Investigación Operativa

Antonio Manuel Jiménez Murillo

May 2025

Tema 1: Introducción a la Programación Lineal

Tema 2: El Método del Simplex

Consideramos el PPL

Minimizar $Z(x) = c^t x$

$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \\ b & \geq & 0 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|c}
\bar{x} & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{1m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_l & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & a_{l,m+1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} & b_l \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
\hline
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_k & \cdots & \bar{c}_n & Z(\bar{x})
\end{array}
$$

Las variables cuyos vectores forman la matriz identidad se denominan 'variables básicas'. Es posible que dos o más variables tengan asociados un mismo vector de la matriz identidad. En ese caso, hay que seleccionar sólo una de ellas, de modo que el número de variables básicas es siempre m. Al resto de variables las llamaremos 'variables no básicas'.

La tabla es una manera esquemática de escribir el sistema de ecuaciones, con la adición de la fila indicadora. Esa fila indicadora está relacionada con una solución muy particular del sistema de ecuaciones, aquella que obtenemos fácilmente por estar el sistema escrito en forma canónica: $\bar{x} = (b_1, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0)$

Concretamente, si la fila indicadora es no negativa, dicha solución es óptima. En caso contrario, el valor de esa solución puede ser mejorado. A continuación vemos cómo.

Se trata de obtener un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, también escrito en forma canónica, de modo que la posición de la matriz identidad cambie. Eso se puede hacer de muchas maneras, pero aquí sólo cambiaremos una posición. Para ello, seleccionamos una variable no básica y, mediante operaciones elementales con las ecuaciones (filas) del sistema (de la matriz), obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones en forma canónica en el que la variable seleccionada pasa a ser variable básica, esto es, su vector asociado será un vector de la matriz identidad. Ese vector se elige al seleccionar una de las variables básicas actuales. Es decir, grosso modo, lo que hacemos es intercambiar las características de dos variables, una 'básica' y otro 'no básica'. Sin embargo, ¡ojo! porque no siempre vamos a poder hacer esto:

Selección de la variable no básica

Supongamos $\bar{c}_k \leq 0$, entonces puede que $\exists\ x_l$: el cambio (l,k) nos lleva a un sistema de ecuaciones equivalente

Sea $\bar{x}_k$ la variable no básica tal que: $\bar{c}_k = \min\{\bar{c}_j : x_j \text{ es no básica}\}$

Si el vector columna de esta variable está formado por elementos no positivos, el problema no tiene solución, como ya se ha probado anteriormente. Concretamente, la función objetivo se puede hacer tan pequeña como se quiera. Si se da esta situación, evidentemente no obtendremos un nuevo sistema de ecuaciones equivalente. Si no se da esta situación, pasamos a seleccionar una variable básica:

Selección de la variable básica

Sea $\bar{x}_l$ la variable básica tal que: $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\}$

Tenemos que seleccionar el x_i básica tal que $\frac{b_i}{a_{ik}}$ con $i = \{1, \cdots, l, \cdots, n\}$ sea el menor de todos los posibles resultados.

Para esto tenemos que tener en cuenta que $b_l \geq 0$ y $a_{lk} > 0$

Operaciones para obtener el nuevo sistema

La ℓ-ésima ecuación del nuevo sistema, F'_l, será: $F'_l = \frac{1}{a_{lk}} F_l$

Para las demás filas nos queda: $F'_i = F_i - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} F_l \quad \text{si } i \neq l$

Así, si $i \neq l$ y $j \neq k$, se tiene que: $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} a_{lj}$

Ahora veremos como queda la tabla después de realizar el cambio de la variable básica x_j por la variable no básica x_k

