

Δομή της τονικότητας στην μουσική

Προσπάθεια δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς ως μνημονικό κανόνα

jimishol

Περίληψη

Σε μια προσπάθεια, λόγω περιέργειας, στοιχειώδους κατανόησης της μουσικής αρμονίας, χωρίς προτέρα ιδιαίτερη γνώση, διάβασα το Open Music Theory, που φαίνεται όμοιο με το Integrated Musicianship: Theory, και δύο βιβλία του Arnold Schoenberg, το THEORY OF HARMONY και το Structural Functions Of Harmony. Τα βιβλία του Schoenberg επηρέασαν ιδιαίτερα την οπτική μου.

Γνωρίζω αρκετά μαθηματικά ώστε να διακρίνω την τέχνη πίσω από αυτά (χρειάστηκα πέντε έτη για να διακρίνω την τέχνη πίσω από την γενική θεωρία της σχετικότητας) αλλά δεν γνωρίζω αρκετή μουσική ώστε να διακρίνω τα μαθηματικά πίσω από αυτήν. Λογικά όμως, δεν μπορεί να υπάρξει η μαθηματική συνέπεια στην τέχνη.

Με τα μαθηματικά οδηγούμαστε με συνέπεια σε συγκεκριμένα αποτελέσματα, οπότε η τέχνη έγκειται στην ελευθερία επιλογής του τρόπου με τον οποίο φθάνουμε σε αυτά. Στην τέχνη όμως η ελευθερία επιλογής αποτελέσματος οδηγεί στο ότι κάθε κανόνας ή απαγόρευση μπορεί να παραβιασθεί, αρκεί η παράβαση να μην συμβαίνει κατά τύχη. Η κάθε παράβαση οφείλει να αιτιολογείται από κάποια δομή που είναι δημιουργήμα της αυθαίρετης επιλογής του καλλιτέχνη. Για να δημιουργηθεί όμως η όποια αυθαίρετη δομή, που αιτιολογεί την όποια παράβαση, χρειάζεται κάποιο σύστημα αναφοράς στο οποίο τους άξονες θα αναφέρεται. Όπως σε κάθε τι στο σύμπαν, τα μαθηματικά θα ενυπάρχουν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, όμως η εύρεση ενός συστήματος αναφοράς με μαθηματική συνέπεια και πληρότητα είναι πέρα από τις δυνάμεις, τις λιγιστές μουσικές γνώσεις και τις ικανότητές μου. Συνεπώς, σημειώνω τις σχέσεις μου αλλά δεν μπορεί να αναμένεται επιστημονική συνέπεια και πληρότητα σε αυτές.

Η χρήση μαθηματικών και φυσικών εννοιών (όπως φράκταλ, θεωρία κατηγοριών, θεωρία ομάδων, δυϊκοί χώροι, ενέργεια, βαρύτητα, ροή κ.α.) αποσκοπεί σε μια προσπάθεια δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς, ως μνημονικό κανόνα, με όσο μου είναι δυνατόν μεγαλύτερη συνέπεια, ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι εξαιρέσεις που πρέπει να απομνημονευθούν, και πληρότητα, ώστε να σχετίζεται με όσο περισσότερο υλικό εξ όσων έχω διαβάσει.

Το παρόν δεν είναι κατάλληλο για όποιον θέλει να διδαχθεί αρμονία. Υπάρχει ο κίνδυνος μια ενδεχομένως στρεβλή και ελλιπής οπτική να θεωρηθεί ορθή ή πλήρης. Αντιθέτως, ένας ήδη γνώστης της αρμονίας μπορεί να κερδίσει από μια νέα οπτική, ακόμα και μέσω της απόδειξής του ότι αυτή η οπτική είναι λανθασμένη ή ελλιπής.

Ανυπαρξία

1 Γεννηθήτω ο χρόνος

Ο χρόνος επιτρέπει την ύπαρξη στιγμών δημιουργίας. Χωρίς την ύπαρξη χρονικών στιγμών δεν μπορεί να υπάρξει στιγμή δημιουργίας. Επιβάλλει δε το τέλος αυτών των στιγμών και την ανυπαρξία μεταξύ αυτών των στιγμών, αλλιώς η μεταβολή της ύπαρξης θα ισοδυναμούσε με ανυπαρξία. Ο χρόνος είναι συνυφασμένος με την έννοια της μεταβολής. Διαδοχή γέννησης - θανάτου, ύπαρξης - ανυπαρξίας, bit - zero, κτύπου - ησυχίας. Χωρίς την βοήθεια εξωσυμπαντικού, υπερχρονικού παρατηρητή, δεν μπορώ, μόνον μέσα από το ίδιο το σύμπαν, να ξεχωρίσω αν ο χρόνος πραγματώνεται, ή γίνεται αντιληπτός, μέσω των μεταβολών ή αν οι μεταβολές πραγματώνονται, ή γίνονται αντιληπτές, μέσω του χρόνου. Πιστεύω πως ο χρόνος είναι το ουσιαστικότερο ίσως συστατικό του σύμπαντος και δεν υπάρχει ανεξάρτητος έξω από αυτό.¹

Κάθε γέννηση προϋποθέτει την ύπαρξη του χρόνου και αναφέρεται σε κάποια χρονική στιγμή, όποτε αυτή συνέβη. Η γέννηση του χρόνου είναι παραδοξότητα λόγω αυτής ακριβώς της κρυφής αυτοαναφοράς του χρόνου στον ευατό του.

Ο χρόνος του σύμπαντος δεν μπορεί να καθορίσει τον ευατό του και να ισχυριστεί “τότε γεννήθηκα”. Δεν μπορεί να ορίσει το Big Bang με τρόπο που να καθορίζει στιγμές του χρόνου πριν από αυτό.

Αυτό που με εντυπωσίασε στην γενική θεωρία της σχετικότητας δεν είναι ότι ο χρόνος είναι σχετικός με τον εκάστοτε παρατηρητή, ούτε ότι συνυπάρχει με τον χώρο ως χωρόχρονος, ούτε ίσως ότι μέσα στις μαύρες τρύπες ο χρόνος, παρά το χρονικό βέλος που τον διαφοροποιεί από τις χωρικές διαστάσεις, μετουσιώνεται σε χώρο και ο χώρος σε χρόνο. Με εντυπωσίασε ότι το πέρας του άπειρου χρόνου εμφανίζεται “χωρικά” στους ορίζοντες γεγονότων. Ένα θνητό πλάσμα, που κατευθύνεται σε μία μαύρη τρύπα, αποκτά κυριολεκτικά αθανασία σε σχέση με όποιον το παρατηρεί εκ του μακρόθεν και, όντας ζωντανό, πλησιάζει εσάει την μαύρη τρύπα. Ακούγεται παράξενο αλλά αν δεν σας ενδιαφέρει αν ο αγαπημένος σας, για τον ίδιο, σκοτωθεί στα επόμενα πέντε λεπτά του αλλά θέλετε, για εσάς, περιγραφικά να ζήσει τόσο πολύ όσο τρισεκατομμύρια χρόνια μετά τον θάνατό σας και κυριολεκτικά να ζει στην αιωνιότητα, σπρώξτε τον προς μια μαύρη τρύπα.

