Δομή τονικότητας στην μουσική
Προσπάθεια δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς ως μνημονικό κανόνα

jimishol

Περίληψη

Σε μια προσπάθεια, λόγω περιέργειας, στοιχειώδους κατανόησης της μουσικής αρμονίας, χωρίς προτέρα ιδιαίτερη γνώση, διάβασα το Open Music Theory, που φαίνεται όμοιο με το Integrated Musicianship: Theory, και δύο βιβλία του Arnold Schoenberg, το THEORY OF HARMONY και το Structural Functions Of Harmony. Τα βιβλια του Schoenberg επηρέασαν ιδιαίτερα την οπτική μου.

Γνωρίζω αρκετά μαθηματικά ώστε να διακρίνω την τέχνη πίσω από αυτά (χρειάστηκα πέντε έτη για να διακρίνω την τέχνη πίσω από την γενική θεωρία της σχετικότητας) αλλά δεν γνωρίζω αρκετή μουσική ώστε να διακρίνω τα μαθηματικά πίσω από αυτήν. Λογικά όμως, δεν μπορεί να υπάρξει η μαθηματική συνέπεια στην τέχνη.

Με τα μαθηματικά οδηγούμαστε με συνέπεια σε συγκεκριμένα αποτελέσματα, οπότε η τέχνη έγκειται στην ελευθερία επιλογής του τρόπου με τον οποίο φθάνουμε σε αυτά. Στην τέχνη όμως η ελευθερία επιλογής αποτελέσματος οδηγεί στο ότι κάθε κανόνας ή απαγόρευση μπορεί να παραβιασθεί, αρκεί η παράβαση να μην συμβαίνει κατά τύχη. Η κάθε παράβαση οφείλει να αιτιολογείται από κάποια δομή που είναι δημιούργημα της αυθαίρετης επιλογής του καλλιτέχνη. Για να δημιουργηθεί όμως η όποια αυθαίρετη δομή, που αιτιολογεί την όποια παράβαση, χρειάζεται κάποιο σύστημα αναφοράς στου οποίου τους άξονες θα αναφέρεται. Όπως σε κάθε τι στο σύμπαν, τα μαθηματικά θα ενυπάρχουν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, όμως η εύρεση ενός συστήματος αναφοράς με μαθηματική συνέπεια και πληρότητα είναι πέρα από τις δυνάμεις, τις λιγοστές μουσικές γνώσεις και τις ικανότητές μου. Συνεπώς, σημειώνω τις σκέψεις μου αλλά δεν μπορεί να αναμένεται επιστημονική συνέπεια και πληρότητα σε αυτές.

Η χρήση μαθηματικών και φυσικών εννοιών (όπως φράκταλ, θεωρία κατηγοριών, θεωρία ομάδων, δυϊκοί χώροι, ενέργεια, βαρύτητα, ροή κ.α.) αποσκοπεί σε μια προσπάθεια δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς, ως μνημονικό κανόνα, με όσο μου είναι δυνατόν μεγαλύτερη συνέπεια, ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι εξαιρέσεις που πρέπει να απομνημονευθούν, και πληρότητα, ώστε να σχετιστεί με όσο περισσότερο υλικό εξ όσων έχω διαβάσει.

Το παρόν δεν είναι κατάλληλο για όποιον θέλει να διδαχθεί αρμονία. Υπάρχει ο κίνδυνος μια ενδεχομένως στρεβλή και ελλιπής οπτική να θεωρηθεί ορθή ή πλήρης. Αντιθέτως, ένας ήδη γνώστης της αρμονίας μπορεί να κερδίσει από μια νέα οπτική, ακόμα και μέσω της απόδειξής του ότι αυτή η οπτική είναι λανθασμένη ή ελλιπής.

Ανυπαρξία

1 Γεννηθήτω ο χρόνος

Ο χρόνος επιτρέπει την ύπαρξη στιγμών δημιουργίας. Χωρίς την ύπαρξη χρονικών στιγμών δεν μπορεί να υπάρξει στιγμή δημιουργίας. Επιβάλει δε το τέλος αυτών των στιγμών και την ανυπαρξία μεταξύ αυτών των στιγμών, αλλιώς η μη μεταβολή της ύπαρξης θα ισοδυναμούσε με ανυπαρξία. Ο χρόνος είναι συνυφασμένος με την έννοια της μεταβολής. Διαδοχή γέννησης - θανάτου, ύπαρξης - ανυπαρξίας, bit - zero, κτύπου - ησυχίας. Χωρίς την βοήθεια εξωσυμπαντικού, υπερχρονικού παρατηρητή, δεν μπορώ, μόνον μέσα από το ίδιο το σύμπαν, να ξεχωρίσω αν ο χρόνος πραγματώνεται, ή γίνεται αντιληπτός, μέσω των μεταβολών ή αν οι μεταβολές πραγματώνονται, ή γίνονται αντιληπτές, μέσω του χρόνου. Πιστεύω πως ο χρόνος είναι το ουσιαστικότερο ίσως συστατικό του σύμπαντος και δεν υπάρχει ανεξάρτητος έξω από αυτό.[1]
Κάθε γέννηση προϋποθέτει την ύπαρξη του χρόνου και αναφέρεται σε κάποια χρονική στιγμή, όποτε αυτή συνέβη. Η γέννηση του χρόνου είναι παραδοξότητα λόγω αυτής ακριβώς της κρυφής αυτοαναφοράς του χρόνου στον ευατό του.

Ο χρόνος του σύμπαντος δεν μπορεί να καθορίσει τον ευατό του και να ισχυριστεί "τότε γεννήθηκα". Δεν μπορεί να ορίσει το Big Bang με τρόπο που να καθορίζει στιγμές του χρόνου πριν από αυτό.
Αυτό που με εντυπωσίασε στην γενική θεωρία της σχετικότητας δεν είναι ότι ο χρόνος είναι σχετικός με τον εκάστοτε παρατηρητή, ούτε ότι συνυπάρχει με τον χώρο ως χωρόχρονος, ούτε ίσως ότι μέσα στις μαύρες τρύπες ο χρόνος, παρά το χρονικό βέλος που τον διαφοροποιεί από τις χωρικές διαστάσεις, μετουσιώνεται σε χώρο και ο χώρος σε χρόνο. Με εντυπωσίασε ότι το πέρας του άπειρου χρόνου εμφανίζεται "χωρικά" στους ορίζοντες γεγονότων. Ένα θνητό πλάσμα, που κατευθύνεται σε μιά μαύρη τρύπα, αποκτά κυριολεκτικά αθανασία σε σχέση με όποιον το παρατηρεί εκ του μακρόθεν και, όντας ζωντανό, πλησιάζει εσαεί την μαύρη τρύπα. Ακούγεται παράξενο αλλά αν δεν σας ενδιαφέρει αν ο αγαπημένος σας, για τον ίδιο, σκοτωθεί στα επόμενα πέντε λεπτά του αλλά θέλετε, για εσάς, περιγραφικά να ζήσει τόσο πολύ όσο τρισεκατομμύρια χρόνια μετά τον θάνατό σας και κυριολεκτικά να ζει στην αιωνιότητα, σπρώξτε τον προς μια μαύρη τρύπα.

Η μέτρηση του χρόνου αφορά στις διακριτές στιγμές ύπαρξης. Η δομή του χρόνου, που επιτρέπει διακριτές στιγμές ύπαρξης, επιτρέπει την αντιστοίχιση στιγμών ύπαρξης σε ακεραίους αριθμούς άρα και την σύγκριση χρονικών διαστημάτων του μέσω του πλήθους αυτών. Το, μεταξύ των χρονικών στιγμών ύπαρξης, χρονικό διάστημα ανυπαρξίας, αν βιώνεται, βιώνεται υποκειμενικά από τον εκάστοτε παρατηρητή του και δεν μπορεί να μετρηθεί αντικειμενικά χωρίς το σφάλμα της αυτοαναφοράς στον ίδιο τον χρόνο[2]. Έτσι, ορίζουμε ότι δύο χρονικά διαστή-

[1] Αν ρωτούσατε έναν κβαντικό φυσικό για την φύση του χρόνου στον μικρόκοσμο θα απαντούσε ότι ο χρόνος είναι απόλυτος και υπάρχει ανεξάρτητα του σύμπαντος. Δεν ασχολήθηκα όμως με κβαντική φυσική ούτε φιλοδοξώ να λύσω τις αντιθέσεις των δύο θεωριών. Απλά βρίσκω αρκετά διασκεδαστικό να μπλέκω την θεωρία της σχετικότητας μέσα σε σημειώσεις για την μουσική αρμονία.

