

UNIVERSITÄT REGENSBURG

F-PRÄKTIKUM

Holographie



Korbinian Baumgartner und Jonas Schambeck

8. August 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Vorbereitung	4
2.1 Fourierreihen und -transformation	4
2.2 Beugung	7
2.3 Frequenzfilterung	8
2.4 Holographie	9
3 Versuchsdurchführung	12
3.1 Fourieroptik und Ortsfrequenzfilterung	12
3.2 Fresnelholographie	16
3.3 Weißlichtholografie	17
4 Fazit	18

1 Einleitung

Einleitung Dennis Gabor entwickelte 1948 die Grundlagen der heutigen Holografie. Er schlug vor, kohärente Wellenfelder unter Ausnutzung von Interferenzerscheinungen amplituden- und phasengetreu zu registrieren und später durch Beugung zurückzugewinnen. Zur optimalen Umsetzung dieser Idee fehlte jedoch die ideale Lichtquelle, der Laser. Anfang der 60er Jahre, kurz nach dessen Entdeckung, erlebte die bis dahin etwas in Vergessenheit geratene Technik der Holografie einen enormen Aufschwung. Heute zählt die Holografie wohl zu einem der interessantesten Zweige der modernen Optik. Mit ihrer Hilfe können verschiedenartige Messverfahren in eleganter Weise durchgeführt werden, die ohne Holografie unmöglich wären.

2 Vorbereitung

2.1 Fourierreihen und -transformation

Die Fourier-Analysis findet gerade in der Optik häufig Anwendung. Im Kontext der Holografie stellen vor allem Fourierreihen und die Fouriertransformation nützliche Hilfsmittel dar, weshalb diese zur Vorbereitung näher betrachtet werden sollen.

Fourierreihenentwicklung

Die Fourierreihe bietet die Möglichkeit einen großen Teil der periodischen Funktionen durch eine Linearkombination von Sinus- und Kosinustermen verschiedener Frequenzen und Amplituden zu entwickeln.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t) \quad \text{mit } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

T sei hierbei die Periodendauer der Funktion. Die *Fourierkoeffizienten* a_k und b_k werden hier beschrieben durch

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt & a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(\omega_k t) dt \quad (k \neq 0) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(\omega_k t) dt \end{aligned}$$

Dies soll nun an zwei wichtigen Funktionen demonstriert werden.

Rechtecksfunktion

Die Rechtecksfunktion ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < t < 1 \end{cases}$$

mit periodischer Fortsetzung.

Um nun die Fourierreihendarstellung nutzen zu können, müssen zuerst die Koeffizienten errechnet werden. Für $T = 2$ ergibt sich:

- da die Rechtecksfunktion eine ungerade Funktion ist gilt $a_k = 0$

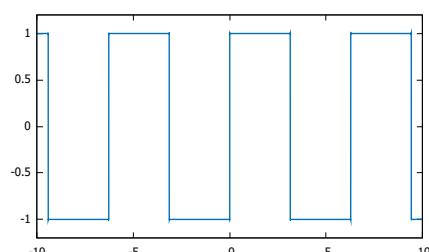


Abbildung 2.1: Rechtecksfunktion

- für die b_k gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(t) \sin(\pi k t) dt = \int_{-1}^0 -\sin(\omega_k t) dt + \int_0^1 \sin(\omega_k t) dt \\ &= \frac{1}{\pi k} \left[\left(1 - \cos\left(-\frac{\pi k}{2}\right) \right) + \left(-\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + 1 \right) \right] = \frac{2}{\pi k} (1 + \cos(\pi k)) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Fourierreihenentwicklung der Rechtecksfunktion

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi k} (1 + \cos(\pi k)) \sin(\pi k t)$$

In Abbildung 2.1 ist die Reihenentwicklung bis zum 100000. Glied geplottet, während