Η μέτρηση του χρόνου αφορά στις διακριτές στιγμές ύπαρξης. Η δομή του χρόνου, που επιτρέπει διακριτές στιγμές ύπαρξης, επιτρέπει την αντιστοίχιση στιγμών ύπαρξης σε ακεραίους αριθμούς άρα και την σύγκριση χρονικών διαστημάτων του μέσω του πλήθους αυτών. Το, μεταξύ των χρονικών στιγμών ύπαρξης, χρονικό διάστημα ανυπαρξίας, αν βιώνεται, βιώνεται υποκειμενικά από τον εκάστοτε παρατηρητή του και δεν μπορεί να μετρηθεί αντικειμενικά χωρίς το σφάλμα της αυτοαναφοράς στον ίδιο τον χρόνο². Έτσι, ορίζουμε ότι δύο χρονικά διαστή-

¹ Αν ρωτούσατε έναν κβαντικό φυσικό για την φύση του χρόνου στον μικρόκοσμο θα απαντούσε ότι ο χρόνος είναι απόλυτος και υπάρχει ανεξάρτητα του σύμπαντος. Δεν ασχολήθηκα όμως με κβαντική φυσική ούτε φιλοδοξώ να λύσω τις αντιθέσεις των δύο θεωριών. Απλά βρίσκω αρκετά διασκεδαστικό να μπλέκω την θεωρία της σχετικότητας μέσα σε σημειώσεις για την μουσική αρμονία.

² Το ίδιο σφάλμα αυτοαναφοράς συμβαίνει και με τη μέτρηση του χώρου. Εξ ου, η θεωρία της σχετικότητας, χωρίς το αξίωμα του απόλυτου χώρου και χρόνου, εξετάζει συμβάντα στον χωρόχρονο.

ματα είναι ίσα όταν κατά την διάρκειά τους συμβαίνουν ίσες μεταβολές διαδοχικής ύπαρξης - ανυπαρξίας κάποιου ίδιου φαινομένου. Το 1967 ορίστηκε ότι ένα δευτερόλεπτο έχει ίση διάρκεια με αυτήν που έχουν 9.192.631.770 μεταβολές που αφορούν στο χημικό στοιχείο Caesium-133.

Η διαδοχή συμβάντων ανά ίσα χρονικά διαστήματα, επί της δομής του χρόνου, δεν εξαρτάται από την κλίμακα αυτών των χρονικών διαστημάτων. Η όποια δομή του χρόνου, που κάνει δυνατή την δημιουργία ίσων χρονικών διαστημάτων, του επιτρέπει να αυτοκαθορίζεται ως φράκταλ. Έχει την ιδιότητα της αυτοομοιότητας. Όσο και αν μεγεθύνουμε ή σμικρύνουμε ένα χρονικό διάστημα θα έχει την ίδια δομή, που θα επιτρέπει την δημιουργία ίσων χρονικών διαστημάτων εντός αυτού³. Τα συμβάντα ανά ίσα χρονικά διαστήματα ας τα ονομάσουμε *κτύπους*, με την έννοια των συμβάντων ενός μετρονόμου. Η ακολουθία συμβάντων, στην οποία θα αναφερόμαστε ως *ακολουθία αναφοράς*, μετράται με το αντίστροφο του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών κτύπων. Ένδειξη της στις παρτιτούρες είναι οι κτύποι ανά λεπτό (*BPM*), όπου όμως το *beat* αντιστοιχεί σε τυπική ομάδα κτύπων και όχι στον ένα κτύπο της ακολουθίας αναφοράς.

Η ομαδοποίηση των διαδοχικών κτύπων ανά έναν, δύο, τρεις, τέσσερις κ.λ.π., εφοδιάζει την άπειρη ακολουθία κτύπων με σημαντικότερη δομή. Κάθε θέση σε μια *τυπική ομάδα*⁴ γίνεται αντιπρόσωπος *κλάσεων (συνόλων) κτύπων*. Με την ομαδοποίηση αναγνωρίζουμε ποιοι από τους κτύπους της φυσικής ακολουθίας είναι πρώτοι, ποιοι είναι δεύτεροι, τρίτοι, τέταρτοι κ.λ.π. εντός της κάθε ομάδας και έτσι μπορούμε να τους διαφοροποιήσουμε δημιουργικά, όπως συμβάντα με περισσότερη ένταση, με λιγότερη ένταση, με απουσία⁵, με διαφορετική διάρκεια ή χροιά και άλλα. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε τέσσερις κτύπους (a, a, a, a). Αντιπροσωπεύουν την ομαδοποίηση της ακολουθίας ανά έναν κτύπο, δηλαδή αποτελούν μία μονομελή ομάδα που επαναλαμβάνεται ως $([a], [a], [a], [a])$. Ομαδοποίηση ανά δύο σημαίνει ότι μία διμελής ομάδα επαναλαμβάνονται διαδοχικά ως $([a, c], [a, c])$. Ομαδοποίηση ανά τρεις κτύπους σημαίνει ότι τριμελής ομάδα επαναλαμβάνεται κ.ο.κ. Τα *μέτρα* στις παρτιτούρες είναι δομή τέτοιων ομαδοποιήσεων. Με την ίδια λογική, μπορούμε να εφοδιάσουμε με παρόμοια δομή και τις διαδοχικές ομάδες, ομαδοποιώντας τις σε υπερομάδες. Ομαδοποίηση των διμελών ομάδων ανά δύο σημαίνει ότι διμελής ομάδα, που όμως τα μέλη της είναι διμελής ομάδες επίσης, επαναλαμβάνεται π.χ. $([[a, c], [b, c]], [[a, c], [b, c]])$ που μπορεί να ιδωθεί ως ισοδύναμη με μία τετραμελή ομάδα $[a, c, b, c]$ που επαναλαμβάνεται. Τα *υπερμέτρα* στις παρτιτούρες είναι δομή τέτοιων ομαδοποιήσεων. Το *μέτρο* είναι απλώς η βασική για τον συνθέτη, ομαδοποίηση της ακολουθίας.

³Το ίδιο ισχύει και για τους ρητούς αριθμούς. Οποιοδήποτε διάστημα μεταξύ δύο ρητών αριθμών μπορεί να χωριστεί σε ίσα διαστήματα μεταξύ ρητών αριθμών

⁴Είναι προφανής ο ισομορφισμός μεταξύ των ομαδοποιήσεων και των τυπικών ομάδων τους, δια του πλήθους των τελευταίων, με τους ακέραιους θετικούς αριθμούς.

⁵Η απουσία, ως συμβάν αντίθετο της παρουσίας, αντιστοιχεί σε *κτύπο*. Με αυτήν πετυχαίνουμε επανάληψη συμβάντων ανά άνισα χρονικά διαστήματα. Έστω ομάδα $[a, a, x]$ με x να συμβολίζει την απουσία συμβάντος. Κατά την επανάληψη της ομάδας το συμβάν a συμβαίνει κάθε φορά σε διαφορετικό χρονικό διάστημα απ' ότι συνέβη την προηγούμενη φορά.

Η διάκριση ομαδοποιήσεων γίνεται προς αποσαφήνιση ορολογιών που χρησιμοποιούνται στο παρόν ως η εξής:

Εν χρήση ομαδοποιήσεις είναι αυτές που, είτε λόγω διαφοροποίησης μεταξύ των μελών της τυπικής ομάδας τους είτε ως μονομελής, χρησιμοποιούνται εν τη πράξη. Διακρίνονται σε

Φανερές που χρησιμοποιούνται άμεσα
π.χ. $(A, a, a)(A, a, a)(A, a, a) \dots$

Κρυφές ή χαμένες που εμφανίζονται έμμεσα λόγω συνύπαρξης π.χ. όταν η (A, a, a) συνυπάρχει με την (B, b) κρυφή είναι η (AB, ab, aB, Ab, aB, ab) των έξι κτύπων όπως
 $(AB, ab, aB, Ab, aB, ab)(AB, ab, aB, Ab, aB, ab) \dots$
Η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο, αν δεν είναι φανερή, είναι κρυφή, όντας πάντα παρούσα, αφού συμπίπτει με την ακολουθία αναφοράς.