[2] Το ίδιο σφάλμα αυτοαναφοράς συμβαίνει και με τη μέτρηση του χώρου. Εξ ου, η θεωρία της σχετικότητας, χωρίς το αξίωμα του απόλυτου χώρου και χρόνου, εξετάζει συμβάντα στον χωρόχρονο.

ματα είναι ίσα όταν κατά την διάρκειά τους συμβαίνουν ίσες μεταβολές διαδοχικής ύπαρξης - ανυπαρξίας κάποιου ίδιου φαινομένου. Το 1967 ορίστηκε ότι ένα δευτερόλεπτο έχει ίση διάρκεια με αυτήν που έχουν 9.192.631.770 μεταβολές που αφορούν στο χημικό στοιχείο Caesium-133.

Η διαδοχή συμβάντων ανά ίσα χρονικά διαστήματα, επί της δομής του χρόνου, δεν εξαρτάται από την κλίμακα αυτών των χρονικών διαστημάτων. Η όποια δομή του χρόνου, που κάνει δυνατή την δημιουργία ίσων χρονικών διαστημάτων, του επιτρέπει να αυτοκαθορίζεται ως φράκταλ. Έχει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας. Όσο και αν μεγεθύνουμε ή σμικρύνουμε ένα χρονικό διάστημα θα έχει την ίδια δομή, που θα επιτρέπει την δημιουργία ίσων χρονικών διαστημάτων εντός αυτού[3]. Τα συμβάντα ανά ίσα χρονικά διαστήματα ας τα ονομάσουμε *κτύπους*, με την έννοια των συμβάντων ενός μετρονόμου. Η ακολουθία συμβάντων, στην οποία θα αναφερόμαστε ως **ακολουθία αναφοράς**, μετράται με το αντίστροφο του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών κτύπων. Ένδειξή της στις παρτιτούρες είναι οι κτύποι ανά λεπτό (*BPM*), όπου όμως το *beat* αντιστοιχεί σε τυπική ομάδα κτύπων και όχι στον ένα κτύπο της ακολουθίας αναφοράς.

Η ομαδοποίηση των διαδοχικών κτύπων ανά έναν, δύο, τρείς, τέσσερις κ.λ.π., εφοδιάζει την άπειρη ακολουθία κτύπων με σημαντικότατη δομή. Κάθε θέση σε μια *τυπική* ομάδα[4] γίνεται αντιπρόσωπος *κλάσεων (συνόλων) κτύπων*. Με την ομαδοποίηση αναγνωρίζουμε ποιοι από τους κτύπους της φυσικής ακολουθίας είναι πρώτοι, ποιοι είναι δεύτεροι, τρίτοι, τέταρτοι κ.λ.π. εντός της κάθε ομάδας και έτσι μπορούμε να τους διαφοροποιήσουμε δημιουργικά, όπως συμβάντα με περισσότερη ένταση, με λιγότερη ένταση, με απουσία[5], με διαφορετική διάρκεια ή χροιά και άλλα. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε τέσσερις κτύπους (a, a, a, a). Αντιπροσωπεύουν την ομαδοποίηση της ακολουθίας ανά έναν κτύπο, δηλαδή αποτελούν μία μονομελή ομάδα που επαναλαμβάνεται ως $([a], [a], [a], [a])$. Ομαδοποίηση ανά δύο σημαίνει ότι μία διμελής ομάδα επαναλαμβάνονται διαδοχικά ως $([a, c], [a, c])$. Ομαδοποίηση ανά τρεις κτύπους σημαίνει ότι τριμελής ομάδα επαναλαμβάνεται κ.ο.κ. Τα *μέτρα* στις παρτιτούρες είναι δομή τέτοιων ομαδοποιήσεων. Με την ίδια λογική, μπορούμε να εφοδιάσουμε με παρόμοια δομή και τις διαδοχικές ομάδες, ομαδοποιώντας τες σε υπερομάδες. Ομαδοποίηση των διμελών ομάδων ανά δύο σημαίνει ότι διμελής ομάδα, που όμως τα μέλη της είναι διμελής ομάδες επίσης, επαναλαμβάνεται π.χ. $([[a, c], [b, c]], [[a, c], [b, c]])$ που μπορεί να ιδωθεί ως ισοδύναμη με μία τετραμελή ομάδα $[a, c, b, c]$ που επαναλαμβάνεται. Τα *υπερμέτρα* στις παρτιτούρες είναι

[3] Το ίδιο ισχύει και για τους ρητούς αριθμούς. Οποιοδήποτε διάστημα μεταξύ δύο ρητών αριθμών μπορεί να χωριστεί σε ίσα διαστήματα μεταξύ ρητών αριθμών

[4] Είναι προφανής ο ισομορφισμός μεταξύ των ομαδομοιήσεων και των τυπικών ομάδων τους, δια του πλήθους των τελευταίων, με τους ακέραιους θετικούς αριθμούς. Δεν έχει σημασία αν μία τριμελής τυπική ομάδα αντιπροσωπεύεται ως (A,a,a) ή (1,2,3) ή (a,A,a), σημασία έχει μόνον το μήκος της που ισούται με 3.

[5] Η απουσία, ως συμβάν αντίθετο της παρουσίας, αντιστοιχεί σε *κτύπο*. Με αυτήν πετυχαίνουμε επανάληψη συμβάντων ανά άνισα χρονικά διαστήματα. Έστω ομάδα $[a, a, x]$ με x να συμβολίζει την απουσία συμβάντος. Κατά την επανάληψη της ομάδας το συμβάν a συμβαίνει κάθε φορά σε διαφορετικό χρονικό διάστημα απ' ότι συνέβη την προηγούμενη φορά.

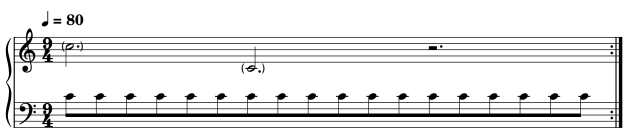
δομή τέτοιων ομαδοποιήσεων. Το *μέτρο* είναι απλώς η βασική για τον συνθέτη, ομαδοποίηση της ακολουθίας.

Η διάκριση ομαδοποιήσεων γίνεται προς αποσαφήνιση ορολογιών που χρησιμοποιούνται στο παρόν ως η εξής:

Εν χρήση ομαδοποιήσεις είναι αυτές που, είτε λόγω διαφοροποίησης μεταξύ των μελών της τυπικής ομάδας τους είτε ως μονομελής, χρησιμοποιούνται εν τη πράξη. Διακρίνονται σε

- **Φανερές** που χρησιμοποιούνται άμεσα
  π.χ. $(A, a, a)(A, a, a)(A, a, a)\dots$
- **Κρυφές ή χαμένες** που εμφανίζονται έμμεσα λόγω συνύπαρξης π.χ. όταν η (A, a, a) συνυπάρχει με την (B, b), κρυφή είναι η (AB, ab, aB, Ab, aB, ab) των έξι κτύπων, όπως
  $(AB, ab, aB, Ab, aB, ab)(AB, ab, aB, Ab, aB, ab)\dots$.

Εν δυνάμει ομαδοποιήσεις είναι αυτές που αναφερόμαστε σε αυτές αλλά, χωρίς διαφοροποίηση των μελών της τυπικής ομάδας τους, ως προς την αντίληψή μας, στην πράξη *υπερσκελίζονται* από τις εν χρήση ομαδοποιήσεις.
π.χ. επί της τριμελούς $(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a)\dots$ η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο κυριαρχεί. Στο σχήμα 1, ακόμα κι αν δεν υπήρχαν οι παρεστιγμένες μισές νότες, εν δυνάμει θα ήταν υποψήφιες να υπάρξουν.



