

UNIVERSITÄT REGENSBURG

F-PRAKTIKUM

Quanten-Hall-Effekt



Michael Rößner Jonas Schambeck

9. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Vorbereitung	3
2.1	Der klassische Hall-Effekt	3
2.2	Quanten-Hall-Effekt	4
2.2.1	Zweidimensionales Elektronengas	4
2.2.2	Theorie des Quanten-Hall-Effekt	5
3	Durchführung	7
4	Fazit	8

1 Einleitung

2 Vorbereitung

2.1 Der klassische Hall-Effekt

Der klassische Hall-Effekt beschreibt den Effekt eines Magnetfeldes auf eine Probe. So baut sich im Inneren der Probe ein elektrisches Feld auf, dessen resultierende elektrische Kraft im stationären Zustand gerade die Lorentz-Kraft kompensiert.

Zur Diskussion beginnt man mit der klassischen Bewegungsgleichung im Magnetfeld:

$$m^* \dot{\vec{v}} = -e \left(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B} \right) - m^* \frac{\vec{v}_d}{\tau}$$

Hierbei bezeichnet \vec{v}_d die Driftgeschwindigkeit, τ die mittlere Stoßzeit, m^* die effektive Masse, \vec{E} das elektrische Feld und \vec{B} das Magnetfeld. Der Term $-e\vec{E}$ beschreibt die durch das elektrische Gleichfeld auf die Elektronen wirkende konstante Kraft. Der letzte Teil $m \vec{v}_d / \tau$ berücksichtigt die hemmende Wirkung der Stöße. Da die Elektronen bei jedem Stoß ihre Bewegungsrichtung ändern, bleibt außerdem nur der durch die Driftgeschwindigkeit verursachte Beitrag $-e \left(\vec{v}_d \times \vec{B} \right)$ übrig.

Zur Vereinfachung betrachten wir ein in z -Richtung anliegendes Magnetfeld im stationären Fall, also $\dot{\vec{v}} = 0$. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{d,x} &= -\frac{e\tau}{m^*} (E_x + \vec{v}_{d,y} B), \\ \vec{v}_{d,y} &= -\frac{e\tau}{m^*} (E_y + \vec{v}_{d,x} B), \\ \vec{v}_{d,z} &= -\frac{e\tau}{m^*} E_z \end{aligned}$$

Mit der Beweglichkeit $\mu = e\tau/m$ und der Elektronendichte

$$j = -en\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = ne\mu \vec{E}$$

aus der für die elektrische Leitfähigkeit folgt

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{ne^2\tau}{m} = ne\mu$$

folgt für die Stromdichte im betrachteten Fall:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = -\frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

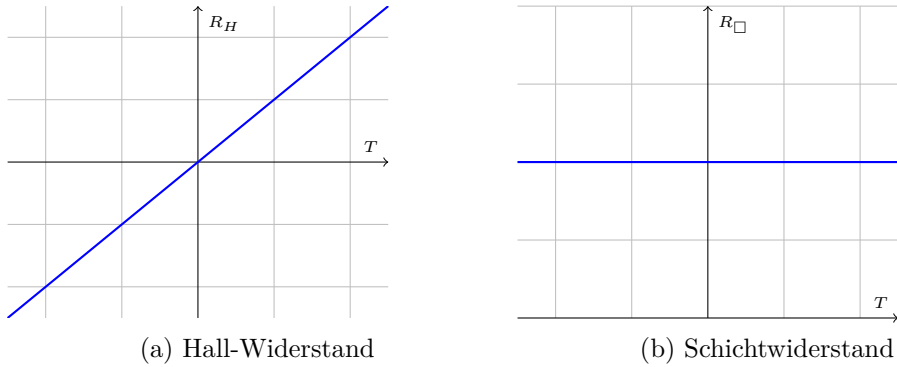


Abbildung 2.1: Widerstände beim klassischen Hall-Effekt

Hier bezeichnet $\omega_0 = ne^2\tau/m^*$ die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld und ω_c für die Zyklotronfrequenz.

Zur Vereinfachung betrachten wir einen flachen Stab mit rechteckigen Querschnitt. Der Strom fließt hierbei in x -Richtung. Mit dieser Geometrie tritt in z -Richtung kein elektrisches Feld auf. Somit vereinfacht sich obiger Ausdruck zu:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} \\ -\omega_{xy} & \omega_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Hier wurden die Leitwerte

$$\omega_{xx} = \frac{ne}{B} \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \quad \omega_{xy} = -\frac{ne}{B} \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

eingeführt.

Löst man das Gleichungssystem nach den elektrischen Feldern auf erhält man:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

mit den spezifischen Widerständen:

$$\rho_{xx} = \frac{B}{ne} \frac{1}{\omega_c \tau} = \frac{m^*}{ne^2 \tau}, \quad \rho_{xy} = \frac{B}{ne}$$

Hier wird ρ_{xx} als Längswiderstand R und ρ_{xy} als Hall-Widerstand R_H bezeichnet. In einem anisotropen Medium würden die Größen ρ_{yx} und ρ_{yy} auftreten. Für isotrope Medien, die hier betrachtet werden sollen, gilt jedoch: $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ und $\rho_{yx} = -\rho_{xy}$. Ein Plot der klassischen Widerstände ist in Abbildung 2.1 zu sehen.

