

Práctica 1

PROGRAMACIÓN LINEAL



Miguel Jimeno Casas - 100495932 - 100495932@alumnos.uc3m.es
Ismael Plaza Martín – 100499716 - 100499716@alumnos.uc3m.es

Grupo 82 - Ingeniería informática

ÍNDICE

Introducción de la práctica: (3)

Descripción de los modelos:

- 0. Introducción.....(3)
- 1. Descripción de la formalización de la Parte 1.....(3/4/5)
- 2. Descripción de la formalización de la Parte 2.....(5/6)
- 3. Descripción de la formalización de la UNIÓN de las dos partes.....(6/7)

Análisis de resultados:

- 0. Introducción.....(7)
- 1. Análisis de los objetivos finales.....(7/8)
- 2. Análisis del cumplimiento de las restricciones y resultados de las variables.(8/9/10)
- 3. Restricciones más limitantes.....(10/11)
- 4. Examen del modelo mediante cambios en el mismo.....(11)
- 5. Suma de dificultad en la parte 2.....(11)
- 6. Ventajas y desventajas de las herramientas.....(12)

Conclusiones finales a cerca de la práctica:

INTRODUCCIÓN DE LA PRÁCTICA

Esta práctica se centra en la aplicación de técnicas de programación lineal para resolver problemas de optimización en el ámbito del transporte aéreo. Durante el desarrollo de esta práctica, se han tratado dos problemas principales desde diferentes enfoques y herramientas.

En primer lugar, se crea un modelo básico utilizando una hoja de cálculo, que ayuda a determinar el número óptimo de billetes por tipo de tarifa para maximizar los beneficios de una aerolínea, teniendo en cuenta algunas restricciones como la capacidad de carga, asientos en cada vuelo...

En la segunda parte, se utiliza GLPK, un lenguaje de modelado avanzado, para asignar slots de aterrizaje en diferentes pistas y momentos de tiempo, con el objetivo de minimizar los costes de retraso en la llegada de los aviones.

DESCRIPCIÓN DE LOS MODELOS

Introducción:

En este apartado se van a describir los dos modelos en los que nos hemos basado a la hora de resolver los dos problemas siguientes. Dentro de la modelización, vamos a distinguir varios apartados:

-Conjuntos: Que nos servirán para definir los elementos principales con los que trabajará el modelo, que serán indexados tanto en las variables y las restricciones.

-Variables: Valores que el modelo necesita calcular para llegar a la solución óptima.

-Datos: Valores constantes que definen límites y características sobre el contexto del problema.

-Función objetivo: Expresa el valor que queremos o maximizar o minimizar, se combinan las variables y los datos para obtener los valores óptimos.

-Restricciones: Son las limitaciones o condiciones que deben cumplirse para que la solución sea válida.

Formalización de la primera parte

- Conjuntos:
 - {AVIONES}: Conjunto formado por los aviones de los que disponga la compañía (i)
 - {TARIFAS}: Conjunto formado por las diferentes tipos de billete de la compañía (l)
- Variables:
 - **Unidades de billete_{il}**: Unidades de tipos de billetes ofertados por la compañía para cada avión

○ Datos:

- **Asientos_i**: Numero de asientos disponibles en cada avión
- **Capacidad_i**: Capacidad de almacenaje de cada avión (kg)
- **Precio_l**: Precio que cuesta el billete de cada tarifa
- **Equipaje_l**: Números de kg permitidos según el billetes
- **Billetes_minimo_Leisure**: Número mínimo de billetes vendidos por avión de la tarifa Leisure
- **Billetes_minimo_Business**: Número mínimo de billetes vendidos por avión de la tarifa Business
- **Porcentaje_minimo_Estandar**: Porcentaje mínimo de billetes de la tarifa Estandar por la compañía

○ Función Objetivo:

$$\text{MAX } Z = \sum_i \sum_l \text{Precio}_l * \text{Unidadesdebillete}_{il}$$

○ Restricciones:

1. No se pueden vender más billetes que el número de asientos disponibles en el avión

$$\sum_j \text{Unidadesdebillete}_{il} \leq \text{Asientos}_i \forall i$$

2. No se puede superar en ningún caso la capacidad máxima del avión

$$\sum_l \text{Unidadesdebillete}_{il} * \text{Equipaje}_l \leq \text{Capacidad}_i \forall i$$