Σχήμα 1: Εν δυνάμει ομαδοποιήση 6 ογδόων

Ρυθμικότητα είναι το *ελάχιστο* τμήμα της ακολουθίας συμβάντων που περικλείει ακέραια όλα τα είδη των τυπικών ομάδων, των *εν χρήση* ομαδοποιήσεων. Η ρυθμικότητα επαναλαμβάνεται ανά ίσα χρονικά διαστήματα.Είναι πάντα εν χρήση, είτε ως κρυφή είτε ως φανερή ομαδοποίηση. Μετράται με το πλήθος των κτύπων της και ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του πλήθους των κτύπων της κάθε τυπικής ομάδας που την υποστηρίζουν. Χωρίς εν χρήση ομαδοποιήσεις δεν μπορεί να υπάρξει ρυθμικότητα, εκτός της τετριμμένης με την τυπική ομάδα του ενός κτύπου. Η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο υποστηρίζει κάθε ρυθμικότητα. Είναι δε ισοδύναμη με την εσαεί επανάληψη του ίδιου συμβάντος ανά ίσα χρονικά διαστήματα.

Ρυθμός *μιας ομαδοποίησης, σε σχέση με την ρυθμικότητα που υποστηρίζει,* είναι ο λόγος του πλήθους των μελών της ρυθμικότητας προς το πλήθος των μελών της τυπικής ομάδας της. Με διαφορετική διατύπωση, είναι το πόσες φορές χωράει η τυπική ομάδα της ομαδοποίησης στην ρυθμικότητα ή πόσο πιο συχνά εμφανίζεται, στην ακολουθία συμβάντων, η τυπική ομάδα της από αυτήν της ρυθμικότητας. Εκ του ορισμού της ρυθμικότητας, είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Ο ρυθμός ομαδοποίησης της μεγαλύτερης δυνατής ομάδας, δηλαδή ο ρυθμός της ίδιας της ρυθμικότητας, είναι η μονάδα. Η *χρονική υπογραφή* είναι σύμβαση μάλλον ελλιπής στο να περιγράψει κάθε πιθανή ομαδοποίηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, ο άνω αριθμός της υπογραφής είναι σαφής ως προς το πόσοι κτύποι μετρώνται σε κάθε *μέτρο*. Το *μέτρο* είναι απλώς η βασική για τον συνθέτη ομαδοποίηση και τίποτε δεν εμποδίζει σε μια υπογραφή, $\frac{3}{4}$ για παράδειγμα, να χρησιμοποιηθούν έξι όγδοα, όσοι οι κτύποι της ρυθμικότητας, αντί τριών τετάρτων, όπως θα ήταν, απ' την υπογραφή, αναμενόμενο. Σε κάθε ακολουθία αναφοράς ενυπάρχουν άπειρες όλο και μεγαλύτερες ρυθμικότητες. Οι μεγαλύτεροι ρυθμοί αυτών, που αντιστοιχούν στις μονομελής ομάδες, έχουν όριο το άπειρο, όπου ένα συμβάν συμβαίνει άπαξ, με μηδενική συχνότητα, και δεν επαναλαμβάνεται.

Η οικονομία στην πληροφορία είναι ανάγκη και περιορισμός που επιβάλεται από το πεπερασμένο του ανθρώπινου εγκεφάλου. Η αντίληψή μας περιορίζεται στον συσχετισμό των πληροφοριών, όχι με βάση τα ακριβή δεδομένα αλλά, με απλά μοτίβα. Αν δούμε σε έναν πίνακα ζωγραφικής θάλασσα που καταλαμβάνει τμήμα του έργου με αναλογία 2/3.236, δηλαδή της χρυσής τομής, θα την αντιληφθούμε ως να καταλαμβάνει τα 2/3 του κάδρου. Σε σχέση με πληθυσμούς, η οικονομία στην πληροφορία προκαλεί στην αντίληψή μας πρωτίστως την αναζήτηση της αναλογίας 1/2, ως του πιο απλού μοτίβου σύγκρισης[6]. Συνεπώς, δύο ομαδοποιήσεις ταυτίζονται στην αντίληψή μας όταν η τυπική ομάδα της μιας είναι διπλάσια της άλλης. Η ταύτιση είναι μεταβατική, οπότε όπου αναφέρονται [ρυθμικότητες], συμπεριλαμβανόμενων και των [ρυθμών], εννοούνται *κλάσεις* ρυθμικοτήτων ή ρυθμών, με συνέπεια διαφορετικοί ρυθμοί να είναι αυτοί που ο λόγος τους δεν είναι δύναμη του 2. Η ανάγκη της αντίληψής μας για απλότητα εφοδιάζει το σύνολο των ρυθμών με *βαθμό εγγύτητας με την ρυθμικότητα* που υποστηρίζουν. Ένας ρυθμός είναι τόσο πιο κοντά στην ρυθμικότητα που υποστηρίζει όσο μικρότερος είναι ο μέγιστος μόνος αριθμός που τον διαιρεί. Παραδείγματος χάριν, ο ρυθμός 12 είναι πιο κοντά στην ρυθμικότητα 1 από τον ρυθμό 5, διότι το μέγιστο 3, που διαιρεί το 12, είναι μικρότερο του 5[7].

Απλή ρυθμικότητα είναι η ρυθμικότητα που η κλάση της είναι η κλάση της τετριμμένης ομαδοποίησης ανά ένα κτύπο, είναι δηλαδή κλάσης [2]. Αυτό έχει σαν συνέπεια να συνηχούν μόνο ρυθμοί που είναι δύναμη του 2 επίσης. Όπως, παραδείγματος χάριν, όταν σε χρονική υπογραφή $\frac{4}{4}$ ακούγονται σε ένα μέτρο τέσσερις νότες του τετάρτου, δύο νότες μισής αξίας και μία ολόκληρη. Η ολόκληρη

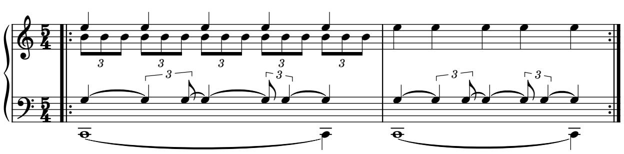
[6]Επιπλέον, συμβολίζοντας με a την παρουσία συμβάντος και x την απουσία του, επειδή σε κάθε ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο η παρουσία του συμβάντος, εκ των πραγμάτων, εναλλάσσεται με την απουσία του, αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να εκληφθεί ως διπλάσια ομαδοποίηση $[a, x]$ ανά δύο κτύπους, κατά την οποία όμως η εν δυνάμει ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο είναι κρυφή.

[7]Πιθανολογώ ότι αν η αντίληψή μας ανιχνεύσει λόγο $\frac{1}{3}$ ίσως αναμένει το ίδιο μοτίβο, οπότε ίσως υπάρχει ταυτοποίηση και ως προς αυτόν τον λόγο. Με αυτό το σκεπτικό θα υπάρχουν τόσες κλάσεις ρυθμών όσοι οι πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας.

νότα αντιπροσωπεύει την ομαδοποίηση των κτύπων ανά (2^2) τέσσερις κτύπους, που συμπίπτει με αυτήν του μέτρου και της ρυθμικότητας, οι μισές νότες την ομαδοποίηση ανά (2^1) δύο και κάθε νότα τετάρτου την ομαδοποίηση ανά (2^0) έναν κτύπο. Το πλήθος κτύπων κάθε ομάδας είναι δύναμη του 2, άρα όλοι οι ρυθμοί, συμπεριλαμβανομένης και της ρυθμικότητας, ταυτοποιούνται αφού ανήκουν στην ίδια κλάση $[1] = [2]$. **Σύνθετη ρυθμικότητα** είναι κάθε άλλη ρυθμικότητα.