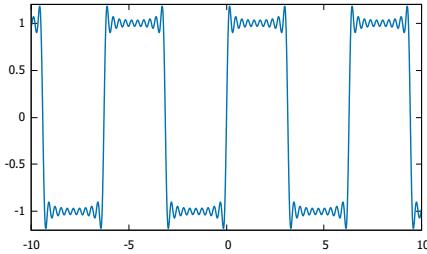


Abbildung 2.2: Die Rechtecksfunktion bis zum 10. Summanden entwickelt

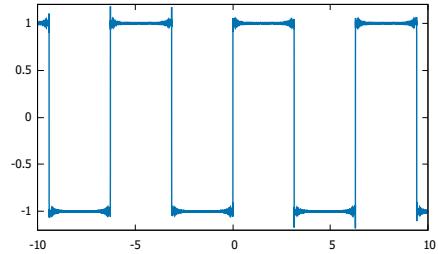


Abbildung 2.3: Die Rechtecksfunktion bis zum 1000. Summanden entwickelt

in Abbildung 2.2 und 2.3 bis zur 10. und 1000. Ordnung geplottet wurde.

Dreiecksfunktion

Die Dreiecksfunktion ist gegeben durch

$$g(t) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{für } -1 < t < -0,5 \\ 2x & \text{für } -0,5 < t < 0,5 \\ 2(x+1) & \text{für } 0,5 < t < 1 \end{cases}$$

auch hier mit periodischer Fortsetzung. Wiederum müssen die Koeffizienten berechnet werden:

- es handelt sich um eine ungerade Funktion, also $a_k = 0$

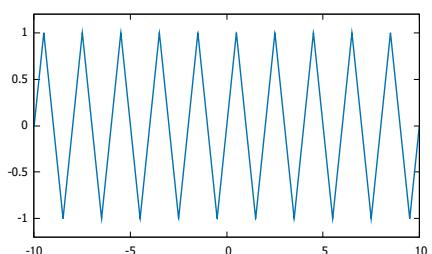


Abbildung 2.4: Rechtecksfunktion

- die b_k ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^{-1/2} -2(x+1) \sin(\omega_k t) dt + \int_{-1/2}^{1/2} 2x \sin(\omega_k t) dt + \int_{1/2}^1 2(1-x) \sin(\omega_k t) dt \\ &= \dots = \frac{4}{\pi^2 k^2} \left(2 \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin(\pi k) \right) \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ergibt sich also zu:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \left(2 \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin(\pi k) \right) \cdot \sin(\pi k t)$$

Für Abbildung 2.4 wurde nur bis zum 1000. Summenglied geplottet. Man sieht also,

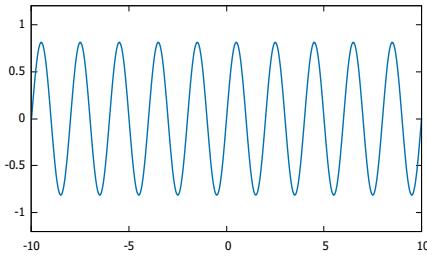


Abbildung 2.5: Die Dreiecksfunktion bis zum 1. Summanden entwickelt

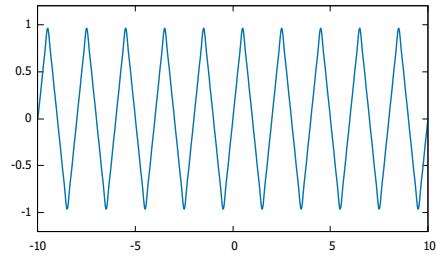


Abbildung 2.6: Die Dreiecksfunktion bis zum 10. Summanden entwickelt

dass diese Funktion auch mit weniger Rechenaufwand gut genähert werden kann. Bei sehr kleinen Ordnungen ist lediglich die Spitze, wie in Abbildung 2.6 und vor allem in 2.5 zu sehen, noch sehr rundlich.

Fouriertransformation

Die Fouriertransformation stellt den Übergang der diskreten Fourierreihe zum kontinuierlichen Integral dar. Diese erlaubt weiter die Darstellung nicht-periodischer Funktionen. Für alle integrierbaren Funktionen ist sie definiert als

$$\begin{aligned} F(f)(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-ikx} dx && \text{Hintransformation} \\ f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} F(f)(k) \cdot e^{-ikx} dk && \text{Rücktransformation} \end{aligned}$$

Durch die Fouriertransformation lässt sich eine Funktion über eine ihr zugehörige andere Variable darstellen. Beispiele hierfür sind Ort x und Wellenzahl k , oder Zeit t und Frequenz ω .

2.2 Beugung

In der Holografie natürlich ein weiteres Thema ist die Beugung, insbesondere der Zusammenhang mit der Fouriertransformation. *Beugung* und *Diffraktion* beschreibt die Ablenkung beliebiger Wellen an einem Hindernis.

