第三种边界（周期边界）条件的三次样条插值的稀疏矩阵特性以及有效的高斯消除求解（第五题）

陈浚铭（20337021)

2021-5-31

目录

1 实验目的

1. 深入了解三次样条插值算法 2. 设计有效的高斯消除算法，从而研究有关三次样条插值函数求解过程 3. 利用数据计算三次样条插值函数，并与Lagrange插值函数比较结果

2 实验题目

对于使用第三种边界条件的三次样条插值，讨论形成“三弯矩”方程系数矩阵的特点，对这种稀疏矩阵的特点，编成实现一种有效的高斯消除求解算法。自己构造一组插值数据，测试编写的程序，绘出相应的三次样条插值曲线。

3 实验原理

3.1 背景

定义：设 $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, 如果S(x) 满足条件：
(1) 2 阶导数连续，则 S”(x) ∈ C[a,b];
(2) 在每一个小区间$[x_k, x_{k+1}], (k = 0, 1, ...n-1)$ 上， S(x)为三次多项式，则称S（x)为关于节点$x_0, x_1, ..., x_n$的三次样条函数。如果给定 $y_i = f(x_i), \Phi i = 0, 1, ...n)$, 和三次样条函数S（x) 满足

$$S(x_i) = y_i, i = 0, 1, ...n \tag{1}$$

称S（x)为三次样条插值函数。

从定义要求指， S(x)在每个个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ 确定了四个待定系数，而共有n 个小区间，故应确定 4n 个参数。根据S（x) 在 [a,b] 上满足连续性条件：

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0), S''(x_j - 0) = S(x_j + 0)$$

这里共有 $3n - 3$ 个条件，再加上S(x) 的插值条件 1, 共有$4n - 2$个条件，因此还需要加上2个条件才能确定S(x)。对于第三个边界条件（周期边

界条件），要求 f(x) 是以$x_n - x_0$ 为周期的周期函数，这要求S(x)也是相同周期的2阶倒数连续的函数，则，

$$S(x_0+0) = S(x_n-0) \tag{2}$$

$$S'(x_0+0) = S'(x_n-0) \tag{3}$$

$$S''(x_0+0) = S''(x_n-0) \tag{4}$$

3.2 方程推导

利用 S"(x) 的2阶导数$S''(x_j) = M_j (j = 0, 1, ...n)$ 表达S（x). 由S（x)在区间$[x_j, x_{j+1}]$, 故 $S''(x)$ 为线性函数，表示为

$$S''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x_j}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j} \tag{5}$$

首先我们计算在中间节点 $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$中的参数M_j：

为确定 $M_j (j = 0, 1, ...n)$ 的值把 S"(x) 两次积分有 S(x),

$$S(x) = \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3}{6h_j} + \frac{M_j(x-x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}(y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j} \tag{6}$$

再求导，得到 S'(x),

$$S''(x) = -M_j \frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j} + M_{j+1}\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j; \tag{7}$$

因此得到, 在 $[x_j, x_{j+1}]$,

$$S'(x_j+0) = \frac{-h_j}{3}M_j - \frac{h_j}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} \tag{8}$$

$$S'(x_j-0) = \frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1} - \frac{h_j}{6}M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \tag{9}$$

由导函数连续性 (3.1)：
$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$, 有

$$u_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j, j=1,2,...,n-1, \tag{10}$$

其中，
$u_j=\frac{h_{j-1}}{/}h_{j-1}+h_j, \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}$,
$d_j=6\frac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{h_{j+1}+h_j}=6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}].j=1,2,...,n-1$
我们因此从(10)得到n-1 个方程。之后，我们从边界条件来求出M_0和M_1:

对于第三种界条件，由 $S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$, 有
$M_0=M_n$,
利用 (8), (9) 和边界条件(3)来推：

$-\frac{h_0}{3}M_0-\frac{h_0}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_0}=\frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}+\frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}+\frac{h_{n-1}}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$

$\frac{h_0+h_{n-1}}{3}M_n+\frac{h_0}{6}M_1+\frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}=\frac{y_1-y_0}{h_0}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$

当中，均差 $f[x_0,x_1]=\frac{y_1-y_0}{h_0}, f[x_{n-1},x_n]=\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$

把上式除于$\frac{h_0+h_{n-1}}{6}$, 有
$\frac{h_0}{h_0+h_{n-1}}M_1+\frac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}}M_{n-1}+2M_n=6\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{n-1}],x_n}{h_0+h_{n-1}}$
因此，我们得到了 n+1个方程。

4 高斯消除方程推导

我们从这方程组得到矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & u_1 \\ u_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & u_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ddots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{11}
$$

