Δομή τονικότητας στην μουσική

Δημήτριος Χωλίδης

16 Μαΐου 2024

Προσπάθεια δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς ως μνημονικό κανόνα.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σε μια προσπάθεια, λόγω περιέργειας, στοιχειώδους κατανόησης της μουσικής αρμονίας, χωρίς προτέρα ιδιαίτερη γνώση, διάβασα το Open Music Theory, που φαίνεται όμοιο με το Integrated Musicianship: Theory, και δύο βιβλία του Arnold Schoenberg, το THEORY OF HARMONY και το Structural Functions Of Harmony. Τα βιβλια του Schoenberg επηρέασαν ιδιαίτερα την οπτική μου.

Γνωρίζω αρκετά μαθηματικά ώστε να διακρίνω την τέχνη πίσω από αυτά (χρειάστηκα πέντε έτη για να διακρίνω την τέχνη πίσω από την γενική θεωρία της σχετικότητας) αλλά δεν γνωρίζω αρκετή μουσική ώστε να διακρίνω τα μαθηματικά πίσω από αυτήν. Λογικά όμως, δεν μπορεί να υπάρξει η μαθηματική συνέπεια στην τέχνη.

Με τα μαθηματικά οδηγούμαστε με συνέπεια σε συγκεκριμένα αποτελέσματα, οπότε η τέχνη έγκειται στην ελευθερία επιλογής του τρόπου με τον οποίο φθάνουμε σε αυτά. Στην τέχνη όμως η ελευθερία επιλογής αποτελέσματος οδηγεί στο ότι κάθε κανόνας ή απαγόρευση μπορεί να παραβιασθεί,

αρκεί η παράβαση να μην συμβαίνει κατά τύχη. Η κάθε παράβαση οφείλει να αιτιολογείται από κάποια δομή που είναι δημιούργημα της αυθαίρετης επιλογής του καλλιτέχνη. Για να δημιουργηθεί όμως η όποια αυθαίρετη δομή, που αιτιολογεί την όποια παράβαση, χρειάζεται κάποιο σύστημα αναφοράς στου οποίου τους άξονες θα αναφέρεται. Όπως σε κάθε τι στο σύμπαν, τα μαθηματικά θα ενυπάρχουν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, όμως η εύρεση ενός συστήματος αναφοράς με μαθηματική συνέπεια και πληρότητα είναι πέρα από τις δυνάμεις, τις λιγοστές μουσικές γνώσεις και τις ικανότητές μου. Συνεπώς, σημειώνω τις σκέψεις μου αλλά δεν μπορεί να αναμένεται επιστημονική συνέπεια και πληρότητα σε αυτές.

Η χρήση μαθηματικών και φυσικών εννοιών (όπως φράκταλ, θεωρία κατηγοριών, θεωρία ομάδων, δυϊκοί χώροι, ενέργεια, εντροπία, ταχύτητα κ.α.) αποσκοπεί σε μια προσπάθεια δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς, ως μνημονικό κανόνα, με όσο μου είναι δυνατόν μεγαλύτερη συνέπεια, ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι εξαιρέσεις που πρέπει να απομνημονευθούν, και πληρότητα, ώστε να σχετιστεί με όσο περισσότερο υλικό εξ όσων έχω διαβάσει.

Το παρόν δεν είναι κατάλληλο για όποιον θέλει να διδαχθεί αρμονία. Υπάρχει ο κίνδυνος μια ενδεχομένως στρεβλή και ελλιπής οπτική να θεωρηθεί ορθή ή πλήρης. Αντιθέτως, ένας ήδη γνώστης της αρμονίας μπορεί να κερδίσει από μια νέα οπτική, ακόμα και μέσω της απόδειξής του ότι αυτή η οπτική είναι λανθασμένη ή ελλιπής.

Ανυπαρξία

1 Γεννηθήτω ο χρόνος

Ο χρόνος επιτρέπει την ύπαρξη στιγμών δημιουργίας. Χωρίς την ύπαρξη χρονικών στιγμών δεν μπορεί να υπάρξει στιγμή δημιουργίας. Επιβάλει δε το τέλος αυτών των στιγμών και την ανυπαρξία μεταξύ αυτών των στιγμών, αλλιώς η μη μεταβολή της ύπαρξης θα ισοδυναμούσε με ανυπαρξία. Ο χρόνος είναι συνυφασμένος με την έννοια της μεταβολής. Διαδοχή γέννησης - θανάτου, ύπαρξης - ανυπαρξίας, bit - zero, κτύπου - ησυχίας. Χωρίς την βοήθεια εξωσυμπαντικού, υπερχρονικού παρατηρητή, δεν μπορώ, μόνον μέσα από το ίδιο το σύμπαν, να ξεχωρίσω αν ο χρόνος πραγματώνεται, ή γίνεται αντιληπτός, μέσω των μεταβολών ή αν οι μεταβολές πραγματώνονται, ή γίνονται αντιληπτές, μέσω του χρόνου. Πιστεύω πως ο χρόνος είναι το ουσιαστικότερο ίσως συστατικό του σύμπαντος και δεν υπάρχει ανεξάρτητος έξω από αυτό.[1]
Κάθε γέννηση προϋποθέτει την ύπαρξη του χρόνου και αναφέρεται σε κάποια χρονική στιγμή, όποτε αυτή συνέβη. Η γέννηση του χρόνου είναι παραδοξότητα λόγω αυτής ακριβώς της κρυφής αυτοαναφοράς του χρόνου στον ευατό του.

Ο χρόνος του σύμπαντος δεν μπορεί να καθορίσει τον ευατό του και να ισχυριστεί "τότε γεννήθηκα". Δεν μπορεί να ορίσει το Big Bang με τρόπο που να καθορίζει στιγμές του χρόνου πριν από αυτό.
Αυτό που με εντυπωσίασε στην γενική θεωρία της σχετικότητας δεν είναι ότι ο χρόνος είναι σχετικός με τον εκάστοτε παρατηρητή, ούτε ότι συνυπάρχει με τον χώρο ως χωρόχρονος, ούτε ίσως ότι μέσα στις μαύρες τρύπες ο χρόνος, παρά το χρονικό βέλος που τον διαφοροποιεί από τις χωρικές διαστάσεις, μετουσιώνεται σε χώρο και ο χώρος σε χρόνο. Με εντυπωσίασε ότι το πέρας του άπειρου χρόνου εμφανίζεται "χωρικά" στους ορίζοντες γεγονότων. Ένα θνητό πλάσμα, που κατευθύνεται σε μιά μαύρη τρύπα, αποκτά κυριολεκτικά αθανασία σε σχέση με όποιον το παρατηρεί εκ του μακρόθεν και, όντας ζωντανό, πλησιάζει εσαεί την μαύρη τρύπα. Ακούγεται παράξενο αλλά αν δεν σας ενδιαφέρει αν ο αγαπημένος σας, για τον ίδιο, σκοτωθεί στα επόμενα πέντε λεπτά του αλλά θέλετε, για εσάς, περιγραφικά να ζήσει τόσο πολύ όσο τρισεκατομμύρια χρόνια μετά τον θάνατό σας και κυριολεκτικά να ζει στην αιωνιότητα, σπρώξτε τον προς μια μαύρη τρύπα.

Η μέτρηση του χρόνου αφορά στις διακριτές στιγμές ύπαρξης. Η δομή του χρόνου, που επιτρέπει διακριτές στιγμές ύπαρξης, επιτρέπει την αντιστοίχιση στιγμών ύπαρξης σε ακεραίους αριθμούς άρα και την σύγκριση χρονικών διαστημάτων μέσω του πλήθους αυτών. Το, μεταξύ των χρονικών στιγμών ύπαρξης, χρονικό διάστημα ανυπαρξίας, αν βιώνεται, βιώνεται υποκειμενικά από τον εκάστοτε παρατηρητή του και δεν μπορεί να μετρηθεί αντικειμενικά χωρίς το σφάλμα της αυτοαναφοράς στον ίδιο τον χρόνο[2]. Έτσι, ορίζουμε ότι δύο χρονικά διαστή-

[1] Αν ρωτούσατε έναν κβαντικό φυσικό για την φύση του χρόνου στον μικρόκοσμο θα απαντούσε ότι ο χρόνος είναι απόλυτος και υπάρχει ανεξάρτητα του σύμπαντος. Δεν ασχολήθηκα όμως με κβαντική φυσική ούτε φιλοδοξώ να λύσω τις αντιθέσεις των δύο θεωριών. Απλά βρίσκω αρκετά διασκεδαστικό να μπλέκω την θεωρία της σχετικότητας μέσα σε σημειώσεις για την μουσική αρμονία.

[2] Το ίδιο σφάλμα αυτοαναφοράς συμβαίνει και με τη μέτρηση του χώρου. Εξ ου, η θεωρία της σχετικότητας, χωρίς το αξίωμα του απόλυτου χώρου και χρόνου, εξετάζει συμβάντα στον χωρόχρονο.

ματα είναι ίσα όταν κατά την διάρκειά τους συμβαίνουν ίσες μεταβολές διαδοχικής ύπαρξης - ανυπαρξίας κάποιου ίδιου φαινομένου. Το 1967 ορίστηκε ότι ένα δευτερόλεπτο έχει ίση διάρκεια με αυτήν που έχουν 9.192.631.770 μεταβολές που αφορούν στο χημικό στοιχείο Caesium-133.

Η διαδοχή συμβάντων ανά ίσα χρονικά διαστήματα, επί της δομής του χρόνου, δεν εξαρτάται από την κλίμακα αυτών των χρονικών διαστημάτων. Η όποια δομή του χρόνου, που κάνει δυνατή την δημιουργία ίσων χρονικών διαστημάτων, του επιτρέπει να αυτοκαθορίζεται ως φράκταλ. Έχει την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας. Όσο και αν μεγεθύνουμε ή σμικρύνουμε ένα χρονικό διάστημα θα έχει την ίδια δομή, που θα επιτρέπει την δημιουργία ίσων χρονικών διαστημάτων εντός αυτού[3]. Τα συμβάντα ανά ίσα χρονικά διαστήματα ας τα ονομάσουμε *κτύπους*, με την έννοια των συμβάντων ενός μετρονόμου. Η ακολουθία συμβάντων, στην οποία θα αναφερόμαστε ως **ακολουθία αναφοράς**, μετράται με το αντίστροφο του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών κτύπων. Ένδειξή της στις παρτιτούρες είναι οι κτύποι ανά λεπτό (*BPM*), όπου όμως το *beat* αντιστοιχεί σε τυπική ομάδα κτύπων και όχι στον ένα κτύπο της ακολουθίας αναφοράς.

Η ομαδοποίηση των διαδοχικών κτύπων ανά έναν, δύο, τρείς, τέσσερις κ.λ.π., εφοδιάζει την άπειρη ακολουθία κτύπων με σημαντικότατη δομή. Κάθε θέση σε μια *τυπική* ομάδα[4] γίνεται αντιπρόσωπος *κλάσεων (συνόλων) κτύπων*. Με την ομαδοποίηση αναγνωρίζουμε ποιοι από τους κτύπους της φυσικής ακολουθίας είναι πρώτοι, ποιοι είναι δεύτεροι, τρίτοι, τέταρτοι κ.λ.π. εντός της κάθε ομάδας και έτσι μπορούμε να τους διαφοροποιήσουμε δημιουργικά, όπως συμβάντα με περισσότερη ένταση, με λιγότερη ένταση, με απουσία[5], με διαφορετική διάρκεια ή χροιά και άλλα. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε τέσσερις κτύπους (a, a, a, a). Αντιπροσωπεύουν την ομαδοποίηση της ακολουθίας ανά έναν κτύπο, δηλαδή αποτελούν μία μονομελή ομάδα που επαναλαμβάνεται ως $([a], [a], [a], [a])$. Ομαδοποίηση ανά δύο σημαίνει ότι μία διμελής ομάδα επαναλαμβάνονται διαδοχικά ως $([a, c], [a, c])$. Ομαδοποίηση ανά τρεις κτύπους σημαίνει ότι τριμελής ομάδα επαναλαμβάνεται κ.ο.κ. Τα *μέτρα* στις παρτιτούρες είναι μια τέτοια ομαδοποίηση. Με την ίδια λογική, μπορούμε να εφοδιάσουμε με παρόμοια δομή και τις διαδοχικές ομάδες, ομαδοποιώντας τες σε υπερομάδες. Ομαδοποίηση των διμελών ομάδων ανά δύο σημαίνει ότι διμελής ομάδα, που όμως τα μέλη της είναι διμελής ομάδες επίσης, επαναλαμβάνεται π.χ. $([[a, c], [b, c]], [[a, c], [b, c]])$ που μπορεί να ιδωθεί ως ισοδύναμη με μία τετραμελή ομάδα $[a, c, b, c]$ που επαναλαμβάνεται. Τα *υπερμέτρα* στις παρτιτούρες είναι

[3]Το ίδιο ισχύει και για τους ρητούς αριθμούς. Οποιοδήποτε διάστημα μεταξύ δύο ρητών αριθμών μπορεί να χωριστεί σε ίσα διαστήματα μεταξύ ρητών αριθμών

[4]Είναι προφανής ο ισομορφισμός μεταξύ των ομαδομοιήσεων και των τυπικών ομάδων τους, δια του πλήθους των τελευταίων, με τους ακέραιους θετικούς αριθμούς. Δεν έχει σημασία αν μία τριμελής τυπική ομάδα αντιπροσωπεύεται ως (A,a,a) ή (1,2,3) ή (a,A,a), σημασία έχει μόνον το μήκος της που ισούται με 3.

[5]Η απουσία, ως συμβάν αντίθετο της παρουσίας, αντιστοιχεί σε *κτύπο*. Με αυτήν πετυχαίνουμε επανάληψη συμβάντων ανά άνισα χρονικά διαστήματα. Έστω ομάδα $[a, a, x]$ με x να συμβολίζει την απουσία συμβάντος. Κατά την επανάληψη της ομάδας το συμβάν a συμβαίνει κάθε φορά σε διαφορετικό χρονικό διάστημα απ' ότι συνέβη την προηγούμενη φορά.

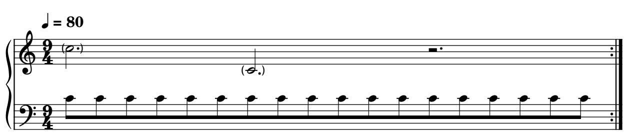
τέτοια ομαδοποίηση. Το *μέτρο* είναι απλώς η βασική για τον συνθέτη, ομαδοποίηση της ακολουθίας.

Η διάκριση ομαδοποιήσεων γίνεται προς αποσαφήνιση ορολογιών που χρησιμοποιούνται στο παρόν ως η εξής:

Εν χρήση ομαδοποιήσεις είναι αυτές που, είτε λόγω διαφοροποίησης μεταξύ των μελών της τυπικής ομάδας τους είτε ως μονομελής, χρησιμοποιούνται εν τη πράξη. Διακρίνονται σε

- **Φανερές** που χρησιμοποιούνται άμεσα
  π.χ. $(A, a, a)(A, a, a)(A, a, a)\ldots$
- **Κρυφές ή χαμένες** που εμφανίζονται έμμεσα λόγω συνύπαρξης π.χ. όταν η (A, a, a) συνυπάρχει με την (B, b), κρυφή είναι η (AB, ab, aB, Ab, aB, ab) των έξι κτύπων, όπως
  $(AB, ab, aB, Ab, aB, ab)(AB, ab, aB, Ab, aB, ab)\ldots$.

Εν δυνάμει ομαδοποιήσεις είναι αυτές που αναφερόμαστε σε αυτές αλλά, ως προς την αντίληψή μας, χωρίς διαφοροποίηση των μελών της τυπικής ομάδας τους στην πράξη *υπερσκελίζονται* από τις εν χρήση ομαδοποιήσεις.
π.χ. επί της τριμελούς $(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a)\ldots$ η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο κυριαρχεί. Στο σχήμα 1, ακόμα κι αν δεν υπήρχαν οι παρεστιγμένες μισές νότες, εν δυνάμει θα ήταν υποψήφιες να υπάρξουν.



Σχήμα 1: Εν δυνάμει ομαδοποιήση 6 ογδόων

Ρυθμικότητα είναι το *ελάχιστο* τμήμα της ακολουθίας συμβάντων που περικλείει ακέραια όλα τα είδη των τυπικών ομάδων, των *εν χρήση* ομαδοποιήσεων. Η ρυθμικότητα επαναλαμβάνεται ανά ίσα χρονικά διαστήματα. Είναι πάντα εν χρήση, είτε ως κρυφή είτε ως φανερή ομαδοποίηση. Μετράται με το πλήθος των κτύπων της και *ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του πλήθους των κτύπων της κάθε τυπικής ομάδας που την υποστηρίζει*. Χωρίς εν χρήση ομαδοποιήσεις δεν μπορεί να υπάρξει ρυθμικότητα, εκτός της τετριμμένης με την τυπική ομάδα του ενός κτύπου. Η ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο υποστηρίζει κάθε ρυθμικότητα. Είναι δε ισοδύναμη με την εσαεί επανάληψη του ίδιου συμβάντος ανά ίσα χρονικά διαστήματα.

Ρυθμός *μιας ομαδοποίησης, σε σχέση με την ρυθμικότητα που υποστηρίζει,* είναι ο λόγος του πλήθους των μελών της ρυθμικότητας προς το πλήθος των μελών της τυπικής ομάδας της. Με διαφορετική διατύπωση, είναι το πόσες φορές χωράει η τυπική ομάδα της ομαδοποίησης στην ρυθμικότητα ή πόσο πιο συχνά εμφανίζεται, στην ακολουθία συμβάντων, η τυπική ομάδα της από αυτήν της ρυθμικότητας. Εκ του ορισμού της ρυθμικότητας, είναι πάντα ακέραιος αριθμός. Ο ρυθμός ομαδοποίησης της μεγαλύτερης δυνατής ομάδας, δηλαδή ο ρυθμός της ίδιας της ρυθμικότητας, είναι η μονάδα. Η *χρονική υπογραφή* είναι σύμβαση μάλλον ελλιπής στο να περιγράψει κάθε πιθανή ομαδοποίηση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ωστόσο, ο άνω αριθμός της υπογραφής είναι σαφής ως προς το πόσοι κτύποι μετρώνται σε κάθε *μέτρο*. Το *μέτρο* είναι απλώς η βασική για τον συνθέτη ομαδοποίηση και τίποτε δεν εμποδίζει σε μια υπογραφή, $\frac{3}{4}$ για παράδειγμα, να χρησιμοποιηθούν έξι όγδοα, όσοι οι κτύποι της ρυθμικότητας, αντί τριών τετάρτων, όπως θα ήταν, απ' την υπογραφή, αναμενόμενο. Σε κάθε ακολουθία αναφοράς ενυπάρχουν άπειρες όλο και μεγαλύτερες ρυθμικότητες. Οι μεγαλύτεροι ρυθμοί αυτών, που αντιστοιχούν στις μονομελής ομάδες, έχουν όριο το άπειρο, όπου ένα συμβάν συμβαίνει άπαξ, με μηδενική συχνότητα, και δεν επαναλαμβάνεται.

Η οικονομία στην πληροφορία είναι ανάγκη και περιορισμός που επιβάλεται από το πεπερασμένο του ανθρώπινου εγκεφάλου. Η αντίληψή μας περιορίζεται στον συσχετισμό των πληροφοριών, όχι με βάση τα ακριβή δεδομένα αλλά, με απλά μοτίβα. Αν δούμε σε έναν πίνακα ζωγραφικής θάλασσα που καταλαμβάνει τμήμα του έργου με αναλογία 2/3.236, δηλαδή της χρυσής τομής, θα την αντιληφθούμε ως να καταλαμβάνει τα 2/3 του κάδρου. Σε σχέση με πληθυσμούς, η οικονομία στην πληροφορία προκαλεί στην αντίληψή μας πρωτίστως την αναζήτηση της αναλογίας 1/2, ως του πιο απλού μοτίβου σύγκρισης[6]. Συνεπώς, δύο ομαδοποιήσεις ταυτίζονται στην αντίληψή μας όταν η τυπική ομάδα της μιας είναι διπλάσια της άλλης. Η ταύτιση είναι μεταβατική, οπότε όπου αναφέρονται [ρυθμικότητες], συμπεριλαμβανόμενων και των [ρυθμών], εννοούνται *κλάσεις* ρυθμικοτήτων ή ρυθμών, με συνέπεια διαφορετικοί ρυθμοί να είναι αυτοί που ο λόγος τους δεν είναι δύναμη του 2. Η ανάγκη της αντίληψής μας για απλότητα εφοδιάζει το σύνολο των ρυθμών με *βαθμό εγγύτητας με την ρυθμικότητα* που υποστηρίζουν. Ένας ρυθμός είναι τόσο πιο κοντά στην ρυθμικότητα που υποστηρίζει όσο μικρότερος είναι ο μέγιστος μόνος αριθμός που τον διαιρεί. Παραδείγματος χάριν, ο ρυθμός 12 είναι πιο κοντά στην ρυθμικότητα 1 από τον ρυθμό 5, διότι το μέγιστο 3, που διαιρεί το 12, είναι μικρότερο του 5[7].