Das Beugungsintegral

Man betrachte an einer Öffnung σ , die an der Stelle $z=0$ in der x-y-Ebene steht, eine Feldamplitude der Form

$$E_s(x, y) = E_0(x, y) \cdot e^{i\phi(x, y)}$$

Jedes Stück der Fläche strahlt nach dem Huygen'schen Prinzip nun Kugelwellen ab, die an einem Punkt $P(x', y')$ einen infinitesimalen Beitrag

$$dE_p = C \cdot \frac{E_s d\sigma}{r} e^{ikr}$$

zur Feldamplitude beitragen. $C = i \cdot \frac{\cos(\Theta)}{\lambda}$ ist hierbei ein Vorfaktor. Integration über die Öffnung ergibt nun das *Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungsintegral*

$$E_p = \int \int C \cdot E_s \frac{e^{ikr}}{r} dx dy$$

Fresnel- und Fraunhofer Näherung im Fernfeld

Zur Vereinfachung dieses Integrals können nun verschiedene Näherungen gemacht werden.

Der Abstand zwischen beiden Schirmen sei nun sehr groß im Vergleich zur Ausdehnung der Öffnung. Durch diese Annahme ist eine Taylorentwicklung des Abstands des Ursprungs der Kugelwelle und des Beobachtungspunktes \vec{r} sinnvoll:

$$r = \sqrt{z_0^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx z_0 \cdot \left(1 + \frac{(x - x')^2}{2 z_0^2} + \frac{(y - y')^2}{2 z_0^2} + \dots \right)$$

Die quadratischen Terme des Abstands im Nenner des Beugungsintegrals können hierbei, je nach Phase, vernachlässigt werden. Das Beugungsintegral ergibt sich in der sog. *Fresnel-Fernfeldnäherung* zu

$$E(x', y', z_0) = i \cdot \frac{e^{ikz_0}}{\lambda z_0} = \int \int E_s(x, y) \cdot \exp\left(\frac{-ik}{2 z_0} ((x - x')^2 + (y - y')^2)\right) dx dy$$

Sind die Abmessungen der beugenden Öffnung nun sehr klein im Vergleich zum Schirmabstand z_0 , so kann man zusätzlich die quadratischen Terme x^2, y^2 in der Phase des Beugungsintegrals vernachlässigen

$$r \approx z_0 \left(1 - \frac{xx'}{z_0^2} - \frac{yy'}{z_0^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2 z_0^2} \right)$$

Somit ergibt sich für das Beugungsintegral in der *Frauenhofer-Fernfeldnäherung*

$$E(x', y', z_0) = A(x', y', z_0) \cdot \int \int E_s(x, y) \cdot \exp\left(\frac{ik}{z_0}(xx' + yy')\right) dx dy$$

Zusammenhang mit der Fouriertransformation

Die Feldverteilung an der Blendenöffnung kann, über die einfallende Feldamplitude $E_e(x, y)$ moduliert, durch die Transmissionsfunktion der Blende $\tau(x, y)$ beschreiben

$$E_s(x, y) = E_e(x, y) \cdot \tau(x, y)$$

Wird nun das Beugungsintegral in der Frauenhofernäherung betrachtet, so entspricht die Feldverteilung auf dem Schirm $E(x', y', z_0)$ der zweidimensionalen Fouriertransformierten der Feldverteilung $E_s(x, y)$ an der beugenden Öffnung. Dieser Befund wird im Verlaufe des Versuches im Rahmen der *Fourieroptik* benutzt, um die Bilder einiger Proben zu modulieren.

Bragg-Beugung

Die Bragg-Beugung beschreibt die Interferenz eines an einem dreidimensionalen Gitter gestreuten Lichtstrahls. Ein wichtiges Resultat ist hier der Zusammenhang zwischen Einfallswinkel und Wellenlänge des Strahls, die sog. *Bragg-Bedingung*.

$$2d \sin(\theta) = m \lambda$$

(Bild)

2.3 Frequenzfilterung

Mit der im vorherigen Abschnitt erwähnten *Fourieroptik*, können die *Raumfrequenzen* eines Bildes gefiltert werden. Die Raumfrequenzen sind durch

$$\nu_x = \frac{kx'}{z_0}, \quad \nu_y = \frac{ky'}{z_0}$$

definiert. Die Fouriertransformation in der Fernfeldnäherung transformiert die Welle zwischen $x \leftrightarrow \nu_x$ und $y \leftrightarrow \nu_y$. Bei der Raumfrequenzfilterung wird nun ein Teil dieser Frequenzen unterdrückt.