Εν δυνάμει ομαδοποιήσεις είναι αυτές που αναφερόμαστε σε αυτές αλλά, χωρίς διαφοροποίηση των μελών της τυπικής ομάδας τους, ως προς την αντίληψή μας, στην πράξη υπερσκελίζονται από τις εν χρήση ομαδοποιήσεις.
π.χ. επί της τριμελούς $(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a) \dots$ η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο κυριαρχεί. Στο σχήμα 1, ακόμα κι αν δεν υπήρχαν οι παρεστιγμένες μισές νότες, εν δυνάμει θα ήταν υποψήφιος να υπάρξουν.



Σχήμα 1: Εν δυνάμει ομαδοποίηση 12/16

Ρυθμικότητα είναι το ελάχιστο τμήμα της ακολουθίας συμβάντων που περι-κλείει ακέραια όλα τα είδη των τυπικών ομάδων, των εν χρήση ομαδοποιήσεων. Η ρυθμικότητα επαναλαμβάνεται ανά ίσα χρονικά διαστήματα. Μετράται με το πλήθος των κτύπων της και ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του πλήθους των κτύπων της κάθε τυπικής ομάδας που την υποστηρίζουν. Χωρίς εν χρήση ομαδοποιήσεις δεν μπορεί να υπάρξει ρυθμικότητα, εκτός της τετριμμένης με την τυπική ομάδα του ενός κτύπου. Η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο υποστηρίζει κάθε ρυθμικότητα. Είναι δε ισοδύναμη με την εσαεί επανάληψη του ίδιου κτύπου ανά ίσα χρονικά διαστήματα.

Ρυθμός μιας ομαδοποίησης, σε σχέση με την ρυθμικότητα που υποστηρίζει, είναι ο λόγος του πλήθους των μελών της ρυθμικότητας προς το πλήθος των μελών της τυπικής ομάδας της. Με διαφορετική διατύπωση, είναι το πόσες φορές χωράει η τυπική ομάδα της ομαδοποίησης στην ρυθμικότητα ή πόσο πιο συχνά εμφανίζεται, στην ακολουθία συμβάντων, η τυπική ομάδα της από αυτήν της

ρυθμικότητας. Εκ του ορισμού της ρυθμικότητας, είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Ο ρυθμός ομαδοποίησης της μεγαλύτερης δυνατής ομάδας, δηλαδή ο ρυθμός της ίδιας της ρυθμικότητας, είναι η μονάδα. Η *χρονική υπογραφή* είναι σύμβαση μάλλον ελλιπής στο να περιγράφει κάθε πιθανό ρυθμό (ομαδοποίηση) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, ο άνω αριθμός της υπογραφής είναι σαφής ως προς το πόσοι κτύποι μετρώνται σε κάθε μέτρο. Το μέτρο είναι απλώς η βασική για τον συνθέτη ομαδοποίηση και τίποτε δεν εμποδίζει σε μια υπογραφή, $\frac{3}{4}$ για παράδειγμα, να χρησιμοποιηθούν έξι όγδοα, όσοι οι κτύποι της ρυθμικότητας, αντί τριών τετάρτων, όπως θα ήταν αναμενόμενο. Σε κάθε ακολουθία αναφοράς ενυπάρχουν άπειρες όλο και μεγαλύτερες ρυθμικότητες. Οι μεγαλύτεροι ρυθμοί αυτών, που αντιστοιχούν στις μονομελές ομάδες, έχουν όριο το άπειρο, όπου ένα συμβάν συμβαίνει άπαξ, με μηδενική συχνότητα, και δεν επαναλαμβάνεται.

Η οικονομία στην πληροφορία είναι ανάγκη και περιορισμός που επιβάλλεται από το πεπερασμένο του ανθρώπινου εγκεφάλου. Η αντίληψή μας περιορίζεται στον συσχετισμό των πληροφοριών, όχι με βάση τα ακριβή δεδομένα αλλά, με απλά μοτίβα. Αν δούμε σε έναν πίνακα ζωγραφικής θάλασσα που καταλαμβάνει τμήμα του έργου με αναλογία $2/3$.236, δηλαδή της χρυσής τομής, θα την αντιληφθούμε ως να καταλαμβάνει τα $2/3$ του κάδρου. Σε σχέση με πληθυσμούς, η οικονομία στην πληροφορία προκαλεί στην αντίληψή μας πρωτίστως την αναζήτηση της αναλογίας $1/2$, ως του πιο απλού μοτίβου σύγκρισης⁶. Συνεπώς, δύο ρυθμοί ταυτίζονται στην αντίληψή μας όταν ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου. Αλλά και οι υπερομάδες ταυτοποιούνται για τον ίδιο λόγο. Συνεπώς, όπου αναφέρονται “*ρυθμοί*”, συμπεριλαμβανόμενης και της ίδιας της ρυθμικότητας, *ενοούνται κλάσεις ρυθμών*, με συνέπεια διαφορετικοί ρυθμοί να είναι αυτοί που ο λόγος τους δεν είναι δύναμη του 2. Η ανάγκη της αντίληψής μας για απλότητα εφοδιάζει το σύνολο των ρυθμών με *βαθμό εγγύτητας με την ρυθμικότητα* που υποστηρίζουν. Ένας ρυθμός είναι τόσο πιο κοντά στην ρυθμικότητα που υποστηρίζει όσο μικρότερος είναι ο μέγιστος μόνος αριθμός που τον διαιρεί. Παραδείγματος χάριν, ο ρυθμός 12 είναι πιο κοντά στην ρυθμικότητα 1 από τον ρυθμό 5, διότι το μέγιστο 3, που διαιρεί το 12, είναι μικρότερο του 5⁷. Επειδή, κάθε σύνολο ομαδοποιήσεων υποστηρίζει κάποια συγκεκριμένη ρυθμικότητα, η *διαφοροποίηση των ρυθμικοτήτων μεταξύ τους εξαρτάται από τους, εν χρήση, ρυθμούς που την υποστηρίζουν*.

Μοναδικός ρυθμός ή απλός ρυθμός στις συνθέσεις υπάρχει όταν, λόγω της ταυτοποίησης, συνηχούν μόνο ρυθμοί που ο λόγος τους, ανά δύο, είναι δύναμη του 2. Όπως, παραδείγματος χάριν, όταν σε χρονική υπογραφή $\frac{4}{4}$ ακούγονται σε ένα μέτρο τέσσερις νότες του τετάρτου, δύο νότες μισής αξίας και μία ολόκληρη. Η ολόκληρη νότα αντιπροσωπεύει την ομαδοποίηση των κτύπων ανά (2^2) τέσσε-

⁶Επιπλέον, συμβολίζοντας με a την παρουσία συμβάντος και x την απουσία του, επειδή σε κάθε ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο η παρουσία του συμβάντος, εκ των πραγμάτων, εναλλάσσεται με την απουσία του, αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να εκληφθεί ως διπλάσια ομαδοποίηση $[a, x]$ ανά δύο κτύπους, κατά την οποία όμως η εν δυνάμει ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο είναι κρυφή.

⁷Πιθανολογώ ότι αν η αντίληψή μας ανιχνεύσει λόγο $\frac{1}{3}$ θα αναμένει το ίδιο μοτίβο και σε ανώτερα ή κατώτερα επίπεδα ομαδοποίησης, οπότε θα υπάρχει ταυτοποίηση και ως προς αυτόν τον λόγο. Με αυτό το σκεπτικό θα υπάρχουν τόσες κλάσεις ρυθμών όσοι οι πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας.