Απλή ρυθμικότητα είναι η ρυθμικότητα που η κλάση της είναι η κλάση της τετριμμένης ομαδοποίησης ανά ένα κτύπο, είναι δηλαδή κλάσης [2]. Αυτό έχει σαν συνέπεια να συνηχούν μόνο ρυθμοί που είναι δύναμη του 2 επίσης. Όπως, παραδείγματος χάριν, όταν σε χρονική υπογραφή $\frac{4}{4}$ ακούγονται σε ένα μέτρο τέσσερις νότες του τετάρτου, δύο νότες μισής αξίας και μία ολόκληρη. Η ολόκληρη νότα αντιπροσωπεύει την ομαδοποίηση των κτύπων ανά (2^2) τέσσερις κτύπους,

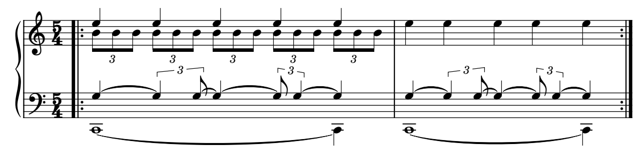
[6]Επιπλέον, συμβολίζοντας με a την παρουσία συμβάντος και x την απουσία του, επειδή σε κάθε ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο η παρουσία του συμβάντος, εκ των πραγμάτων, εναλλάσσεται με την απουσία του, αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να εκληφθεί ως διπλάσια ομαδοποίηση $[a, x]$ ανά δύο κτύπους, κατά την οποία όμως η εν δυνάμει ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο είναι κρυφή.

[7]Πιθανολογώ ότι αν η αντίληψή μας ανιχνεύσει λόγο $\frac{1}{3}$ ίσως αναμένει το ίδιο μοτίβο, οπότε ίσως υπάρχει ταυτοποίηση και ως προς αυτόν τον λόγο. Με αυτό το σκεπτικό θα υπάρχουν τόσες κλάσεις ρυθμών όσοι οι πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι της μονάδας.

που συμπίπτει με αυτήν του μέτρου και της ρυθμικότητας, οι μισές νότες την ομαδοποίηση ανά (2^1) δύο και κάθε νότα τετάρτου την ομαδοποίηση ανά (2^0) έναν κτύπο. Το πλήθος κτύπων κάθε ομάδας είναι δύναμη του 2, άρα όλοι οι ρυθμοί, συμπεριλαμβανομένης και της ρυθμικότητας, ταυτοποιούνται αφού ανήκουν στην ίδια κλάση $[1] = [2]$. **Σύνθετη ρυθμικότητα** είναι κάθε άλλη ρυθμικότητα.

Συνήχηση ρυθμών υπάρχει σε κάθε περίπτωση που οι ρυθμικότητες υποστηρίζονται από παραπάνω από μία κλάσεις ρυθμών. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα μέτρο χρησιμοποιούνται μία παρεστιγμένη μισή νότα και δύο παρεστιγμένα τέταρτα. Προφανώς η ρυθμικότητα εκφράζεται ως δύο παρεστιγμένα τέταρτα και οι δύο ρυθμοί ανήκουν στην κλάση $[\frac{2}{2}] = [\frac{2}{1}] = [2]$ του απλού ρυθμού. Αν όμως προσθέσουμε την ανάπτυξη της παρεστιγμένης μισής νότας, με χρήση τριών τετάρτων, τότε η ρυθμικότητα εκφράζεται πλέον σε έξι όγδοα και αυτή η προσθήκη, που ανήκει στην κλάση ρυθμών $[\frac{6}{1}] = [6] = [3]$, συνηχεί με τον ρυθμό κλάσης $[\frac{6}{6}] = [\frac{6}{3}] = [2]$ των υπολοίπων. *Η ομαδοποίηση μήκους ίσου με την ρυθμικότητα, που είναι ρυθμός κλάσης* $[2]$, *είναι, είτε ως κρυφή είτε ως φανερή, πάντα εν χρήση.*

Οι κλάσεις ρυθμικοτήτων και των ρυθμών τους θα συμβολίζονται με τον μέγιστο μονό[8] αριθμό που τις διαιρεί. Η επόμενη κλάση, κατά σειρά εγγύτητας με την απλή $[2]$, είναι η $[3]$. Η επόμενη κλάση $[5]$ είναι πιο σπάνια. Πλην των $[9]$ και $[15]$, δεν φαίνεται να έχουν πρακτική χρήση οι επόμενες θεωρητικές κλάσεις $[7], [11], [13], [17]$, *κλπ.* Όσες κλάσεις δεν αντιστοιχούν σε πρώτους αριθμούς μπορεί να αντιστοιχούν σε συνήχηση μιας ή περισσοτέρων ομαδοποιήσεων. Διευκρινιστικά, η ρυθμικότητα κλάσης $[15]$ μπορεί να είναι αποτέλεσμα της συνήχησης των ρυθμών $[2]$ (ως κρυφή ή φανερή κλάση), του $[3]$ και του $[5]$. Και στα δύο μέτρα του σχήματος 2 η ρυθμικότητα είναι $[15]$. Στο πρώτο μέρος η Ντο είναι ρυθμός $[\frac{15}{15}] = [1] = [2]$, η Σολ είναι ρυθμός $[\frac{15}{5}] = [3]$, η Μι είναι ρυθμός $[\frac{15}{3}] = [5]$ και η Σι είναι ρυθμός $[\frac{15}{1}] = [15]$. Στο δεύτερο μέτρο ο ρυθμός $[15]$ είναι κρυφός.



Σχήμα 2: Συνήχηση ρυθμών

Η αλγεβρική δομή *μονοειδούς* φαίνεται να διακρίνεται στα προαναφερόμενα. Έστω S το σύνολο των ομαδοποιήσεων. Κάθε στοιχείο του ταυτίζεται με την τυπική ομάδα της ομαδοποίησης και την τετριμμένη ίσου μήκους ρυθμικότητα. Εφοδιάζουμε αυτό το σύνολο με την δυαδική πράξη $S \times S \to S$ της συνήχησης, που θα την συμβολίζουμε με $+$. Το αποτέλεσμά της είναι η ομαδοποίηση της τυπικής

[8]Θα συμβολίζονται με το γινόμενο των μονών πρώτων αριθμών, αν ταυτοποιούμε κάθε δύναμη πρώτου αριθμού με τον ίδιο.

ομάδας με πλήθος μελών ίσο με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του πλήθους των μελών των δύο τυπικών ομάδων. Το ζεύγος $(S, +)$ είναι *μονοειδές* διότι ικανοποιεί τα επόμενα δύο αξιώματα:

- Προσεταιριστικότητα: Για κάθε a, b και c που ανήκουν στο S, η σχέση $(a+b)+c = a+(b+c)$ ισχύει. Η ρυθμικότητα με περισσότερους των δύο ρυθμών είναι αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας.
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Υπάρχει ένα στοιχείο e στο S, αυτό της ομαδοποίησης της μονομελούς τυπικής ομάδας, που είναι τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο a στο S, ισχύουν οι ισότητες $e + a = a$ και $a + e = a$.

Επειδή ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, όπου $a + b = b + a$ για κάθε a, $b \in S$, το $(S, +)$ είναι *αντιμεταθετικό* ή αλλιώς *αβελιανό μονοειδές*. Όπως κάθε αντιμεταθετικό μονοειδές, το $(S, +)$, δηλαδή το σύνολο των τυπικών ομάδων με τις συνηχήσεις τους, είναι εφοδιασμένο με την ασθενή διάταξη $\leq$, με την οποία ορίζεται ότι $a \leq b$ αν υπάρχει c τέτοιο ώστε $a + c = b$, δηλαδή το μήκος της a διαιρεί το μήκος της b[9].

Αποδόμηση ρυθμικότητας θεωρώ ότι είναι η μετάλλαξή της σε ρυθμικότητα κάποιου γνήσιου υποσυνόλου των ομαδοποιήσεων που την υποστηρίζουν.[10] Κάθε ρυθμικότητα υποστηρίζεται από όποιες ομαδοποιήσεις χρησιμοποιεί ο συνθέτης, όπως ένα σπίτι υποστηρίζεται από τις κολώνες του. Δεν μπορεί να χτιστεί στέρεη ρυθμικότητα(οικοδόμημα) χωρίς να χρησιμοποιηθούν ομαδοποιήσεις(κολώνες) της που να την υποστηρίζουν. Με την πάροδο του χρόνου αυξάνεται η εντροπία, άρα η φυσική φθορά της ρυθμικότητας(οικοδομήματος), απομένοντας, ως ερείπια, κάποιες από τις ομαδοποιήσεις(κολώνες) που την στήριζαν. *Η υποστηριχτική σχέση δεν αντιστρέφεται.* Αν G είναι ομαδοποίηση(κολώνα) της ρυθμικότητας(οικοδομήματος) C, τότε η τελευταία, ως ομαδοποίηση(κολώνα) C, δεν μπορεί να υποστηρίζει την ρυθμικότητα(οικοδόμημα) G. Αυτό ισχύει εν ολίγοις διότι αν η $[G]$ είναι ομαδοποίηση της $[C]$ ισχύει $[G] = \frac{[C]}{2*k+1} \Rightarrow [C] = (2*k+1)*[G],\ \mu\varepsilon\, k \neq 0,\ [C] = 2^n * C\, \kappa\alpha\iota\, [G] = 2^m * G$. Οπότε το $[C]$ δεν έχει τη ζητούμενη μορφή $[C] = \frac{[G]}{2*k+1}$, άρα δεν είναι ομαδοποίηση της $[G]$[11]. Πιο απλά, εκτός κλάσεων, αν η G διαιρεί την C τότε η C δεν διαιρεί την G.

Πρόοδος ρυθμικότητας είναι η μεταβολή της σε άλλης κλάσης ρυθμικότητα. Η ρυθμικότητα μιας σύνθεσης μπορεί να μείνει αμετάβλητη. Αν όμως υπάρχει η επιθυμία μεταβολής της, λαμβάνοντας υπόψη την προαναφερθείσα υποστη-

[9] Ο βαθμός εγγύτητας της σελίδας 6 είναι διαφορετική διάταξη. Με δεδομένη ρυθμικότητα b, ο βαθμός εγγύτητας διατάσσει τους διαιρέτες a του μήκους της.

[10] Η ρυθμικότητα κενής ομαδοποιήσεων μπορεί να θεωρηθεί ότι ταυτίζεται με την ακολουθία αναφοράς, άρα με την ομαδοποίηση ανά έναν κτύπο, επομένως είναι κλάσης [2]. Πιστεύω όμως ότι το κενό δεν πρέπει να θεωρείται ως ομαδοποίηση που υποστηρίζει ρυθμικότητα. Έτσι αποδόμηση δεν μπορεί να γίνει σε τετριμμένη ρυθμικότητα που υποστηρίζεται μόνον από την ίδια της την ομαδοποίηση μοναδικού ρυθμού.

[11] Αν $k = 0$ τότε η ομαδοποίηση ταυτίζεται με την ρυθμικότητα που στηρίζει. Τότε όμως δεν πρόκειται για υποστηριχτική σχέση αλλά για ταυτολογία, εφόσον η C είναι κολώνα της ρυθμικότητας C τότε η C είναι κολώνα της ρυθμικότητας C.

ριχτική σχέση και την προσομοίωση του φαινομένου της εντροπίας, μπορούμε να διακρίνουμε την πρόοδο σε *παθητική* και *ενεργητική*.

Παθητική πρόοδος (ή *αδύνατη* ή *κατιούσα* πρόοδος) μιας ρυθμικότητας είναι *η αποδόμησή της* σε διαφορετική κλάση. Ως εκ τούτου, *δεν υπάρχει παθητική μετάβαση από την απλή ρυθμικότητα κλάσης* [2]. Αν περιοριστούμε μόνον στις κλάσεις [2] και [3] των ρυθμικοτήτων, τότε η μόνη δυνατή παθητική μετάβαση είναι αυτή από την κλάση ρυθμικότητας $[3] = [6] = [2] + [3]$ στην κλάση [2] της απλής ρυθμικότητας.

Ενεργητική πρόοδος (ή *δυνατή* ή *ανιούσα* πρόοδος) μιας ρυθμικότητας είναι η όποια *μη παθητική* πρόοδός της σε νέα διαφορετικής κλάσης ρυθμικότητα. Η αρχική ρυθμικότητα μπορεί να υποστηρίζει, ως ομαδοποίηση, την νέα ρυθμικότητα μπορεί και όχι. Αν περιοριστούμε μόνον στις κλάσεις [2] και [3] των ρυθμικοτήτων, τότε η μόνη δυνατή ενεργητική μετάβαση είναι αυτή από την κλάση ρυθμικότητας [2] στην κλάση ρυθμικότητας [3] που, εκτός της συγκεκριμένης ομαδοποίησης κλάσης [2], φανερής ή κρυφής πλέον, υποστηρίζεται και από ομαδοποίηση κλάσης $[3] = [6] = [2] + [3]$.
Στο σχήμα 3, παρά την χρονική υπογραφή, στο πρώτο μέτρο συνηχούν οι ρυθμοί της μίας παρεστιγμένης ολόκληρης νότας μήκους 4 και των τεσσάρων παρεστιγμένων τετάρτων μήκους 1, οπότε είναι εν χρήση η ρυθμικότητα $[1] + [4] = [4]$, του απλού ρυθμού κλάσης [2] που την υποστηρίζει. Από το πρώτο στο δεύτερο μέτρο συντελείται ενεργητική πρόοδος ρυθμικοτήτων. Στο δεύτερο μέτρο, με δώδεκα όγδοα μήκους 1, προστίθεται ενεργητικά ρυθμός $[\frac{12}{1}] = [12] = [3]$, που συνηχεί με τον ρυθμό [4], υποστηρίζοντας την ρυθμικότητα $[4] + [3] = [12]$, κλάσης [3]. Στο τρίτο μέτρο τόσο η ρυθμικότητα όσο και η κλάση της παραμένουν

Σχήμα 3: Πρόοδος ρυθμικότητας

αμετάβλητες, αφού η μετατροπή των τεσσάρων παρεστιγμένων τετάρτων, κλάσης $[\frac{12}{3}] = [4] = [2]$, σε δύο παρεστιγμένες μισές δεν επηρεάζουν την $[\frac{12}{6}] = [2]$ κλάση τους. Από το τρίτο μέτρο στο τέταρτο μέτρο, συντελείται παθητική πρόοδος ρυθμικοτήτων, διότι η ρυθμικότητα κλάσης $[3] = [3] + [2]$ αποδομείται σε ρυθμικότητα κλάσης $[4] = [2]$.

Η φράκταλ αυτο-ομοιότητα της δομής του χρόνου προβάλει την προαναφερόμενη δομή της ρυθμικότητας στην έννοια της δομής της τονικότητας. Σε ρυθμικότητα, ρυθμούς, συνηχήσεις και ομαδοποιήσεις κτύπων αναφερόμαστε όταν η συχνότητα των κτύπων είναι της τάξεως του ενός κτύπου ανά δευτερόλεπτο

($1Hz$). Σε τονικότητα, τόνους, συγχορδίες και συχνότητες αντίστοιχα, αναφερόμαστε αν "απομακρυνθούμε", περίπου 20 με 20000 φορές "μακρύτερα", ώστε να αντιλαμβανόμαστε τα χρονικά διαστήματα μικρότερα και το $1Hz$ να αντιστοιχεί πλέον σε ηχητικές συχνότητες. Αν μάλιστα λάβουμε υπόψην και την προαναφερθείσα δομή του *μονοειδούς*, τότε συχνότητες και συγχορδίες μπορούν θεωρηθούν στοιχεία του ίδιου συνόλου και ίσως όχι τόσο διαφορετικά απ' όσο νόμιζα.

Όρια στην αυτο-ομοιότητα τίθενται από το πεπερασμένο του ακουστικού φάσματος. Κτύποι του 1 Hz θα ακουστούν σαν ηχητική συχνότητα αν επιταχυνθούν 440 φορές, αλλά μία ηχητική συχνότητα των 440 Hz δεν θα ακουστεί αν επιβραδυνθεί 440 φορές, επειδή η πίεση του αέρα που το παράγει υπόκειται σε συνεχή μεταβολή. Θα έπρεπε ευθύς εξ αρχής να ήταν άλλη η φύση του συμβάντος, όπως κρούσεις και όχι ακουστικό κύμα. Η τονικότητα είναι πολλές φορές αρκετά μεγάλο υποπολλαπλάσιο των συχνοτήτων που την στηρίζουν. Δεν μπορώ εύκολα να δεχτώ ότι η αντίληψή μας θα προσδώσει οντότητα σε τονικότητα που βρίσκεται κάτω από το όριο ακοής. Για αυτό, σε μια συνήχηση, μία μπάσα συχνότητα κοντά στο όριο των $20Hz$, όταν η ίδια δεν ταυτίζεται με την κλάση τονικότητας της συνήχησης, αφού η τελευταία θα βρίσκεται εκτός του ακουστικού φάσματος, ακούγεται ανεξάρτητη, εκτός της ομπρέλλας, της τονικότητας που παράγουν οι υπόλοιπες συχνότητες, δημιουργώντας μία ένταση που ζητά επίλυση. Για τον ίδιο λόγο, σε μια συνήχηση, μία υψηλή συχνότητα, κοντά στο όριο των $20000Hz$, δεν μπορεί να έχει το ρόλο τονικότητας που υποστηρίζεται από υπόλοιπες υψηλότερες συχνότητες, αλλά μόνον τον ρόλο της υποστήριξης μιας τονικότητας υποπολλαπλάσιας αυτής.

2 Τονικότητα

2.1 Ομοιομορφισμός

Ρυθμοί και τόνοι συνδέονται με σχέση ομοιομορφισμού που είναι η αντιστοίχιση των χρονικών διαστημάτων, των φαινομένων του ενός, στα χρονικά διαστήματα των φαινομένων του άλλου. Ο δείκτης r θα χρησιμοποιηθεί για τα φαινόμενα των ρυθμών και ο δείκτης t για τα φαινόμενα των τόνων. Έτσι έχουμε:

Ηχητικό κύμα αναφοράς. Η ακολουθία αναφοράς κτύπων συχνότητας σ_r και περιόδου $T_r = 1/\sigma_r$ *αντιστοιχεί σε ηχητικό κύμα αναφοράς* συχνότητας σ_t και περιόδου $T_t = 1/\sigma_t$.

Συχνότητα σ_r^1. Η ομαδοποίηση σ_r^1 ανά ένα κτύπο *αντιστοιχεί* σε ηχητικό κύμα συχνότητας $\sigma_t^1 = \sigma_t$ και περιόδου $T_t^1 = 1/\sigma_t^1 = 1/\sigma_t$.

Συχνότητα σ_r^n. Η ομαδοποίηση σ_r^n ανά n κτύπους *αντιστοιχεί* σε ηχητικό κύμα περιόδου $T_t^n = n * T_t = n/\sigma_t$ και συχνότητας $\sigma_t^n = 1/\mathrm{T}_t^n = \sigma_t/n$.