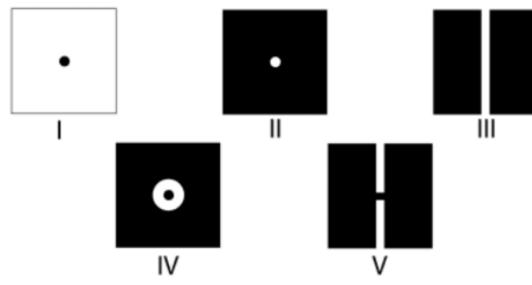


Abbildung 2.7: Verschiedene Arten von Raumfrequenzfilterdias *Quelle: Holographie Protokoll, Fischer, Schauer, 2012*

In obiger Abbildung sind einige Arten von Filtern zu sehen.

I Hochpass: Die Schwärzung in der Mitte des Dias führt zu einer Absorption der tiefen Raumfrequenzen.

II Tiefpass: Die Schwärzung des Außenbereiches führt zur alleinigen Transmission der tiefen Frequenzen

III Richtungsfilter: Hier wird nur eine bestimmte Richtung transmittiert.

IV Bandpass: Kombination aus Hoch- und Tiefpass

V Hochpass mit Richtungsfilter: Kombination aus I und III

2.4 Holographie

Ein Hologramm erlaubt, zusätzlich zur Intensitätsverteilung, auch die Speicherung der Phaseninformation der einfallenden Wellen. Im Gegensatz zum Foto werden so auch Informationen über die Entfernung der einzelnen Punkte im Raum erfasst.

Die Aufnahme eines Hologramms läuft folgendermaßen ab: Das Objekt wird mit einer kohärenten monochromatischen Lichtquelle beleuchtet. Die reflektierte Welle, genannt Objektwelle, wird anschließend auf dem Film mit der Referenzwelle überlagert. Das so entstehende Interferenzmuster enthält Phaseninformationen. Siehe dazu Abbildung 2.8. Im Rahmen dieses Versuches wird ein Transmissionhologramm, das Fresnel-Holografie, und ein Reflexionshologramm, das Weißlichthologramm, aufgenommen.

- **Transmissionshologramm:** Objekt- und Referenzwelle laufen von gleicher Seite auf den Film ein; bei Rekonstruktion läuft Referenzwelle durch den Film hindurch, sodass durch die Modulierung ebendieser die ursprüngliche Objektwelle entsteht
- **Reflexionshologramm:** Wellen laufen aus unterschiedlichen Richtungen auf Film ein; Hologramm kann später durch (Bragg-)Reflexion einer einlaufenden Welle aus Richtung der Referenzwelle sichtbar gemacht werden

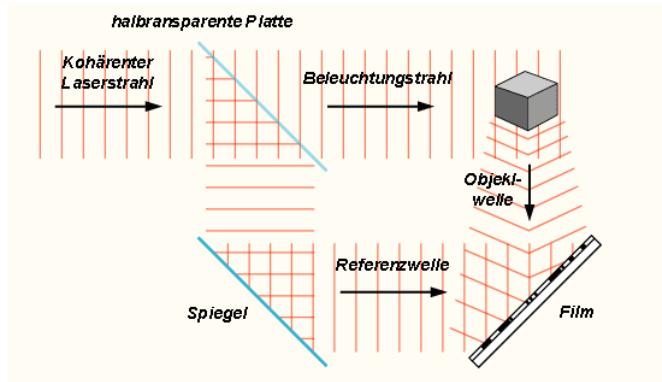


Abbildung 2.8: Ablauf einer holografischen Aufzeichnung

Denisjuk-Hologramm

Das Denisjuk-Hologramm ist ein Reflexionshologramm und lässt sich durch die Einstrahlung von weißem Licht rekonstruieren, weshalb es auch Weißlichthologramm genannt wird. Der Aufbau, in Abbildung 2.9 zu sehen, ist sehr einfach.