Συνήχηση ρυθμών υπάρχει σε κάθε περίπτωση που οι ρυθμικότητες υποστηρίζονται από παραπάνω από μία κλάσεις ρυθμών. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα μέτρο χρησιμοποιούνται μία παρεστιγμένη μισή νότα και δύο παρεστιγμένα τέταρτα. Προφανώς η ρυθμικότητα εκφράζεται ως δύο παρεστιγμένα τέταρτα και οι δύο ρυθμοί ανήκουν στην κλάση $[\frac{2}{2}] = [\frac{2}{1}] = [2]$ του απλού ρυθμού. Αν όμως προσθέσουμε την ανάπτυξη της παρεστιγμένης μισής νότας, με χρήση τριών τετάρτων, τότε η ρυθμικότητα εκφράζεται πλέον σε έξι όγδοα και αυτή η προσθήκη, που ανήκει στην κλάση ρυθμών $[\frac{6}{1}] = [6] = [3]$, συνηχεί με τον ρυθμό κλάσης $[\frac{6}{6}] = [\frac{6}{3}] = [2]$ των υπολοίπων. *Η ομαδοποίηση μήκους ίσου με την ρυθμικότητα, που είναι ρυθμός κλάσης* $[2]$*, είναι, είτε ως κρυφή είτε ως φανερή, πάντα εν χρήση.*

Οι κλάσεις ρυθμικοτήτων και των ρυθμών τους θα συμβολίζονται με τον μέγιστο μονό[8] αριθμό που τις διαιρεί. Η επόμενη κλάση, κατά σειρά εγγύτητας με την απλή $[2]$, είναι η $[3]$. Η επόμενη κλάση $[5]$ είναι πιο σπάνια. Πλην των $[9]$ και $[15]$, δεν φαίνεται να έχουν πρακτική χρήση οι επόμενες θεωρητικές κλάσεις $[7], [11], [13], [17]$, *κλπ.* Όσες κλάσεις δεν αντιστοιχούν σε πρώτους αριθμούς μπορεί να αντιστοιχούν σε συνήχηση μιας ή περισσοτέρων ομαδοποιήσεων. Διευκρινιστικά, η ρυθμικότητα κλάσης $[15]$ μπορεί να είναι αποτέλεσμα της συνήχησης των ρυθμών $[2]$ (ως κρυφή ή φανερή κλάση), του $[3]$ και του $[5]$. Και στα δύο μέτρα του σχήματος 2 η ρυθμικότητα είναι $[15]$. Στο πρώτο μέρος η Ντο είναι ρυθμός $[\frac{15}{15}] = [1] = [2]$, η Σολ είναι ρυθμός $[\frac{15}{5}] = [3]$, η Μι είναι ρυθμός $[\frac{15}{3}] = [5]$ και η Σι είναι ρυθμός $[\frac{15}{1}] = [15]$. Στο δεύτερο μέτρο ο ρυθμός $[15]$ είναι κρυφός.



Σχήμα 2: Συνήχηση ρυθμών

Η αλγεβρική δομή *μονοειδούς* φαίνεται να διακρίνεται στα προαναφερόμενα. Έστω S το σύνολο των τυπικών ομάδων των ομαδοποιήσεων. Κάθε στοιχείο του ταυτίζεται με τυπική ομάδα ομαδοποίησης και την τετριμμένη ίσου μήκους ρυθμικότητα. Εφοδιάζουμε αυτό το σύνολο με την δυαδική πράξη $S \times S \to S$ της

[8]Θα συμβολίζονται με το γινόμενο των μονών πρώτων αριθμών, αν ταυτοποιούμε κάθε δύναμη πρώτου αριθμού με τον ίδιο.

συνήχησης, που θα την συμβολίζουμε με $+$. Το αποτέλεσμά της είναι η τυπική ομάδα ομαδοποίησης με πλήθος μελών ίσο με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του πλήθους των μελών των δύο τυπικών ομάδων. Το ζεύγος $(S, +)$ είναι *μονοειδές* διότι ικανοποιεί τα επόμενα δύο αξιώματα:

- Προσεταιριστικότητα: Για κάθε a, b και c που ανήκουν στο S, η σχέση $(a+b)+c = a+(b+c)$ ισχύει. Η ρυθμικότητα με περισσότερους των δύο ρυθμών είναι αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας.
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Υπάρχει ένα στοιχείο e στο S, αυτό της μονομελούς τυπικής ομάδας, που είναι τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο a στο S, ισχύουν οι ισότητες $e + a = a$ και $a + e = a$.

Επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, όπου $a+b = b+a$ για κάθε $a, b \in S$, το $(S, +)$ είναι *αντιμεταθετικό* ή αλλιώς *αβελιανό μονοειδές*. Όπως κάθε αντιμεταθετικό μονοειδές, το $(S, +)$, δηλαδή το σύνολο των τυπικών ομάδων με τις συνηχήσεις τους, είναι εφοδιασμένο με την ασθενή διάταξη $\leq$, με την οποία ορίζεται ότι $a \leq b$ αν υπάρχει c τέτοιο ώστε $a + c = b$, δηλαδή το μήκος της a διαιρεί το μήκος της b[9].

Αποδόμηση ρυθμικότητας θεωρώ ότι είναι η μετάλλαξή της σε ρυθμικότητα που κλάση της είναι ίση με την κλάση ρυθμικότητας κάποιου γνήσιου υποσυνόλου των ομαδοποιήσεων που την υποστηρίζουν. Η ρυθμικότητα κενής ομαδοποιήσεων ταυτίζεται με την ακολουθία αναφοράς, άρα την ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο, επομένως είναι κλάσης [2]. Κάθε ρυθμικότητα υποστηρίζεται από όποιες ομαδοποιήσεις χρησιμοποιεί ο συνθέτης, όπως ένα σπίτι υποστηρίζεται από τις κολώνες του. Δεν μπορεί να χτιστεί στέρεη ρυθμικότητα - οικοδόμημα χωρίς να χρησιμοποιηθούν ομαδοποιήσεις - κολώνες της που να την υποστηρίζουν. Με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται η εντροπία, άρα η φυσική φθορά της ρυθμικότητας - οικοδομήματος, απομένοντας, ως ερείπια, κάποιες από τις ομαδοποιήσεις - κολώνες που την στήριζαν. *Η υποστηριχτική σχέση δεν αντιστρέφεται.* Αν G είναι ομαδοποίηση - κολώνα της ρυθμικότητας - οικοδομήματος C, τότε η τελευταία, ως ομαδοποίηση κολώνα C, δεν μπορεί να υποστηρίζει την ρυθμικότητα - οικοδόμημα G. Αυτό ισχύει εν ολίγοις διότι αν η $[G]$ είναι ομαδοποίηση της $[C]$ ισχύει $[G] = \frac{[C]}{2*k+1} \Rightarrow [C] = (2*k+1)*[G], \mu\varepsilon\, k \neq 0, [C] = 2^n * C\, \kappa\alpha\iota\, [G] = 2^m * G$. Οπότε το $[C]$ δεν έχει τη ζητούμενη μορφή $[C] = \frac{[G]}{2*k+1}$, άρα δεν είναι ομαδοποίηση της $[G]$[10]. Πιο απλά, εκτός κλάσεων, αν η G διαιρεί την C τότε η C δεν διαιρεί την G.

Πρόοδος ρυθμικότητας είναι η μεταβολή της σε άλλης κλάσης ρυθμικότητα. Η ρυθμικότητα μιας σύνθεσης μπορεί να μείνει αμετάβλητη. Αν όμως υπάρ-

[9]Ο βαθμός εγκύτητας της σελίδας 6 είναι διαφορετική διάταξη. Με δεδομένη ρυθμικότητα b, ο βαθμός εγγύτητας διατάσσει τους διαιρέτες a του μήκους της.

[10]Αν $k = 0$ τότε η ομαδοποίηση ταυτίζεται με την ρυθμικότητα που στηρίζει. Τότε όμως δεν πρόκειται για υποστηριχτική σχέση αλλά για ταυτολογία, εφόσον η C είναι κολώνα της ρυθμικότητας C τότε η C είναι κολώνα της ρυθμικότητας C.

χει η επιθυμία μεταβολής της, λαμβάνοντας υπόψην την προαναφερθείσα υποστηριχτική σχέση και την προσομοίωση του φαινομένου της εντροπίας, μπορούμε να διακρίνουμε την πρόοδο σε *παθητική* και *ενεργητική*.

Παθητική πρόοδος (ή *αδύνατη* ή *κατιούσα* πρόοδος) μιας ρυθμικότητας είναι η αποδόμησή της. Ως εκ τούτου, *δεν υπάρχει παθητική μετάβαση από την απλή ρυθμικότητα κλάσης* [2]. Αν περιοριστούμε μόνον στις κλάσεις [2] και [3] των ρυθμικοτήτων, τότε η μόνη δυνατή παθητική μετάβαση είναι αυτή από την κλάση ρυθμικότητας [3] = [6] = [2] + [3] στην κλάση ρυθμικότητας μοναδικού ρυθμού, που υποστηρίζεται από την συγκεκριμένη, κρυφή ή φανερή, κλάση ρυθμού [2] της αρχικής ρυθμικότητας.