Τονικότητα. Η ρυθμικότητα $\sigma_r^{n,m,\cdots}$ της συνήχησης ομαδοποιήσεων σ_r^n *αντιστοιχεί* σε *ηχητικό κύμα* (**τονικότητα**) $\sigma_t^{n,m,\cdots}$ περιόδου $T_t^{n,m,\cdots} = lcm(T_t^n, T_t^m, \ldots) = \frac{lcm(n,m,\ldots)}{\sigma_t}$ και συχνότητας $\sigma_t^{n,m,\cdots} = \frac{\sigma_t}{lcm(n,m,\ldots)}$, όπου $lcm()$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Ισοδύναμα εκφράζεται και δια του μέγιστου κοινού διαιρέτη gcd[12].

$$\sigma_t^{n,m,\cdots} = \frac{1}{lcm(1/\sigma_t^n, 1/\sigma_t^m, \ldots)} = gcd(\sigma^n, \sigma^m, \ldots)$$

Τόνος. Ο ρυθμός λ_r^n μιας ομαδοποίησης σ_r^n, σε σχέση με μια ρυθμικότητα $\sigma_r^{n,m,\cdots}$ που υποστηρίζει, *αντιστοιχεί* στον **τόνο**

$$\lambda_t^n = \frac{T_t^{n,m,\ldots}}{T_t^n} = \frac{\sigma_t^n}{\sigma_t^{n,m,\ldots}} = \frac{lcm(n,m,\ldots)/\sigma_t}{n/\sigma_t} = \frac{lcm(n,m,\ldots)}{n}$$

και είναι αδιάστατος ακέραιος αριθμός. Ισοδύναμα εκφράζεται ως

$$\lambda_{n,m,\ldots}^n = \frac{\sigma_t^n}{gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m, \ldots)}$$

Αντικαταστάθηκε, στο λ, ο δείκτης t για να διευκρινιστεί ότι ο τόνος αναφέρεται στην τονικότητα που στηρίζει. Ο τόνος της τονικότητας $\lambda_t^{n,m,\cdots} = \frac{T_t^{n,m}}{T_t^{n,m}} = 1$ ισούται πάντα με την μονάδα. Συνεπώς, *η τονικότητα είναι συχνότητα και οι τόνοι είναι αναλογίες, ακέραια πολλαπλάσια, των εν χρήση συχνοτήτων προς αυτήν. Ο βαθμός εγγύτητας* ορίζεται ίδιος όπως στη σελίδα 6.

> Η συχνότητα της τονικότητας, επειδή υποστηρίζεται, εν δυνάμει, από τις άπειρες συχνότητες των ακέραιων πολλαπλασίων αυτής, *δεν* μπορεί να ορίσει καλώς ένα συγκεκριμένο σύνολο για εν χρήση υποστηριχτικούς τόνους.
> *Οι εν χρήση συχνότητες είναι αυτές που καθορίζουν την συχνότητα της τονικότητας.*

Η συγχορδία συχνοτήτων. Η πράξη της συνήχησης $+ \colon S \times S \to S$, με S το σύνολο ομαδοποιήσεων, αντιστοιχεί σε *συγχορδία συχνοτήτων* και προβάλεται φυσικά ως $\sigma_t^n + \sigma_t^m = \sigma_t^{n,m} = gcd(\sigma_t^n, \sigma_t^m)$, όπου gcd ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Με την ύπαρξη της σ_t^1 ως ουδέτερου στοιχείου $e = \sigma_t^1$, **η δομή του αντιμεταθετικού μονοειδούς**(σελ:7), με την ασθενή του διάταξη $\leq$, είναι προφανής. Ας σημειωθεί όμως ότι, επειδή αναφερόμαστε πλέον σε συχνότητες και όχι σε περιόδους, η διάταξη $a \leq b$ σημαίνει ότι η συχνότητα a διαιρείται από την b.

2.2 Κλάσεις

Οι κλάσεις συχνοτήτων $[\sigma]$ ορίζονται από την *σχέση ισοδυναμίας* $\sim$, όπου δύο συχνότητες σ_t^n και σ_t^m θεωρούνται ισοδύναμες αν ο λόγος τους είναι δύναμη του 2, δηλαδή $[\sigma_t^n] = [\sigma_t^m] \iff \sigma_t^n \sim \sigma_t^m \iff \frac{\sigma_t^n}{\sigma_t^m} = 2^{\pm k}$, $k \in \mathrm{Z}$. Το σύνολο όλων των κλάσεων είναι το $S/\sim := \{[\sigma] : \sigma \in S\}$.

[12]Αν το lcd εκφραστεί με πρώτους αριθμούς, οι εκθέτες του θα είναι της μορφής $max(m_i, n_i, \ldots) = -min(-m_i, -n_i, \ldots)$ που αποδεικνύει την σχέση, διότι το min αντιστοιχεί στο gcd.

Αντιπρόσωπος κλάσης συχνότητας $[\sigma] \in S/\sim$, μιας συχνότητας σ, επιλέγεται ο ρητός αριθμός της μορφής $\frac{\sigma}{\sigma^0} * 2^k$, $k \in \mathrm{Z}$ που ανήκει στο διάστημα $[1, 2)$ των άρρητων αριθμών, οπότε και αντιστοιχεί την συχνότητα αναφοράς σ^0 στην μονάδα, $[\sigma^0] = 1$[13]. Επειδή οι τονικότητες είναι συχνότητες, *οι **κλάσεις τονικοτήτων*** $[\sigma^{n,m,\cdots}]$ *αντιπροσωπεύονται από σημεία του ίδιου διαστήματος* $[1, 2)$ *άρρητων αριθμών.*

Η κλάση τόνων $[\lambda^n]$ ορίζεται από την προβολή τους

$$[\lambda^n_{n,m,\ldots}] = \frac{[\sigma^n_t]}{[gcd(\sigma^n_t, \sigma^m_t, \ldots)]}$$

οπότε

$$[\lambda^n_t] = [\lambda^m_t] \iff \lambda^n_t \sim \lambda^m_t \iff \frac{\lambda^n_t}{\lambda^m_t} = 2^{\pm k},\ k \in \mathrm{Z}$$

Αντιπρόσωπος της τονικής κλάσης $[\lambda^n_{n,m,\ldots}] \in \mathrm{Z}/\sim$, του τόνου $\lambda^n_{n.m.\ldots}$, επιλέγεται ο ρητός αριθμός της μορφής $\lambda^n_{n,m,\ldots} * 2^{-k}$, $k \in \mathrm{Z}$ που ανήκει στο διάστημα $[1, 2)$ ρητών αριθμών.

Το μονοειδές των κλάσεων ορίζεται με την προβολή της πράξης της συγχορδίας σε αυτό. Προφανώς η προβολή π, της πράξης της συγχορδίας $+$, στο $S/\sim$, ως $\pi : S \to S/\sim$, $\pi(\sigma) = [\sigma]$, είναι αυτονόητη και καλώς ορισμένη. Έτσι

$$[\sigma^n] + [\sigma^m] = [gcd(\sigma^n, \sigma^m)]$$

Η ασθενής διάταξη όμως αλλάζει ελαφρά νόημα. $[a] \leq [b]$ σημαίνει ότι υπάρχει k τέτοιο ώστε η $a * 2^k$ διαιρείται από την b.
Επεκτείνοντας την παραπάνω σχέση και διαιρώντας με $\sigma^{n.m.\cdots}$ έχουμε ότι, σε σχέση με τους τόνους λ^n μιας συγχορδίας, *ισχύει για την πράξη της συγχορδίας* (προσοχή, όχι της συνήθους πρόσθεσης)

$$[\lambda^n] + [\lambda^m] + \ldots = [1]$$

Αν υποθέσουμε κάποια τονικότητα και η σχέση δεν ισχύει τότε προφανώς η υπόθεσή μας ήταν λανθασμένη και οι συγχορδία συχνοτήτων υποστηρίζει άλλη τονικότητα. Παραδείγματος χάριν, αν υποθέσουμε σαν τονικότητα και κλάση [1] την συχνότητα της Ντο και ακουστούν σε συγχορδία η Ντο [1], η Σολ $[3/2] = [3]$ και η Ρε $[9/8] = [9]$ τότε $[1] + [3] + [9] = [gcd(1, 3, 9)] = [1]$ σωστά η τονικότητα της συγχορδίας είναι η Ντο. Αν αφαιρέσουμε όμως την Ντο τότε η συγχορδία των Σολ και Ρε $[3] + [9] = [gcd(3, 9)] = [3]$, οπότε προφανώς η Ντο δεν είναι η σωστή πλέον τονικότητα αλλά η Σολ [3].

[13]Οι επτά συνήθεις νότες ή πληρέστερα οι δώδεκα συνήθεις τόνοι είναι, επτά ή δώδεκα αντίστοιχα, κλάσεις συχνοτήτων που αντιστοιχούν σε σημεία στο διάστημα $[1, 2)$ επί των άρρητων αριθμών. Οι νότες χρησιμοποιούνται ως κλάσεις συχνοτήτων στις μουσικές αναλύσεις ενώ στις παρτιτούρες σημειώνονται ως συχνότητες.

Απλή τονικότητα είναι η τονικότητα που η κλάση της είναι η κλάση της συχνότητας αναφοράς. Αυτό έχει σαν συνέπεια να συνηχούν μόνο συχνότητες που ανήκουν στην $[\sigma^0]$.

Αποδόμηση τονικότητας είναι η μετάλλαξή της σε τονικότητα κάποιου γνήσιου υποσυνόλου των συχνοτήτων που την υποστηρίζουν.

Πρόοδος τονικότητας είναι η μεταβολή της σε άλλης κλάσης τονικότητα.

Παθητική πρόοδος (ή *αδύνατη* ή *κατιούσα* πρόοδος) μιας τονικότητας είναι *η αποδόμησή της* σε διαφορετική κλάση.

Ενεργητική πρόοδος (ή *δυνατή* ή *ανιούσα* πρόοδος) μιας τονικότητας είναι η όποια *μη παθητική* πρόοδός της σε νέα διαφορετικής κλάσης τονικότητα.

2.3 Ο χώρος τόνων και τονικότητας

Το σύνολο των συχνοτήτων είναι μονοδιάστατος χώρος, δηλαδή είναι ισόμορφο με την ευθεία R των άρρητων αριθμών. Οφείλουμε να ορίσουμε κάποια συχνότητα αυτού του χώρου ως *συχνότητα αναφοράς*, στην οποία αναφέρονται οι αντιπρόσωποι των κλάσεων συχνοτήτων που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα. Η συχνότητα $\sigma^0 = 440Hz$ αναφέρεται συνήθως ως συχνότητα αναφοράς[14].

Η σαμπρέλα τόνων και τονικότητας είναι ο χώρος όπου αυτοί τοποθετούνται. Η ταύτιση των άκρων του διαστήματος των κλάσεων συχνοτήτων $[1, 2)$ χρειάζεται μία ακόμα διάσταση για να οπτικοποιηθεί ως κύκλος. Χρειάζεται δηλαδή δισδιάστατο χώρο ώστε να καμφθεί μέσα σ' αυτόν η ευθεία των συχνοτήτων. Ωστόσο, παρά την οπτικοποίηση του κόσμου των κλάσεων των τονικοτήτων σε *κύκλο τονικοτήτων*, η ευκλείδια εγγύτητα παραμένει ψευδαίσθηση, πιθανότα τελείως αντίθετη με τις σχέσεις διάταξης που προαναφέρθηκαν. Με την ίδια λογική, όλες οι κλάσεις τόνων $[\lambda^n]$ μιας τονικότητας $\sigma^{n,m,\cdots}$, αντιστοιχούν σε *κύκλο τόνων* $[1, 2)$. Από κάθε σημείο $[\sigma^{n,m,\cdots}]$ του κύκλου τονικοτήτων διέρχεται ένας κύκλος τόνων $[1, 2)$, όπου η μονάδα $[\lambda^{n,m,\cdots}] = [1]$ συμπίπτει με την κλάση τονικότητας $[\sigma^{n,m,\cdots}]$. Έτσι, χρειαζόμαστε ακόμα μία διάσταση ώστε να οπτικοποιήσουμε τον κύκλο των τόνων σε διαφορετική διάσταση από αυτόν του κύκλου τονικοτήτων. Οπότε, σε τρισδιάστατο χώρο, οι κύκλοι όλων των δυνατών κλάσεων τόνων, επί καθενός σημείου του κύκλου των τονικοτήτων, είναι επιφάνεια μιας σαμπρέλας. Η σαμπρέλα είναι το σύμπαν των κλάσεων των τονικοτήτων και των τόνων τους.

[14] Για την ακρίβεια αναφέρεται ως το πρότυπο των συχνοτήτων.

Κάθε τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ *ενυπάρχει πάντα*, ως κρυφή ή φανερή, στο άκουσμα κάθε συχνότητας $\sigma^n = \sigma^0/n$ που την στηρίζει[15]. Ωστόσο, ο τόνος λ^n, της συχνότητας σ^n, σχεδόν ποτέ δεν είναι μόνος του στον κύκλο τόνων της $\sigma^{n,m,\cdots}$. Το σύνολο των σημείων $\{[\lambda^n], [\lambda^m], \ldots\}$, δηλαδή το σύνολο των τόνων συγχορδίας, είναι που ανήκει στον κύκλο τόνων που διέρχεται από την κλάση τονικότητας $[\sigma^{n,m,\cdots}]$. Ένα γνήσιο υποσύνολο ή υπερσύνολο αυτού μπορεί κάλλιστα, ως συγχορδία, να ανήκει σε κύκλο τόνων διαφορετικής τονικότητας. Παρά το γεγονός ότι στον κύκλο τόνων μιας τονικότητας δεν ανήκουν απομονωμένοι τόνοι, παρά μόνον συγχορδίες από τόνους, εντούτοις ο κύκλος τόνων $[1, 2)$ περιέχει άπειρα σημεία και γεννάται το ερώτημα ποια από αυτά μπορεί να είναι υποψήφια ώστε να αποτελούν *στοιχεία των συνόλων* $\{[\lambda^n], [\lambda^m], \ldots\}$, των τόνων δηλαδή που δημιουργούν τις συγχορδίες. Επειδή η τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ είναι κοινός διαιρέτης όλων των σ^n που την στηρίζουν, είναι προφανές ότι τα μόνα κατάλληλα σημεία του κύκλου των τόνων της, για στοιχεία του $\{[\lambda^n], [\lambda^m], \ldots\}$, είναι αυτά που, εξ ορισμού, αντιστοιχούν στις αρμονικές της, δηλαδή στις συχνότητες $n * \sigma^{n,m,\cdots}$, $n \in \mathrm{Z}^+$. Οπότε $[\lambda^n] = [n]$, δηλαδή οι κλάσεις τόνων συμπίπτουν με τις κλάσεις ακεραίων. Έτσι, οι αντιπρόσωποι των κλάσεων των τόνων είναι όροι της ακολουθίας $\{1, 3/2, 5/4, 7/4, 9/8, 11/8, \ldots\}$[16].

Τα στοιχεία του συνόλου των τόνων που δύνανται να υποστηρίζουν μια τονικότητα, πέρα από το ότι ανήκουν στους ακεραίους θετικούς, μπορούν να περιοριστούν δραστικά λόγω του ορίου που θέτει το ακουστικό φάσμα που αναφέρθηκε στη σελίδα 10. Εξ ορισμού ισχύει ότι

$$\lambda^n = \frac{\sigma^n}{\sigma^{n,m,\ldots}} \Rightarrow 20Hz \lesssim \sigma^{n,m,\cdots} = \frac{\sigma^n}{\lambda^n} \Rightarrow \lambda^n \lesssim \frac{\sigma^n}{20Hz}$$

Είναι τελείως υποκειμενικό αλλά, αν θέλουμε η συχνότητα $440Hz$ να υποστηρίζει τονικότητα εντός του ακουστικού φάσματος πρέπει $\lambda^n \lesssim \frac{440}{20} = 22$. Όσο πιο κοντινοί στην μονάδα είναι κάποιοι τόνοι τόσο πιο πολύ προσλαμβάνεται ότι όντως είναι στοιχεία της τονικότητας που υποστηρίζουν. Τα πιο κοντινά διαφορετικά της μονάδας στοιχεία είναι το $[3/2]$ και το $[5/4]$. Δεν θα προσθέσουμε άλλο στοιχείο για να μην ξεφεύγει εύκολα η τονικότητα εκτός ακουστικού φάσματος[17].

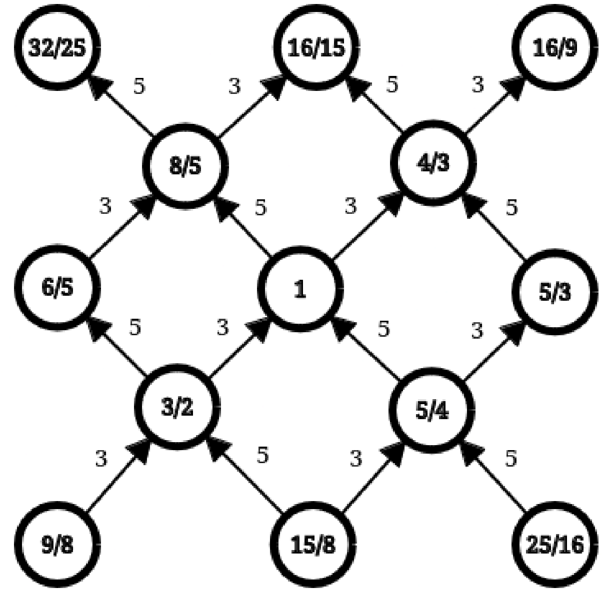
Ο δυισμός τόνων και τονικοτήτων είναι μια αναγκαία πρόσθετη δομή, επί της σαμπρέλας στην οποία τοποθετούνται, ώστε να περιοριστούν οι κλάσεις τονικοτήτων οι οποίες, μέχρι τώρα, αντιπροσωπεύονται από τα άπειρα σημεία του διαστήματος $[1, 2)$ των άρρητων αριθμών. Κάθε τόνος λ^n, πολλαπλασιαζόμενος με την τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ που υποστηρίζει, αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα στην

[15]Οι μικρότερες υποσυχνότητές της, $\sigma_n^k = \sigma^n/k$, ενυπάρχουν πάντα εν δυνάμει. Όμως, κατά την αντίληψή μας, υπερσκελίζονται από το άκουσμα της σ^n. Συμβαίνει δηλαδή το αντίθετο από ό,τι συμβαίνει στις αρμονικές $k * \sigma^n$, οι οποίες άλλοτε δημιουργούνται από τα μουσικά όργανα και άλλοτε όχι, εξαρτώμενες από το όργανο που παράγει την βασική συχνότητα σ.

[16]Είναι θέμα μουσικής κουλτούρας πόσοι και ποίοι απ' αυτούς χρησιμοποιούνται και συνθέτουν ένα σύνολο εν χρήση τόνων στην πράξη.

[17]Αν είχαμε προσθέσει και το στοιχείο $[7/4]$, για παράδειγμα, το γινόμενο με το $[5]$ θα απαιτούσε όριο το $[5 * 7] = [35]$, οπότε οι συνήθεις συχνότητες θα έπρεπε να είναι μία οκτάβα υψηλότερες στα $880Hz$, ώστε $880/20 = 44 \gtrsim 35$.

συχνότητα $\sigma^n = \lambda^n * \sigma^{n,m,\cdots}$. Με την πρόσθετη δομή, επί του κύκλου τονικοτήτων, επιτρέπουμε, ως κλάσεις τονικοτήτων, μόνον τα σημεία που αντιστοιχούν σε συχνότητες τόνων. Αρκεί βέβαια να καθορίσουμε μια συχνότητα αναφοράς σ^0, ώστε η τονικότητα $\sigma^{n,m,\cdots}$ να αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη συχνότητα $\sigma^{n,m,\cdots} = \lambda * \sigma^0$. Δημιουργούμε έτσι ένα ***δένδρο τονικοτήτων***, όπου κάθε τονικότητα συνδέεται με δύο άλλες τονικότητες μέσω των δύο κλαδιών που αντιστοιχούν στους δύο βασικούς τόνους [3/2] και [5/4]. Στο σχήμα 4 φαίνεται τμήμα του δένδρου, όπου, με κέντρο την τονικότητα αναφοράς [1], βλέπουμε τις κλάσεις τονικοτήτων δύο επιπέδων, τόσο κατά την κατεύθυνση εκ των δύο βασικών τόνων προς την τονικότητα που υποστηρίζουν, όπου σημειώνονται με 3 ο [3/2] και 5 ο [5/4], όσο και δύο επιπέδων κατά την αντίθετη κατεύθυνση, αφού, κατά την επιθυμητή πρόσθετη δομή μας, και η κεντρική τονικότητα [1] κάποιες άλλες τονικότητες οφείλει να στηρίξει. Στο σχήμα η αρχή του βέλους υποστηρίζει την κορυφή του.