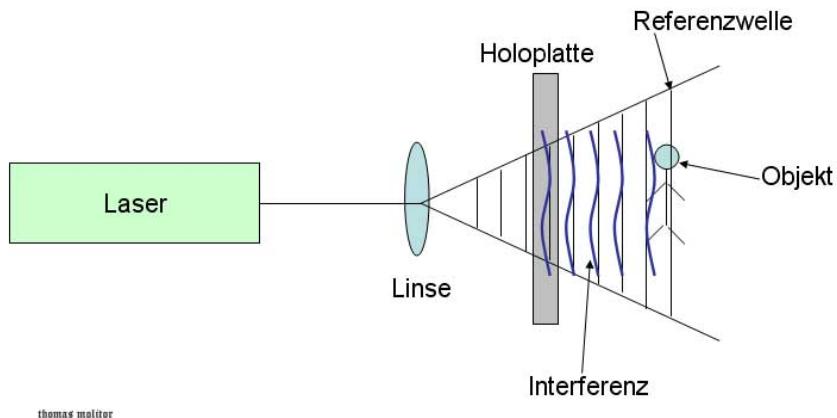


Abbildung 2.9: Aufnahme eines Denisjuk-Hologramms

Die Referenzwelle wird von hinten auf die Fotoplatte gestrahlt, während das Objekt vor der Fotoplatte steht. Die reflektierte Objektwelle interferiert mit der Referenzwelle. Die durch diese Interferenz hervorgerufenen lokalen Intensitätsverteilungen werden im Film durch unterschiedlich starke Schwärzung gespeichert.

Fresnel-Hologramm

Der Aufbau zur Aufnahme eines Fresnel-Hologramms ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Hier treffen die Objekt- und Referenzwelle von der gleichen Seite auf die Fotoplatte.

Zur Rekonstruktion ist es notwendig die Referenzwelle wieder auf den Film einzustrahlen, was das arbeiten mit Transmissionshologrammen umständlich macht.

3 Versuchsdurchführung

3.1 Fourieroptik und Ortsfrequenzfilterung

Wir bauen folgende Abbildung auf.

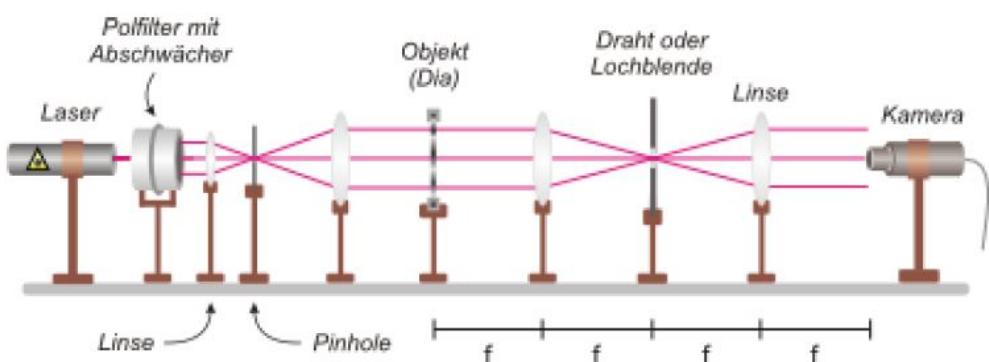


Abbildung 3.1: Aufbau zur Ortsfrequenzfilterung

Daran wollen wir die Effekte von verschiedenen Filtern auf verschiedene Objekte beobachten. Unsere Filter waren im Grunde genommen Dias, die an ausgewählten Stellen geschwärzt waren. Nachdem das Signal eine Fourierlinse passiert hat und folglich in seine Frequenzform gewandelt wurde, können mit diesen Filtern spezielle Frequenzen gefiltert werden. Ähnlich zur Elektrotechnik gibt es hier Hoch-, Tief- und Bandpass. Zusätzlich wurden diese noch mit Vertikalen oder Horizontalen Elementen zu Richtungsfiltern verbunden.

So filtert der Tiefpass alle Hohen Frequenzen, der Hochpass alle Tiefe Frequenzen, der Bandpass lässt mittlere Frequenzen passieren und die Richtungsfilter lassen senkrechte oder waagerechte Signalanteile durch. Dies soll mit ein paar aufgenommenen Bildern noch veranschaulicht werden.