$\hat{x}$	x_1	$\cdots$	x_{l-1}	x_l	x_{l+1}	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_1	1	0	$\cdots$	$-a_{1k}/a_{lk}$	0	$\cdots$	0	a'_{1m+1}	$\cdots$	0	$\cdots$	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{k-1}	$\vdots$	$\ddots$	1	$-a_{k-1,k}/a_{lk}$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		0		$\vdots$	$\vdots$
x_k	$\vdots$		0	$1/a_{lk}$	0		$\vdots$	$a_{l,m+1}/a_{lk}$	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{ln}/a_{lk}	b_l/a_{lk}
x_{k+1}	$\vdots$		$\vdots$	$-a_{k+1,k}/a_{lk}$	1	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	0	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	0	$-a_{mk}/a_{lk}$	$\cdots$	0	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	0	$\cdots$	$\cdots$	$\hat{\bar{c}}_l$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\hat{\bar{c}}_{m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\hat{\bar{c}}_n$	$Z(\hat{x})$

Proposición 1

Si $C_i \geq 0$ para todo i, $\Longrightarrow X$ es una solución óptima.

dem:

Para demostrar la proposición 1 solo basta con probar que si x es una solución factible cualquiera, entonces:

$$Z(x) = Z(\bar{x}) + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c_j} x_j$$

Proposición 2

Si existe x_k tal que:

$$\bar{C_k} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\} > 0,$$

entonces, el cambio (e, k) nos lleva a otro vértice x' nuevo mejor que $\bar{x}$.

Proposición 2 bis

Si existe X_k tal que:

$$C_k < 0 \quad \text{y} \quad \frac{b_k}{a_{k+1}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\} = 0,$$

entonces, el cambio (e, k) nos lleva a un vértice x^1 que coincide con X, es decir, el vector de la derecha no cambia en esta ocasión.

dem:

Para demostrar la proposición 2 solo basta con probar que el cambio (l, k) nos lleva a otro vértice x' tal que:

$$Z(x') = Z(\bar{x}) + \frac{b_l}{a_{lk}} \bar{c_k}$$

Proposición 3

Si existe X_k tal que:

$$C_k < 0 \quad \text{y} \quad a_{i,k} \leq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, m,$$

entonces el problema es no acotado ($Z_{\min} = -\infty$).

$$z(x) - z(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} c_i b_i =$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \left(x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right) x_j$$

En definitiva

$$z(x) - z(\bar{x}) = \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c}_j x_j, \quad \text{siendo } \bar{c}_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

¿Qué ocurre con Z(x) en un cambio?

Tenemos el cuadro y sea $\bar{x}$ una solución factible básica de este:

$\bar{x}$	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_1	1	0	$\cdots$	$\cdots$	0	a_{1m+1}	$\cdots$	a_{1k}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	0	$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_l	$\vdots$	$\ddots$	1	$\ddots$	$\vdots$	$a_{l,m+1}$	$\cdots$	a_{lk}	$\cdots$	a_{ln}	b_l
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\ddots$	0	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	$\cdots$	0	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mk}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\bar{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\bar{c}_k$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	$Z(\bar{x})$

tenemos que se cumplen todos los requisitos para hacer el cambio (l,k), el cuadro nos quedaría:

$\hat{x}$	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_1			$-a_{1k}/a_{lk}$			a'_{1m+1}		0		a'_{1n}	b'_1
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k			$1/a_{lk}$			$a_{l,m+1}/a_{lk}$		1		a_{ln}/a_{lk}	b_l/a_{lk}
$\vdots$			$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m			$-a_{mk}/a_{lk}$			$a_{m,m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{mn}	b_m
			$\hat{c}_l$			$\hat{c}_{m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\hat{c}_n$	$Z(\hat{x})$

Una solución factible básica será: $\hat{x} = (\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_{l-1}, 0, \hat{b}_{l+1}, \ldots, \hat{b}_m, 0, \ldots, 0, \hat{b}_l, 0, \ldots, 0)$
$\hat{x}$ se obtiene a partir de $\overline{x}$ tras el cambio (l,k). Calculamos $\bar{x}$:

$$\hat{x}_j = 0 \quad \text{si} \quad j = \{l, m+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$$

$$\hat{x}_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} b_l, \quad i = \{1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m\} \quad \hat{x}_k = \frac{b_e}{a_{lk}}$$

$$Z(\hat{x}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} C_i b_i + c_k b_e = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} C_i \left(b_i - \frac{a_{ik}}{a_{ek}} b_e \right) + c_k \frac{b_e}{a_{ek}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} C_i \left(b_i - \frac{a_{ik}}{a_{ek}} b_e \right) + c_k \frac{b_e}{a_{ek}} = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \frac{b_e}{a_{ek}} \left(c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} \right) = z(\bar{x}) + \frac{b_e}{a_{ek}} \overline{c_k}$$