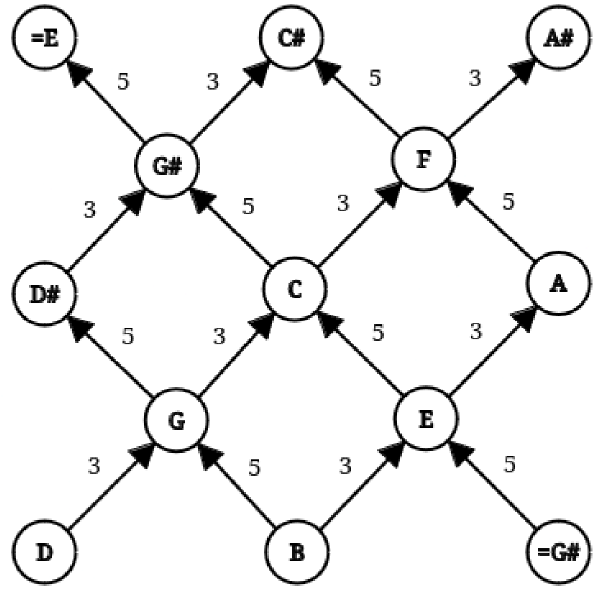


Σχήμα 4: Σχέσεις τονικοτήτων ως τόνος η μιά της άλλης

Όλες οι κλάσεις, αναφορικά με την [1], θεωρούνται απλές αναλογίες χρησιμοποιώντας αριθμούς μικρότερους του 22, εκτός από τις [32/25] και [25/16]. Και οι δύο πλησιάζουν είτε τις απλές κλάσεις [9/7] και [11/7][18] είτε τις απλές κλάσεις [5/4] και [8/5] αντίστοιχα. Ας δεχθούμε ότι τις αγνούμε ή η συνήθεια και η οικονομία της αντίληψής μας, της σελίδας 6, μας κάνει να αντιλαμβανόμαστε το άκουσμα της [32/25] ως [5/4] και της [25/16] ως [8/5]. Συμβολίζοντας την κλάση της τονικότητας [1] με C και τις υπόλοιπες σύμφωνα με τις συγκερασμένες συχνότητες,

[18] Δεν έχουμε συνηθίσει όμως να ακούμε ούτε να χρησιμοποιούμε τόνους που βασίζονται στο 7.

οι σχέσεις των κλάσεων των τονικοτήτων φαίνονται στο σχήμα 5. Σε κάθε κα-



Σχήμα 5: Τοπικός χάρτης που αφορά στην $[C]$ τονικότητα.

τεύθυνση, κάθετη, οριζόντια, διαγώνια αριστερά και διαγώνια δεξιά, υπάρχει ± 1[19], ± 3, ± 4 και ± 5 σταθερή μεταβολή ημιτονίων αντίστοιχα. Η τοπολογία σαμπρέλας είναι έντονη και, αν αποτυπώναμε τις τριάδες συχνοτήτων, θα υπήρχε ταύτιση με το διάγραμμα Tonnetz της Neo-Riemannian θεωρίας. Ας σημειωθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι μεταβατικές. Αν η κλάση τονικότητας $[X]$ στηρίζει την $[Y]$ και η $[Y]$ την $[Z]$ τότε η $[X]$ στηρίζει την $[Z]$, απλά η στήριξη είναι πιο απόμακρη. Στο παραπάνω σχήμα εμφανίζονται οι ένδεκα από τους γνωστούς τόνους, ενώ λείπει ο τόνος $F\#$ που αντιστοιχεί στο διάστηκα του τριτόνου $CF\#$[20]. Δυστυχώς, όσο καθαρά και αν ακούγονται οι τονικότητες γύρω από την κεντρική κλάση $[1]$, όσο απομακρυνόμαστε από αυτήν, πυκνώνουν οι κλάσεις στο διάστημα $[1, 2)$, καθώς ουδέποτε θα καταλήξουμε ξανά σε τονικότητα κλάσης $[1]$. Έτσι, οι απομακρυσμένες τονικότητες γίνονται δυσδιάκριτες σε σχέση με τις κλάσεις απλών αναλογιών και ο ήχος τους γίνεται συγκεχυμένος. Η παραπάνω δυσκολία ξεπερνιέται κατά ένα βαθμό μοιράζοντας το σφάλμα των απομακρυσμένων κλάσεων σε όλες τις κλάσεις, υιοθετώντας κλάσεις τονικοτήτων που χωρίζουν το 2, την οκτάβα δηλαδή, σε k ίσα αναλογικά διαστήματα, με τέτοιο λόγο a ώστε $a^k = 2$. Δημιουργείται έτσι

[19] Οι ματζόρε κλίμακες όλων των $C\#, A\#, G\#, D\#$ του σχήματος έχουν συνήθως υπογραφές κλειδιών με υφέσεις, οπότε ίσως έπρεπε να συμβολιστούν ως Db, Bb, Ab, Eb. Όμως ο συμβολισμός με διέσεις καταδεικνύει την ± 1 σχέση κατά την κάθετη κατεύθυνση.

[20] Η συνέπεια με τις σχέσεις των λοιπών κλάσεων τοποθετεί την $[F\#]$ στην μέση του σχήματος 5 αριστερά της $[D\#]$ ή κάτω από την $[G]$.

ένα **ισοσυγκερασμένο σύστημα** k εν χρήση συχνοτήτων. Παρόλο που δεν υπάρχουν πλέον οι τόνοι ως ακέραιοι αριθμοί, αφού δεν υπάρχει ούτε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των άρρητων συχνοτήτων σε συγχορδία, εντούτοις αν τα a^k είναι πολύ κοντά σε απλούς λόγους, η ανάγκη για οικονομία της πληροφορίας προκαλεί την προσλαμβάνουσά τους ως απλούς ρητούς λόγους. Ο εν χρήση αριθμός για το k εξαρτάται από την μουσική κουλτούρα, την εξοικείωση με την σχέση συχνοτήτων που προκαλεί και από το πόσο καλά προσεγγίζουν οι αναλογίες απλούς λόγους. Στη σύγχρονη εποχή έχει σχεδόν καθολικά επικρατήσει η τιμή $k = 12$ με το δωδεκατονικό ισοσυγκερασμένο σύστημα. Σε αυτό το σύστημα $a = 2^{1/12}$. Οι δε λόγοι των ένδεκα κλάσεων τονικοτήτων, του τμήματος του δένδρου που εξετάσαμε, προσεγγίζονται πολύ καλά από τα εν χρήση $a^k = 2^{k/12}$. Εφόσον καταλήξαμε σε δώδεκα σημεία επί του κύκλου των τονικοτήτων τότε, σε κάθε κύκλο τόνων, θα επιτρέψουμε δώδεκα σημεία κλάσης προς επιλογή των τόνων λ^n των συγχορδιών. Αντιστοιχώντας την μονάδα στην κλάση $[C]$, οι καλύτερες προσεγγίσεις[21] των $2^{k/12}$ με απλούς λόγους φαίνονται στον πίνακα 1.

k	0:C	1:C#,Db	2:D	3:D#,Eb	4:E	5:F
$[\lambda]$	1	17/16	9/8	6/5	5/4	4/3
k	6:F#,Gb	7:G	8:G#,Ab	9:A	10:A#,Bb	11:B
$[\lambda]$	17/12	3/2	8/5	5/3	16/9	15/8

Πίνακας 1: Προσεγγίσεις των $2^{k/12}$ με απλούς λόγους

Η απλή τονικότητα διευρύνεται στο ισοσυγκερασμένο σύστημα ως *η τετριμμένη τονικότητα που στηρίζεται μόνον στον μοναδιαίο τόνο της.* Αυτό διότι όλες οι τονικότητες αποκτούν ίση σημασία[22], αφού κάθε οκτάβα κάθε μιας από αυτές διαιρείται σε ίσα αναλογικά τμήματα από τις υπόλοιπες. Όλες οι ασυνόδευτες μελωδίες, όπου ακούγονται μόνες συχνότητες, μη αποτελώντας στοιχείο κάποιας συγχορδίας, είναι ακολουθία απλών, τετριμμένων τονικοτήτων. Ως εκ τούτου κάθε βήμα της μελωδικής ακολουθίας είναι ενεργητική πρόοδος τονικότητας, αφού δεν ταυτίζεται με γνήσιο υποσύνολο συχνοτήτων της προηγούμενης συγχορδίας.

Περί πολλαπλότητας. Φανταστείτε ένα πλάσμα που ζει στην επιφάνεια της σαμπρέλας τόνων και τονικοτήτων της σελίδας 13. Το πλάσμα έχει την αίσθηση ότι ζει σε δισδιάστατο κόσμο και, κατά τον τοπικό χάρτη του, κάθε μετακίνησή του αναφέρεται σε κατεύθυνση κατά τους άξονες [3/2] και [5/4]. Όπου και να βρίσκεται, αυτούς τους άξονες έχει υπόψη του και σύμφωνα με αυτούς μετακινείται. Αντιλαμβάνεται βέβαια ότι μετά από 12 βήματα κατά την κατεύθυνση [3/2] βρίσκεται ξανά εκεί από όπου ξεκίνησε, όπως το ίδιο συμβαίνει και μετά από 3 βήματα

[21] Η προσέγγιση του $2^{1/12} = 1.059463 \sim 17/16 = 1.0625$ είναι καλύτερη του $16/15 = 1.0666$. Αυτή του $2^{6/12} = 1.41421 \sim 17/12 = 1.41666$ είναι καλύτερη του $45/32 = 1.40625$. Αυτή του $2^{10/12} = 1.78179 \sim 16/9 = 1.77777$ είναι καλύτερη του $9/5 = 1.8$. Και οι τρεις είναι καλύτερες από αυτές που αναφέρονται στο συγκερασμένο σύστημα.

[22] Η ίση σημασία κάθε τονικότητας οδηγεί στην επόμενη παράγραφο περί πολλαπλότητας.

προς την κατεύθυνση [5/4]. Δεν μπορεί βέβαια να αντιληφθεί αυτό που εμείς, ζώντας σε τρισδιάστατο χώρο, αντιλαμβανόμστε εύκολα, ότι δηλαδή ο κόσμος του βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια σαμπρέλας. Το καλύτερο που μπορεί να κάνει, ώστε να χαρτογραφήσει τον κόσμο του, είναι να σχεδιάσει τοπικούς χάρτες, όπου κάθε χάρτης θα έχει κοινά σημεία με κάθε γειτονικό του. Ένας τέτοιος τοπικός χάρτης, που αφορά στο σημείο της τονικότητας $[C]$, είναι το σχήμα 5. Το σύνολο όλων των τοπικών χαρτών χαρτογραφεί την επιφάνεια της σαμπρέλας ως πολλαπλότητα. Οι σχέσεις με τις τέσσερεις κλάσεις γύρω από την C, ως τοπικές, είναι ακριβής. Οι σχέσεις της C με πιο απομακρυσμένες κλάσεις, λόγω της τοπολογίας της σαμπρέλλας, αλλοιώνονται τόσο πιο πολύ όσο πιο απομακρυσμένες είναι αυτές από την $[C]$.

2.4 Η χαμένη τονικότητα

Η προβολή του ομοιομορφισμού της κρυφής ρυθμικότητας, ως κρυφή ομαδοποίηση της σελίδας 5, στο φάσμα των συχνοτήτων είναι η κρυφή ή χαμένη τονικότητα ή αλλιώς η χαμένη θεμελιώδης συχνότητα. Κάθε συγχορδία συχνοτήτων παράγει θεμελιώδη σύνθετη κυματομορφή που επαναλαμβάνεται με συχνότητα ίση με την τονικότητα της συγχορδίας. Κάθε επανάληψή της στο ακουστικό φάσμα την εκλαμβάνουμε σαν συχνότητα. *Η τονικότητα μιας συγχορδίας είναι πάντα εν χρήση.* Αν η κλάση της αντιστοιχεί σε συχνότητα της συγχορδίας, τότε είναι φανερή. Αν η κλάση της τονικότητας δεν αντιστοιχεί σε συχνότητα της συγχορδίας, τότε είναι κρυφή ή χαμένη.

Η κλάση της τονικότητας μιας συγχορδίας καθορίζεται πλήρως από τις κλάσεις των συχνοτήτων που την υποστηρίζουν. Στο ισοσυγκερασμένο σύστημα, λόγω της ακριβούς αναλογικής διαίρεσης κάθε οκτάβας, οι συχνότητες αυτές καθεαυτές χάνουν τη σημασία τους και αποκτά σημασία ο λόγος μεταξύ τους, δηλαδή τα μουσικά διαστήματα. Αυτό σημαίνει ότι, για να υπολογίσουμε οποιαδήποτε τονικότητα συγχορδίας, θέτουμε ως μονάδα την κλάση μιας από τις συχνότητές της και την υπολογίζουμε, σε σχέση με k διαστήματα από αυτήν, από τις αναλογίες του πίνακα 1. Επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα (σελίδα 8) η τονικότητα μιας συγχορδίας προσεγγίζεται εύκολα με βήματα ανά δύο συχνοτήτων. Αξίζει λοιπόν να υπολογίσουμε την τονικότητα όλων των διαστημάτων που ορίζονται από δύο συχνότητες. Ας λάβουμε υπόψη ότι όλες οι αναλογίες του πίνακα 1 είναι ανάγωγα κλάσματα.

- $[1] + [\frac{a}{2^n}] = [1] + [a] = [1]$ οπότε όλα τα διαστήματα που αντιστοιχούν σε αναλογία με παρονομαστή δύναμη του 2 έχουν σαν κλάση τονικότητας αυτήν που αντιστοιχεί στην συχνότητα αναφοράς. Παραδείγματος χάριν το $[C]$, ως συχνότητα αναφοράς, συνηχώντας με τα $[C\#], [D], [E], [G], [B]$ έχει τονικότητα την ίδια την $[C]$. Αν εξαιρέσουμε την $[C\#]$, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι, παρούσης της $[C]$, κάθε συγχορδία υποσύνολο των συχνοτήτων της συγχορδίας C^9 έχει τονικότητα την $[C]$, σε τέτοιο υποπολλαπλάσιο της C όσο αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο παρονομαστή της δύναμης του 2. Κάθε συνήχηση με άλλης κλάσης συχνότητα έχει σαν αποτέλεσμα διαφορετική από την $[C]$ τονικότητα. Το $[C\#] = [17/16]$ μπορεί να εξαιρεθεί για τρεις λόγους. Πρώτον, με τονικότητα να αντιστοιχεί τέσσερις οκτάβες χαμηλότερα μπορεί να τίθεται εκτός ακουστικού φάσματος, δεύτερον, πρόκειται για πολύ ευαίσθητη αναλογία. Αρκεί να την εκλάβουμε ίση με την $[16/15]$ του συγκερασμένου συστήματος και δεν θα ανήκει πια σε συχνότητα που υποστηρίζει την τονικότητα κλάσης $[C]$ και τρίτον, η σχεδόν από πάντα χρήση της αναλογίας $[16/15]$, στο συγκερασμένο σύστημα, έχει δημιουργήσει τέτοια συνήθεια που καθιστά απίθανη την ακουστική αποδοχή της.

- $[1] + [\frac{a}{b}] = [\frac{1}{b}]$, $b \neq 2^n$ οπότε η τονικότητα αντιστοιχεί στην κλάση $[\frac{1}{b}]$ και στο υποπολλαπλάσιο $1/b$ της C. Έτσι,
  $[C] + [D\#] = [1] + [\frac{6}{5}] = [\frac{1}{5}] = [G\#]$ δηλαδή **η μινόρε τρίτης έχει την τονικότητα της ματζόρε συγχορδίας που την χρησιμοποιεί**.
  Φυσικά, το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για την ματζόρε έκτης $[C] + [\mathrm{A}] = [1] + [\frac{5}{3}] = [\frac{1}{3}] = [F]$.
  $[C]+[\mathrm{A}b] = [1]+[\frac{8}{5}] = [\frac{1}{5}] = [Ab]$ δηλαδή η μινόρε έκτης έχει την τονικότητα της αντίστοιχης ματζόρε τρίτης.
  $[C]+[F] = [1]+[\frac{4}{3}] = [\frac{1}{3}] = [F]$ δηλαδή η τέλεια τετάρτη έχει την τονικότητα της τέλειας τετάρτης.
  $[C] + [\mathrm{B}b] = [1] + [\frac{16}{9}] = [\frac{1}{9}] = [\mathrm{B}b]$ δηλαδή η μινόρε εβδόμης έχει την τονικότητα της μινόρε εβδόμης.
  $[C] + [F\#] = [1] + [\frac{17}{12}] = [\frac{1}{12}] = [\frac{1}{3}] = [F]$ δηλαδή η αυξημένη πέμπτης έχει την τονικότητα της τέλειας πέμπτης, όμως περισσότερο από τρεις οκτάβες κάτω από την $[C]$.

Συνοπτικότερα:

- Η διαφορά $2, 4, 7, 11$ ημιτονίων υποστηρίζει κλάση τονικότητας ίση με την κλάση της συχνότητας αναφοράς[23].

- Η διαφορά 3 ημιτονίων υποστηρίζει τονικότητα ίση με την κλάση της συχνότητας 4 ημιτονίων *πριν* την συχνότητα αναφοράς.

- Η διαφορά $5, 10$ ημιτονίων υποστηρίζει τονικότητα ίση με την κλάση της συχνότητας της διαφοράς, δηλαδή τις κλάσεις $[5]$ και $[10]$ αντίστοιχα.

- Η διαφορά 6 ημιτονίων, του τριτόνου δηλαδή, υποστηρίζει τονικότητα ίση με την κλάση της συχνότητας 5 ημιτονίων *μετά* την συχνότητα αναφοράς, ισοδύναμα κατά 1 ημιτόνιο μικρότερο της διαφοράς.

Βλέπουμε ότι παρούσης της $[C]$ κλάσης συχνότητας, εκτός της ιδίας, μόνον οι $[F] = [4/3], [G\#] = [8/5]$ και $[Bb] = [15/8]$ κλάσεις τονικοτήτων μπορούν να υποστηριχθούν.

[23]Ας αγνοήσουμε την διαφορά κατά 1, που υποστηρίζει την ίδια τονικότητα, για τους λόγους που αναφέρθηκαν κατά τον υπολογισμό της.

Οι συγχορδίες είναι σύνολο συχνοτήτων που συνηχούν. Δεν μπορεί παρά να υποστηρίζουν θεωρητικά μία συγκεκριμένη τονικότητα. Η τονικότητα μπορεί να είναι η απλή τετριμμένη αλλά μια *συγχορδία* θα λέγεται **ματζόρε** ή πλήρης **αν υποστηρίζεται από την κλάση της τονικότητας** [1] **και από τους δύο βασικούς τόνους της** [3/2] **και** [5/4]. Η τονικότητα στην τυπική ματζόρε συγχορδία $C - E - G$ είναι φανερή, εφόσον η $[C]$ χρησιμοποιείται εν τη πράξη. Ας ονομάσουμε την κλάση $[C] = [1]$ ρίζα ή **root** της συγχορδίας με την έννοια της *πρόθεσης* να ταυτίζεται με την τονικότητά της. Ας ονομάσουμε την κλάση $[G] = [3/2]$ πηγή ή **source** της συγχορδίας με την έννοια του ότι αποτελεί την κύρια πηγή στήριξης της ρίζας της συγχορδίας, ως προτιθέμενη τονικότητά της. Ας ονομάσουμε την κλάση $[E] = [5/4]$ ποιότητα **quality** της συγχορδίας με την έννοια του ότι αποτελεί την δευτερεύουσα συχνότητα στήριξης ή όχι της ρίζας της συγχορδίας, ως προτιθέμενη τονικότητά της. Εφόσον η πηγή πάντα υποστηρίζει την ρίζα ως τονικότητα, η ποιότητα μιας συγχορδίας είναι αυτή που καθορίζει αν η *ρίζα* της συγχορδίας είναι όντως η φανερή τονικότητά της ή όχι. Ας σημειωθεί ότι το διάστημα τριών ημιτονίων, που αντιστοιχεί στην κλάση [6/5], είναι πάντα παρόν, ως $E - G$, σε κάθε ματζόρε συγχορδία.
Η τονικότητά υπολογίζεται προσεγγιστικά συνδυάζοντας τις συχνότητες ανά δύο. Ο υπολογισμός της τονικότητας της ματζόρε συγχορδίας δίδει αποτέλεσμα [1/4]. Η κλάση του αποτελέσματος είναι προφανώς η [1] και η τονικότητα βρίσκεται $2^2 = 4$ δύο οκτάβες χαμηλότερα της C. Αν προσθέσουμε και την $[B] = [15/8]$, δημιουργώντας προφανώς την C^7, το αποτέλεσμα [1/4] το συνθέτουμε με την $[B] = [15/8]$ και βρίσκουμε $[1/4] + [15/8] = [1/8]$. Η κλάση της εβδόμης είναι και πάλι η [1] και η τονικότητα βρίσκεται $2^3 = 8$ τρεις οκτάβες χαμηλότερα της C, άρα εύκολα εντός του ακουστικού φάσματος.