当中称系数矩阵为"**三弯形“ 矩阵**。我们发现系数矩阵是一种稀疏矩阵，但它不是三对角矩阵, 他是一个循环三对角线性方程组的矩阵。考虑到时间复杂度的问题，我们知道直接利用高斯消元法， LU 分解过程的时间复杂度为$O(n^3)$, 并不如理想。从稀疏矩阵的特性，我们可以用较为时间复杂度较低的算法。我们讨论 **sherman morrison**公式来求解。

4.1 Sherman Morrision 公式

假设我们我们得到方矩阵A 的 inverse A^-1, 而我们想改变一个元素a_{ij}, 或一列，一行等，我们发现是有办法来计算对A^-1 的改变，而不用重新计算$A-1$

$$
A->(A+u\times v) \tag{12}
$$

对于一些向量 u, v. 如果 u 为单元向量e_i，则 12 把 v 的元素加到 i 的行。
如果 v 为单元向量e_j，则 12 把 u 的元素加到 j 的列。
如果 u 和 v 分别都为e_i, e_j 的比例，那A只有一个元素a_ij被加。
Sherman-Morrison 公式给出 $(A+uxv)^-1$的表达式：

$$
(A+uxv)^{-1} = (1+A^{-1}\cdot u\times v)^{-1}\cdot A^{-1} \tag{13}
$$

$= (1 - A^{-1}\cdot u\times v + A^{-1}\cdot u\times v\cdot A^{-1}\cdot u\times v - \dots)\cdots A^{-1}$
$= A^-1 - A^{-1}\cdot u\times v\cdot A^-1(1-\lambda+\lambda^2-\dots)$
$= A^-1 - \frac{(A^{-1}\cdot)\times(v\cdot A^{-1})}{1+\lambda}$

当中,

$$
\lambda = v\cdot A^{-1}\cdot u \tag{14}
$$

要利用4.1：已给出 A^{-1}, u, v, 我们需要

$$z = A^{-1} \cdot uw = (A^{-1})^T \cdot v\lambda = v \cdot z \tag{15}$$

从而得到新的 inverse:

$$A^{-1}- > A^{-1} - \frac{z \times w}{1+\lambda} \tag{16}$$

如果想改变一个元素，由 $u \times v$, 要解

$$(A + u \times v) \cdot x = b \tag{17}$$

利用

$$A \cdot y = bA \cdot z = u \tag{18}$$

解向量 y 和 z. 得到

$$x = y - [\frac{v \cdot y}{1 + (v \cdot z)}]z \tag{19}$$

和 (4.1) 相乘得到 b。

4.2 利用 Sherman-Morrision 方程解出三次样条插值函数

我们观察到在11 中的”三弯形”矩阵A 为循环三对角矩阵。透过**Sherman-Morrision** 方程, 可把”三弯形“矩阵A 化为三对角矩阵, 然后使用”追赶

法“来求解，推导如下：对于11 求解矩阵方程（17), 利用矢量

$$u = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_n\gamma \end{bmatrix} \tag{20}$$

假设 γ 为任意数，因此”三弯形”矩阵A 化为三对角矩阵 A', 系数都为相同，除了只有· 两个系数被改变：

$$A'_{11} = 2 - \gamma, \quad A'_{nn} = 2 - \frac{\lambda_n u_n}{\gamma} \tag{21}$$

则(??)变为

$$\begin{bmatrix} 2-\gamma & \lambda_1 & & & \\ u_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & u_n & 2 - \frac{\lambda_n u_n}{\gamma} \end{bmatrix} \tag{22}$$

把A'代A, 利用”追赶法“解(18), 由(19)就能求解（??）

4.3 方法的时间复杂度

利用Sherman-Morrison方程把（??）的系数矩阵变成三对角矩阵时间复杂度为 $O(n^2)$, 而”追赶法“也是$O(n^2)$。因此整个算法的时间复杂度为$O(n^2)$。

5 实验内容

我们利用了C++ (spline.cpp) 编写求解(??的程序，让后利用Haskell (splineAndGraph.hs) 写出三次样条函数，并用来绘出曲线的图形。
并利用Matlab (lagrangetest.m)来写Lagrange插值函数的程序，绘出曲线，并利用数据来判断各插值函数的特性。