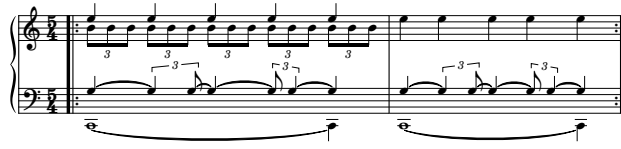
ρις κτύπους, που συμπίπτει με αυτήν του μέτρου και της ρυθμικότητας, οι μισές νότες την ομαδοποίηση ανά (2^1) δύο και κάθε νότα τετάρτου την ομαδοποίηση ανά (2^0) έναν κτύπο. Το πλήθος κτύπων κάθε ομάδας είναι δύναμη του 2, άρα όλοι οι ρυθμοί, συμπεριλαμβανομένης και της ρυθμικότητας, ταυτοποιούνται αφού ανήκουν στην ίδια κλάση $[1] = [2]$. Δεν υπάρχει ανάγκη διαφοροποίησης των εννοιών του ρυθμού και της ρυθμικότητας, αφού την συνήχηση των τριών ρυθμών την αντιλαμβανόμαστε ως μοναδική κλάση απλού ρυθμού.

Συνήχηση ρυθμών υπάρχει σε κάθε περίπτωση που οι συνθέσεις χρησιμοποιούν παραπάνω από μία κλάση ρυθμών. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα μέτρο χρησιμοποιούνται μία παρεστιγμένη μισή νότα και δύο παρεστιγμένα τέταρτα. Προφανώς η ρυθμικότητα εκφράζεται σε δύο παρεστιγμένα τέταρτα και οι δύο ρυθμοί ανήκουν στην κλάση $[\frac{2}{2}] = [\frac{2}{4}] = [2]$ του απλού ρυθμού. Αν όμως προσθέσουμε την ανάπτυξη της παρεστιγμένης μισής νότας, με χρήση τριών τετάρτων, τότε η ρυθμικότητα εκφράζεται πλέον σε έξι όγδοα και αυτή η προσθήκη, που ανήκει στην κλάση ρυθμών $[\frac{6}{4}] = [6] = [3]$, συνηχεί με τον ρυθμό κλάσης $[\frac{6}{8}] = [\frac{6}{3}] = [2]$ των υπολοίπων. Η συνήχηση δεν χρειάζεται δύο οι περισσότερους εν χρήση ρυθμούς. Έστω ομαδοποίηση $[A, a, a]$ με ρυθμό κλάσης $[3]$. Δεν παύει να αναφέρεται στην ομαδοποίηση ανα έναν κτύπο που είναι ρυθμός κλάσης $[2]$. Σε αυτήν την περίπτωση αυτός ο ρυθμός κλάσης $[2]$ αναφέρεται ως *χαμένος* ή *κρυφός* ρυθμός. Έτσι, *ο απλός ρυθμός κλάσης $[2]$ πάντα υποστηρίζει κάθε ρυθμικότητα, είτε ως φανερός είτε ως κρυφός ρυθμός.*

Οι κλάσεις ρυθμικότητας θα συμβολίζονται με το γινόμενο των μονών⁸ αριθμών που αντιστοιχούν στους ρυθμούς που χρησιμοποιούνται. Η απλή ρυθμικότητα μοναδικού ρυθμού, που κρυφά ή φανερά είναι πάντα παρών, θα συμβολίζεται ως κλάση $[1]$ ή $[2]$. Εφόσον ο ρυθμός $[2]$ είναι πάντα παρών, στις λοιπές ρυθμικότητες θα παραλείπεται το γινόμενο με το 2. Η επόμενη κλάση, κατά σειρά εγγύτητας με την απλή $[2]$, είναι η $[3]$. Η επόμενη κλάση $[5]$ είναι πιο σπάνια. Πλην των $[9]$ και $[15]$, δεν φαίνεται να έχουν πρακτική χρήση οι επόμενες θεωρητικές κλάσεις $[7]$, $[11]$, $[13]$, $[17]$, κλπ. Διευκρινιστικά, ως ρυθμικότητα κλάσης $[15]$ εννοούμε την συνήχηση των ρυθμών $[2]$ (ως κρυφή ή φανερή κλάση), του $[3]$ και του $[5]$. Και στα δύο μέτρα του σχήματος 2 η ρυθμικότητα είναι $[15]$. Στο πρώτο μέρος η Ντο είναι ρυθμός $[\frac{15}{15}] = [1] = [2]$, η Σολ είναι ρυθμός $[\frac{15}{5}] = [3]$, η Μι είναι ρυθμός $[\frac{15}{3}] = [5]$ και η Σι είναι ρυθμός $[\frac{15}{1}] = [15]$. Στο δεύτερο μέτρο ο ρυθμός $[15]$ είναι κρυφός.

Η αλγεβρική δομή μονοειδούς φαίνεται να διακρίνεται στα προαναφερόμενα. Έστω S το σύνολο των τυπικών ομάδων των ομαδοποιήσεων. Κάθε στοιχείο του ταυτίζεται με την ρυθμικότητα και την μέγιστη τυπική ομάδα του ρυθμού που την υποστηρίζει. Εφοδιάζουμε αυτό το σύνολο με την δυαδική πράξη $S \times S \rightarrow S$ της συνήχησης, που θα την συμβολίζουμε με $+$. Το αποτέλεσμά της είναι η τυπική ομάδα ομαδοποίησης με πλήθος μελών ίσο με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του

⁸Θα συμβολίζονται με το γινόμενο των πρώτων αριθμών, αν ταυτοποιούμε κάθε δύναμη πρώτου αριθμού με τον ίδιο.



Σχήμα 2: Συνήχηση ρυθμών

πλήθους των μελών των δύο τυπικών ομάδων. Το ζεύγος $(S, +)$ είναι *μονοειδές* διότι ικανοποιεί τα επόμενα δύο αξιώματα:

- Προσεταιριστικότητα: Για κάθε a, b και c που ανήκουν στο S , η σχέση $(a + b) + c = a + (b + c)$ ισχύει. Η ρυθμικότητα είναι αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας.
- Έπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Υπάρχει ένα στοιχείο e στο S , αυτό της μονομελούς τυπικής ομάδας, που είναι τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο a στο S , ισχύουν οι ισότητες $e + a = a$ και $a + e = a$.

Επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, όπου $a + b = b + a$ για κάθε $a, b \in S$, το $(S, +)$ είναι *αντιμεταθετικό* ή αλλιώς *αβελιανό μονοειδές*. Όπως κάθε αντιμεταθετικό μονοειδές, το $(S, +)$, δηλαδή το σύνολο των ρυθμών με τις συνηχήσεις του, είναι εφοδιασμένο με την ασθενή διάταξη \leq , με την οποία ορίζεται ότι $a \leq b$ αν υπάρχει c τέτοιο ώστε $a + c = b$, δηλαδή το μήκος της a διαιρεί το μήκος της b ⁹.