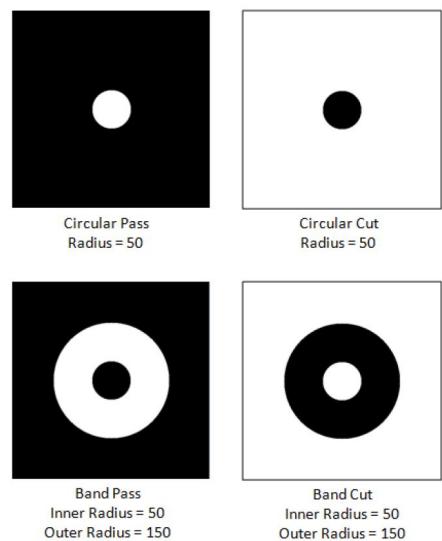


Abbildung 3.2: Filterdias

Gitter

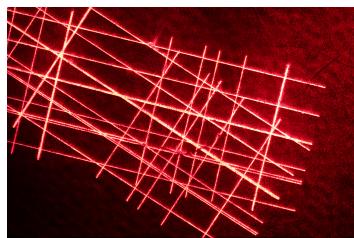


Abbildung 3.3: Ohne Filter

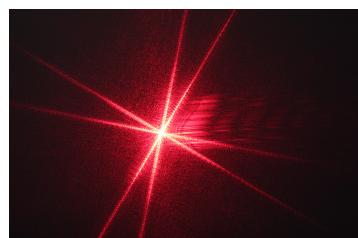


Abbildung 3.4: Fourier
transformati-
on

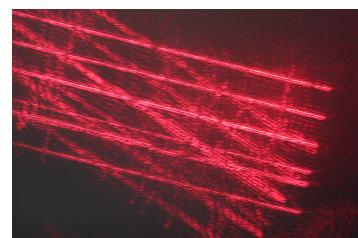


Abbildung 3.5: Vertikaler
Richtungsfil-
ter

Sehr schön zu sehen hier ist, wie alle Senkrechten Striche komplett herausgefiltert wurden. In der Fouriertransformierten kann man auch deutlich erkennen, dass das Signal etwas mit Linien zu tun hat. Die Winkel in der FT sind dieselben, wie die des Gitters.

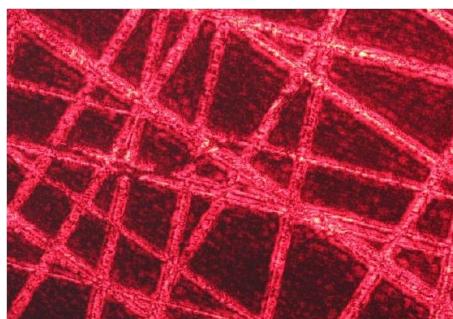


Abbildung 3.6: Tiefpass

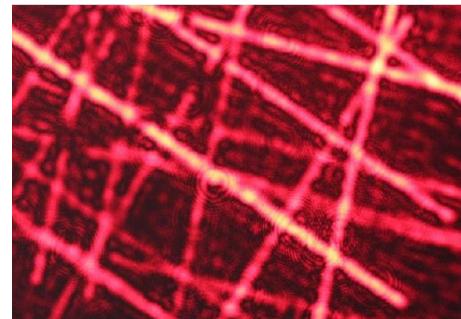


Abbildung 3.7: Hochpass

An diesen Bildern erkennt man auch schön, wie sich Hoch- und Tiefpass auf die Schärfe der Linien auswirken.

Ringe



Abbildung 3.8: Dia ohne Filter

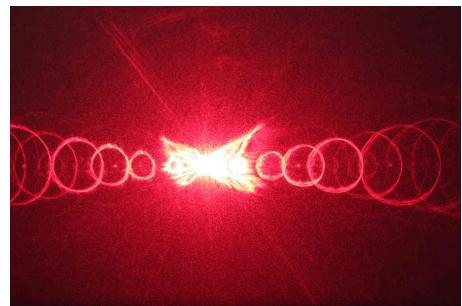


Abbildung 3.9: Fouriertransformation
des Kreises



Abbildung 3.10: Tiefpass



Abbildung 3.11: Hochpass



Abbildung 3.12: Bandpass

In der FT sieht man schön, wie jeder Ring einzeln mit seiner Größe aufgespalten wird. Beim Tiefpass schön zu sehen, dass er kaum Intensität herausnimmt, im vergleich zum Hochpass (siehe Rand Hell/Dunkel). Ebenso sieht man wieder einen Unterschied in der Schärfe der Ringe. Der Bandpass lässt nur Ringe einer bestimmten Größe hindurch, so sind in der Mitte Linien zu erkennen. Rechts und Links davon ist jedoch alles unscharf, also gefiltert.