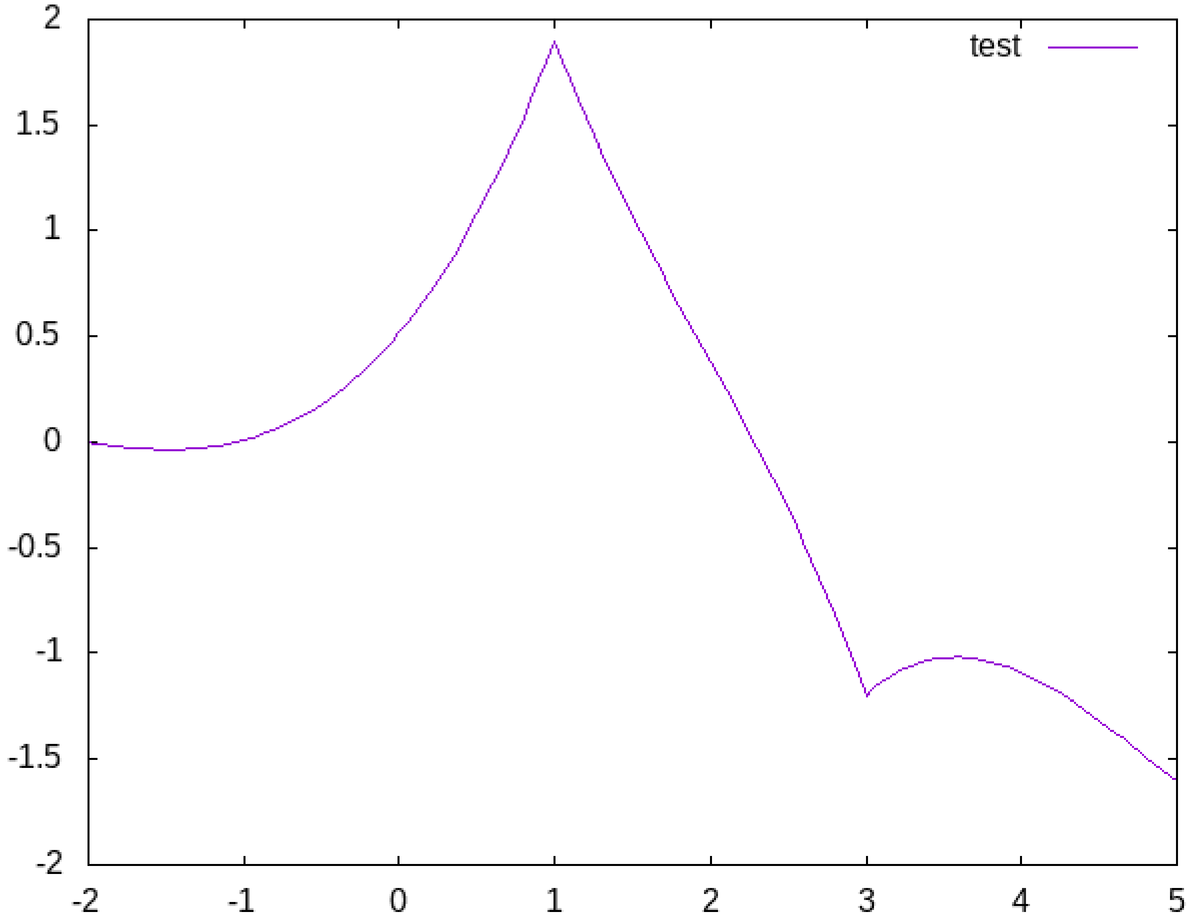

图 1: (a). 三次样条插值

6 实验结果

我们先利用数据为 $x = [-2, 1, 3, 5], y = [0, 1.9, -1.2, -1.6]$ 得到解 M = [0.125882, 1.24706, -1.3602, 0.125882]， Fig (a) (1) (2) 分别显示三次样条函数和Lagrange插值得到得图形。

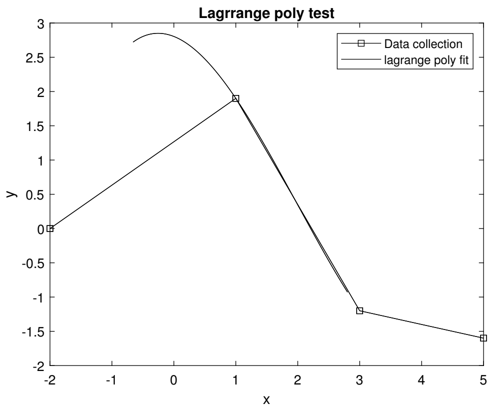

图 2: (b). Lagrange插值

7 Conclusion

从Figure 1(a), 1(b), 估断当节点越多， **spline**函数会更有效，但是由**Runge**现象知道这并不一定。
In Conclusion, 我们在这理研究了周期边界的三次样条插值化的有效求解算法，并用实验更Lagrange插值函数比较。