Αποδόμηση ρυθμικότητας θεωρώ ότι είναι η μετάλλαξή της σε διαφορετικής κλάσης ρυθμικότητες που υποστηρίζονται από κοινούς με την ίδια ρυθμούς. Κάθε ρυθμικότητα υποστηρίζεται από όποιους ρυθμούς χρησιμοποιεί ο συνθέτης, όπως ένα σπίτι υποστηρίζεται από τις κολώνες του. Δεν μπορεί να χτιστεί στέρεη ρυθμικότητα - οικοδόμημα χωρίς να χρησιμοποιηθούν ρυθμοί - κολώνες της που να την υποστηρίζουν. Με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται η εντροπία, άρα η φυσική φθορά της ρυθμικότητας - οικοδομήματος, απομένοντας, ως ερείπια, οι ρυθμοί - κολώνες που την στήριζαν. Η υποστηρικτική σχέση δεν αντιστρέφεται. Αν G είναι ρυθμός - κολώνα της ρυθμικότητας - οικοδομήματος C , τότε η τελευταία, ως ρυθμός κολώνα C , δεν μπορεί να υποστηρίξει την ρυθμικότητα - οικοδόμημα G . Αυτό ισχύει εν ολίγοις διότι αν η $[G]$ είναι ρυθμός της $[C]$ ισχύει $[G] = \frac{[C]}{2^{*k+1}} \Rightarrow [C] = (2 * k + 1) * [G]$, με $k \neq 0$, $[C] = 2^n * C$ και $[G] = 2^m * G$. Οπότε το $[C]$ δεν έχει τη ζητούμενη μορφή $[C] = \frac{[G]}{2^{*k+1}}$, άρα δεν είναι ρυθμός της $[G]$ ¹⁰. Πιο απλά, εκτός κλάσεων, αν η G διαιρεί την C τότε η C δεν διαιρεί την G .

Πρόοδος ρυθμικότητας είναι η αντικατάστασή της από άλλη διαφορετικής κλάσης ρυθμικότητα. Η ρυθμικότητα μιας σύνθεσης μπορεί να μείνει αμετάβλητη.

⁹Ο βαθμός εγχύτητας της σελίδας 6 είναι διαφορετική διάταξη. Με δεδομένη ρυθμικότητα b , ο βαθμός εγγύτητας διατάσσει τους διαρέτες a του μήκους της.

¹⁰Αν $k = 0$ τότε ο ρυθμός ισούται με την μονάδα και η ομαδοποίησή του ταυτίζεται με την ρυθμικότητα που στηρίζει. Τότε όμως δεν πρόκειται για υποστηρικτική σχέση αλλά για ταυτολογία, εφόσον η C είναι κολώνα της ρυθμικότητας C τότε η C είναι κολώνα της ρυθμικότητας C .

Αν όμως υπάρχει η επιθυμία μεταβολής της, λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα υποστηρικτική σχέση και την προσομοίωση του φαινομένου της εντροπίας, μπορούμε να διακρίνουμε την πρόοδο σε *παθητική* και *ενεργητική*.

Παθητική πρόοδος (ή *αδύνατη* ή *κατιούσα* πρόοδος) μιας ρυθμικότητας είναι η αποδόμησή της σε ρυθμικότητα που στηρίζεται σε γνήσιο υποσυνόλο των ρυθμών που αρχικά την υποστήριζαν. Εκλαμβάνεται και ως παθητική αφαίρεση κάποιων από τους ρυθμούς της. Ως εκ τούτου, *δεν υπάρχει παθητική μετάβαση από ρυθμικότητα που υποστηρίζεται από μοναδικό ρυθμό*. Αν περιοριστούμε μόνον στις κλάσεις [2] και [3] των ρυθμικότητων, τότε η μόνη δυνατή παθητική μετάβαση είναι αυτή από την κλάση ρυθμικότητας $[3] = [6] = [2] + [3]$ στην κλάση ρυθμικότητας μοναδικού ρυθμού, που υποστηρίζεται από την συγκεκριμένη, κρυφή ή φανερή, κλάση ρυθμού [2] της αρχικής ρυθμικότητας.

Ενεργητική πρόοδος (ή *δυνατή* ή *ανούσα* πρόοδος) μιας ρυθμικότητας είναι η όποια *μη παθητική* πρόοδός της σε νέα διαφορετικής κλάσης ρυθμικότητα. Εκλαμβάνεται και ως ενεργητική προσθήκη κάποιων ρυθμών στους ήδη υπάρχοντες, διαφορετικής κλάσης, ρυθμούς που την υποστηρίζουν, είτε με σύγχρονη αφαίρεση αυτών είτε όχι. Αν περιοριστούμε μόνον στις κλάσεις [2] και [3] των ρυθμικότητων, τότε η μόνη δυνατή ενεργητική μετάβαση είναι αυτή από την κλάση ρυθμικότητας [2] στην κλάση ρυθμικότητας [3] που, εκτός του συγκεκριμένου ρυθμού κλάσης [2], υποστηρίζεται επιπλέον και από ρυθμό κλάσης $[3] = [6] = [2] + [3]$. Στο σχήμα 3, παρά την χρονική υπογραφή, στο πρώτο μέτρο συνεχούν οι ρυθμοί της μίας παρεστιγμένης ολόκληρης νότας μήκους 4 και των τεσσάρων παρεστιγμένων τετάρτων μήκους 1, οπότε είναι εν χρήση η ρυθμικότητα $[1] + [4] = [4]$, του μοναδικού ρυθμού κλάσης [2] που υποστηρίζει την ίδιας κλάσης ρυθμικότητα. Από το πρώτο στο δεύτερο μέτρο συντελείται ενεργητική πρόοδος ρυθμικότητων. Στο δεύτερο μέτρο, με δώδεκα όγδοα μήκους 1, προστίθεται ενεργητικά ρυθμός $[\frac{12}{1}] = [12] = [3]$, που συνεχίει με τον ρυθμό [4], υποστηρίζοντας την ρυθμικότητα $[4] + [3] = [12]$, κλάσης [3]. Στο τρίτο μέτρο τόσο η ρυθμικότητα όσο και η κλάση



Σχήμα 3: Πρόοδος ρυθμικότητας

της παραμένουν αμετάβλητες, αφού η μετατροπή των τεσσάρων τετάρτων, κλάσης $[\frac{12}{3}] = [4] = [2]$, σε δύο μισές δεν επηρεάζουν την $[\frac{12}{6}] = [2]$ κλάση τους. Κατά την επανάληψη, από το τρίτο μέτρο στο τέταρτο μέτρο, συντελείται παθητική πρόοδος ρυθμικότητων, διότι η ρυθμικότητα κλάσης $[3] = [3] + [2]$ αποδομείται σε ρυθμικότητα κλάσης $[4] = [2]$.

Η φράκταλ αυτο-ομοιότητα της δομής του χρόνου προβάλλει την προαναφερόμενη δομή της ρυθμικότητας στην έννοια της δομής της τονικότητας. Σε ρυθμικότητα, ρυθμούς, συνηχήσεις και ομαδοποιήσεις κτύπων αναφερόμαστε όταν η συχνότητα των κτύπων είναι της τάξεως του ενός κτύπου ανά δευτερόλεπτο (1Hz). Σε τονικότητα, τόνους, συγχορδίες και συχνότητες αντίστοιχα, αναφερόμαστε αν “απομακρυνθούμε”, περίπου 20 με 20000 φορές “μακρύτερα”, ώστε να αντιλαμβανόμαστε τα χρονικά διαστήματα μικρότερα και το 1Hz να αντιστοιχεί πλέον σε ηχητικές συχνότητες. Αν μάλιστα λάβουμε υπόψη και την προαναφερθείσα δομή του *μοιροειδούς*, τότε συχνότητες και συγχορδίες είναι στοιχεία του ίδιου συνόλου και ίσως όχι τόσο διαφορετικά όσο νόμιζα.