Ενεργητική πρόοδος (ή *δυνατή* ή *ανιούσα* πρόοδος) μιας ρυθμικότητας είναι η όποια *μη παθητική* πρόοδός της σε νέα διαφορετικής κλάσης ρυθμικότητα. Η αρχική ρυθμικότητα μπορεί να υποστηρίζει, ως ομαδοποίηση, την νέα ρυθμικότητα μπορεί και όχι. Αν περιοριστούμε μόνον στις κλάσεις [2] και [3] των ρυθμικοτήτων, τότε η μόνη δυνατή ενεργητική μετάβαση είναι αυτή από την κλάση ρυθμικότητας [2] στην κλάση ρυθμικότητας [3] που, εκτός της συγκεκριμένης ομαδοποίησης κλάσης [2], φανερής ή κρυφής πλέον, υποστηρίζεται και από ομαδοποίηση κλάσης [3] = [6] = [2] + [3].
Στο σχήμα 3, παρά την χρονική υπογραφή, στο πρώτο μέτρο συνηχούν οι ρυθμοί της μίας παρεστιγμένης ολόκληρης νότας μήκους 4 και των τεσσάρων παρεστιγμένων τετάρτων μήκους 1, οπότε είναι εν χρήση η ρυθμικότητα [1] + [4] = [4], του απλού ρυθμού κλάσης [2] που την υποστηρίζει. Από το πρώτο στο δεύτερο μέτρο συντελείται ενεργητική πρόοδος ρυθμικοτήτων. Στο δεύτερο μέτρο, με δώδεκα όγδοα μήκους 1, προστίθεται ενεργητικά ρυθμός $[\frac{12}{1}] = [12] = [3]$, που συνηχεί με τον ρυθμό [4], υποστηρίζοντας την ρυθμικότητα [4] + [3] = [12], κλάσης [3]. Στο τρίτο μέτρο τόσο η ρυθμικότητα όσο και η κλάση της παραμένουν αμετάβλη-

Σχήμα 3: Πρόοδος ρυθμικότητας

τες, αφού η μετατροπή των τεσσάρων τετάρτων, κλάσης $[\frac{12}{3}] = [4] = [2]$, σε δύο μισές δεν επηρεάζουν την $[\frac{12}{6}] = [2]$ κλάση τους. Από το τρίτο μέτρο στο τέταρτο μέτρο, συντελείται παθητική πρόοδος ρυθμικοτήτων, διότι η ρυθμικότητα κλάσης [3] = [3] + [2] αποδομείται σε ρυθμικότητα κλάσης [4] = [2].

Η φράκταλ αυτο-ομοιότητα της δομής του χρόνου προβάλει την προαναφερόμενη δομή της ρυθμικότητας στην έννοια της δομής της τονικότητας. Σε ρυθμικότητα, ρυθμούς, συνηχήσεις και ομαδοποιήσεις κτύπων αναφερόμαστε όταν η συχνότητα των κτύπων είναι της τάξεως του ενός κτύπου ανά δευτερόλεπτο ($1Hz$). Σε τονικότητα, τόνους, συγχορδίες και συχνότητες αντίστοιχα, αναφερόμαστε αν "απομακρυνθούμε", περίπου 20 με 20000 φορές "μακρύτερα", ώστε να αντιλαμβανόμαστε τα χρονικά διαστήματα μικρότερα και το $1Hz$ να αντιστοιχεί πλέον σε ηχητικές συχνότητες. Αν μάλιστα λάβουμε υπόψην και την προαναφερθείσα δομή του *μονοειδούς*, τότε συχνότητες και συγχορδίες μπορούν θεωρηθούν στοιχεία του ίδιου συνόλου και ίσως όχι τόσο διαφορετικά όσο νόμιζα.

Όρια στην αυτο-ομοιότητα τίθενται από το πεπερασμένο του ακουστικού φάσματος. Κτύποι του 1 Hz θα ακουστούν σαν ηχητική συχνότητα αν επιταχυνθούν 440 φορές, αλλά μία ηχητική συχνότητα των 440 Hz δεν θα ακουστεί αν επιβραδυνθεί 440 φορές, επειδή η πίεση του αέρα που το παράγει υπόκειται σε συνεχή μεταβολή. Θα έπρεπε ευθύς εξ αρχής να ήταν άλλη η φύση του συμβάντος, όπως κρούσεις και όχι ακουστικό κύμα. Η τονικότητα είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλο υποπολλαπλάσιο των συχνοτήτων που την στηρίζουν. Δεν μπορώ εύκολα να δεχτώ ότι η αντίληψή μας θα προσδώσει οντότητα σε τονικότητα που βρίσκεται κάτω από το όριο ακοής. Για αυτό, σε μια συνήχηση, μία μπάσα συχνότητα κοντά στο όριο των $20Hz$, όταν η ίδια δεν ταυτίζεται με την κλάση τονικότητας της συνήχησης, αφού η τελευταία θα βρίσκεται εκτός του ακουστικού φάσματος, ακούγεται ανεξάρτητη, εκτός της ομπρέλλας, της τονικότητας που παράγουν οι υπόλοιπες συχνότητες, δημιουργώντας μία ένταση που ζητά επίλυση. Για τον ίδιο λόγο, σε μια συνήχηση, μία υψηλή συχνότητα, κοντά στο όριο των $20000Hz$, δεν μπορεί να έχει το ρόλο τονικότητας που υποστηρίζεται από υπόλοιπες υψηλότερες συχνότητες, αλλά μόνον τον ρόλο της υποστήριξης μιας τονικότητας υποπολλαπλάσιας αυτής.

2 Τονικότητα

2.1 Ομοιομορφισμός

Ρυθμοί και τόνοι συνδέονται με σχέση ομοιομορφισμού που είναι η αντιστοίχιση των χρονικών διαστημάτων, των φαινομένων του ενός, στα χρονικά διαστήματα των φαινομένων του άλλου. Ο δείκτης r θα χρησιμοποιηθεί για τα φαινόμενα των ρυθμών και ο δείκτης t για τα φαινόμενα των τόνων. Έτσι έχουμε:

Η ακολουθία αναφοράς κτύπων συχνότητας σ_r και περιόδου $T_r = 1/\sigma_r$ *αντιστοιχεί* **σε ηχητικό κύμα αναφοράς** συχνότητας σ_t και περιόδου $T_t = 1/\sigma_t$.

Η ομαδοποίηση σ_r^1 ανά ένα κτύπο *αντιστοιχεί* σε ηχητικό κύμα συχνότητας $\sigma_t^1 = \sigma_t$ και περιόδου $T_t^1 = 1/\sigma_t^1 = 1/\sigma_t$.

Η ομαδοποίηση σ_r^n ανά n κτύπους *αντιστοιχεί* σε ηχητικό κύμα περιόδου $T_t^n = n * T_t = n/\sigma_t$ και συχνότητας $\sigma_t^n = 1/\mathrm{T}_t^n = \sigma_t/n$.

Η ρυθμικότητα $\sigma_r^{n,m,\cdots}$ της συνήχησης ομαδοποιήσεων σ_r^n *αντιστοιχεί* σε *ηχητικό κύμα* (**τονικότητα**) $\sigma_t^{n,m,\cdots}$ περιόδου $T_t^{n,m,\cdots} = lcm(T_t^n, T_t^m, \ldots) = \frac{lcm(n,m,\ldots)}{\sigma_t}$ και συχνότητας $\sigma_t^{n,m,\cdots} = \frac{\sigma_t}{lcm(n,m,\ldots)}$, όπου $lcm()$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Ισοδύναμα εκφράζεται και δια του μέγιστου κοινού διαιρέτη gcd[11].

$$\sigma_t^{n,m,\cdots} = \frac{1}{lcm(1/\sigma_t^n, 1/\sigma_t^m, \ldots)} = gcd(\sigma^n, \sigma^m, \ldots)$$

Ο ρυθμός λ_r^n μιας ομαδοποίησης σ_r^n, σε σχέση με μια ρυθμικότητα $\sigma_r^{n,m,\cdots}$ που υποστηρίζει, *αντιστοιχεί* στον **τόνο**

$$\lambda_t^n = \frac{T_t^{n,m,\ldots}}{T_t^n} = \frac{\sigma_t^n}{\sigma_t^{n,m,\ldots}} = \frac{lcm(n,m,\ldots)/\sigma_t}{n/\sigma_t} = \frac{lcm(n,m,\ldots)}{n}$$

και είναι αδιάστατος ακέραιος αριθμός. Ισοδύναμα εκφράζεται ως

$$\lambda_{n,m,\ldots}^n = \frac{\sigma_t^n}{gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m, \ldots)}$$

Αντικαταστάθηκε, στο λ, ο δείκτης t για να διευκρινιστεί ότι ο τόνος αναφέρεται στην τονικότητα που στηρίζει. Ο τόνος της τονικότητας $\lambda_t^{n,m,\cdots} = \frac{T_t^{n,m}}{T_t^{n,m}} = 1$ ισούται πάντα με την μονάδα. Συνεπώς, *η τονικότητα είναι συχνότητα και οι τόνοι είναι αναλογίες, ακέραια πολλαπλάσια, των εν χρήση συχνοτήτων προς αυτήν. Ο βαθμός εγγύτητας* ορίζεται ίδιος όπως στη σελίδα 6.