Ακριβής υπολογισμός τονικότητας χρειάζεται όταν εκτιμάται ότι η τονικότητα είναι πολύ απομακρυσμένη, οπότε δεν είναι εμφανές ποιο από τα $2^{k/12}$ την προσεγγίζει καλύτερα. Για αυτό το λόγο κατασκεύασα την συνάρτηση $G(x, y, \ldots)$ στο maxima ως

```
G([arguments]):= block([i,x,y,marg,minmarg,sol,ratprint,ratepsilon],
ratprint:false,
ratepsilon:1e-2,
marg:mod(arguments,12),
minmarg:first(marg),
marg:mod(marg-minmarg,12),
y:apply('ezgcd,rat(bfloat(2^(args(marg)/12))))[1],
i:0,
while y*2^i < 1 do i:i+1,
sol:round(rhs(solve([2^(x/12)=2^i*y],[x])[1])),
[y,arguments,mod(sol+minmarg,12)]
)$
```

Τα $x, y, \ldots$ είναι τα k που συμμετέχουν στην συγχορδία. Το αποτέλεσμά της δείχνει, με το πρώτο κλάσμα, σε τι υποπλλαπλάσιο της $[x]$ βρίσκεται η τονικότητα, η οποία φαίνεται σαν ο τελευταίος αριθμός του αποτελέσματος. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα είναι το

```
(%i5) G(11,2,5,8);G(2,5,8,11);G(5,8,11,2);G(8,11,2,5);
(%o2)/R/ [1/60,[11,2,5,8],0]
(%o3)/R/ [1/60,[2,5,8,11],3]
(%o4)/R/ [1/60,[5,8,11,2],6]
(%o5)/R/ [1/60,[8,11,2,5],9]
```

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η συγχορδία $B-D-F-Ab$ δεν χρειάζεται οπωσδήποτε να θεωρείται ως κάποια από τις τέσσερις δεσπόζουσες ενάτης, που τους λείπει ο root τόνος και καταλήγει στην αντίστοιχη τονική της, αλλά ότι απ' ευθείας τείνει να καταλήγει σε μία από τις τέσσερις κρυφές τονικότητές της, δηλαδή σε μία εκ των $[C], [Eb], [F\#], [A]$.
Οφείλω όμως να είμαι σκεπτικιστής. Το υποπλλαπλάσιο είναι πολύ μικρό για να γίνει δεκτό το ότι πρόκειται για "κοντινές" αποστάσεις συχνοτήτων. Δέχομαι το αποτέλεσμα λόγω της συμμετρίας της συγχορδίας. Πρόκειται για όλες τις τέσσερις διαφορετικές κλάσεις κάθε οριζόντιας γραμμής του σχήματος 5. Όμως, πολύ πιο εύκολα δέχομαι το αποτέλεσμα για την συγχορδία $G\# - E - C$, όπου πρόκειται για όλες τις τρεις διαφορετικές κλάσεις της προς τα άνω αριστερά διαγωνίου.
Σε αντίθεση με τα προηγούμενα δεκτά αποτελέσματα, ένα μη αποδεκτό αποτέλεσμα είναι το

```
(%i3) G(7,11,20,27);G(6,0,9,2);
(%o2)/R/ [1/80,[7,11,20,27],3]
(%o3)/R/ [1/60,[6,0,9,2],7]
```

Πρόκειται για παραφωνία που, σύμφωνα με την σελίδα 324 του βιβλίου Theory of harmony[24], χρησιμοποίησε ο Mozart. Το πολύ μικρό υποπολλαπλάσιο 1/80 υποδαυλίζει το αποτέλεσμα $3 = [D\#]$ της πρώτης συγχορδίας. Το πιο συνετό είναι να θεωρηθεί η χαμηλότερη συχνότητα $7 = [G]$ ως σκοπούμενη τονικότητα, αλλά η επόμενη συγχορδία, δεικνύει μεν την $[G]$ ως τονικότητά της, όμως, και πάλι, ως απομακρυσμένη τονικότητα και ούτε καν δια της πιο συνηθισμένης $[F\#] - [A] - [C] - [Eb]$ αλλά δια της $[F\#] - [A] - [C] - [D]$ συγχορδίας.

Η μινόρε συγχορδία είναι η αποδόμηση της ματζόρε, με αφαίρεση της ρίζας της, καθιστώντας την τονικότητά της κρυφή. Κατ' ουσίαν πρόκειται για αποδόμηση της εβδόμης ματζόρε $C-E-G-B$. Αν ορίσουμε ως κλάση αναφοράς και ρίζα της μινόρε συγχορδίας την $[E] = [5/4]/[5/4] = [1]$, η προσέγγιση της τονικότητας δίδει αποτέλεσμα $[8/5]$, που αντιστοιχεί σε 4 ημιτόνια πριν την συχνότητα αναφοράς E, δηλαδή στην C. Έτσι, η συχνότητα C είναι εν χρήση αλλά δεν παράγεται στην πράξη. Άρα η $[C]$ τονικότητα είναι κρυφή τονικότητα της $E-G-B$ μινόρε συγχορδίας, που μαζί με την τελευταία σχηματίζουν μία αποδομημένη, από τη ρίζα της, C^7 συγχορδία. Προφανώς η E^7 εβδόμη μινόρε είναι η αποδομημένη, από τη ρίζα της, C^9 ενάτη ματζόρε συγχορδία.

[24] Ψάξτε την λέξη "fellow" για να δείτε το σχήμα 233 του βιβλίου.

Το πρώτο παράδειγμα ήρθε από την περιέργειά μου να εξετάσω τα έξι πρώτα μέτρα της πασίγνωστης moonlight sonata. Στο σχήμα 6 προστέθηκαν, με βιολοντσέλο, οι στιγμές όπου αλλάζει η τονικότητα, είτε κρυφή είτε φανερή. Στον ήχο του ακούγονται τα πρώτα έξι μέτρα πιάνου, τα οποία επαναλαμβάνονται με την προσθήκη όλων των τονικοτήτων σε βιολοντσέλο. Ακολουθούν μόνον οι τονικότητες σε βιολοντσέλο και κλείνει επαναλαμβάνοντας τα έξι μέτρα πιάνου βιολοντσέλου μαζί. Ας προσεχθεί ότι, με παρουσία της συχνότητας ρίζας, η εναλλαγή των τονικοτήτων στα αρπέτζιο συμβαίνει επειδή οι συγχορδίες είναι μινόρε. Στα ματζόρε αρπέτζιο, με παρουσία της συχνότητας ρίζας, η τονικότητα παραμένει σταθερή. Επίσης άξια παρατήρησης είναι η ανιούσα μελωδία της τονικότητας στο τέλος του τέταρτου μέτρου, που παράγεται από την πρόοδο $i_4^6 - V^7$.

Σχήμα 6: Κρυφές και φανερές τονικότητες στην "Moonlight sonata".

Το δεύτερο παράδειγμα απαντά στο ερώτημα του ποιες διαφορετικές συγχορδίες υποστηρίζουν την ίδια τονικότητα. Η συγχορδία της τυπικής μινόρε

Σχήμα 7: Συγχορδίες που υποστηρίζουν την [C] τονικότητα.

τριάδας διαπιστώσαμε ότι υποστηρίζει κρυφή τονικότητα που βρίσκεται στο $1/10$ της συχνότητας αναφοράς. Στο ερώτημα τίθεται τέτοιος περιορισμός ώστε η τονικότητα των ζητούμενων συγχορδιών να είναι σε ίση ή μικρότερη απόσταση από την συχνότητα αναφοράς τους, σε σχέση με αυτήν των μινόρε συγχορδιών. Στο πρώτο και δεύτερο μέτρο του σχήματος 7 αποτυπώνεται ότι χωρίς συχνότητες υπάρχει μόνον ρυθμός, το ίδιο όπως αν ακούγεται μόνον η τετριμμένη απλή τονικότητα. Στο τρίτο μέτρο, με την συγχορδία δύο συχνοτήτων, η συχνότητα αναφοράς $[C]$ συνοδεύεται από κάθε μία από τις συχνότητες της $[C^9]$, όπως δείξαμε προηγουμένως. Στα υπόλοιπα μέτρα αναπτύσσονται όλοι οι συνδυασμοί συγχορδιών $1, 2, 3, 4,$ και 5 συχνοτήτων, που απαντούν στο ερώτημα που τέθηκε. Υπάρχουν τελικά 23 τέτοιες διαφορετικές συγχορδίες. Ας σημειωθεί ότι οι κλάσεις συχνοτήτων $[F]$ και $[A]$, που δεν ανήκουν στην $[C^9]$, δεν χρησιμοποιούνται από αυτές τις συγχορδίες.

Οι αριθμοί πάνω από το πεντάγραμμο δείχνουν σε τι υποπολλαπλάσιο βρίσκεται η $[C]$ τονικότητα. Στον ήχο του σχήματος η ίδια διάταξη συχνοτήτων επαναλαμβάνεται για τις τονικότητες $[F]$ και $[G]$. Ακούγεται εν τέλει η πρόοδος $I - IV - V - I$ με εκτεταμένες αρμονίες δύο φορές.

2.5 Η τονικότητα ως εφαλτήριο μεταβολών

Ας φανταστούμε ότι είμαστε υπερχρονικοί παρατηρητές και αντιλαμβανόμαστε τον χρόνο σαν τρισδιάστατο χώρο. Είναι η αντίληψη ενός απέραντου άδειου χώρου στον οποίο είναι διασκορπισμένα μικρής ή μεγάλης διάρκειας συμβάντα[25].

Η ανυπαρξία είναι η μέση κατάσταση στον χρόνο και η αφετηρία από την οποία αυτή η κατάσταση μεταβάλλεται, σε κατάσταση "ύπαρξης", για να επιστρέψει ξανά στη μέση κατάσταση της "ανυπαρξίας". Ας αντιληφθούμε την εκτέλεση μιας μουσικής σύνθεσης από μακριά, όπως θα αντιλαμβανόμασταν την γη από τις παρυφές του ηλιακού συστήματος. Θα την αντιλαμβανόμασταν ως χρονικό σημείο, μία τελεία στο αχανές του χώρου - χρόνου. Κάτι δημιουργήθηκε και τέλειωσε. Υπήρξε μεταβολή στην, κατά τα άλλα, άδεια δομή του χρόνου. Το όλο θέμα το περιγράφω λέγοντας ότι, από τόσο μακριά, *η αρχέγονη τονικότητα κάθε σύνθεσης είναι η "ανυπαρξία" της*. Η όποια σημασία της σύνθεσης δεν βρίσκεται στην τονικότητά της, δηλαδή στην ανυπαρξία της, αλλά στην μεταβολή της γύρω απ' αυτήν.

Η καθολική τονικότητα προσεγγίζεται καλύτερα εφόσον πλησιάσουμε κοντύτερα και αντιληφθούμε την σύνθεση ως τέλεια σφαίρα. Αντιλαμβανόμαστε την τονικότητα της σύνθεσης ως την απόλυτα συμμετρική δομή της επιφάνειας της σφαίρας. Αυτή καθεαυτή η τέλεια επιφάνεια, εκτός του ότι δεν υπάρχει, δεν θα μπορούσε να περιγράψει οτιδήποτε δημιουργικά, διότι δεν ενέχει το στοιχείο της μεταβολής. Αν ονομάσουμε Ντο ματζόρε την επιφάνεια της σφαίρας, δεν έχει απολύτως καμία σημασία αν ισχυριστούμε ότι έχουμε σύνθεση σε Ντο ματζόρε. Πρέπει να πλησιάσουμε λίγο ακόμα, ώστε να διακρίνουμε βάθη ωκεανών, κοιλάδες και οροσειρές. Τότε μπορούμε να δούμε την Ντο ματζόρε ως την τέλεια, ιδεατή άρα ανύπαρκτη, μέση επιφάνεια γύρω από την οποία, εκ των πραγμάτων, μεταβάλλονται οι πραγματικές τονικότητες, παραδείγματος χάριν οι επιφάνειες Σολ ματζόρε των βυθών, Ντο ματζόρε των κοιλάδων και Φα ματζόρε των οροσειρών. Η σύνθεση λοιπόν είναι σε Ντο ματζόρε αλλά, η όποια σημασία της σύνθεσης δεν βρίσκεται στην τονικότητά της, αλλά στην μεταβολή των εν χρήση τονικοτήτων γύρω απ' αυτήν.

Η μουσική αποτελείται αποκλειστικά από χρονικά συμβάντα. Είτε ασχολούμαστε με κτύπους ανά ίσα χρονικά διαστήματα είτε με συχνότητες, που είναι μοτίβα πίεσης του αέρα ανά ίσα χρονικά διαστήματα επίσης, ο χρόνος και μόνον

[25] Αν ένα συμβάν υπήρχε εσαεί, αυτό θα ισοδυναμούσε με την "ανυπαρξία" του. Θα γέμιζε όλον τον χώρο του χρόνου, οπότε θα άλλαζε και η αντίληψή μας για αυτόν. Θα αντιλαμβανόμασταν τον χρόνο σαν ένα απέραντο συμπαγές στο οποίο είναι διασκορπισμένα μικρής ή μεγάλης διαρκείας συμβάντα "ανυπαρξίας". Το απόλυτα σημαντικό είναι η μεταβολή, η διαφοροποίηση.

είναι η θεμελιώδης ουσία της. Όποια δομή αναφοράς και αν δεχτούμε ότι υπάρχει και λειτουργεί στις σχέσεις των ομαδοποιήσεων μεταξύ τους, λόγω της φράκταλ φύσης του χρόνου, η ίδια δομή αναφοράς θα υπάρχει και θα λειτουργεί σε κάθε επίπεδο μεγέθυνσής του. Ό,τι ισχυριζόμαστε ότι λειτουργεί στις ρυθμικότητες, θα λειτουργεί και στις τονικότητες, θα λειτουργεί και στις τονικότητες τονικοτήτων και ούτω καθεξής σε κάθε εξέταση κάθε επιπέδου μεγένθυνσης της σύνθεσης. Η σημασία της μουσικής, βασίζεται στη δημιουργία και σύνθεση μεταβολών. Αν κάποια σύνθεση χαρακτηριστεί δημιουργία, πιθανότατα θα έχει σημασία η μεταβολή κλιμάκων. Αν υπάρχει μόνον μία κλίμακα, θα έχει σημασία η μεταβολή συγχορδιών. Αν υπάρχει μονότονη επανάληψη συγχορδιών, θα έχει σημασία η μεταβολή μελωδιών. Αν υπάρχει μόνον μία μελωδία, θα έχει σημασία η μεταβολή συχνοτήτων της μελωδίας. Αν υπάρχει μόνον μία συχνότητα, απομένει ο ρυθμός, οπότε θα έχει σημασία η μεταβολή ρυθμών. Αν υπάρχει μόνον ένας ρυθμός, θα έχει σημασία η μεταβολή της σημασίας στίχων σε σχέση με την μέση κατάσταση της καθημερινότητας. Αν πρόκειται για στίχους της ημέρας, κάτι άλλο θα έχει σημασία, αλλιώς ο χαρακτηρισμός, ότι πρόκειται για μουσική δημιουργία, είναι προφανώς λανθασμένος[26].

Οι επιμέρους τονικότητες γίνονται αντιληπτές προσεγγίζοντας ακόμα περισσότερο την επιφάνεια. Στο μέσο επίπεδο θάλασσας, η κοιλάδα της Ντο ματζόρε δεν είναι τέλεια. Αποτελείται από μεταβαλλόμενες τονικότητες συγχορδιών που απομακρύνονται από αυτήν σχηματίζοντας λόφους και ρεματιές. Ακόμα και αυτά τα επιμέρους, αν πλησιάσουμε περισσότερο, μπορούμε να δούμε ότι δημιουργούνται από συχνότητες εδάφους, θάμνων, δένδρων που μεταβάλλονται και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Οι τόνοι της ματζόρε κλίμακας αναδύονται από την συγκεκριμένη ομώνυμη κλάση αναφοράς τονικοτήτων και καταδεικνύουν τις πλησιέστερες αναχωρήσεις από και αφίξεις σε αυτήν, σύμφωνα με την αρχή ότι οι τονικότητες, εφόσον υπάρχουν, μεταβάλλονται. Κάθε κλάση συχνοτήτων, λόγω του δυϊσμού τόνων και τονικοτήτων που αναφέραμε στη σελίδα 14, είναι συνυφασμένη με την κλάση τονικότητας της ομώνυμης ματζόρε συγχορδίας, διότι η τελευταία χρησιμοποιεί και τους δύο βασικούς τόνους από τους οποίους προήρθε αυτός ο δυϊσμός. Εκ των δύο βασικών τόνων, ο τόνος [3/2] είναι αυτός που αντιστοιχεί στην πλησιέστερη μεταβολή τονικότητας. Σε ό,τι αφορά στην αναχώρηση από την τονικότητα $[C]$, η πλησιέστερη σε αυτήν ενεργητική πρόοδος πραγματοποιείται με το να θεωρηθεί η τονικότητα $[C]$ πηγή της νέας ματζόρε συγχορδίας που υποστηρίζει την τονικότητα $[F]$. Η, με ενεργητική πρόοδο, αναχώρηση προς την πλησιέστερη τονικότητα είναι λοιπόν η $C \rightarrow F$[27]. Με ακριβώς την ίδια λογική, η, με ενεργητική πρόοδο, άφιξη από την πλησιέστερη τονικότητα είναι η $G \rightarrow C$. Οι τόνοι της ματζόρε

[26] Ας υπενθυμίσω ότι πρόκειται για προσωπικές απόψεις βασισμένες σε μαθηματικη διαίσθηση, αφού δεν έχω γνώσεις μουσικής θεωρίας. Μάλιστα οι απόψεις μου περί τονικότητας άλλαξαν κατά την συγγραφή του παρόντος, διότι άλλο να νομίζεις ότι κατάλαβες κάτι και άλλο να προσπαθήσεις, χωρίς εύκολα αντιληπτές αντιφάσεις, να γράψεις αυτό που νομίζεις ότι κατάλαβες.

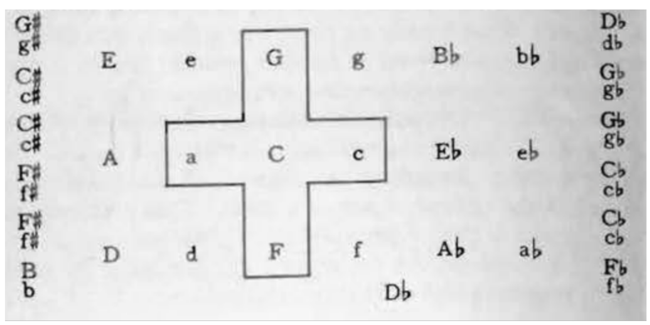
[27] Η τονικότητα $[F]$ της συγχορδίας $F - A - C$, με αποδόμηση των $[F]$ και $[A]$, μεταβάλλεται σε τονικότητα $[C]$. Επομένως η πρόοδος $F \rightarrow C$ είναι παθητική και η $C \rightarrow F$ ενεργητική πρόοδος.