3. Para cada avión se deben de ofertar como mínimo 20 billetes 'Leisure Plus'

$$\text{Unidadesdebillete}_{il} \geq \text{BilletesminimoLeisure} \forall i, l = 'Leisure'$$

4. Para cada avión se deben de ofertar como mínimo 10 billetes 'Business Plus'

$$\text{Unidadesdebillete}_{il} \geq \text{BilletesminimoBusiness} \forall i, l = 'Business'$$

5. El numero de billetes estándar total debe de ser al menos un 60% de todos los billetes que se ofertan

$$\sum_i \sum_{l=\text{Estandar}} \text{Unidadesdebillete}_{il} \geq \text{Porcentajeminimoestandar} * \sum_i \sum_l \text{Unidadesdebillete}_{il}$$

Formalización de la segunda parte

○ Conjuntos:

- {AVIONES}: Conjunto formado por los aviones de los que disponga la compañía (i)
- {PISTAS}: Conjunto formado por el numero de pistas de las que disponga el aeropuerto en cuestión (j)
- {SLOTS}: Conjunto formado por espacios de tiempo de 15 minutos en los cuales se puede o no aterrizar (k)

○ Variables:

- **Disponible_{ijk}**: Variable binaria que representa si el espacio de tiempo k está disponible en la pista j para la disponibilidad del avión i (0/1)

$$Disponible_{ijk} = Disponible_{jk} * Disponible_i$$

Disponible_{ijk} = 0 en el caso de que la pista j esté ocupada en ese espacio del tiempo k o/y no sea posible el aterrizaje del avión i

Disponible_{ijk} = 1 en el caso de que la pista j esté no ocupada en ese espacio de tiempo k y sea posible el aterrizaje del avión

○ Datos:

- **Coste_por_minuto_i**: Coste de cada avión i por minutos en el aire
- **Hora_programada_i**: Hora de aterrizaje esperada del avión i
- **Hora_límite_i**: Hora máxima de aterrizaje del avión i
- **Hora_de_llegada_k**: Tiempo de inicio del slot en el que aterriza
- **Disponible_{jk}**: Espacio de tiempo disponible de aterrizaje k de la pista j (Binario)

Disponible_k = 0 en el caso de que la pista j NO esté disponible en ese espacio del tiempo k

Disponible_{jk} = 1 en el caso de que la pista j esté disponible en ese espacio de tiempo k

○ Función objetivo:

$$\text{MIN } Z = \sum_{i=1}^5 \sum_j^4 \sum_k coste_i * (Horadellegada_k - Horaprogramada_i) * (disponible_{ijk})$$

○ Restricciones:

1. Todos los aviones tienen que tener asignado un slot de tiempo para efectuar el aterrizaje.

$$\sum_j \sum_k^4 Disponible_{ijk} = 1 \forall i$$

2. Un slot de tiempo puede estar asignado como máximo a un avión.

$$\sum_i Disponible_{ijk} \leq 1 \forall j, k$$

3. Un slot que se asigna a un avión debe de ser un slot libre.

$$Disponible_{ijk} \leq Disponible_{jk} \forall i, j, k$$

4. El inicio del slot de aterrizaje debe de ser igual o posterior a la hora de llegada del avión

$$Disponible_{ijk} = 0 \text{ si } Horaprogramada_i > Horadellegada_k \forall i, j, k$$

5. El inicio del slot de aterrizaje debe de ser igual o anterior a la hora límite de aterrizaje del avión

$$Disponible_{ijk} = 0 \text{ si } Horalimite_i < Horadellegada_k \forall i, j, k$$

6. Por cuestión de seguridad, no se pueden asignar dos slots consecutivos en la misma pista

$$Disponible_{ijk} + Disponible_{ijk+1} \leq 1 \forall i, j, k$$

Formalización final (UNIÓN)

Este problema se trata del conjunto de los otros dos modelos, por lo que la formalización será la unión de las formalizaciones anteriormente especificadas, con un único cambio:

○ FUNCIÓN OBJETIVO:

MAX Z =

$$\sum_i \sum_l Precio_l * Unidadesdebillete_{il} - \sum_{i=1}^5 \sum_j \sum_k^4 coste_i * (Horadellegada_k - Horaprogramada_i) * (disponible_{ijk})$$

Ya que al buscar maximizar las ganancias, el resultado que vamos a obtener será el máximo del primer modelo, menos el mínimo del segundo.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Introducción:

En este apartado se van a analizar todos los resultados obtenidos, describiendo la solución obtenida y comprobando que se lleven a acabo todas las restricciones que propone el problema.