> Η συχνότητα της τονικότητας, επειδή υποστηρίζεται, εν δυνάμει, από τις άπειρες συχνότητες των ακέραιων πολλαπλασίων αυτής, *δεν* μπορεί να ορίσει καλώς ένα συγκεκριμένο σύνολο για εν χρήση υποστηριχτικούς τόνους.
> *Οι εν χρήση συχνότητες είναι αυτές που καθορίζουν την συχνότητα της τονικότητας.*

Η πράξη της συνήχησης $+ : S \times S \to S$, με S το σύνολο συχνοτήτων, αντιστοιχεί σε **συγχορδία** και προβάλεται φυσικά ως $\sigma_t^n + \sigma_t^m = \sigma_t^{n,m} = gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m)$, όπου gcd ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Με την ύπαρξη της σ_t^1 ως ουδέτερου στοιχείου $e = \sigma_t^1$, **η δομή του αντιμεταθετικού μονοειδούς**(σελ:7), με την ασθενή του διάταξη $\leq$, είναι προφανής. Ας σημειωθεί όμως ότι, επειδή αναφερόμαστε πλέον σε συχνότητες και όχι σε περιόδους, η διάταξη $a \leq b$ σημαίνει ότι η συχνότητα a διαιρείται από την b.

2.1.1 Κλάσεις

Οι κλάσεις συχνοτήτων $[\sigma]$ ορίζονται από την *σχέση ισοδυναμίας* $\sim$, όπου δύο συχνότητες σ_t^n και σ_t^m θεωρούνται ισοδύναμες αν ο λόγος τους είναι δύναμη του 2, δηλαδή $[\sigma_t^n] = [\sigma_t^m] \iff \sigma_t^n \sim \sigma_t^m \iff \frac{\sigma_t^n}{\sigma_t^m} = 2^{\pm k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο όλων των κλάσεων είναι το $S/\sim := \{[\sigma] : \sigma \in S\}$.

[11] Αν το lcd εκφραστεί με πρώτους αριθμούς, οι εκθέτες του θα είναι της μορφής $max(m_i, n_i, \ldots) = -min(-m_i, -n_i, \ldots)$ που αποδεικνύει την σχέση, διότι το min αντιστοιχεί στο gcd.

Αντιπρόσωπος κλάσης συχνότητας $[\sigma] \in S/\sim$, συχνότητας σ, επιλέγεται ο ρητός αριθμός της μορφής $\frac{\sigma}{\sigma^0} * 2^k$, $k \in Z$ που ανήκει στο διάστημα $[1,2)$ των άρρητων αριθμών, οπότε και αντιστοιχεί την συχνότητα αναφοράς σ^0 στην μονάδα, $[\sigma^0] = 1$[12]. Επειδή οι τονικότητες είναι συχνότητες, *οι **κλάσεις τονικοτήτων** $[\sigma^{n,m,\cdots}]$ αντιπροσωπεύονται από σημεία του ίδιου διαστήματος $[1,2)$ άρρητων αριθμών.*

Η κλάση τόνων $[\lambda^n]$ ορίζεται από την προβολή τους

$$[\lambda^n_{n,m,\ldots}] = \frac{[\sigma^n_t]}{[gcd(\sigma^n_t, \sigma^m_t, \ldots)]}$$

οπότε

$$[\lambda^n_t] = [\lambda^m_t] \iff \lambda^n_t \sim \lambda^m_t \iff \frac{\lambda^n_t}{\lambda^m_t} = 2^{\pm k},\ k \in Z$$

Αντιπρόσωπος της τονικής κλάσης $[\lambda^n_{n,m,\ldots}] \in Z/\sim$, του τόνου $\lambda^n_{n.m.\ldots}$, επιλέγεται ο ρητός αριθμός της μορφής $\lambda^n_{n,m,\ldots} * 2^{-k}$, $k \in Z$ που ανήκει στο διάστημα $[1,2)$ ρητών αριθμών.

Το μονοειδές των κλάσεων ορίζεται με την προβολή της πράξης της συγχορδίας σε αυτό. Προφανώς η προβολή π, της πράξης της συγχορδίας $+$, στο $S/\sim$, ως $\pi : S \rightarrow S/\sim$, $\pi(\sigma) = [\sigma]$, είναι αυτονόητη και καλώς ορισμένη. Έτσι

$$[\sigma^n] + [\sigma^m] = [gcd(\sigma^n, \sigma^m)]$$

Η ασθενής διάταξη όμως αλλάζει ελαφρά νόημα. $[a] \leq [b]$ σημαίνει ότι υπάρχει k τέτοιο ώστε η $a * 2^k$ διαιρείται από την b.
Επεκτείνοντας την παραπάνω σχέση και διαιρώντας με $\sigma^{n.m.\cdots}$ έχουμε ότι, σε σχέση με τους τόνους λ^n μιας συγχορδίας, ισχύει

$$[\lambda^n] + [\lambda^m] + \ldots = [1]$$

Αν υποθέσουμε κάποια τονικότητα και η σχέση δεν ισχύει τότε προφανώς η υπόθεσή μας ήταν λανθασμένη και οι συγχορδία συχνοτήτων υποστηρίζει άλλη τονικότητα. Παραδείγματος χάριν, αν υποθέσουμε σαν τονικότητα και κλάση [1] την συχνότητα της Ντο και ακουστούν σε συγχορδία η Ντο [1], η Σολ $[3/2] = [3]$ και η Ρε $[9/8] = [9]$ τότε $[1] + [3] + [9] = [gcd(1,3,9)] = [1]$ σωστά η τονικότητα της συγχορδίας είναι η Ντο. Αν αφαιρέσουμε όμως την Ντο τότε η συγχορδία των Σολ και Ρε $[3] + [9] = [gcd(3,9)] = [3]$ οπότε προφανώς η Ντο δεν είναι η σωστή τονικότητα αλλά η Σολ [3].

[12] Οι επτά συνήθεις νότες ή πληρέστερα οι δώδεκα συνήθεις τόνοι είναι, επτά ή δώδεκα αντίστοιχα, κλάσεις συχνοτήτων που αντιστοιχούν σε σημεία στο διάστημα $[1,2)$ επί των άρρητων αριθμών. Οι νότες χρησιμοποιούνται ως κλάσεις συχνοτήτων στις μουσικές αναλύσεις ενώ στις παρτιτούρες σημειώνονται ως συχνότητες.

Απλή τονικότητα είναι η τονικότητα που η κλάση της είναι η κλάση της συχνότητας αναφοράς. Αυτό έχει σαν συνέπεια να συνηχούν μόνο συχνότητες που ανήκουν στην $[\sigma^0]$.

Πρόοδος τονικότητας είναι η μεταβολή της σε άλλης κλάσης τονικότητα.

Παθητική πρόοδος (ή *αδύνατη* ή *κατιούσα* πρόοδος) μιας τονικότητας είναι η μετάλλαξή της σε τονικότητα που κλάση της είναι ίση με την κλάση τονικότητας κάποιου γνήσιου υποσυνόλου των συχνοτήτων που την υποστηρίζουν.

Ενεργητική πρόοδος (ή *δυνατή* ή *ανιούσα* πρόοδος) μιας τονικότητας είναι η όποια *μη παθητική* πρόοδός της σε νέα διαφορετικής κλάσης τονικότητα. Η αρχική τονικότητα μπορεί να υποστηρίζει, ως συχνότητα, την νέα τονικότητα μπορεί και όχι.

2.2 Ο χώρος τόνων και τονικότητας

Το σύνολο των συχνοτήτων είναι μονοδιάστατος χώρος, δηλαδή είναι ισόμορφο με την ευθεία R των άρρητων αριθμών. Οφείλουμε να ορίσουμε κάποια συχνότητα αυτού του χώρου ως *συχνότητα αναφοράς*, στην οποία αναφέρονται οι αντιπρόσωποι των κλάσεων συχνοτήτων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα. Η συχνότητα $\sigma^0 = 440Hz$ αναφέρεται συνήθως ως συχνότητα αναφοράς.