κλίμακας αναφοράς είναι οι τόνοι των ματζόρε συγχορδιών άφιξης, αναχώρησης και τονικότητας αναφοράς, εν προκειμένω για την $[C]$ οι τόνοι των συγχορδιών $GBD \rightarrow CEG \rightarrow FAC$. Έτσι, οι κλάσεις συχνοτήτων της $[C]$ ματζόρε κλίμακας είναι οι $\{[C], [D], [E], [F], [G], [A], [B]\}$. Μπορεί να θεωρηθεί ότι *η ματζόρε κλίμακα είναι μίξη της ονομαστικής τονικότητας αναφοράς, και της τονικότητας των δύο άκρων, πριν και μετά από αυτήν.* Διαφέρει δε από τις κλίμακες των άκρων της μόνον κατά μία κλάση συχνοτήτων. Χρησιμοποιεί την $[F]$ αντί της $[F\#]$, που χρησιμοποιείται από την κλίμακα $[G]$, και την $[B]$ αντί της $[Bb]$, που χρησιμοποιείται από την κλίμακα $[F]$.

Η αρμονική πρόοδος αναφέρεται, κατ' εμέ, στην πρόοδο των τονικοτήτων. *Η πρόοδος πρέπει να είναι πάντα ενεργητική.* Πρέπει να αναπτύσσουμε τις τονικότητες στηρίζοντάς τες επάνω σε αυτά που έχουμε ήδη κτίσει. Θεωρητικά επιτέπεται παθητική πρόοδος XY, σε μια ακολουθία XYZ, εάν το αποτέλεσμα της επόμενης προόδου YZ φαίνεται σαν ενεργητική πρόοδος XZ συνολικά. Αλλά, ακόμα και σε αυτήν την θεωρητική αποδοχή, συνάντησα εξαιρέσεις. Έτσι, θεωρώ ότι επιτρέπεται παθητική πρόοδος, εφόσον έχουμε επίγνωση ότι την χρησιμοποιούμε. Όπως δεν θα αφήναμε το σπίτι μας να αποδομηθεί και να καταρεύσει, αλλά θα προχωρούσαμε σύντομα σε επισκευαστικές εργασίες, σε περίπτωση μερικής αποδόμησης, έτσι δεν πρέπει να αφήνουμε την, κτισμένη από εμάς, τονικότητα να αποδομείται με παθητικές προόδους και να καταρέει, αλλά πρέπει σύντομα να προχωρούμε σε επισκευαστικές εργασίες ενεργητικών προόδων προς αποκατάστασή της. Η μεταβολή της τονικότητας μιας συγχορδίας αναφέρεται πάντα σε σχέση με την τονικότητα της επόμενης συγχορδίας. Αυτός είναι ένας πρώτος άξονας αναφοράς. Οι συγχορδίες όμως αναφέρονται σε δύο άξονες.

Η συγχορδία, ως συνάρτηση, είναι ο δεύτερος άξονας αναφοράς. Η συνάρτηση συγχορδία αναφέρεται στην ματζόρε ή μινόρε κλίμακα στην οποία, κατά τον δημιουργό της, ανήκει. Πρέπει να δεχθούμε αξιωματικά ότι κάθε ακολουθία συγχορδιών $xyzw\ldots$ έχει ένα και μοναδικό αποτέλεσμα. Δεν έχει σημασία αν αυτό μπορεί να καθοριστεί αντικειμενικά, που προφανώς δεν μπορεί. Σημασία έχει το αποτέλεσμα να είναι μόνον ένα. Λόγω της απουσίας κάθε αντικειμενικού προσδιορισμού του, ας το ονομάσουμε A, δηλαδή $A = xyzw\ldots$. Κάθε υποσύνολο της ακολουθίας συγχορδιών μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση που, με τιμές μεταβλητών ίσες με τις λοιπές συγχορδίες, δίδει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Παραδείγματος χάριν, μπορεί να ορισθεί η συνάρτηση $yw()$ τέτοια ώστε $yw(x, z, \ldots) = xyzw\ldots$. Η πιο απλή περίπτωση είναι να θεωρήσουμε ότι τα αποτελέσματα παράγονται από ακολουθία μόνον δύο συγχορδιών. Τότε το σύνολο των συναρτήσεων μετατρέπεται σε δυικό των συγχορδιών χώρο. Αυτό συμβαίνει διότι, αν η συνάρτηση $x()$ οριστεί τέτοια ώστε, με μεταβλητή ίση με την συγχορδία y, να δίνει το αποτέλεσμα $x(y) = xy$, οι ρόλοι συναρτήσεων συγχορδιών μπορούν αμοιβαία να αλλάξουν, χωρίς να επηρεάζεται το αποτέλεσμα. Θα μπορούσε δηλαδή, εξ ίσου καλά, να οριστεί η συνάρτηση $y()$ τέτοια ώστε, με μεταβλητή ίση με τη συγχορδία x, να δίδει το ίδιο αποτέλεσμα $y(x) = xy$. Επειδή οι συναρτήσεις αναφέρονται σε όποια κάθε φορά εν χρήση κλίμακα, αναπαριστώνται με ρωμαϊκούς αριθμούς, που εννοιολογικά συνοδεύονται από το όνομα συνάρτησης που τις χαρακτηρίζει π.χ. V(δεσπόζουσα). Από μαθηματικής άποψης, κάποιος θα μπορούσε υποκειμενικά να καταλογοποιήσει κάθε δυνατό μοναδικό αποτέλεσμα xy και έτσι να ορίσει κάθε συνάρτηση είτε ως $x()$ είτε ως $y()$. Παρά τον υποκειμενισμό, όλοι φαίνεται να συμφωνούν με το αποτέλεσμα της ακολουθίας $V - I$ το οποίο το ονομάζουν πτώση. Εξ αυτού του αποτελέσματος, το οποίο παράγει μία αίσθηση τελείωσης, μπορούν, σύμφωνα με τα παραπάνω, να οριστούν δύο από τις πιο σημαντικές συναρτήσεις, η $V()$ ως δεσπόζουσα και η $I()$ ως τονική. Έτσι, δεσπόζουσα ορίζεται η συνάρτηση-συγχορδία $V()$ που, όταν ακολουθείται από την συγχορδία τονικής I, έχει ως αποτέλεσμα την τελείωση με πτώση $V(I) = V - I$. Τονική ορίζεται η συνάρτηση-συγχορδία I() της οποίας, όταν προηγείται η συγχορδία δεσπόζουσας V, το αποτέλεσμα είναι η τελείωση με πτώση $I(V) = V - I$.

Αλλαγή κλίμακας συμβαίνει όταν αλλάζει η κλίμακα στην οποία αναφέρονται οι συναρτήσεις συγχορδιών. Αν υπάρχει επιθυμία για εκτεταμένη παραμονή σε μιά συνάρτηση-συγχορδία, μπορεί η συνάρτηση αυτή να θεωρηθεί σαν περιοχή προσωρινής κλίμακας και οι επόμενες συναρτήσεις να αναφέρονται σε αυτήν. Τότε λέμε, παραδείγματος χάριν, αν επιθυμούμε παραμονή στην δεσπόζουσα V, ότι κινούμαστε στην περιοχή[28] της δεσπόζουσας και τα αποτελέσματα των μεταβάσεων από



Σχήμα 8: Τμήμα της σελίδας 20 από το βιβλίο Structural functions of harmony του Arnold Schoenberg

συγχορδία σε συγχορδία αναφέρονται σε αυτήν. Αν η παραμονή είναι αρκούντως μεγάλης διάρκειας τότε λέμε ότι αλλάξαμε την κλίμακα σε V.

2.6 Μελωδίες

Κάθε μελωδία αποτελείται από μεταβολές συχνοτήτων και κάθε συχνότητα ταυτίζεται με την απλή τετριμμένη τονικότητά της. Εφόσον κάθε μεταβολή της τετριμμένης τονικότητας θεωρείται ενεργητική πρόοδος, είναι δυνατόν αυτές οι συχνότητες να κατατάσσονται κάτω από και να υποστηρίζουν μία συγκεκριμένη τονικότητα, ώστε να λέμε ότι έχουμε μια μελωδία π.χ. σε Ντο ματζόρε? Δεν

[28]Οι κατά Schoenberg περιοχές φαίνονται στο σχήμα 8, όπου με ρωμαϊκούς αριθμούς θεωρείται $C = I, F = IV, G = V$ κ.λ.π.

ασχολήθηκα πολύ με αυτό το ερώτημα αλλά πιστεύω πως ναι. Θα πρέπει όμως να κάνουμε την παρακάτω παραδοχή.

Η τυπική πρόοδος, σε πλησιέστερη τονικότητα, είναι *μονής κατεύθυνσης* και αντιστοιχεί στα μουσικά διαστήματα *τόνου-τόνου-ημιτονίου*[29]. Συνεπώς, μια μελωδία γύρω από την τονικότητα $[C]$ θα χρησιμοποιεί τόνους της τυπικής προόδου από την τονικότητα αναφοράς $[C]$ προς την $[F]$, δηλαδή τους $[C]-[D]-[E]-[F]$, και τόνους της τυπικής προόδου από $[G]$ προς την τονικότητα αναφοράς $[C]$, δηλαδή τους $[G]-[A]-[B]-[C]$.

Η μονή κατεύθυνση της τυπικής προόδου θα μπορούσε να δικαιολογηθεί ως προσπάθεια καθ' ομοίωσης με την πρόοδο των ματζόρε συγχορδιών, θεωρώντας τους ενδιάμεσους τόνους της τυπικής τετράδας απλώς τόνους περάσματος από την μία συγχορδία στην άλλη. Τότε η μονή κατεύθυνση της τυπικής προόδου θα αντιστοιχούσε στην ισχυρή σύσταση, *να χρησιμοποιούνται σχεδόν πάντα ενεργητικές πρόοδοι*, εκφρασμένη σε ό,τι αφορά στις μελωδίες. Σε κάθε περίπτωση, η παραπάνω δικαιολογία είναι ελλιπής. Απαντά στο γιατί, αλλά αφήνει ανοικτό το ερώτημα του πώς εξομοιώνονται οι ασυνόδευτες με τις αρμονικά συνοδευμένες μελωδίες. Ούτε απαντά στο ερώτημα του πώς οι μεσαίες τετριμμένες τονικότητες, της ασυνόδευτης τυπικής μελωδικής προόδου, χάνουν αυτήν τους την ιδιότητα και λογίζονται τόνοι περάσματος, δηλαδή κάτι έξω από την δομή στην οποία συμμετέχουν.

Leading-tone είναι ο τόνος πριν το ημιτόνιο της τυπικής προόδου. Η ακοή των leading-tone από τον ακροατή εκλαμβάνεται ως ανακοίνωση του τέλους της περιπλάνησης, με αποτέλεσμα την προσμονή της επιστροφής στην "ασφάλεια" της μέσης τονικότητας αναφοράς. Στα παραπάνω παραδείγματα τυπικής προόδου, *με την προϋπόθεση ότι η τονικότητα αναφοράς [F] ή [C] έχει προηγουμένως εδραιωθεί*, το άκουσμα της συχνότητας, $[E]$ ή $[B]$ αντίστοιχα, ανακοινώνει το τέλος της μελωδικής περιπλάνησης και προκαλεί έντονα την προσμονή της $[F]$ ή $[C]$ αντίστοιχα, προς επιβεβαίωση.

Η εδραίωση της τονικότητας αναφοράς δεν μπορεί να επιτευχθεί μόνον με την χρήση του leading tone. Απαιτείται επαρκής χρήση των τόνων της κλίμακας, ώστε να εδραιώνεται η αίσθηση της αρχής μιας περιπέτειας απομάκρυνσης από την τονικότητα αναφοράς και της ασφαλούς επιστροφής σε αυτήν. Τα δύο πρώτα μέτρα

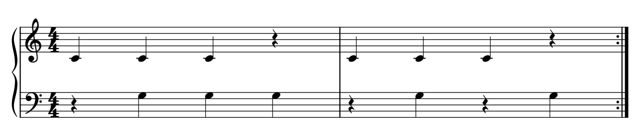
Σχήμα 9: Κλίμακα C ματζόρε.

του σχήματος 9 αποτελούν, κατά την γνώμη μου, ισχυρή ένδειξη ότι η τυπική πρόοδος και η χρήση των leading-tone, $[B]$ και [E], δεν αρκούν για να εδραιώσουν μία αίσθηση ολοκλήρωσης. Δεν "ακούγεται" να αρκεί ούτε η τυπική κατιούσα κλίμακα.

[29]Τουλάχιστον αυτό βολεύει σε ό,τι αφορά στον Ιονικό τρόπο της διατονικής κλίμακας.

Στο τρίτο μέτρο όμως, που είναι η ανιούσα C ματζόρε κλίμακα, απομακρυνόμαστε με την τυπική πρόοδο επαρκώς ώστε να αγγίξουμε την τονικότητα $[F]$ και προσεγγίζουμε από την εξίσου μακρινή τονικότητα $[G]$, οπότε η leading-tone $[B]$ σηματοδοτεί το τέλος της περιπλάνησης και προκαλεί την προσμονή της τονικότητας αναφοράς $[C]$, που την δεχόμαστε, ως ακροατές, με αίσθημα δικαίωσης.
Η κλάση $[B] = [15/8]$ είναι η πιο απομακρυσμένη κλάση που μπορεί να υποστηρίξει την κλάση αναφοράς $[C]$, αλλά λέγεται *κάτω* leading-tone αν η συχνότητα $[Db] = [C\#] = [17/16]$, που αποκλείσαμε από τους υποστηρικτικούς τόνους της $[C]$ στη σελίδα 19, χρησιμοποιείται επίσης ως *άνω* leading-tone.
Ας σημειωθεί ότι η συνεχής χρήση της τυπικής προόδου προκαλεί αλλαγή της κλίμακας ή της τονικότητας αναφοράς σύμφωνα με τον κύκλο των πέμπτων. Θέτοντας την $[C]$ μεταξύ δύο τυπικών προόδων, η ακολουθία $[G - A - B - (C] - D - E - F)$ οφείλει να αντιμετωπίζεται περίπου σαν κύκλος, ταυτίζοντας σχεδόν τα άκρα της, όπως θα συνέβαινε σε ένα σπιράλ. Για την εδραίωση της τονικότητας $[C]$ πρέπει να υπάρχει η αίσθηση ότι μετά την τυπική πρόοδο απομάκρυνσης $C - D - E - F$, δεν βγαίνουμε εκτός κλίμακας προς την $[Bb]$ ματζόρε, αλλά προσεγγίζουμε δια της τυπικής προόδου προσέγγισης $G - A - B - C$. Η χρήση του leading-tone $[B]$, της τυπικής προόδου $G - A - B - C$ της κλίμακας $[C]$, προστατεύει από το να θεωρηθεί ότι η $[F]$ μπορεί να γίνει η τονικότητα αναφοράς. Δεν απαγορεύει όμως από το να θεωρηθεί η $[G]$ ως τονικότητα αναφοράς, κατά την ακολουθία $[D - E - F\# - (G] - A - B - C)$. Για αυτό το λόγο πιστεύω ότι, εκτός του leading-tone [B], και η χρήση της $[F]$ μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στην εδραίωση της κλίμακας $[C]$.

Η γενική σύσταση για τις μελωδίες είναι ότι προτιμούνται οι, ανιούσες ή κατιούσες, μικρές μεταβολές τόνου ή ημιτονίου, από τις μεγαλύτερες μεταβολές. Μεγαλύτερη λεπτομέρεια είναι θέμα της voice leading, με το οποίο δεν ασχολήθηκα επαρκώς, αλλά και φαίνεται λίγο πολύ απόμακρο σε σχέση με τις σκέψεις που αναπτύσσονται στο παρόν. Ωστόσο, μία προσπάθεια σύνδεσης τονικοτήτων και μελωδιών, αφού και αυτές αποτελούνται από τετριμμένες τονικότητες, φαίνεται στο σχήμα 10. Ο πρώτος κτύπος του πρώτου μέτρου είναι μελωδία (τετριμμένη τονικό-



Σχήμα 10: Απλοϊκή σύνδεση τονικότητας και μελωδίας.

τητα) C. Στον δεύτερο και τρίτο κτύπο η τετριμμένη τονικότητα μετατρέπεται σε τονικότητα συγχορδίας αλλά παραμένει ίδια, άρα δεν έχουμε πρόοδο τονικοτήτων. Στον τέταρτο κτύπο έχουμε *αποδόμηση* της συγχορδίας, με αλλαγή τονικότητας από C σε τετριμμένη τονικότητα μελωδίας G, οπότε συντελείται παθητική πρόοδος. Στο δεύτερο μέτρο η κατάσταση διαφέρει. Από τον δεύτερο κτύπο στον τρίτο, η τονικότητα δεν αλλάζει αλλά γίνεται τετριμμένη τονικότητα μελωδίας. Έτσι, από τον τρίτο κτύπο στον τέταρτο, η πρόοδος τονικοτήτων θεωρείται ενεργητική, αφού πρόκειται για πρόοδο τετριμμένων τονικοτήτων. Με δεδομένο ότι συγχορδίες εμπεριέχουν διαστήματα ματζόρε και μινόρε τρίτης, η παραπάνω οπτική, θα σύστηνε βήματα μελωδιών τόνου ή ημιτονίου, για να αποφεύγονται παθητικές πρόοδοι, όπως αυτή του πρώτου μέτρου του σχήματος. Σε κάθε περίπτωση, το ότι η παρουσία παύσης στο μπάσο του τρίτου κτύπου φαίνεται να μετατρέπει μία παθητική πρόοδο σε ενεργητική, είναι προειδοποίηση συναγερμού σε ό,τι αφορά στην αντίθεση μεταξύ αρμονικών και μελωδικών προόδων.

Η αντίθεση μεταξύ αρμονικών και μελοδικών προόδων πιθανώς χρειάζεται εργαλεία διαλεκτικής φιλοσοφίας για να προσεγγισθεί. Πρέπει να δεχτούμε αξιωματικά την ύπαρξη αντιθέσεων. Οι συγχορδίες επιθυμούν άλματα τονικοτήτων αλλά, αντιθέτως, όταν εκφυλίζονται σε τετριμμένες τονικότητες επιθυμούν βήματα δευτέρας. Οι ασυνόδευτες μελωδίες επιθυμούν βήματα δευτέρας αλλά, αντιθέτως, όταν συντίθενται σε συγχορδίες επιθυμούν, συγχρόνως, άλματα των τονικοτήτων που δημιουργούν. Η σύνθεση των αντίθετων επιθυμητών προόδων είναι η δημιουργία του συνθέτη. Κύριο εργαλείο του είναι η χρήση πρώτων αντιστροφών που ψηλαφείται στη σελίδα 41.