Ejemplo 2 el metodo el simplex:

bskjadlln

¿Qué ocurre con la fila indicadora tras un cambio?

Caso no acotado, $Z(x) = -\infty$

Proposición

Proposición

Proposición

Soluciones alternativas óptimas

Convergencia del Algoritmo

Proposición

dem

Tema 3: Teoría de la Dualidad

Definición de problema dual

Considere el problema de programación lineal (P), se dice que el problema de programación lineal (D) es su dual cuando tiene la forma :

$$(P)\begin{cases}\text{Min } Z(x)=c^tx\\ \text{s.a } Ax\geq b\\ x\geq 0\\ {\scriptstyle A\in\mathcal{M}_{m\times n}}\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\text{Max } \phi(\pi)=b^t\pi\\ \text{s.a } A^t\pi\leq c\\ \pi\geq 0\end{cases}$$

- La variable x_j está asociada a la restricción $\pi^tA_j\leq c_j$ de forma que: $a_{1j}\pi_1+a_{2j}\pi_2+\ldots+a_{mj}\pi_m\leq c_j$
- Si llamamos u_j a la variable de holgura asociada a esa restricción,entonces diremos que x_j y u_j están relacionadas.
- La variable π_i está asociada a la restricción $A_ix\geq b_i$ de forma que: $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{im}x_m\geq b_i$
- Si llamamos s_i a la variable de holgura asociada a esa restricción,entonces diremos que π_i y s_i están relacionadas.

Ejemplo

Teorema Débil de la Dualidad

Consideremos el par de problemas duales P-D cualesquiera

$$(P)\begin{cases}\text{Min } Z(x)=c^tx\\ \text{s.a } Ax\geq b\\ x\geq 0\end{cases}\qquad (D)\begin{cases}\text{Max } \phi(\pi)=\pi^tb\\ \text{s.a } \pi^tA\leq c^t\\ \pi\geq 0\end{cases}$$

Si x es factible en (P) y π es factible en (D) entonces $\Longrightarrow Z(x)\geq\Phi(\pi)$

---

dem:

Sean x y π soluciones factibles primal - dual respectivamente, entonces se cumplen las restricciones de sus poliedros: $Ax\geq b$ con $x\geq 0$ y $\pi^tA\leq c^t$ con $\pi\geq 0$

Tomemos $Ax\geq b$ y multipliquemosla por π^t, nos queda: $\pi^tAx\geq\pi^tb$
Tomemos $\pi^tA\leq c^t$ y multipliquemosla por x, nos queda: $\pi^tAx\leq c^tx$

Entonces: $Z(x)=c^tx\geq\pi^tAx\geq\pi^tb=\Phi(\pi)$ e.q.d

Proposición: Duales de problemas equivalentes son equivalentes

dibujito

Supongamos (P) factible y sea x' una solución factible básica y

Teorema Fuerte de la Dualidad

Consideremos el par de problemas duales P-D cualesquiera

$$(P)\begin{cases}\text{Min } Z(x) = c^t x\\ \text{s.a } Ax \geq b\\ x \geq 0\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}\text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b\\ \text{s.a } \pi^t A \leq c^t\\ \pi \geq 0\end{cases}$$

Si uno de ellos es óptimo $\Longrightarrow$ el otro también lo es y además $\max\limits_{\pi \in P_D} \Phi(\pi) = \min\limits_{xinP} Z(x)$

---

dem:

vamos a suponer que el $Rg(A) = m$ y que el primal es óptimo. Supongamos también que tenemos un cuadro óptimo, en caso contrario podríamos llegar a uno aplicando el método del simplex y las reglas de R.Bland.