2.2 Quanten-Hall-Effekt

2.2.1 Zweidimensionales Elektronengas

Die Untersuchung des Quanten-Hall-Effekts wird an einem sog. Zweidimensionales Elektronengas durchgeführt. Hierbei handelt es sich um ein freies Elektronengas, also die

Elektronen können sich näherungsweise frei in alle Raumrichtungen bewegen, dass in einer Raumrichtung durch einen schmalen Potentialtopf eingeschränkt wird. Dies führt zu einer Quantisierung der Gesamtenergien, die ein Elektron haben kann. Ist nun nur das unterste Niveau besetzt, so können sich die Teilchen in zwei Richtungen frei bewegen, während sie in die dritte eingesperrt sind. Somit ergibt sich der Begriff des Zweidimensionalen Elektronengases.

Zur theoretischen Betrachtung wählt man den Potentialtopf zur Vereinfachung in z -Richtung. Die Energie in z -Richtung ist somit quantisiert und darstellbar als $E_s (s = 0, 1, \dots)$. Für die Gesamtenergie eines Elektrons ergibt sich:

$$E(s, k_x, k_y) = E_s + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*}, \quad (s = 0, 1, \dots)$$

E_s ist unabhängig vom Wellenvektor \vec{k} , da in z -Richtung keine Bewegung stattfindet. Die beiden hinteren Terme beschreiben die kontinuierliche freie Bewegung in der $x-y$ -Ebene. m^* bezeichnet die effektive Masse.

2.2.2 Theorie des Quanten-Hall-Effekt

Misst man den Hall-Effekt nun an einem Zweidimensionalen Elektronengas bei wenigen Kelvin und Magnetfeldern im einstelligen Teslabereich, so weicht das Ergebnis vom klassischen Hall-Effekt ab. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

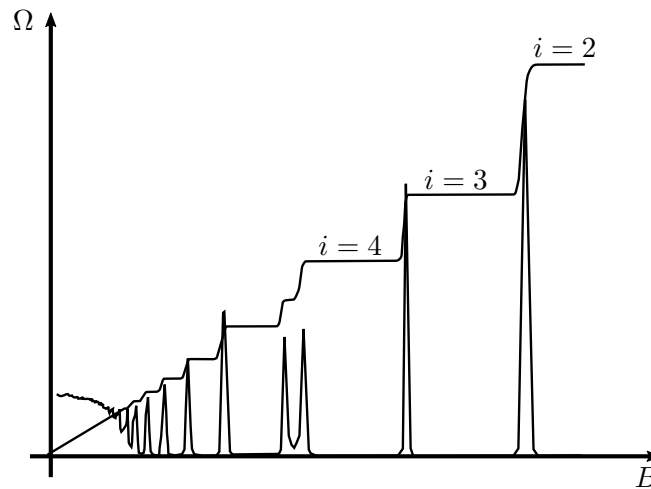


Abbildung 2.2: Hall und Schichtwiderstand beim Quanten-Hall-Effekt

Bei kleinem Magnetfeld deckt sich der Graph mit dem linearen Anstieg beim klassischen Hall-Effekt. Bei größeren Feldern bilden sich Plateaus bei bestimmten Widerstandswerten aus:

$$R_H = \frac{1}{\nu} \frac{\hbar}{e^2}, \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

Dies wird als Quanten-Hall-Effekt bezeichnet. Gleichzeitig oszilliert der Längswiderstand bei hohen Feldstärken. Die wirkliche ist jedoch sehr viel kleiner als der Hall-Widerstand. In Abbildung 2.2 wurden deshalb beide Werte normalisiert, um die Lesbarkeit zu verbessern. Die Minima der Oszillationen, bei denen der Längswiderstand verschwindet, liegt auf den Plateaus des Hall-Widerstands. Dieses Phänomen wird als Shubnikov-de-Haas-Oszillation bezeichnet.

Zur theoretischen Betrachtung stellt man folgende Schrödingergleichung auf:

$$\left(\frac{(i\hbar\nabla + e\vec{A}(x, y))^2}{2m^*} + U(y) \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

Hier wählt man $\vec{A} = (-By, 0, 0)$, sodass $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ in z -Richtung zeigt. Das Randpotential $U(y)$ schränkt die Elektronenbewegung auf die Ausdehnung der Probe ein. Weiter wird nun eine ausreichend große Probe angenommen, sodass $U(y)$ vernachlässigt werden kann:

$$\frac{1}{2m^*} \left((p_x + eBy)^2 + p_y^2 \right) \Psi(x, y) = E \Psi(x, y)$$

$p_x = -i\hbar\partial_x$ und $p_y = -i\hbar\partial_y$ bezeichnen die Impulsoperatoren in x - bzw. y -Richtung. Zur Lösung wird nun der Separationsansatz verwendet:

$$\Psi(x, y) = \phi(x)\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx)\chi(y)$$

Für $\chi(y)$ muss also gelten:

$$\frac{1}{2m^*} \left[(\hbar k + eBy)^2 + p_y^2 \right] \chi(y) = E \chi(y)$$

Diese Gleichung kann in die Schrödingergleichung eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators umgeformt werden. Hierzu wird die Frequenz $\omega_c = \frac{eB}{m^*}$ und die Zentrumsordinate $y_k = \frac{\hbar k}{eB}$ eingeführt. Durch einfaches Einsetzen ergibt sich:

$$\left[\frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 (y + y_k)^2 \right] \chi(y) = E \chi(y)$$

Die Frequenz des harmonischen Oszillators ist die eingeführte Frequenz ω_c . Die Koordinate y_k bezeichnet die Verschiebung des harmonischen Oszillators auf der y -Achse vom Nullpunkt.

3 Durchführung

4 Fazit