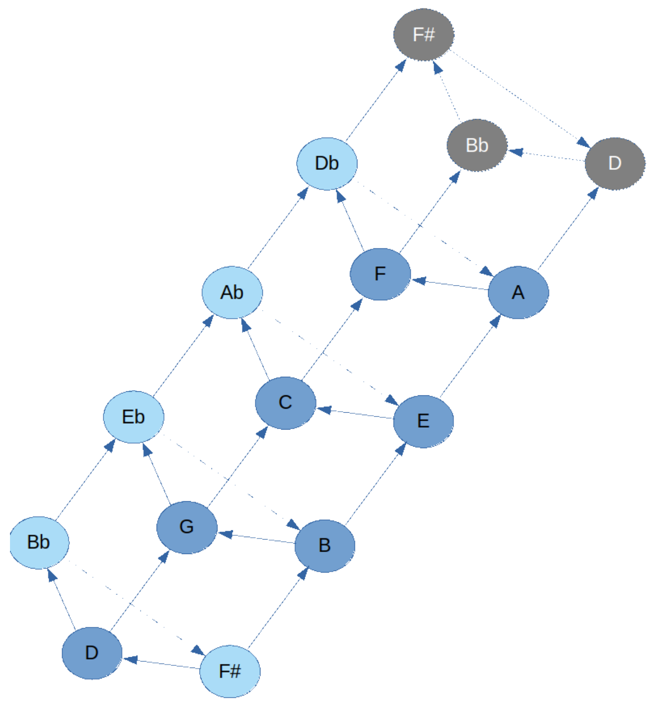
2.7 Συγχορδίες και κλίμακες

2.7.1 Ομφαλικός δακτύλιος

Ο ομφαλικός δακτύλιος θα γίνει τελικά, ως ειδική περίσταση της σαμπρέλας, το αντικείμενο στην επιφάνεια του οποίου τοποθετούνται οι κλάσεις τόνων και τονικοτήτων. Ας ανασηκώσουμε λίγο τον άξονα $G - C - F$ από το επίπεδο του χαρτιού του σχήματος 5 και ας σχεδιάσουμε την υποστήριξη των αντίστοιχων των $[E]$ από τα αντίστοιχα των $[G\#]$, σεβόμενοι τις ταυτοποιήσεις των $[= E]$ και $[= G\#]|[= Ab]$. Οι δώδεκα κλάσεις τονικοτήτων (ή νότες αν θέλετε) εμφανίζονται σαν σημεία του πρίσματος του σχήματος 11. Το πρίσμα φαίνεται να έχει τρεις επίπεδες επιφάνειες, με όλους τους τόνους της ματζόρε κλίμακας (σελίδα 25) να ανήκουν αποκλειστικά σε μία από αυτές. Αξίζει να προσέξουμε ότι οι επαυξημένες τριάδες τέμνουν κάθετα το πρίσμα, οι κλάσεις τους στηρίζουν η μια την άλλη και κάθε"πλευρά" τους ανήκει σε διαφορετική επιφάνεια(;), άρα σε διαφορετική κλίμακα[30]. Πολύ περισσότερο όμως, είναι άξιο παρατήρησης ότι οι επάνω τρεις κλάσεις $[Bb], [F\#], [D]$ ταυτίζονται με τις κάτω. Αν φανταστούμε το πρίσμα πολύ εύκαμπτο, μπορούμε να κάμψουμε το πάνω μέρος του, ώστε η πάνω πλευρά να τοποθετηθεί απέναντι από την κάτω πλευρά, και στρέφοντάς το, κατά μία πλευρά, να ταυτιστούν οι ίδιες κλάσεις, οι άνω με αυτές της κάτω πλευράς. Τότε οι δώδεκα κλάσεις τονικοτήτων, οι νότες αν θέλετε του ισοσυγκερασμένου συστήματος, είναι δώδεκα σημεία στην επιφάνεια αυτού του τρισδιάστατου στερεού και *δεν χρειαζόμαστε άλλη ταυτοποίηση.*

Το αξιοθαύμαστο είναι ότι δεν υπάρχουν τρεις επιφάνειες που θα μπορούσαν να διαφοροποιήσουν τις κλίμακες σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με το σε

[30]Για αυτόν τον λόγο χρησιμεύουν ιδιαίτερα στις αλλαγές κλιμάκων. Για τον ίδιο λόγο, επειδή κάθε "πλευρά" τους ανήκει σε διαφορετική κλίμακα, χρησιμεύουν και οι ελαττωμένες εβδόμες.

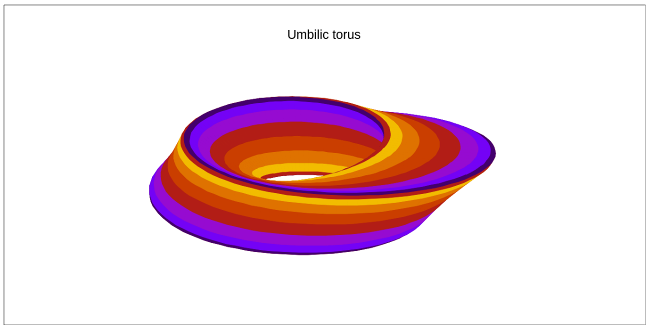


Σχήμα 11: Πρίσμα τόνων & τονικοτήτων (Ανάπτυξη σαμπρέλας)

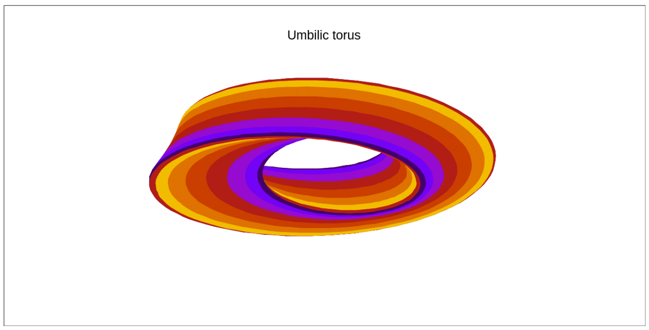
ποια επιφάνεια από τις τρεις ανήκουν. *Το καμπυλωμένο πρίσμα*, η σαμπέλα που υποθέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, *έχει μία και μόνον επιφάνεια*. Φανταστείται ότι είστε στην επιφάνεια της $[C]$ ματζόρε δεξιά του πρίσματος. Κινούμενοι προς τα πάνω θα βγείτε από την ακμή $Bb - D$, δηλαδή, από κάτω, στην $Bb - D$ της αριστερής πλευράς του πρίσματος, χωρίς να διασχίσετε τις κατά μήκος ακμές του[31]. Αν συνεχίσετε προς τα πάνω θα βγείτε από την ακμή $F\# - Bb$, δηλαδή, από κάτω, στην $F\# - Bb$ της κάτω πλευράς του πρίσματος, χωρίς και πάλι να διασχίσετε τις κατά μήκος ακμές του. Συνεχίστε προς τα πάνω, για τελευταία φορά, και θα εξέλθετε από την $F\# - D$, δηλαδή, από κάτω, στην $F\# - D$ της δεξιάς πλευράς του πρίσματος από την οποία ξεκινήσατε. Άρα όλες *οι κλίμακες είναι ισοδύναμες και ανήκουν σε μία και μόνον επιφάνεια*, άσχετα αν το πρίσμα - σαμπρέλα τόνων

[31]Οι ακμές, από μαθηματική άποψη, δεν απαιτούνται. Είναι όμως πιο εποπτικό να αναφερόμαστε σε καθαρή τριγωνική τομή.

και τονικοτήτων, πιο πολύ σαν ψευδαίσθηση, φαίνεται να έχει τρεις. Αυτό το σαν δακτυλίδι πρίσμα ονομάζεται ομφαλικός δακτύλιος. Η επιφάνειά του περιγράφεται σαν *πολλαπλότητα*, όπως αναφέρθηκε στη σελίδα 17. Η δράση όποιου συνόλου κλάσεων τόνων είναι σχετική[32] και εξαρτάται από την τονικότητα αναφοράς με την οποία ο συνθέτης θέλει να τις συσχετίσει. Για κάθε τονικότητα υπάρχει τοπικός χάρτης, για μικρή περιοχή γύρω από αυτήν, ο οποίος είναι ακριβής, όπως αυτός του σχήματος 15. Δεν μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί για πιο απομακρυσμένες σχέσεις παρά μόνον αν συνδυαστεί με γειτονικούς τοπικούς χάρτες. Το καλύτερο που μπόρεσα να υποθέσω για τους νόμους που διέπουν την ένωση των τοπικών χαρτών, που καλύπτουν όλη την επιφάνεια του δακτυλίου, είναι η συνάρτηση που παρέθεσα στη σελίδα 20. Ο δακτύλιος φαίνεται στα σχήματα 12 και 13. Η σχεδίασή του



Σχήμα 12: Ομφαλικός δακτύλιος (άνω όψη)



Σχήμα 13: Ομφαλικός δακτύλιος (κάτω όψη)

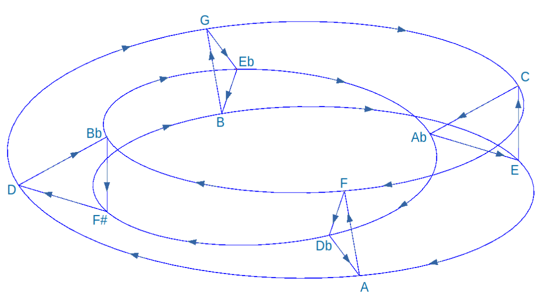
στο maxima θα σας επιτρέψει διαδραστική παρατήρηση αν το επιθυμείτε. Για να το σχεδιάσετε απλά εκτελέστε τις εντολές

```
--> svn:7$ thr:3$ two:2$ two2:3$
--> funx(u,v):=sin(u)*(svn+cos(u/thr-two*v)+two2*cos(u/thr+v));
--> funy(u,v):=cos(u)*(svn+cos(u/thr-two*v)+two2*cos(u/thr+v));
```

[32] κατ' αντιστοιχία με τη θεωρία της σχετικότητας

```
--> funz(u,v):=sin(u/thr-two*v)+two2*sin(u/thr+v);
--> draw3d(title          = "Umbilic torus",
xu_grid        = 100,
yv_grid        = 25,
axis_3d = false,
colorbox = false,
font = "Arial",
font_size = 20,
view           = [35,35],
surface_hide   = true,
enhanced3d =  3*(2+v/%pi)/2-floor(3*(2+v/%pi)/2),
parametric_surface(funx(u,v),funy(u,v),funz(u,v),u,-%pi,%pi,v,-%pi,%pi))$
```

Αν τυχόν το κατασκευάσετε σε τρισδιάστατο εκτυπωτή[33] και θέλετε να κολλήσετε τις δώδεκα κλάσεις επάνω του, κόψτε ένα σκοινί με μήκος τόσο όσο η σκούρα περιοχή, που φαίνεται σαν ακμή στην εικόνα. Κατανείματε τις κλάσεις επάνω στο σκοινί, σύμφωνα με τον κύκλο των πέμπτων ή με τη σειρά που τα βλέπετε στο σχήμα 11 με κατεύθυνση προς τα πάνω, και κολλήστε το στην σκούρα περιοχή από όπου το είχατε μετρήσει, οπότε και οι άκρες του σκοινιού θα συμπέσουν. Οι κλάσεις στο σκοινί θα είναι κατανεμημένες περίπου όπως στο σχήμα 14. Για τις υπόλοιπες στηρίξεις του πρίσματος, ενώστε με τέσσερα σκοινάκια τις



Σχήμα 14: Ο κύκλος των πέμπτων επί ομφαλικού δακτυλίου

κλάσεις των τεσσάρων επαυξημένων τριάδων[34]. Ας θυμηθούμε ότι τα βέλη δεί-

[33]Θα ήταν πολύ πιο εποπτικό αν υπάρχει και επιλέγατε διάφανο υλικό εκτύπωσης. Θεωρητικά, επειδή το ανάπτυγμα της επιφάνειας είναι ένα μακρύ ορθογώνιο, μπορεί να κατασκευαστεί με μια λωρίδα χαρτιού, αλλά ίσως αποδειχθεί δύσκολη χαρτοκατασκευή και μη εποπτική, λόγω της αδιαφάνειάς της. Κολλήστε προσωρινά την ακμή $BbF\#$ σε έναν κεντρικό κύλινδρο οδηγό και προσπαθήστε να τυλίξετε την λωρίδα χαρτιού γύρω από αυτόν, στρέφοντάς το συγχρόνως όπως στο σχήμα.

[34]Ανά δύο οι αντικριστές τριάδες ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και τα δύο επίπεδα είναι κάθετα μεταξύ τους.

χνουν την πορεία στήριξης των τονικοτήτων, από τους τόνους τους προς αυτές, που είναι και η πορεία της σύστασης για ενεργητική πρόοδο τονικοτήτων. Κτίζουμε επάνω στις βάσεις που έχουμε ήδη δημιουργήσει και δεν αφήνουμε, χωρίς επαρκή αιτία, να αποδομηθούν, με παθητική πρόοδο, όσα έχουμε κτίσει. Η ενεργητική πρόοδος, στην συγκεκριμένη οπτική του σχήματος 14, αποκαλύπτεται δεξιόστροφη. Τα τριγωνικά μονοπάτια των επαυξημένων τριάδων συνδέονται, με το μοναδικό μονοπάτι ενεργητικής προόδου του κύκλου των πέμπτων, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αποκαλύπτονται ανέλπιστα πολλά, για τις αρμονικές προόδους, με την νοητική οπτικοποίηση της πορείας δια της οποίας η ακμή EC δημιουργεί την μοναδική επιφάνεια του δακτυλίου, καθώς διέρχεται από τις $AF, DBb, GEb, CAb, FDb, BbF\#, EbB, AbE, DbA, F\#D, BG$ για να καταλήξει στην EC, από όπου ξεκίνησε. Ενδεικτικά, η ενεργητική πρόοδος μιας κινούμενης ματζόρε εβδόμης, με τις στηρίξεις τονικοτήτων σε κόκκινο χρώμα, φαίνεται στο major7.gif[35].
Το σχήμα 14 δείχνει να εκπληρώνει τον στόχο της καταγραφής σκέψεων στο παρόν άρθρο, αφού δείχνει να είναι το μέσο οπτικοποίησης μνημονικών κανόνων για τις αρμονικές προόδους.

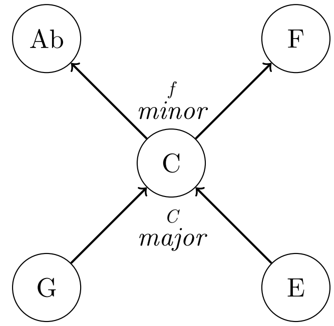
2.7.2 Μινόρε συγχορδίες

Πριν προχωρήσουμε στις αρμονικές προόδους, ας συμπληρώσουμε τις σκέψεις μας για τη θέση των μινόρε κλιμάκων και συγχορδιών, εξηγώντας το γιατί δεν υπήρξε ανάγκη συμμετοχής τους στις δομές που εξετάσαμε μέχρι τώρα. Η δομή του δακτυλίου προέκυψε από το σχήμα 4 που δημιουργήθηκε από την δενδροειδή δομή, η οποία αναφέρθηκε στη σελίδα 15. Ο μικρότερος τοπικός χάρτης, που περιγράφει επακριβώς τα δύο κλαδιά του βασικού δένδρου δημιουργίας της όλης δομής, φαίνεται στο σχήμα 15. Το δένδρο είτε κατασκευάστηκε με εκκίνηση των δύο μοναδικών κλαδιών *από την* C, προς τις τονικότητες Ab και F, τις οποίες η C στηρίζει, είτε κατασκευάστηκε από τα δύο μοναδικά κλαδιά στήριξης G και E, *προς την* C. Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει ο ίδιος τοπικός χάρτης. Με την ολοκλήρωση όλων των συνδέσεων, στην πρώτη περίπτωση, θα έχουν δημιουργηθεί δύο επιπλέον κλαδιά που στηρίζουν την C και, στη δεύτερη περίπτωση, θα έχουν δημιουργηθεί δύο επιπλέον κλαδιά προς τονικότητες που η C στηρίζει. Οι επάνω και κάτω τριάδες κλάσεων τονικοτήτων είναι οι μινόρε και ματζόρε συγχορδίες τριών τόνων.

Οι τριάδες τόνων οφείλονται στην τάση μας, λόγω της αναφερόμενης στη σελίδα 6 οικονομίας της πληροφορίας, να προβάλουμε απλά μοτίβα στα δεδομένα που αντιλαμβανόμαστε. Όπως ακριβώς αντιλαμβανόμαστε οικείες φιγούρες στα σύννεφα ή αποδίδουμε ονόματα στους αστερισμούς, έτσι στο σχήμα 15 μπορεί να αντιλαμβανόμαστε διάφορα τρίγωνα, τετράγωνα, κλεψύδρες και άλλα, χωρίς στην πραγματικότητα να σχεδιάστηκε ή να υφίσταται τίποτε από αυτά. Τα απολύτως απαραίτητα σχεδιασμένα βέλη είναι μόνον οι υπάρχουσες συνδέσεις. Από τις πέντε

[35] Η βιολετί γραμμή στο gif αρχείο, που χωρίζει μινόρε από ματζόρε τριάδα, είναι εποπτική και δεν αντιστοιχεί σε στήριξη.

τονικότητες του τοπικού χάρτη μπορούν να συνηχήσουν από μία έως πέντε κλάσεις. Αν αναφερθούμε σε όλο τον δακτύλιο, μπορούν να συνηχήσουν από μία έως δώδεκα κλάσεις. Οι νότες, κάθε συγχορδίας που ηχεί, μπορούν να παρασταθούν στον δακτύλιο σαν αστέρες που λάμπουν[36]. Και είναι μόνον αυτό. Σύνολο αστέρων που λάμπουν. Αλληλεπιδρούν δια διαφόρων φυσικών νόμων. Το ότι αντιλαμβανόμαστε σχηματισμό αστερισμού, αντίστοιχο της συγχορδίας που ηχεί, είναι άσχετο με τους φυσικούς νόμους αλληλεπίδρασης των αστέρων. Οι αστρολογικοί χάρτες βασίζονται σε ιδεατές απεικονίσεις με απλά μοτίβα και ελάχιστες φορές βοηθούν στην εποπτεία των επιδρώντων φυσικών νόμων. Αν είχα την ατυχία να σχεδιάσω, είτε το σχήμα 4 είτε το 5, με χωρισμό σε τρίγωνα μινόρε και ματζόρε συγχορδιών, η επιπλέον πληροφορία των ιδεατών γραμμών ίσως εμπόδιζε την αντίληψή μου από την αναγνώριση της επιφάνειας του δακτυλίου ως, κατασκευάσιμο στον τρισδιάστατο χώρο, αντικείμενο μοντελοποίησης.



Σχήμα 15: Ελάχιστος τοπικός χάρτης της τονικότητας C

Οι μινόρε συγχορδίες *είναι ευθύ αποτέλεσμα της δημιουργίας των ματζόρε συγχορδιών* και, ισοδύναμα, *οι ματζόρε συγχορδίες είναι ευθύ αποτέλεσμα της δημιουργίας των μινόρε συγχορδιών.* Οι ματζόρε και μινόρε συγχορδίες είναι όψεις της ίδιας δομής και ουδεμία επιπλέον πληροφορία ή συμπέρασμα δεν μπορεί να εξαχθεί από την ταυτόχρονη χρήση των εννοιών τους. Για αυτό τον λόγο, σε όποιο λογισμό κρίνεται απαραίτητη η ταυτόχρονη χρήση των εννοιών τους, απαιτείται προσοχή, ώστε να αποφευχθεί η λογική πλάνη του εν αρχή αιτείσθαι. Στο σχήμα 15 είναι σημειωμένες οι πάνω και κάτω θέσεις, όπου μπορούμε να φανταστούμε την ύπαρξη των ματζόρε και μινόρε τριάδων, ως αστερισμούς τριγώνων. Τα αριστερά και δεξιά τρίγωνα δεν γνωρίζω να τυγχάνουν χρήσης.

2.7.3 Σχετικές κλίμακες

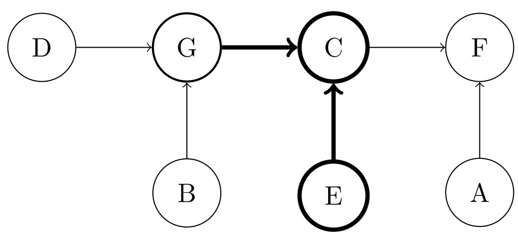
Στο σχήμα 14, και πιο καθαρά στο σχετικό αρχείο gif, φαίνεται ότι χρειαζόμαστε τρεις περιστροφές για να επιστρέψουμε στο σημείο εκκίνησης. Αυτό συμβαίνει διότι, πριν την επιστροφή μας, διερχόμαστε και από τις δώδεκα ματζόρε κλίμακες.

[36]Αν επρόκειτο να αναπτύξω ισοσταθμιστή βασισμένο στον δακτύλιο, επιπλέον των αστέρων, θα επέλεγα να φωτίζονται με λιγότερη λάμψη οι "ετερόφωτες" κρυφές τονικότητες.

Αν μια σύνθεση χρησιμοποιεί εκτεταμένα αυτήν την πορεία, τότε πιθανώς χαρακτηρίζεται ως ατονική σύνθεση. Μπορούμε να φανταστούμε ότι δίνει σημασία στο "ταξίδι", στις μεταβολλές. Τα σημεία ασφάλειας ή ανάπαυλας είναι προσωρινά και υπόκεινται τα ίδια σε μεταβολές[37]. Στην τονική μουσική θέτουμε τον περιορισμό της επιστροφής στην τονικότητα αναφοράς μετά από μία και μόνον περιστροφή.

