Universität Regensburg

F-Praktikum

Quanten-Hall-Effekt

Michael Rößner Jonas Schambeck

6. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Vorbereitung

2.1 Der klassische Hall-Effekt

Der klassische Hall-Effekt beschreibt den Effekt eines Magnetfeldes auf eine Probe. So baut sich im Inneren der Probe ein elektrisches Feld auf, dessen resultierende elektrische Kraft im stationären Zustand gerade die Lorentz-Kraft kompensiert.
Zur Diskussion beginnt man mit der klassischen Bewegungsgleichung im Magnetfeld:

$$m^* \dot{\vec{v}} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}_d \times \vec{B}\right) - m^* \frac{\vec{v}_d}{\tau}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{v}_d$ die Driftgeschwindigkeit, τ die mittlere Stoßzeit, m^* die effektive Masse, $\vec{E}$ das elektrische Feld und $\vec{B}$ das Magnetfeld. Der Term $-e\vec{E}$ beschreibt die durch das elektrische Gleichfeld auf die Elektronen wirkende konstante Kraft. Der letzte Teil $m\,\vec{v_d}/\tau$ berücksichtigt die hemmende Wirkung der Stöße. Da die Elektronen bei jedem Stoß ihre Bewegungsrichtung ändern, bleibt außerdem nur der durch die Driftgeschwindigkeit verursachte Beitrag $-e\left(\vec{v}_d \times \vec{B}\right)$ übrig.
Zur Vereinfachung betrachten wir ein in z-Richtung anliegendes Magnetfeld im stationären Fall, also $\dot{\vec{v}} = 0$. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{d,x} &= -\frac{e\tau}{m^*}\left(E_x + \vec{v}_{d,y}\, B\right), \\
\vec{v}_{d,y} &= -\frac{e\tau}{m^*}\left(E_y + \vec{v}_{d,x}\, B\right), \\
\vec{v}_{d,x} &= -\frac{e\tau}{m^*} E_z
\end{aligned}$$

Mit der Beweglichkeit $\mu = e\tau/m$ und der Elektronendichte

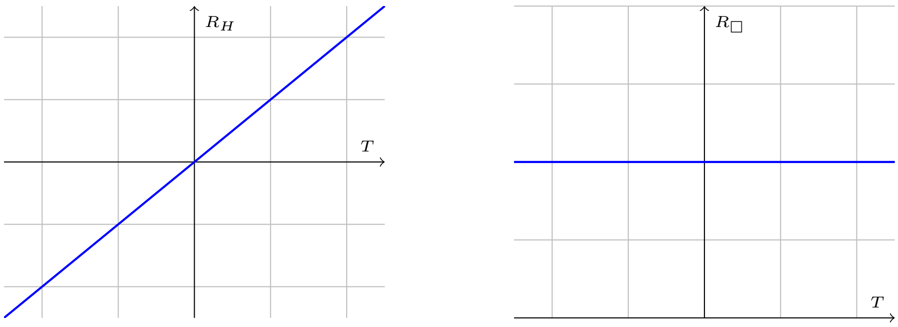
$$j = -en\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = ne\mu E$$

aus der für die elektrische Leitfähigkeit folgt

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{ne^2\tau}{m} = ne\mu$$

folgt für die Stromdichte im betrachteten Fall:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = -\frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\omega_c^2\tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$



(a) Hall-Widerstand (b) Schichtwiderstand

Abbildung 2.1: Widerstände beim klassischen Hall-Effekt

Hier bezeichnet $\omega_0 = ne^2\tau/m^*$ die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld und ω_c für die Zyklotronfrequenz.
Zur Vereinfachung betrachten wir einen flachen Stab mit rechteckigen Querschnitt. Der Strom fließt hierbei in x-Richtung. Mit dieser Geometrie tritt in z-Richtung kein elektrisches Feld auf. Somit vereinfacht sich obiger Ausdruck zu:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} \\ -\omega_{xy} & \omega_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

Hier wurden die Leitwerte

$$\omega_{xx} = \frac{ne}{B}\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}, \qquad \omega_{xy} = -\frac{ne}{B}\frac{\omega_c^2\tau^2}{1+\omega_c^2\tau^2}$$

eingeführt.
Löst man das Gleichungssystem nach den elektrischen Feldern auf erhält man:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

mit den spezifischen Widerständen:

$$\rho_{xx} = \frac{B}{ne}\frac{1}{\omega_c\tau} = \frac{m^*}{ne^2\tau}, \qquad \rho_{xy} = \frac{B}{ne}$$

Hier wird ρ_{xx} als Längswiderstand R und ρ_{xy} als Hall-Widerstand R_H bezeichnet. In einem anisotropen Medium würden die Größen ρ_{yx} und ρ_{yy} auftreten. Für isotrope Medien, die hier betrachtet werden sollen, gilt jedoch: $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ und $\rho_{yx} = -\rho_{xy}$. Ein Plot der klassischen Widerstände ist in Abbildung 2.1 zu sehen.

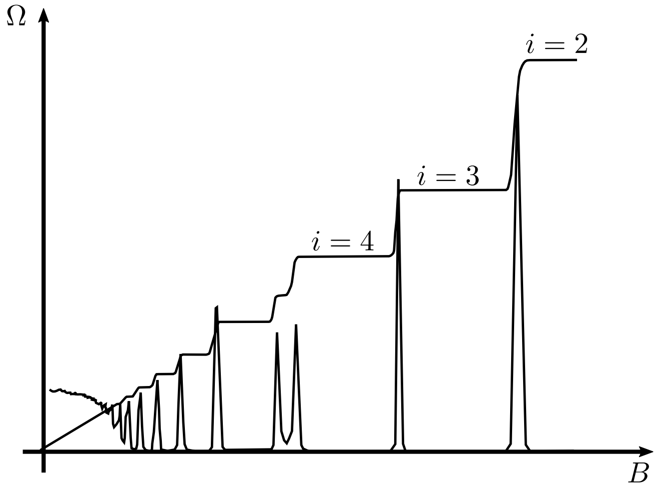


Abbildung 2.2: Hall und Schichtwiderstand beim Quanten-Hall-Effekt

3 Durchführung

4 Fazit