Η σαμπρέλα τόνων και τονικότητας είναι ο χώρος όπου αυτοί τοποθετούνται. Η ταύτιση των άκρων του διαστήματος των κλάσεων συχνοτήτων $[1, 2)$ χρειάζεται μία ακόμα διάσταση για να οπτικοποιηθεί ως κύκλος. Χρειάζεται δηλαδή δισδιάστατο χώρο ώστε να καμφθεί μέσα σ' αυτόν η ευθεία των συχνοτήτων. Ωστόσο, παρά την οπτικοποίηση του κόσμου των κλάσεων των τονικοτήτων σε *κύκλο τονικοτήτων*, η ευκλείδια εγγύτητα παραμένει ψευδαίσθηση, πιθανότα τελείως αντίθετη με τις σχέσεις διατάξης που προαναφέρθηκαν. Με την ίδια λογική, όλες οι κλάσεις τόνων $[\lambda^n]$ μιας τονικότητας $\sigma^{n,m,\cdots}$, αντιστοιχούν σε *κύκλο τόνων* $[1, 2)$. Από κάθε σημείο $[\sigma^{n,m,\cdots}]$ του κύκλου τονικοτήτων διέρχεται ένας κύκλος τόνων $[1, 2)$, όπου η μονάδα $[\lambda^{n,m,\cdots}] = 1$ συμπίπτει με την κλάση τονικότητας $[\sigma^{n,m,\cdots}]$. Έτσι, χρειαζόμαστε ακόμα μία διάσταση ώστε να οπτικοποιήσουμε τον κύκλο των τόνων σε διαφορετική διάσταση από αυτόν του κύκλου τονικοτήτων. Οπότε, σε τρισδιάστατο χώρο, οι κύκλοι όλων των δυνατών κλάσεων τόνων, επί καθενός σημείου του κύκλου των τονικοτήτων, είναι επιφάνεια μιας σαμπρέλας όπως εδώ. Η σαμπρέλα είναι το σύμπαν των κλάσεων των τονικοτήτων και των τόνων τους.

Κάθε τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ *ενυπάρχει πάντα*, ως κρυφή ή φανερή, στο άκουσμα κάθε συχνότητας $\sigma^n = \sigma^0/n$ που την στηρίζει[13]. Ωστόσο, ο τόνος λ^n, της συχνότη-

[13]Οι μικρότερες υποσυχνότητές της, $\sigma_n^k = \sigma^n/k$, ενυπάρχουν πάντα εν δυνάμει. Όμως, κατά την αντίληψή μας, υπερσκελίζονται από το άκουσμα της σ^n. Συμβαίνει δηλαδή το αντίθετο από ό,τι συμβαίνει στις αρμονικές $k * \sigma^n$, οι οποίες άλλοτε δημιουργούνται από τα μουσικά όργανα και άλλοτε όχι,

τας σ^n, σχεδόν ποτέ δεν ανήκει από μόνος του στον κύκλο τόνων της $\sigma^{n,m,\cdots}$. Το σύνολο των σημείων $\{[\lambda^n],[\lambda^m],\ldots\}$, δηλαδή το σύνολο των τόνων συγχορδίας, είναι που ανήκει στον κύκλο τόνων που διέρχεται από την κλάση τονικότητας $[\sigma^{n,m,\cdots}]$. Ένα γνήσιο υποσύνολο ή υπερσύνολο αυτού μπορεί κάλλιστα, ως συγχορδία, να ανήκει σε κύκλο τόνων διαφορετικής τονικότητας. Παρά το γεγονός ότι στον κύκλο τόνων μιας τονικότητας δεν ανήκουν απομονωμένοι τόνοι, παρά μόνον συγχορδίες από τόνους, εντούτοις ο κύκλος τόνων $[1,2)$ περιέχει άπειρα σημεία και γεννάται το ερώτημα ποία από αυτά μπορεί να είναι υποψήφια ώστε να αποτελούν *στοιχεία του συνόλου των τόνων* $\{[\lambda^n],[\lambda^m],\ldots\}$ που δημιουργούν τις συγχορδίες. Επειδή η τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ είναι κοινός διαιρέτης όλων των σ^n που την στηρίζουν, είναι προφανές ότι τα μόνα κατάλληλα σημεία του κύκλου των τόνων της, για στοιχεία του $\{[\lambda^n],[\lambda^m],\ldots\}$, είναι αυτά που, εξ ορισμού, αντιστοιχούν στις αρμονικές της, δηλαδή στις συχνότητες $n*\sigma^{n,m,\cdots}$, $n \in \mathrm{Z}^+$. Οπότε $[\lambda^n]=[n]$, δηλαδή οι κλάσεις τόνων συμπίπτουν με τις κλάσεις ακεραίων. Έτσι, οι αντιπρόσωποι των κλάσεων των τόνων είναι όροι της ακολουθίας $\{1, 3/2, 5/4, 7/4, 9/8, 11/8, \ldots\}$[14].

Τα στοιχεία του συνόλου των τόνων που δύνανται να υποστηρίζουν μια τονικότητα, πέρα από το ότι ανήκουν στους ακεραίους θετικούς, μπορούν να περιοριστούν δραστικά λόγω του ορίου που θέτει το ακουστικό φάσμα που αναφέρθηκε στη σελίδα 10. Εξ ορισμού ισχύει ότι

$$\lambda^n = \frac{\sigma^n}{\sigma^{n,m,\cdots}} \Rightarrow 20Hz \leq \sigma^{n,m,\cdots} = \frac{\sigma^n}{\lambda^n} \Rightarrow \lambda^n \leq \frac{\sigma^n}{20Hz}$$

Είναι τελείως υποκειμενικό αλλά, αν θέλουμε η συχνότητα $440Hz$ να υποστηρίζει τονικότητα εντός του ακουστικού φάσματος πρέπει $\lambda^n \leq \frac{440}{20} = 22$. Όσο πιο κοντινοί στην μονάδα είναι κάποιοι τόνοι τόσο πιο πολύ προσλαμβάνεται ότι όντως είναι στοιχεία της τονικότητας που υποστηρίζουν. Τα πιο κοντινά διαφορετικά της μονάδας στοιχεία είναι το $[3/2]$ και το $[5/4]$. Δεν θα προσθέσουμε άλλο στοιχείο για να μην ξεφεύγει εύκολα η τονικότητα εκτός ακουστικού φάσματος[15].

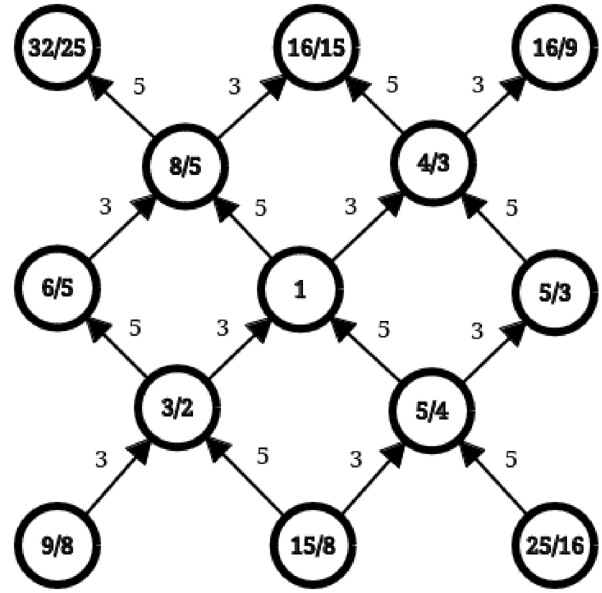
Ο δυισμός τόνων και τονικοτήτων είναι μια αναγκαία πρόσθετη δομή, επί της σαμπρέλας στην οποία τοποθετούνται, ώστε να περιοριστούν οι κλάσεις τονικοτήτων οι οποίες, μέχρι τώρα, αντιπροσωπεύονται από τα άπειρα σημεία του διαστήματος $[1,2)$ των άρρητων αριθμών. Κάθε τόνος λ^n, πολλαπλασιαζόμενος με την τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ που υποστηρίζει, αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα στην συχνότητα $\sigma^n = \lambda^n * \sigma^{n,m,\cdots}$. Με την πρόσθετη δομή, επί του κύκλου τονικοτήτων, επιτρέπουμε, ως κλάσεις τονικοτήτων, μόνον τα σημεία που αντιστοιχούν σε συχνότητες τόνων. Αρκεί βέβαια να καθορίσουμε μια συχνότητα αναφοράς σ^0, ώστε η τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ να αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη συχνότητα $\sigma^{n,m,\cdots} = \lambda * \sigma^0$. Δημιουργούμε έτσι ένα δένδρο τονικοτήτων όπου κάθε τονικότητα συνδέεται με

εξαρτώμενες από το όργανο που παράγει την βασική συχνότητα σ.