Όρια στην αυτο-ομοιότητα τίθενται από το πεπερασμένο του ακουστικού φάσματος. Κτύποι του 1 Hz θα ακουστούν σαν ηχητική συχνότητα αν επιταχυνθούν 440 φορές, αλλά μία ηχητική συχνότητα των 440 Hz δεν θα ακουστεί αν επιβραδυνθεί 440 φορές, λόγω της συνεχούς μεταβολής της πίεσης του αέρα που το παράγει. Θα έπρεπε ευθύς εξ αρχής να ήταν άλλη η φύση του συμβάντος, όπως κρούσεις και όχι ακουστικό κύμα. Η τονικότητα είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλο υποπολλαπλάσιο των συχνοτήτων που την στηρίζουν. Δεν μπορώ εύκολα να δεχτώ ότι η αντίληψή μας θα προσδώσει οντότητα σε τονικότητα που βρίσκεται κάτω από το όριο ακοής. Για αυτό, σε μια συνήχηση, μία μπάσα συχνότητα κοντά στο όριο των 20Hz , όταν η ίδια δεν ταυτίζεται με την κλάση τονικότητας της συνήχησης, ακούγεται ανεξάρτητη, εκτός της ομπρέλλας, της τονικότητας που παράγουν οι υπόλοιπες συχνότητες, δημιουργώντας μία κατάσταση που ζητά επίλυση. Για τον ίδιο λόγο, σε μια συνήχηση, μία υψηλή συχνότητα, κοντά στο όριο των 20000Hz , δεν μπορεί να έχει το ρόλο τονικότητας που υποστηρίζεται από τις υπόλοιπες συχνότητες, αλλά μόνον τον ρόλο της υποστήριξης μιας τονικότητας υποπολλαπλάσιας αυτής.

2 Τονικότητα

2.1 Ομοιομορφισμός

Ρυθμοί και τόνοι συνδέονται με σχέση ομοιομορφισμού που είναι η αντιστοίχιση των χρονικών διαστημάτων, των φαινομένων του ενός, στα χρονικά διαστήματα των φαινομένων του άλλου. Ο δείκτης r θα χρησιμοποιηθεί για τα φαινόμενα των ρυθμών και ο δείκτης t για τα φαινόμενα των τόνων. Έτσι έχουμε:

Η ακολουθία αναφοράς κτύπων συχνότητας σ_r και περιόδου $T_r = 1/\sigma_r$ αντιστοιχεί σε ηχητικό κύμα αναφοράς συχνότητας σ_t και περιόδου $T_t = 1/\sigma_t$.

Η ομαδοποίηση σ_r^1 ανά ένα κτύπο αντιστοιχεί σε ηχητικό κύμα συχνότητας $\sigma_t^1 = \sigma_t$ και περιόδου $T_t^1 = 1/\sigma_t^1 = 1/\sigma_t$.

Η ομαδοποίηση σ_r^n ανά n κτύπους αντιστοιχεί σε ηχητικό κύμα περιόδου $T_t^n = n * T_t = n/\sigma_t$ και συχνότητας $\sigma_t^n = 1/T_t^n = \sigma_t/n$.

Η ρυθμικότητα $\sigma_t^{n,m,\dots}$ της συνήχησης ομαδοποιήσεων σ_r^n αντιστοιχεί σε ηχητικό κύμα (τονικότητα) $\sigma_t^{n,m,\dots}$ περιόδου $T_t^{n,m,\dots} = lcm(T_t^n, T_t^m, \dots) = \frac{lcm(n,m,\dots)}{\sigma_t}$ και συχνότητας $\sigma_t^{n,m,\dots} = \frac{\sigma_t}{lcm(n,m,\dots)}$, όπου $lcm()$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Ισοδύναμα εκφράζεται και δια του μέγιστου κοινού διαιρέτη gcd ¹¹.

$$\sigma_t^{n,m,\dots} = \frac{1}{lcm(1/\sigma_t^n, 1/\sigma_t^m, \dots)} = gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m, \dots)$$

Ο ρυθμός λ_r^n μιας ομαδοποίησης σ_r^n , σε σχέση με μια ρυθμικότητα $\sigma_r^{n,m,\dots}$ που υποστηρίζει, αντιστοιχεί στον **τόνο**

$$\lambda_t^n = \frac{T_t^{n,m,\dots}}{T_t^n} = \frac{\sigma_t^n}{\sigma_t^{n,m,\dots}} = \frac{lcm(n,m,\dots)/\sigma_t}{n/\sigma_t} = \frac{lcm(n,m,\dots)}{n}$$

σε σχέση με μια ρυθμικότητα $\sigma_t^{n,m,\dots}$ που υποστηρίζει, και είναι αδιάστατος ακέραιος αριθμός. Ισοδύναμα εκφράζεται ως

$$\lambda_{n,m,\dots}^n = \frac{\sigma_t^n}{gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m, \dots)}$$

Αντικαταστάθηκε, στο λ , ο δείκτης t για να δείχθει ότι ο τόνος αναφέρεται στην τονικότητα που στηρίζει. Ο τόνος της τονικότητας $\lambda_t^{n,m,\dots} = \frac{T_t^{n,m}}{T_t^n} = 1$ ισούται πάντα με την μονάδα. Συνεπώς, η τονικότητα είναι συχνότητα και οι τόνοι είναι αναλογίες, ακέραια πολλαπλάσια, των εν χρήση συχνοτήτων προς αυτήν. Ο βαθμός εγγύτητας ορίζεται ίδιος όπως στη σελίδα 6.

Η συχνότητα της τονικότητας, επειδή υποστηρίζεται, εν δυνάμει, από τις άπειρες συχνότητες των ακέραιων πολλαπλασίων αυτής, δεν μπορεί να ορίσει καλώς ένα σύνολο εν χρήση υποστηρικτικών τόνων. Οι εν χρήση συχνότητες είναι αυτές που καθορίζουν την συχνότητα της τονικότητας.

Η πράξη της συνήχησης $+: S \times S \rightarrow S$, με S το σύνολο συχνοτήτων, προβάλλεται φυσικά ως $\sigma_t^n + \sigma_t^m = \sigma_t^{n,m} = gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m)$, όπου gcd ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Με την ύπαρξη της σ_t^1 ως ουδέτερου στοιχείου $e = \sigma_t^1$, η δομή του αντιμεταθετικού μονοειδούς (σελ:7), με την ασθενή του διάταξη \leq , είναι προφανής. Ας σημειωθεί όμως ότι, επειδή αναφερόμαστε πλέον σε συχνότητες και όχι σε περιόδους, η διάταξη $a \leq b$ σημαίνει ότι η συχνότητα a διαιρείται από την b .

¹¹ Αν το lcm εκφραστεί με πρώτους αριθμούς, οι εκθέτες του θα είναι της μορφής $\max(m_i, n_i, \dots) = -\min(-m_i, -n_i, \dots)$ που αποδεικνύει την σχέση, διότι το \min αντιστοιχεί στο gcd .

2.1.1 Κλάσεις

Οι κλάσεις συχνοτήτων $[\sigma]$ ορίζονται από την σχέση ισοδυναμίας \sim , όπου δύο συχνοότητες σ_t^n και σ_t^m θεωρούνται ισοδύναμες αν ο λόγος τους είναι δύναμη του 2, δηλαδή $[\sigma_t^n] = [\sigma_t^m] \iff \sigma_t^n \sim \sigma_t^m \iff \frac{\sigma_t^n}{\sigma_t^m} = 2^{\pm k}, k \in \mathbb{Z}^+$. Το σύνολο όλων των κλάσεων είναι το $S/\sim := \{[\sigma] : \sigma \in S\}$.