Text

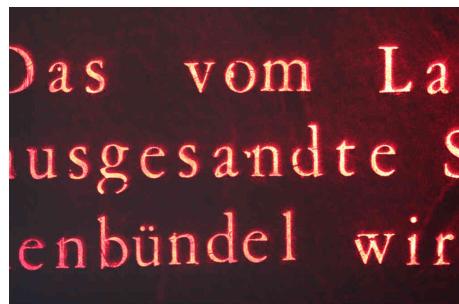


Abbildung 3.13: Text ohne Filterung

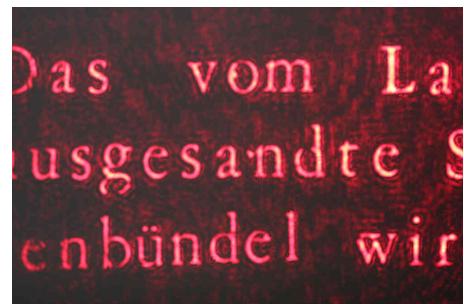


Abbildung 3.14: Text mit Hochpass

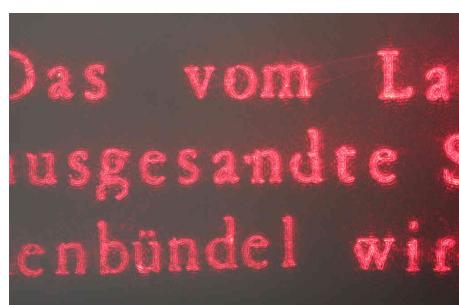


Abbildung 3.15: Text mit Tiefpass

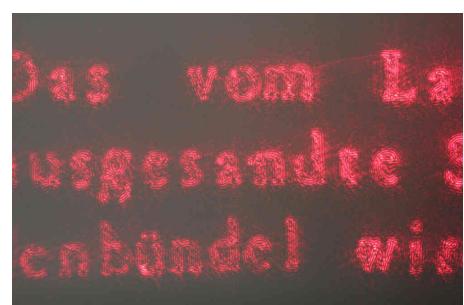


Abbildung 3.16: Text mit Hochpass

Hier nochmal zu sehen wie sich die Schärfe der Schrift mit den Filtern ändert. Der Tiefpass füllt die Schrift intensiv aus, hat aber keine klaren Grenzen. Der Hochpass macht scharfe Grenzen, jedoch nicht ganz ausgefüllte Buchstaben. Der Bandpass ist eine Mischung aus beidem.

Gitteranordnung

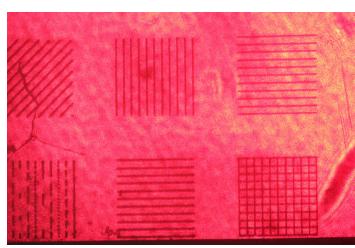


Abbildung 3.17: Ohne Filterung

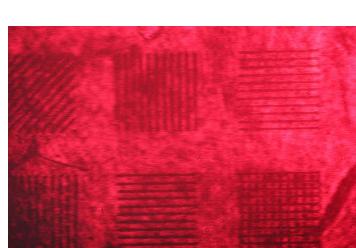


Abbildung 3.18: Hochpass



Abbildung 3.19: Vertikalfilter

Hier betrachten wir noch die Richtungsfilter etwas genauer. Der horizontale Richtungsfilter filtert die vertikalen Frequenzen und sorgt so für ein verschwimmen der horizontalen Linien. Der vertikale Richtungsfilter macht genau das Gegenteil und lässt die vertikalen Linien verschwimmen. Auf die schrägen Gitterlinien wirken beide Filter gleich.