Una solución óptima del cuadro es $x' = (b'_1, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)$

La fila indicadora la podemos escribir de la siguiente manera:

$$(\overline{c}')^t = c^t - c_B^t B^{-1} A' \tag{1}$$

siendo B^{-1} la submatriz de A que cumple: $\begin{cases} A' = B^{-1}A \\ b' = B^{-1}b \end{cases}$ y siendo $c_B^t = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$ el vector de costes de la matriz base B

Como es un cuadro óptimo entonces $\overline{c}' \geq 0$

Ahora solo hace falta tomar $\pi_B^t = c_B^t B^{-1}$, multiplicamos esta expresión por A y nos quedaría

$$\pi_B^t A = c_B^t B^{-1} A$$

como $\overline{c}' \geq 0$ esto implica que según(1): $c^t \geq c_B^t B^{-1} A = \pi_B^t A$
es decir, π_B es una solución dual factible. Además

$$\Phi(\pi_B) = \pi_B^t b = c_B^t B^{-1} b = c_B^t b' = Z(x') = (Z_{optimo})$$

Supongamos que tenemos una solución factible dual cualquiera (π) Aplicamos el Teorema débil de la Dualidad a las dos soluciones factibles (x', π)

$Z(x') \geq \Phi(\pi)$ y como $Z(x') = \Phi(\pi_B)$ tenemos que $\Phi(\pi_B) \geq \Phi(\pi)$, es decir π_B es óptimo dual y $\max\limits_{\pi \in P_D} \Phi(\pi) = \Phi(\pi_B) = Z(x') = \min\limits_{xinP} Z(x)$

Corolario: en un par de problemas P-D, si ambos son factibles $\Longrightarrow$ ambos son óptimos y $Z_opt = \Phi_opt$

aaaaaaa

Teorema de Holgura

Consideremos el par de problemas duales P-D cualesquiera

$$(P)\begin{cases}\text{Min } Z(x) = c^t x\\ \text{s.a } Ax \geq b\\ x \geq 0\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}\text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b\\ \text{s.a } \pi^t A \leq c^t\\ \pi \geq 0\end{cases}$$

Denotemos por $s_i = A_i x - b_i$ con $i = \{1, \cdots, m\}$ a las variables de holgura del primal y por $\mu_j = c_j - \pi^t A_j$ con $j = \{1, \cdots, n\}$a las variables de holgura del dual.

Consideremos dos soluciones $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ factibles primal-dual respectivamente:

$\begin{cases}\bar{s}_i = A_i\bar{x} - b_i \quad \text{con} \quad i = \{1, \cdots, m\}\\ \bar{\mu}_j = c_j - \bar{\pi}^t A_j \quad \text{con} \quad j = \{1, \cdots, n\}\end{cases}$ Serán los valores de las variables de holgura en $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$

El teorema dice que $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ son óptimas $\Longleftrightarrow \begin{cases}\bar{s}_i \cdot \bar{\pi}_i = 0 \quad \text{con} \quad i = \{1, \cdots, m\}\\ \bar{\mu}_j \cdot \bar{x}_j = 0 \quad \text{con} \quad j = \{1, \cdots, n\}\end{cases}$

---

dem:

Por ser factibles $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$, usando el mismo argumento que en el teorema débil, se tiene que:

$$c^t\bar{x} \underset{(1)}{\geq} \bar{\pi}^t A\bar{x} \underset{(2)}{\geq} \bar{\pi}^t b$$

- A partir de (1): $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(c_j - \bar{\pi}^t A_j)\bar{x}_j \geq 0$
- A partir de (2): $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\bar{\pi}_i(A_i\bar{x} - b_i) \geq 0$

<u>dem:</u> "$\Longrightarrow$"