Η κλάση τόνων $[\lambda^n]$ ορίζεται από την προβολή τους

$$[\lambda_{n,m,\dots}^n] = \frac{[\sigma_t^n]}{[gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m, \dots)]}$$

οπότε

$$[\lambda_t^n] = [\lambda_t^m] \iff \lambda_t^n \sim \lambda_t^m \iff \frac{\lambda_t^n}{\lambda_t^m} = 2^{\pm k}, k \in \mathbb{Z}^+$$

Ως αντιπρόσωπο της κλάσης $[\lambda] \in \mathbb{Z}^+ / \sim$ του τόνου λ επιλέγω τον ρητό αριθμό της μορφής $\lambda * 2^{-k}, k \in \mathbb{Z}^+$ που ανήκει στο διάστημα $[1, 2)$.

Το μονοειδές των κλάσεων ορίζεται με την προβολή της πράξης της συνήχησης σε αυτό. Προφανώς η προβολή π , της πράξης της συνήχησης $+$, στο S/\sim , ως $\pi : S \rightarrow S/\sim, \pi(\sigma) = [\sigma]$, είναι αυτονόητη και καλώς ορισμένη. Έτσι

$$[\sigma^n] + [\sigma^m] = [gcd(\sigma^n, \sigma^m)]$$

Η ασθενής διάταξη όμως αλλάζει ελαφρά νόημα. $[a] \leq [b]$ σημαίνει ότι υπάρχει k τέτοιο ώστε η $a * 2^k$ διαιρείται από την b .

Μοναδικός τόνος ή απλός τόνος στις συνηχήσεις υπάρχει όταν, λόγω της ταυτοποίησης, συνηχούν μόνο τόνοι που ο λόγος τους, ανά δύο, είναι δύναμη του 2. Όταν ηχεί δηλαδή μία νότα χωρίς συνηχήση άλλης διαφορετικής νότας.

Πρόοδος τονικότητας είναι η αντικατάστασή της από άλλη διαφορετικής κλάσης τονικότητα.

Παθητική πρόοδος (ή αδύνατη ή κατιούσα πρόοδος) μιας τονικότητας είναι η αποδόμησή της σε τονικότητα που στηρίζεται σε γνήσιο υποσύνολο των τόνων που αρχικά την υποστήριζαν.

Ενεργητική πρόοδος (ή δυνατή ή ανούσα πρόοδος) μιας τονικότητας είναι η όποια μη παθητική πρόοδος της σε νέα διαφορετικής κλάσης τονικότητα. Οι καθαρές μελωδίες που δεν συνοδεύονται, επειδή όλοι οι τόνοι τους είναι μοναδιαίοι, αποτελούνται από αποκλειστικά ενεργητικές προόδους τονικότητων.

2.2 Ο χώρος τόνων και τονικότητας

Το σύνολο των συχνοτήτων είναι μονοδιάστατος χώρος, δηλαδή είναι ισόμορφο με την ευθεία \mathbb{R} των άρρητων αριθμών.

Οι υποσυχνότητες f/n ενυπάρχουν πάντα στο άκουσμα της f . Κάθε συχνότητα f αντιστοιχεί σε μία περίοδο κύματος που επαναλαμβάνεται με ρυθμό ίσο με την συχνότητά του. Κάθε ομάδα από n περιόδους κύματος επαναλαμβάνεται με συχνότητα f/n (το αντίθετο των αρμονικών nf). Ως συχνότητα αντιλαμβανόμαστε την επανάληψη της ομάδας με την μικρότερη περίοδο, δηλαδή αυτή καθεαυτή την βασική συχνότητα. Θεωρώ όμως ότι όλες οι υποσυχνότητες f/n ενυπάρχουν πάντα στο άκουσμα της f και, συνειδητά ή υποσυνείδητα, ακούγονται συγχρόνως, σε αντίθεση με τις αρμονικές nf οι οποίες άλλοτε δημιουργούνται από τα μουσικά όργανα και άλλοτε όχι, εξαρτώμενες από το όργανο που παράγει την βασική συχνότητα f .

Η νότες είναι κλάσεις συχνοτήτων. Η σχέση μιας συχνότητας f με την υποσυχνότητά της $f/2$ είναι τόσο ισχυρή ώστε να θεωρείται σχέση ισοδυναμίας και ονομαστικά οι δύο αυτές συχνότητες να ταυτίζονται, παρόλο που διαφέρουν κατά μία οκτάβα. Έτσι, με αναφορά σε κάποια συγκεκριμένη συχνότητα, έστω $A = 440\text{Hz}$, ταυτίζονται όλες οι συχνότητες με σχέση ακέραιας δύναμης του 2, δηλαδή όλες οι $A * 2^{\pm n}$. Δημιουργείται έτσι μία κλάση ισοδυναμίας $[A]$ και όταν αναφερόμαστε σε κάποια νότα, έστω A , αναφερόμαστε σε μία κλάση συχνοτήτων $[A]$ που είναι το σύνολο των συχνοτήτων $A * 2^{\pm n}$. Στις μουσικές αναλύσεις χρησιμοποιούνται οι νότες $[A]$ ως κλάσεις ενώ στις παρτιτούρες σημειώνονται οι τόνοι A ως συχνότητες.

Η σαμπρέλα τόνων και τονικότητας Η ταύτιση των άκρων του διαστήματος των συχνοτήτων $[f, 2f]$ χρειάζεται μία ακόμα διάσταση για να οπτικοποιηθεί ως κύκλος, χρειάζεται δηλαδή διδιάστατο χώρο ώστε να καμφθεί μέσα σ' αυτόν η ευθεία των συχνοτήτων. Με αναφορά σε συχνότητα f , κάθε κλάση συχνοτήτων $[g]$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε κάποια συχνότητα g εντός του διαστήματος $[f, 2 * f]$, δηλαδή αντιπροσωπεύεται, ως νότα $[g]$, από κάποιο μοναδικό σημείο του οπτικοποιημένου κύκλου. Όλες οι δυνατές νότες $[g]$, που αντιστοιχούν σε κύκλο, μπορεί εν αρχή να θεωρηθεί ότι αναφέρονται, άρα συσχετίζονται, με κάποια συχνότητα f , άρα με κάποια κλάση $[f]$. Εφόσον το σύνολο των $[f]$ είναι και αυτό κύκλος, ως ονομαστεί κύκλος τονικότητων και κάθε σημείο του $[f]$ *τονικότητα*. Από κάθε τονικότητα διέρχεται ένας κύκλος με όλες τις δυνατές νότες. Χρειαζόμαστε ακόμα μία διάσταση ώστε να οπτικοποιήσουμε τον κύκλο των τονικότητων σε διαφορετικό χώρο από αυτόν με όλες τις δυνατές νότες. Έτσι, σε τριδιάστατο χώρο, όλες οι δυνατές νότες, επί καθενός σημείου του κύκλου των τονικότητων, είναι επιφάνεια μιας σαμπρέλας όπως εδώ. Η σαμπρέλα είναι ο χώρος που υπάρχουν οι νότες και οι τονικότητες. Κάθε φορά που προσδιορίζεται η σχέση τονικότητας με νότες επιλέγεται ένα υποσύνολο από τις νότες του κάθε κύκλου, που δεν παύει όμως να ανήκει στην επιφάνεια της σαμπρέλας που περικλείει το όλον.