Analizaremos cuales son las restricciones que mas limitan el problema

A parte se llevarán a cabo un examen del modelo en el que se modificarán datos y se añadirán/eliminarán variables para ver como afecta a la resolución del problema. También consideraremos posibles retrasos en vuelos, explicando cómo incorporar esta variable en el modelo, y recalculando la asignación en caso de retraso en un avión específico. Por último discutiremos las ventajas y las desventajas de las herramientas utilizadas.

Análisis de los objetivos finales

- **Beneficio Primera Parte:** En esta sección, se ha obtenido un beneficio total de **26190 €**. Este resultado proviene de la optimización en la asignación de billetes en distintos tipos de tarifas para cada avión, maximizando los ingresos de la aerolínea dentro de las restricciones de asientos, capacidad de carga, y distribución mínima de tarifas.
- **Coste Segunda Parte:** En la segunda fase del modelo, se buscó minimizar el costo asociado a los retrasos en la asignación de slots de aterrizaje para los aviones. El costo mínimo logrado es de **4500 €**, derivado del tiempo de espera adicional antes del aterrizaje que incurre en gasto adicional de combustible y posibles penalizaciones por retraso.
- **Beneficio del Modelo General:** Este beneficio representa el valor neto del modelo y se calcula restando el costo de la segunda parte al beneficio de la primera, resultando en **21690€**. Este valor es el objetivo final de la práctica, reflejando el rendimiento económico después de optimizar tanto los ingresos de los vuelos como los costos de operación asociados al aterrizaje.

Análisis del cumplimiento de las restricciones y resumen de resultado de las variables

Restricciones requeridas en la Parte 1

- **Restricción de Asientos:**
La capacidad de asientos está totalmente utilizada en cada avión, lo que indica que se ha alcanzado el límite máximo de pasajeros permitido, maximizando el uso de espacio:

AV1: 90 asientos
AV2: 120 asientos
AV3: 200 asientos
AV4: 150 asientos
AV5: 190 asientos
- **Restricción de Capacidad de Equipaje:**
Todos los aviones respetan el límite máximo de carga en kg. En casi todos los casos, la capacidad de equipaje se usa casi por completo, lo que maximiza el aprovechamiento sin exceder las restricciones:

AV1: 1698 kg de 1700 kg
AV2: 2700 kg de 2700 kg
AV3: 1295 kg de 1300 kg
AV4: 1700 kg de 1700 kg
AV5: 1997 kg de 2000 kg

- **Restricción de Billetes Mínimos para la Tarifa Leisure:**

Cada avión cumple con la cantidad mínima de billetes Leisure exigidos, alcanzando o superando el mínimo establecido:

AV1: 21 billetes (mínimo 20)
AV2: 27 billetes (mínimo 20)
AV3: 33 billetes (mínimo 20)
AV4: 20 billetes (mínimo 20)
AV5: 52 billetes (mínimo 20)

- **Restricción de Billetes Mínimos para la Tarifa Business:**

Cada avión cumple con el mínimo de billetes Business exigidos, superando en todos los casos los límites establecidos:

AV1: 31 billetes (mínimo 10)
AV2: 53 billetes (mínimo 10)
AV3: 12 billetes (mínimo 10)
AV4: 30 billetes (mínimo 10)
AV5: 21 billetes (mínimo 10)

- **Restricción de Proporción de Billetes Estándar:**

La proporción de billetes estándar cumple con el requisito de ser al menos el 60% del total de billetes ofertados:

Total billetes estándar: 450

Total billetes ofertados: 750

Porcentaje de billetes estándar: $450/750=60\%$

Resumen de la distribución de Billetes por Avión y Tarifa

AV1: 38 estándar, 21 leisure, 31 business
AV2: 40 estándar, 27 leisure, 53 business
AV3: 155 estándar, 33 leisure, 12 business
AV4: 100 estándar, 20 leisure, 30 business
AV5: 117 estándar, 52 leisure, 21 business

Restricciones requeridas en la Parte 2

- **Restricción de un Slot por Avión:**

Cada avión ha sido asignado a un solo slot de aterrizaje, cumpliendo con la condición de no duplicar asignaciones de slots para un mismo avión.

