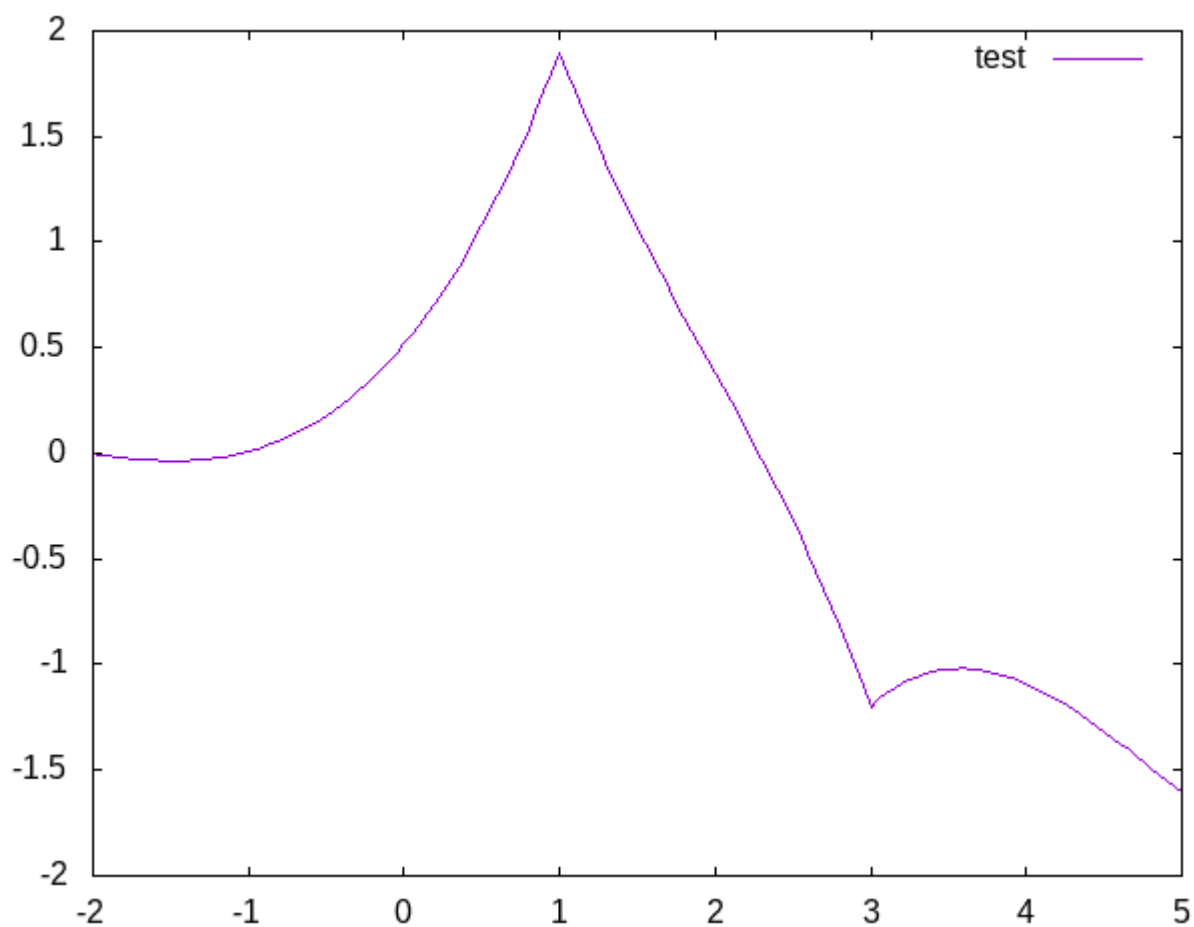


图 1: (a). 三次样条插值

6 实验结果

我们先利用数据为 $x = [-2, 1, 3, 5], y = [0, 1.9, -1.2, -1.6]$ 得到解 $M = [0.125882, 1.24706, -1.3602, 0.125882]$ ， Fig (a) (1) (2) 分别显示三次样条函数和Lagrange插值得到得图形。

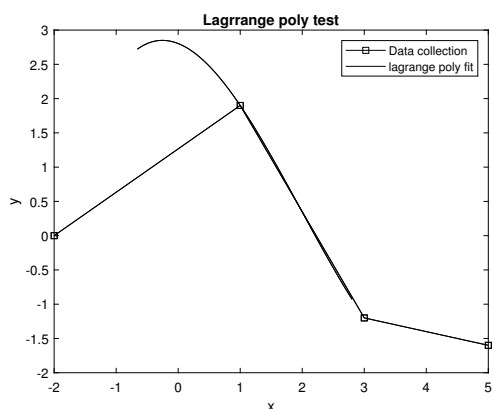


图 2: (b). Lagrange插值

7 Conclusion

从Figure 1(a), 1(b), 估断当节点越多, `spline`函数会更有效, 但是由Runge现象知道这并不一定。

In Conclusion, 我们在这理研究了周期边界的三次样条插值化的有效求解算法, 并用实验更Lagrange插值函数比较。