3.2 Fresnelholographie

Der aus der Vorbereitung bekannte Aufbau, Abbildung 2.8, wird für das Fresnelhologramm aufgebaut. Als Objekt diente eine kleine Statue von Bach. Die Streckenlänge wurde auf unter 60 cm gehalten, um Intensitätsverlust zu vermeiden. Einer Grafik kann man dann die Dauer der Beleuchtung entnehmen, bei uns 115 Sekunden. Der Aufbau wurde so stabil wie möglich gemacht, um Unschärfe durch Erschütterungen zu vermeiden. Dazu hatten wir einen sehr schweren Tisch als Unterlage und eine schwarze Box zum überstülpen verwendet. Ebenso muss Objektwelle und Referenzwelle ca. gleiche Wegstrecke besitzen, um richtig interferieren zu können. Über einen Polarisator passten wir die Intensität der Referenzwelle der Objektwelle an, beide mussten in etwa gleiche Intensität haben. Nach der Belichtung wird der Film entwickelt und beobachtet, ob alles funktioniert hat. Auf unserem Film war lediglich zu erkennen, dass Bach es ins Hologramm geschafft hat, jedoch etwas schwach und somit nicht festzuhalten auf Kamera. Wir machten trotzdem noch ein Bild eines Musterbeispiels:



Abbildung 3.20: Muster des Fresnel-Hologramms

Hierfür gibt es zweimöglichkeiten ein Bild zu machen, dies hier ist das virtuelle Bild und besser erkennbar, als das Reelle Bild, welches auf einen Schirm abgebildet wird. Mit den Augen sind beide trotzdem noch wesentlich besser erkennbar, die Bilder sind ja

schließlich 3 Dimensional verankert. Unser Film hatte außerdem sehr viele Störflecken aus für uns nicht unbedingt einleuchtenden Gründen, dies führte dazu, dass es unmöglich war, von unserem Film ein gutes Foto zu machen.

3.3 Weißlichtholografie

Der Aufbau für das Weißlichthologramm ist etwas einfacher, der Laserstrahl wird lediglich aufgeweitet und direkt auf den Film geworfen. Siehe dazu den Aufbau in Abbildung 2.9. Auf dem Film befindet sich dann das abzubildende Objekt. Wir verwendeten die Musteraufbaute im Praktikumsraum, dies waren ein paar kleine Figuren aus Kunststoff. Auch hier muss etwas schief gelaufen sein. Wahrscheinlich lag das Problem am Entwickeln. Hier ist es also sinnvoller wieder ein Bild eines Musters zu zeigen. Der Film wird 4 Sekunden mit dem Laser beleuchtet und dann entwickelt, mehr Schritte sind nicht notwendig.



Abbildung 3.21: Unser Weißlichthologramm

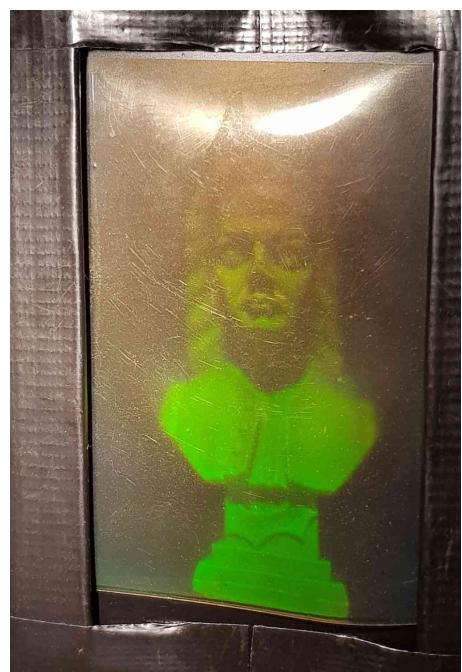


Abbildung 3.22: Referenzhologramm

4 Fazit

Fazit Auch wenn unsere Filme keine deutlichen Ergebnisse liefern, war der Versuch sehr interessant. Wir konnten lernen, wie man einen Film präpariert und entwickelt, wie sich mit einem Laser und Interferenz 3-Dimensionale Objekte speichern lassen. Man konnte in diesem Versuch auch sehr schön die Fouriertransformierten von Signalen sehen. Dies war sowohl in der Theorie als auch in der Praxis sehr aufschlussreich und voranbringend.

Literaturverzeichnis

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Holografie>, 08.08.2019
- [2] <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1076>, 08.08.2019