AV1: 1 slot
AV2: 1 slot
AV3: 1 slot
AV4: 1 slot
AV5: 1 slot

- **Restricción de un Avión por Slot:**

Solo un avión ocupa cada slot asignado, evitando superposiciones en los slots de aterrizaje:

Pista 1[5]: AV4
Pista 2[4]: AV3
Pista 3[2]: AV1
Pista 4[1]: AV2
Pista 4[6]: AV5

- **Restricción de Slot Libre:**

Todos los slots ocupados por los aviones estaban disponibles (libres) en el horario asignado, cumpliendo así con la condición de asignar únicamente slots no ocupados:

AV1: 9:15 (Pista 3)
AV2: 9:00 (Pista 4)
AV3: 9:45 (Pista 2)
AV4: 10:00 (Pista 1)
AV5: 10:15 (Pista 4)

- **Restricciones de Tiempo Máximo y Mínimo:**

Cada avión ha sido asignado a un slot dentro de su intervalo de aterrizaje permitido, respetando así los límites de tiempo:

AV1: entre 9:10 y 10:15
AV2: entre 8:55 y 9:30
AV3: entre 9:40 y 10:00
AV4: entre 9:55 y 10:15
AV5: entre 10:10 y 10:30

- **Restricción de Ningún Slot Consecutivo:**

No se asignaron slots consecutivos a aviones en la misma pista, asegurando así una separación adecuada por razones de seguridad. En los casos de aviones compartiendo pista (AV2 y AV5 en Pista 4), los slots tienen una separación de 5 slots, cumpliendo con la restricción.

Resumen de la distribución del aterrizaje en pista y slot

AV1: Slot asignado a las **9:15** en **Pista 3**
AV2: Slot asignado a las **9:00** en **Pista 4**

AV3: Slot asignado a las **9:45** en **Pista 2**

AV4: Slot asignado a las **10:00** en **Pista 1**

AV5: Slot asignado a las **10:15** en **Pista 4**

Restricciones más limitantes:

1er Modelo:

Se puede apreciar que es una buena optimización al ver que se utilizan todos los asientos disponibles de todos los aviones, solo se venden los billetes necesarios del tipo 'Estándar', que tiene todo el sentido ya que son los billetes que menos beneficio dan. Y a parte, casi son requeridos todos los kg en maletas disponibles por avión.

Todo esto nos lleva a la conclusión de que la restricción que más limita las ganancias con la venta de billetes de un avión, es: **Restricción_Billetes_Estandar** ya que nos obliga a que más del 60% de los billetes, tengan el peor beneficio posible (beneficio de los billetes Estandar).

2do Modelo:

El sistema ha conseguido minimizar los costes hasta 4500 siguiendo todas las restricciones que se pedían. Es un buen resultado dado que los tiempos de aterrizaje y los tiempos esperados son lo más cercanos posibles. Lo que nos lleva a la conclusión de que en el caso propuesto en concreto, la razón por la que no se puede mejorar más el resultado, es que los tiempos de aterrizaje no pueden coincidir con los tiempos de hora estimada de llegada, siendo la hora mínima de llegada de los aviones la restricción más limitante.

Examen del modelo mediante cambios en el mismo

Modificaciones y su Impacto:

Para poder modificar el problema, se podrían añadir/eliminar tanto aviones, pistas y slots.