Η δυϊκότητα τόνων και τονικότητας είναι εκ των παραπάνω εύλογη, εφόσον δεν γίνεται διάκριση μεταξύ ματζόρε και μινόρε κλίμακων ή, όπως προσωπικά θεωρώ, με τον προαναφερόμενο όρο *τονικότητα* εννοούμε μόνον τις ματζόρε κλίμακες. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια της σαμπρέλας δημιουργείται είτε από το σύνολο των κύκλων από νότες, κάθε τονικότητας $[f]$, είτε

από το σύνολο των κύκλων των τονικοτήτων, στις οποίες ανήκει κάθε νότα $[g]$. Με άλλα λόγια, η ερώτηση ποιές νότες εμπεριέχονται σε μια τονικότητα $[f]$ εκφράζεται, στην δυϊκή οπτική της, με την ερώτηση ποιές τονικότητες εμπεριέχουν κάποια νότα $[g]$.

Η δισδιάστατη επιφάνεια στον τριδιάστατο χώρο εξυπηρετεί λόγω της προφανούς ταυτοποίησης των υπάρξεων της ίδιας νότας πάνω στην επιφάνεια της σαμπρέλας (ή ταυτοποίησης των υπάρξεων της ίδιας τονικότητας από την δυϊκή οπτική). Εφόσον το σύνολο από νότες είναι ίδιο σε κάθε τονικότητα, η ταύτιση εννοείται μέσω μονοπατιού στον τριδιάστατο χώρο που δεν τέμνει την ίδια την επιφάνεια. Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε ένα σύνολο τόνων που εναλλάσσονται στον χρόνο, δηλαδή μια μελωδία, στην τονικότητα $[C]$ που είναι μία τομή κάθετα της σαμπρέλας. Αν κάθε τόνος εμφανίζεται ως τελεία επί της επιφάνειας της σαμπρέλας, τότε κατά την εκτέλεση της μελωδίας η τελεία θα μετακινείται από σημείο σε σημείο πάντα επί του κύκλου που είναι η τομή της σαμπρέλας στην τονικότητα $[C]$. Όμως, κάνοντας χρήση του τριδιάστατου χώρου, κάποια στιγμή που η τελεία βρίσκεται έστω στον τόνο $[A]$, επί του κύκλου της τονικότητας $[C]$, βγαίνει εκτός επιφάνειας, εντός ή εκτός του όγκου της σαμπρέλας, και μεταπηδά ξανά στην επιφάνειά της στον κύκλο της τονικότητας $[F]$ και συνεχίζει επ' αυτού. Η ταυτοποίηση των τόνων $[A]$ των δύο τονικοτήτων και η τρίτη διάσταση έκανε δυνατή την αλλαγή τονικότητας κατά τη διάρκεια της μελωδίας από $[C]$ σε $[F]$. Ένα δισδιάστατο πλάσμα που ο κόσμος του είναι η επιφάνεια της σαμπρέλας δεν μπορεί να κατανοήσει πώς συμβαίνει αυτή η ξαφνική μεταπήδηση χωρίς να ακολουθηθεί οποιοδήποτε μονοπάτι του κόσμου του.

2.3 Οι νότες κλίμακας

Φυσικές νότες κλίμακας. Σε κάθε κλίμακα πρέπει να ανήκουν τουλάχιστον κάποιες νότες στις οποίες, κατά την παραδοχή της πρώτης παραγράφου 2.2, ενυπάρχει ο βασικός τόνος της και τις ονομάσουμε φυσικές νότες της κλίμακας. Έτσι, αν g είναι τόνος φυσικής νότας και c ο βασικός τόνος της τονικότητας, θα ισχύει $c = g/n \Rightarrow g = n * c \Rightarrow [g] = n * 2^{\pm k}$, όπου $[c] = 1$ και $1 \leq [g] < 2$. Λόγω της τελευταίας ανισότητας, είναι πιο περιγραφικό αν επαναδιατυπώσουμε ως $1 \leq [g] = \frac{n}{2^k} < 2$, με $n, k > 0$. Το k προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το n . Το τελευταίο, λόγω του προσδιορισμού των τόνων στις φυσικές νότες, είναι πάντα μονός αριθμός. Κατ' ουσίαν ονομάσαμε φυσικές νότες αυτές που αντιστοιχούν στις αρμονικές της όποιας συχνότητας του βασικού τόνου της τονικότητας. Αναφερόμενοι στη νότα της τονικότητας ως μονάδα και στις φυσικές νότες της ως λόγους, οι φυσικές νότες μιας κλίμακας θα μπορούσε να είναι οποιοδήποτε υποσύνολο της ακολουθίας $(1, 3/2, 5/4, 7/4, 9/8, 11/8, \dots)$.

Το αντίστροφο του μεγέθους του n αντιστοιχεί στο πόσο φυσικό μπορεί να εκληφθεί ότι σε μια φυσική νότα ενυπάρχει ο βασικός τόνος της τονικότητας. Το δε k αντιστοιχεί στο πόσες οκτάβες κάτω από το άκουσμα μιας φυσικής νότας βρίσκεται ο υψηλότερος βασικός τόνος.

Η έννοια της φυσικής νότας είναι μεταβατική. Εφόσον ο βασικός τόνος της τοιλικότητας ενυπάρχει σε φυσική νότα, σε κάθε φυσική νότα της φυσικής νότας θα ενυπάρχει ο αρχικός βασικός τόνος της τοιλικότητας. Πράγματι αν $[g] = \frac{n}{2^k} * [c]$ είναι φυσική νότα της $[C]$ και $[h] = \frac{m}{2^l} * [g]$ είναι φυσική νότα της $[G]$ τότε η $[h] = \frac{n*m}{2^{k+l}} * [c]$ θα είναι φυσική νότα και της $[C]$ επίσης. Απλά, λόγω των μεγαλύτερων συντελεστών k και $n * m$, για την νότα $[h]$ θα φαντάζει πιο φυσική η τοιλικότητα $[G]$ από την $[C]$.

Η φυσική μετάβαση και η εντροπία ως φαινόμενα λογικά υπάρχουν σε κάθε μελωδία όπως και σε κάθε τι που υπάρχει.

Περιορισμός στις φυσικές νότες θα πρέπει να υπάρξει λόγω του άπειρου αριθμού των αρμονικών. Με το n να αυξάνει, σε μία τοιλικότητα μπορούν να ενταχθούν άπειρες φυσικές νότες οπότε σε μια “οκτάβα” θα υπάρχουν απείρως πυκνές νότες.

- στις πολύ κοντινές συχνότητες ο εγκέφαλος θα επιλέξει το μοτίβο με την πιο απλή αναλογία και όχι την ακριβή ρητή τοιαύτη.
- δεν ακούγονται οι μακρινοί βασικοί τόνοι

waveform generator

Κάτω φράγμα ενυπάρχοντων τόνων πρέπει να θεωρηθεί περίπου η συχνότητα $20Hz$. Αν θεωρήσουμε ότι δεν είναι δυνατόν ένας τόνος να συνδεθεί υποσυνείδητα με τόνο εκτός ακουστικής εμπειρίας, δηλαδή με συχνότητες κάτω των $20Hz$, και ότι η μέση συχνότητα που χρησιμοποιείται είναι τα $440Hz$ τότε ο συντελεστής n των ενυπάρχοντων τόνων $g/n \geq 20Hz$ πρέπει να είναι ακέραιος μικρότερος του $440/20 = 22$ ή και περισσότερο. Με αυτήν την παραδοχή οι νότες μιας τοιλικότητας από άπειρες όλων των ρητών λόγων περιορίζονται σε πεπερασμένες. Με την τιμή 22 όμως, παρά το γεγονός ότι οι δυνατές νότες μιας οκτάβας είναι πεπερασμένες, υπολογίζονται σε 75 νότες που είναι πολλές.