[14]Είναι θέμα μουσικής κουλτούρας πόσοι και ποίοι απ' αυτούς χρησιμοποιούνται και συνθέτουν ένα σύνολο εν χρήση τόνων στην πράξη.

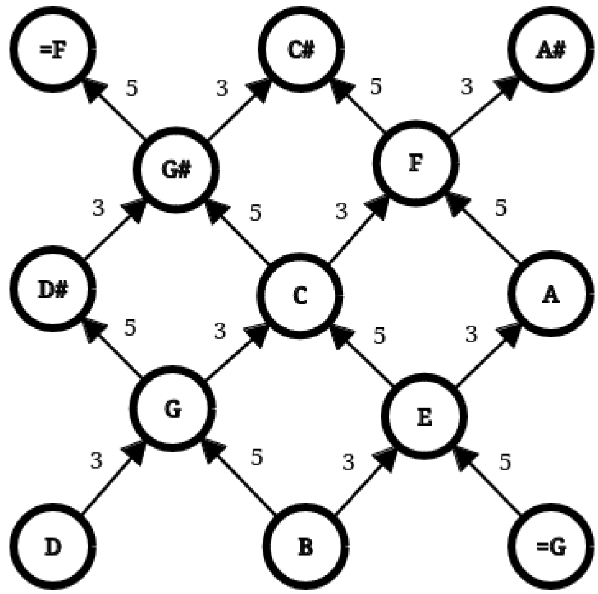
[15]Αν είχαμε προσθέσει και το στοιχείο $[7/4]$, για παράδειγμα, το γινόμενο με το $[5]$ θα απαιτούσε το $[5*7]=[35]$, οπότε οι συνήθεις συχνότητες θα έπρεπε να είναι μία οκτάβα υψηλότερες στα $880Hz$ ώστε $880/20 = 44 \geq 35$.

δύο άλλες τονικότητες μέσω των δύο κλαδιών που αντιστοιχούν στους δύο βασικούς τόνους [3/2] και [5/4]. Στο σχήμα 4 φαίνεται τμήμα του δένδρου, όπου, με κέντρο την τονικότητα αναφοράς [1], βλέπουμε τις κλάσεις τονικοτήτων δύο επιπέδων τόσο κατά την κατεύθυνση εκ των δύο βασικών τόνων προς την τονικότητα που υποστηρίζουν, όπου σημειώνονται με 3 ο [3/2] και 5 ο [5/4], όσο και δύο επιπέδων κατά την αντίθετη κατεύθυνση, αφού, κατά την επιθυμητή πρόσθετη δομή μας, και η κεντρική τονικότητα [1] κάποιες άλλες τονικότητες οφείλει να στηρίξει.



Σχήμα 4: Σχέσεις τονικοτήτων ως τόνος η μιά της άλλης

Όλες οι κλάσεις, αναφορικά με την [1], θεωρούνται απλές αναλογίες χρησιμοποιώντας αριθμούς μικρότερους του 22, εκτός από τις [32/25] και [25/16]. Και οι δύο πλησιάζουν είτε τις απλές κλάσεις [9/7] και [11/7] αντίστοιχα, αλλά δεν έχουμε συνηθίσει να ακούμε ούτε χρησιμοποιήσαμε τόνους που βασίζονται στο 7, είτε τις απλές κλάσεις [4/3] και [3/2] αντίστοιχα. Ας δεχθούμε ότι τις αγνούμε ή η συνήθεια και η οικονομία της αντίληψής μας, της σελίδας 6, μας κάνει να αντιλαμβανόμαστε το άκουσμα της [32/25] ως [4/3] και της [25/16] ως [3/2]. Συμβολίζοντας την κλάση της τονικότητας [1] με C και τις υπόλοιπες σύμφωνα με τις συγκερασμένες συχνότητες, οι σχέσεις των κλάσεων των τονικοτήτων φαίνονται στο σχήμα 5. Ας σημειωθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι μεταβατικές. Αν η κλάση τονικότητας $[X]$ στηρίζει την $[Y]$ και η $[Y]$ την $[Z]$ τότε η $[X]$ στηρίζει την $[Z]$, απλά η στήριξη είναι πιο απόμακρη. Στο παραπάνω σχήμα εμφανίζονται οι ένδεκα από τους γνωστούς τόνους, ενώ λείπει ο τόνος *F#* που αντιστοιχεί στο διάστηκα του τριτόνου *CF#*. Δυστυχώς, όσο καθαρά και αν ακούγονται οι τονικότητες γύρω από την κεντρική κλάση [1], όσο απομακρυνόμαστε από αυτήν, πυκνώνουν οι κλά-



Σχήμα 5: Σχέσεις ονομασμένων τονικοτήτων ως τόνος η μιά της άλλης

σεις στο διάστημα $[1, 2)$, καθώς ουδέποτε θα καταλήξουμε ξανά σε τονικότητα κλάσης [1], γίνονται δυσδιάκριτες σε σχέση με τις κλάσεις απλών αναλογιών και ο ήχος τους γίνεται συγκεχυμένος. Η παραπάνω δυσκολία ξεπερνιέται κατά μεγάλο βαθμό μοιράζοντας το σφάλμα των απομακρυσμένων κλάσεων σε όλες τις κλάσεις, υιοθετώντας κλάσεις τονικοτήτων που χωρίζουν το 2, την οκτάβα δηλαδή, σε k ίσα αναλογικά διαστήματα, με τέτοιο λόγο a ώστε $a^k = 2$. Δημιουργείται έτσι ένα **ισοσυγκερασμένο σύστημα** k εν χρήση συχνοτήτων. Παρόλο που δεν υπάρχουν πλέον οι τόνοι ως ακέραιοι αριθμοί, αφού δεν υπάρχει ούτε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των άρρητων συχνοτήτων σε συγχορδία, εντούτοις αν τα a^k είναι πολύ κοντά σε απλούς λόγους, η ανάγκη για οικονομία της πληροφορίας προκαλεί την προσλαμβάνουσά τους ως απλούς ρητούς λόγους. Ο εν χρήση αριθμός για το k εξαρτάται από την μουσική κουλτούρα, την εξοικείωση με την σχέση συχνοτήτων που προκαλεί και από το πόσο καλά προσεγγίζουν οι αναλογίες απλούς λόγους. Στη σύγχρονη εποχή έχει σχεδόν καθολικά επικρατήσει η τιμή $k = 12$ με το δωδεκατονικό ισοσυγκερασμένο σύστημα. Σε αυτό το σύστημα $a = 2^{1/12}$. Οι δε λόγοι των ένδεκα κλάσεων τονικοτήτων, του τμήματος του δένδρου που εξετάσαμε, προσεγγίζουν πολύ καλά τα εν χρήση $a^k = 2^{k/12}$. Εφόσον καταλήξαμε σε δώδεκα σημεία επί του κύκλου των τονικοτήτων τότε, σε κάθε κύκλο τόνων, θα επιτρέψουμε δώδεκα σημεία ίδιας κλάσης προς επιλογή των τόνων λ^n των συγχορδιών. Αντιστοιχώντας την μονάδα στην κλάση $[C]$, οι καλύτερες προσεγγίσεις των $2^{k/12}$ με απλούς λόγους φαίνονται στον πίνακα 1

waveform generator

k	0:C	1:C#,Db	2:D	3:D#,Eb	4:E	5:F
$[\lambda]$	1	17/16	9/8	6/5	5/4	4/3
k	6:F#,Gb	7:G	8:G#,Ab	9:A	10:A#,Bb	11:B
$[\lambda]$	17/12	3/2	8/5	5/3	16/9	15/8

Πίνακας 1: Προσεγγίσεις των $2^{k/12}$ με απλούς λόγους