Supongamos en primer lugar que $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ son óptimas. Usando el teorema fuerte de dualidad $Z(\bar{x}) = \Phi(\bar{\pi})$ entonces (1) y (2) se convierten en igualdades

- A partir de (1): $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(c_j - \bar{\pi}^t A_j)\bar{x}_j = 0$ como todos los sumandos son no negativos $\Longrightarrow$ $\underbrace{(c_j - \bar{\pi}^t A_j)}_{\bar{\mu}_j}\bar{x}_j = 0$ con $j = \{1, \cdots, n\} \Longrightarrow \bar{\mu}_j\bar{x}_j = 0$
- A partir de (2): $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\bar{\pi}_i(A_i\bar{x} - b_i) = 0$ como todos los sumandos son no negativos $\Longrightarrow$ $\bar{\pi}_i\underbrace{(A_i\bar{x} - b_i)}_{\bar{s}_i} = 0$ con $i = \{1, \cdots, m\} \Longrightarrow \bar{\pi}_i\bar{s}_i = 0$

<u>dem:</u> "$\Longleftarrow$"

Si $\begin{cases}\bar{s}_i \cdot \bar{\pi}_i = 0 \quad \text{con} \quad i = \{1, \cdots, m\}\\ \bar{\mu}_j \cdot \bar{x}_j = 0 \quad \text{con} \quad j = \{1, \cdots, n\}\end{cases}$ Entonces (1) y (2) son igualdades y por tanto $Z(\bar{x}) = \Phi(\bar{\pi})$

Por el teorema débil de la dualidad $Z(x') \geq \Phi(\pi)$ para cualquier $\pi \in P$ y como $Z(\bar{x}) = \Phi(\bar{\pi})$ tenemos que $\Phi(\bar{\pi}) \geq \Phi(\pi)$, es decir $\bar{\pi}$ es óptimo dual $\Longrightarrow$ ambos son óptimos.

Corolario: En un par de problemas P-D si uno es factible y el otro infactible $\Longrightarrow$ el primero es factible no acotado

dem: Al lector

Lema de Farkas

Uno y solo uno de los dos sistemas de ecuaciones es factible

$$(I)\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (II)\begin{cases} \pi^t A \leq 0^t \\ \pi^t b > 0 \end{cases}$$

dem:

Tenemos que probar que (I) es factible $\Longleftrightarrow$ (II) infactible

- Veamos primero (I) factible $\Longrightarrow$ (II) infactible

Consideremos el par de problemas primal-dual:

$$(P)\begin{cases} \text{Min } Z(x) = 0^t x \\ \text{s.a } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D)\begin{cases} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a } \pi^t A \leq 0^t \end{cases}$$

Por hipótesis (P) es factible y puesto que la $Z(x)$ es cte entonces (P) es óptimo. Por el teorema fuerte de la dualidad (D) también lo es y $\Phi_o pt = Z_o pt = 0$

Si tomamos un $\pi \in \mathbb{R}^m$ que esté dentro del poliedro, entonces cumple que $\pi^t A \leq 0^t$ y por tanto $\pi^t b > 0$.

Pero $\Phi(\pi) = \pi^t b = 0$ por lo que (D) es infactible

- Veamos ahora (I) factible $\Longleftarrow$ (II) infactible

El dual es factible pues $0^t A \leq 0^t$ (esto es, el 0 es una solución factible del dual), también tenemos que (II) es infactible, como sabemos que se cumple $\pi^t A \leq 0^t$, la restricción de (II) que NO se cumple será $\pi^t b > 0$.

Ahora como sabemos que $\begin{cases} \Phi(\pi) = \pi^t b \leq 0 \\ \pi^t A \leq 0^t \end{cases}$, al ser $\Phi(\pi)$ de tipo maximizar entonces el $\max\limits_{\pi \in P_D} \Phi(\pi) = 0$ y por lo tanto el dual es óptimo y utilizando el teorema fuerte de la dualidad, el primal es óptimo $\Longrightarrow$ (I) es factible, concretamente óptimo. e.q.d

Tema 4: Geometría del Simplex