Un ejemplo de modificación sería:

Añadir un AV6 y una PISTA5, significa que habría:

- **Mayor Flexibilidad en la Asignación de Slots:** Con una pista adicional, hay más slots disponibles para aterrizajes, lo que puede reducir la congestión y permitir una mejor distribución de los aviones en los slots disponibles.
- **Reducción de Costes por Espera:** Al tener más pistas disponibles, es menos probable que los aviones tengan que esperar para aterrizar, lo que puede reducir los costes asociados con el tiempo de espera en el aire.
- **Incremento en la Capacidad de Aterrizaje:** Con un avión adicional y una pista adicional, el aeropuerto puede manejar un mayor volumen de tráfico aéreo, lo que puede aumentar la capacidad operativa del aeropuerto.
- **Optimización de Horarios:** La adición de más recursos (avión y pista) permite una mayor flexibilidad en la programación de los aterrizajes, lo que puede ayudar a optimizar los horarios y minimizar los retrasos.
- **Complejidad en la Planificación:** Aunque hay más recursos disponibles, la planificación se vuelve más compleja ya que hay más variables y restricciones a considerar para asegurar que todos los aviones aterricen en los slots adecuados sin conflictos.

Suma de dificultad en la parte 2

Habría que crear una variable aparte para el desfase del tiempo de llegada, esta variable se añadiría a las restricciones del tiempo mínimo y máximo que tienen los aviones para aterrizar, sumándose el retraso que lleva el avión a estas dos restricciones.

Podría darse el caso de que el avión llevase demasiado retraso y que su tiempo de aterrizaje máximo superase los horarios establecidos en las celdas de aterrizaje. Para que esto no ocurra se establece un límite en el que el tiempo de aterrizaje máximo no puede superar el tiempo de la celda más tardía.

También podría darse el caso de que el tiempo mínimo de aterrizaje superase los horarios establecidos en las celdas. En este caso, el problema no tendría solución.

Al hacer el cambio en el AV1 la hora de llegada serán las 9:30 en vez de las 9:10 y la hora máxima serán las 10:30. Hay más de una solución para este cambio, una de ellas es la siguiente:

AV1 = Pista3[3]

AV2 = Pista3[1]

AV3 = Pista2[4]

AV4 = Pista1[5]

AV5 = Pista4[6]

Ventajas y desventajas de las herramientas

-LibreOffice:

Ventajas: Es bastante intuitivo y similar al excel una herramienta que la mayoría de gente reconoce. El solver es bastante sencillo de utilizar y en casos como el nuestro no produce ningún fallo.

Desventajas: La única desventaja que podría sacarle en base a lo que hemos hecho; es que tiene un límite de restricciones y de variables, lo que significa que para modelos más grandes y complejos no serviría.

-MathProg:

Ventajas: Tiene la capacidad de aguantar modelos mas grandes y complejos que el libreoffice, ya que por lo que hemos podido ver no tiene un límite en cuanto a restricciones ni variables. Además, el output te da los resultados de forma detallada y es fácil de entender.

Desventajas: Necesitas conocer su lenguaje que aunque es algo intuitivo, no es tan fácil de usar como el libreoffice.

4. Conclusiones finales

Dentro de las conclusiones finales sobre esta práctica, queríamos destacar varios puntos:

- En primer lugar recalcar que la parte que más complicada nos ha parecido y a la que más tiempo hemos dedicado, sin lugar a duda es la formalización de ambas partes, en concreto la segunda. Esta última tenía la dificultad añadida de las variables binarias, con las cuales nos tuvimos que familiarizar antes de recurrir a ellas.

- Utilizando el MathProg nos dieron varios problemas; entre ellos en el apartado de declaración de los datos, no sabíamos como tratar los tiempos, por ello decidimos descartar las horas y tratar únicamente con minutos, para que las operaciones se pudieran realizar sin problemas. También tuvimos problemas al declarar la matriz de Disponibilidad, ya que no dábamos con la gramática correcta para el MathProg.
- Una de las cosas que nos produjo confusión durante la realización de este trabajo es que mientras en el Calc (que realizamos antes que el MathProg), nos daba una combinación de billetes, al realizar el MathProg correspondiente de este apartado, nos daba otra distinta. Al comprobar que se cumplían todas las restricciones y que el beneficio obtenido con la suma de una combinación, era el mismo que con la suma de la otra; llegamos a la conclusión que las restricciones y los datos propuestos para este problema daban libertad en cierto grado, para que esto sucediera.

Para concluir, la parte que más nos costó fue la de familiarizarnos con el entorno descrito anteriormente, y claramente la de formalizar el segundo apartado. Gracias a esta, hemos podido profundizar en las metodologías y herramientas aplicadas a la resolución de problemas de optimización, a través de MathProg y Calc.