Η τονική μουσική ορίζει μία τονικότητα αναφοράς, τόσο ως το σημείο έναρξης του ταξιδιού, όσο και ως το σημείο ανάπαυλας και τέλους του. Μπορούμε βέβαια προσωρινά να αλλάζουμε περιοχές τονικότητας, θεωρώντας οποιαδήποτε ενδιάμεση τονικότητα ως προσωρινή τονικότητα εκκίνησης, αλλά στο τέλος η ανάπαυλα θα πραγματωθεί στην αρχική τονικότητα αναφοράς. Στο σχήμα 14 διακρίνονται τέσσερις *σταθμοί* ανάπαυλας στις θέσεις των τομών των επαυξημένων τριάδων. Αναφερόμενος στην οπτική του συγκεκριμένου σχήματος, θα τους ονομάσω ανάλογα με τα σημεία του ορίζοντα. *Μέσα* πραγμάτωσης του δεξιόστροφου, της ενεργητικής προόδου, ταξιδιού των τονικοτήτων είναι οι συγχορδίες. Οι πιο απλές είναι οι ματζόρε και μινόρε τριάδες, για αυτό και όλες οι υπόλοιπες συγχορδίες ονομάζονται, σχεδόν πάντα, με αναφορά σε κάποια κατάλληλη για την περίσταση τριάδα. Σημασία στο ταξίδι έχει η στιγμή άφιξης, όποιας συγχορδίας, σε έναν από τους τέσσερις σταθμούς καθώς τον αγγίζει με κάποια συχνότητά της.

Η ματζόρε τριάδα αγγίζει το σταθμό άφιξης με δύο τόνους, αυτούς που, στη σελίδα 20, ονομάσαμε τόνους ρίζας και ποιότητας της συγχορδίας. Στο σχήμα 16 δείχνεται, με αναφορά στην C ματζόρε κλίμακα, μία ακολουθία ματζόρε τριάδων από σταθμό σε σταθμό. Κάθε άφιξη θεωρείται πλήρης και σταθερή, αφού η φανερή



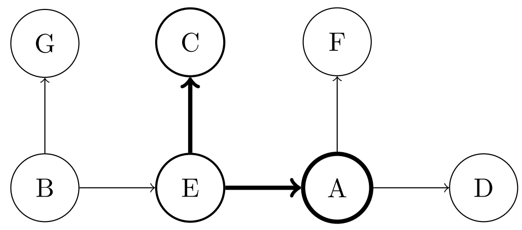
Σχήμα 16: Ενεργητική πρόοδος ματζόρε τριάδων

τονικότητα της συγχορδίας ηχεί ως συχνότητά της. Επειδή το ταξίδι των ματζόρε κλιμάκων καταλήγει σε ματζόρε τριάδα, μπορούμε να φανταστούμε τις ματζόρε κλίμακες σαν κάποιους που, όσο θαυμαστά και αν είναι τα ταξίδια που κάνουν, προτιμούν την σταθερότητα και ασφάλεια του σπιτιού τους.

Υπόδειξη ανάγνωσης δακτυλίου:
Σε κάθε κορυφή C καταφθάνει μόνον μία ματζόρε τριάδα CEG. Το επίπεδό της $CEBG$ περιέχει την ακμή $\vec{EC}$ του σταθμού που οδηγεί σε αυτήν.

[37]Δεν γνωρίζω τίποτε από την επισήμως αποδεκτή μουσική θεωρία, πόσο μάλλον από ατονική μουσική. Υποθέσεις διατυπώνω.

Η μινόρε τριάδα αγγίζει το σταθμό άφιξης μόνον με έναν τόνο, αυτόν που ονομάσαμε ρίζα της συγχορδίας. Στο σχήμα 17 δείχνεται, με αναφορά στην A μινόρε κλίμακα, μία ακολουθία μινόρε τριάδων από σταθμό σε σταθμό. Κάθε άφιξη



Σχήμα 17: Ενεργητική πρόοδος μινόρε τριάδων

θεωρείται ελλιπής και ασταθής, αφού η κρυφή τονικότητα της συγχορδίας δεν ηχεί ως συχνότητά της. Δίδεται η αίσθηση ότι, αντί να καταλήξει σε ματζόρε συγχορδία φανερής τονικότητας, σταμάτησε στα μισά, φθάνοντας μεν στην τονικότητα προορισμού της, αλλά υλοποιώντας την μόνον ως κρυφή τονικότητα. Επειδή το ταξίδι των μινόρε κλιμάκων καταλήγει σε μινόρε τριάδα, μπορούμε να φανταστούμε τις μινόρε κλίμακες σαν κάποιους που, όσο σταθερό και ασφαλές και αν είναι το σπίτι τους, προτιμούν τα ταξίδια και για αυτό, με την επιστροφή τους, βρίσκονται πάντα επί ποδός.

> Υπόδειξη ανάγνωσης δακτυλίου:
> Σε κάθε κορυφή A καταφθάνει μόνον μία μινόρε τριάδα ACE. Το επίπεδό της $AFCE$ περιέχει την ακμή $\vec{AF}$ του σταθμού που απομακρύνεται από αυτήν.

Μοναδιαία κίνηση θεωρώ την ενεργητική κίνηση από έναν σταθμό στον επόμενό του, κατά μήκος του βασικού κλαδιού 4/3. Ας την ονομάζουμε κίνηση R, με την έννοια ότι η ρίζα (**R**oot) μιας συγχορδίας γίνεται η πηγή (source) της επομένης συγχορδίας. **Μισή κίνηση** θεωρώ είτε την κίνηση μιας μινόρε συγχορδίας που, μένοντας στον ίδιο σταθμό, συμπληρώνει την κρυφή τονικότητάς της, οπότε μετατρέπεται σε ματζόρε, είτε την κίνηση μιας ματζόρε συγχορδίας στον επόμενο σταθμό, χάνοντας όμως την φανερή τονικότητάς της, οπότε μετατρέπεται σε μινόρε[38]. Ας την ονομάζουμε κίνηση Q, με την έννοια ότι η ποιότητα (**Q**uality) μιας συγχορδίας, δια μοναδιαίας κίνησης, γίνεται η πηγή (source) της επόμενης συγχορδίας. Η κίνηση από μινόρε σε ματζόρε στον επόμενο σταθμό είναι *υπέρ ενεργητική κίνηση*, διότι απαιτεί μία μοναδιαία κίνηση έως την επόμενη μινόρε και μισή κίνηση για την μετατροπή της σε ματζόρε[39]. *Σχεδόν* σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει ότι $R = Q \circ Q$ και ότι η υπέρ ενεργητική κίνηση ισούται με

[38]Ισως η ονομασία μισή κίνηση φαίνεται ατυχής, καθότι έρχεται σε αντίθεση με το ότι η σύνδεση που αντιστοιχεί στην κίνηση R είναι η μικρότερη δυνατή, από άποψη διατάξεως. Δείχνει όμως ότι η κρυφή τονικότητα θα ήταν φανερή, αν δεν έλειπε ακουστικά η συχνότητά της.

[39]Φυσικά μπορεί να θεωρηθεί σαν μισή κίνηση, μετατροπής σε ματζόρε του ίδιου σταθμού, ακολουθούμενη από ολόκληρη κίνηση ματζόρε.

$R \circ Q = Q \circ R = Q \circ Q \circ Q$[40]. Για τις παθητικές προόδους ορίζονται οι αντίθετες των παραπάνω, έτσι ώστε η σύνθεσή τους να έχει ως αποτέλεσμα την ταυτότητα $(-Q) \circ Q = I$.

Η ματζόρε επιφάνεια ορίζεται εκ του περιορισμού για επιστροφή στην τονικότητα αναφοράς με μία και μόνον περιστροφή. Με αναφορά στο σχήμα 18, ας ορίσουμε την C ματζόρε, του ανατολικού σταθμού, ως τονικότητα αναφοράς, κυρίως επειδή δίδεται η εντύπωση ότι η σύνδεση $\vec{EC}$ ανήκει στην επιφάνεια μισού κυλίνδρου, που ξεκινά από την σύνδεση $\vec{BG}$, του βόρειου σταθμού, και, περνώντας από την $\vec{EC}$, τελειώνει στην $\vec{AF}$ του νότιου σταθμού. Για να μην αλλάξουμε τονικότητα, άρα περιοχή ή επιφάνεια, η δεξιόστροφη ενεργητική πρόοδος πρέπει να φαίνεται ότι ανήκει στην επιφάνεια αυτού του κυλίνδρου, ώστε το "ταξίδι" να διαρκεί μία μόνον περιστροφή. Η πιο απλή δεξιόστροφη πρόοδος που δίνει αυτήν την εντύπωση είναι να χρησιμοποιήσουμε τρία βήματα. Από τον ανατολικό σταθμό να εκκινήσουμε για τον νότιο και από κει να μεταπηδήσουμε κατευθείαν στον βόρειο, από όπου θα επιστρέψουμε στον ανατολικό, εκ του οποίου ξεκινήσαμε. Σαν να εκμεταλευτήκαμε μόνον μισό κύλινδρο. Δεν μπορούμε να διασχίσουμε τον, απέναντι από την εκκίνηση, δυτικό σταθμό με ματζόρε τριάδα διότι κάθε σύνδεση επί αυτού του σταθμού έχει το ένα της άκρο εκτός την C ματζόρε κλίμακας. Η μόνη κλάση συχνοτήτων εντός της κλίμακας είναι η $[D]$. Για να επιτύχουμε πρόσβαση στον δυτικό σταθμό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μινόρε τριάδα DFA της "πάνω" επιφάνειας $DBbFA$ και από την κορυφή D να περάσουμε στην κορυφή της ματζόρε τριάδας GBD της "κάτω" επιφάνειας $DGBF\#$. Η ακολουθία κινήσεων Q, μαζί με την αναγκαία ασυνέχεια στην κορυφή D, εκφρασμένη με ρωμαϊκούς αριθμούς, έχει ως εξής:

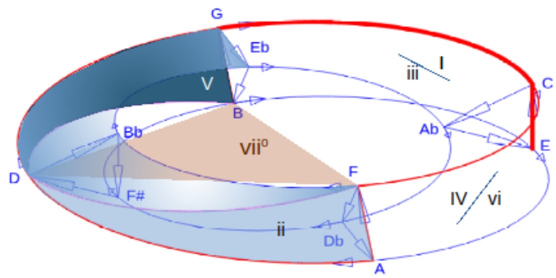
$$I - vi - IV - ii - V - iii - I$$

Παρατηρείστε ότι η συγχορδία vii^o δεν ανήκει στην επιφάνεια δια της οποίας ολοκληρώνεται η επιστροφή στην τονική I.
Για να μην ξεχάσουμε ότι ο δακτύλιος αφορά στα σύνολα των συχνοτήτων που συνηχούν σαν συγχορδίες και δεν αφορά στους αστερισμούς τριγώνων που σχηματίζουν οι τριάδες, ας παρατηρήσουμε πόσο ίδιες και σχεδόν σύμφωνες είναι οι εβδόμες της τονικής $\mathrm{I}^7 = C^7$ και της υποδεσπόζουσας $\mathrm{I}V^7 = F^7$. Κατανέμουν τις συχνότητές τους σε διπλανούς σταθμούς. Επιπλέον, ας προσέξουμε την αντίθεση της εβδόμης της δεσπόζουσας $V^7 = G^7$, η οποία κατανέμει τις συχνότητές της σε τρείς σταθμούς, με την συχνότητα $[F]$ να βρίσκεται σε απέναντι σταθμό από αυτόν της ρίζας της[41].

---

[40]Η εξαίρεση συμβαίνει λόγω της προσήλωσης στην κλίμακα αναφοράς, που εκφράζεται με χρήση μόνον μη αλλοιωμένων τόνων. Για την C ματζόρε παραδείγματος χάριν, εξ ανάγκης θα χρησιμοποιηθεί η κίνηση $(FAC \rightarrow BDF)$ αντί της $(FAC \rightarrow BbDF)$ ή η $(BDF \rightarrow EGB)$ αντί της $(BDF\# \rightarrow EGB)$. Για τον ίδιο λόγο δεν μπορεί να κατασκευαστεί συνεπής άλγεβρα με την σύνθεση των κινήσεων. Αν μπορούσε, πάντα θα ίσχυε $R \circ R \circ R \circ Q = I$, αλλά δυστυχώς αυτό εξαρτάται από την σειρά των κινήσεων, που θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μην βγαίνουμε εκτός κλίμακας.

[41]Η τονικότητα της G^7 φαίνεται να είναι η απομακρυσμένη, (1/36), $[F]$. Η πρόοδος τονικοτήτων $V^7 - I$ όμως, που είναι ίδια με την πρόοδο τονικοτήτων $IV - I = F - C$, δεν είναι παθητική, διότι η συγχορδία C δεν είναι γνήσιο υποσύνολο της G^7.



Σχήμα 18: Σχετικές C ματζόρε και A μινόρε κλίμακες

Η πτώση είναι το ουσιαστικότερο και ίσως το πιο αντικειμενικό στοιχείο της δομής της τονικότητας. Εκ παραδόσεως είναι συνυφασμένη με την χρήση του leading tone. Στις ματζόρε κλίμακες, όπως η C ματζόρε, η παρουσία της $[B]$ στην δεσπόζουσα συγχορδία G εδραιώνει την κλίμακα, έναντι της $[Bb]$, αλλά δεν είναι αυτή η ιδιότητα που προκαλεί το αίσθημα της πτώσης κατά την κίνηση $V-I$. Είναι η ιδιότητα της $[B]$ ως leading tone που προκαλεί αυτήν την αίσθηση. Έτσι, με αναφορά στην κλίμακα A μινόρε, η παρουσία της $[B]$ στην E μινόρε, εδραιώνει μεν την κλίμακα αλλά, δεν αρκεί για να δημιουργήσει το αίσθημα της πτώσης με την κίνηση $v-i$. Για αυτό, χρειάζεται η leading tone $[G\#]$ που μετατρέπει την v σε ματζόρε V, δηλαδή σε E ματζόρε.

Η μινόρε επιφάνεια είναι προφανώς η ίδια η επιφάνεια της, σχετικής της, ματζόρε κλίμακας C. Υπάρχει όμως η δυσκολία ότι, μετά την εδραίωσή της ως κλίμακα αναφοράς, για την πραγμάτωση της πτώσης πρέπει να χρησιμοποιηθεί, εκ της A ματζόρε, ματζόρε συγχορδία για δεσπόζουσα, η οποία δεν ανήκει στην επιφάνεια της σχετικής ματζόρε C. Από την επιφάνεια της μινόρε κλίμακας πρέπει να "γλιστρήσουμε" προσωρινά στην επιφάνεια της παράλληλης ομώνυμης ματζόρε και, αντί για την ματζόρε τονική της τελευταίας, να επιστρέψουμε καταλήγοντας στην τονική της μινόρε. Ο πιο εύκολος τρόπος, μετά την εδραίωση π.χ. της A μινόρε ως κλίμακα αναφοράς, είναι να συνεχίσουμε από τον νότιο σταθμό, ως σαν να ήμασταν στην A ματζόρε, παρακολουθώντας την κίνηση της ακμής $\mathrm{A}\vec{D}_b = A\vec{C}_\#$, πράττοντας στην κορυφή $[B]$, του απέναντι βόρειου σταθμού, ότι πράξαμε στο $[D]$, της C ματζόρε. Από εκεί να κινηθούμε στην ακμή $E\vec{A}_b = E\vec{G}_\#$ της $[E]$ ματζόρε και, από αυτήν την δεσπόζουσα, να καταλήξουμε στην ζητούμενη πτώση, στην A μινόρε συγχορδία. Η ακολουθία Q κινήσεων, μιας περιστροφής για την εδραίωση της μινόρε και άλλη μίας, με κατά το δυνατόν R κινήσεις, για την χρήση της ματζόρε στην πτώση, εκφρασμένη με ρωμαϊκούς αριθμούς, έχει ως εξής:

$$i-VI-iv-VII-v-III-i\text{-IV-ii-V-i}$$

2.8 Αρμονικές πρόοδοι

Πιστεύω πως είμαι σε θέση πλέον να διατυπώσω απλούς μνημονικούς κανόνες για τις αρμονικές προόδους, όπως τις κατάλαβα.

- Ως αρχή, επιλέγουμε πάντα ενεργητικές προόδους, εκτός και αν η παθητική πρόοδος εξυπηρετεί συγκεκριμένο συνειδητό σκοπό.

- *Η μη αλλαγή σταθμού*, κατά την προσωπική μου άποψη, *δεν εντάσσεται καθαρά σε πρόοδο*, διότι η τονικότητα, είτε κρυφή είτε φανερή, είναι πάντα παρούσα. Αν οφείλω να χαρακτηρίσω, ως πρόοδο, την κίνηση στον ίδιο σταθμό, θα χαρακτήριζα την κίνηση $(-Q)$, από ματζόρε σε μινόρε, παθητική, όπως τις $I-iii$ ή $IV-vi$, και την κίνηση (Q), από μινόρε σε ματζόρε, ενεργητική, όπως τις $iii-I$ ή $vi-IV$. Τέτοιες κινήσεις μπορούν να γίνουν για διάφορους λόγους, όπως στην $V-iii-I$ γιατί θέλουμε να αδυνατήσουμε την αίσθηση της πτώσης. Για να παρατείνουμε την παραμονή μας στην τονικότητα με $I-iii-I$. Για να ελαττώσουμε την ταχύτητα της κίνησης, όπως $I-vi-IV$, ή για να ικανοποιήσουμε την ανάγκη ολοκλήρωσης μιας ατελούς άφιξης, φανερώνοντας την τονικότητά της. Ό,τι λογικό, σε αυτά τα πλαίσια, μπορούμε να σκεφτούμε.

- Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής επαφίεται στις προθέσεις του συνθέτη. Άλλοτε θα υπάρχει επιθυμία παραμονής σε κάποια τονικότητα ή σε κάποιον από τους τέσσερις σταθμούς, άλλοτε θα επιλέγονται γρήγορα περάσματα, άλλοτε άλματα στον απέναντι σταθμό, άλλοτε οπισθοχώρηση.

- *Η πρόοδος κλιμάκων είναι πάντα ενεργητική.* Οι κλίμακες δεν είναι συνήχηση συγχορδιών, άρα μόνον σε τετριμμένες τονικότητες μπορούν να αντιστοιχιστούν.

- Η μίμηση των κινήσεων της καθολικά αποδεκτής πτώσης είναι σχεδόν πάντα λογικοφανής, ειδικά αν θεωρήσουμε την κατάλληλη, για την μίμηση της κίνησης, τονικότητα ως προσωρινή τονικότητα αναφοράς, όπως στην περίπτωση της δευτερεύουσας δεσπόζουσας.

- Οι *παραφωνίες* συνήθως δημιουργούνται είτε με καθυστέρηση μιας μελωδίας να ακολουθήσει την αρμονική αλλαγή είτε, πιο σπάνια, με καθυστέρηση της αρμονίας να ακολουθήσει την μελωδία που προχώρησε. Συνήθως κατ' αυτόν τον τρόπο προετοιμάζονται. Η παραφωνία ας θεωρείται παράταιρη της ομώνυμης τονικότητας της συγχορδίας στην οποία φαίνεται να προστέθηκε. Επιλύεται συνήθως σε σύμφωνη συγχορδία του επόμενου, της ομώνυμης τονικότητας, σταθμού, όπως στην περίπτωση V^7-I. Παρά τον σκεπτικισμό, της περίπτωσης πολύ μικρού υποπλλαπλασίου, της συνάρτησης της σελίδας 20, αρκετές φορές η επίλυση παραμένει στην τονικότητα που η παράφωνη συγχορδία φαίνεται να δημιουργεί. Χωρίς τον σκεπτικισμό, ο τελευταίος ισχυρισμός μπορεί να οδηγήσει σε ασυνήθεις επιλύσεις, όπως στην περίπτωση $V^7 - IV$ [42] ή την $vii^o - I$ [43].

Οι αντιστροφές δεν επηρεάζουν την τονικότητα, είτε την φανερή είτε την κρυφή. Θεωρητικά όμως, στην πρώτη αντιστροφή X^6, η ρίζα (root) της συγχορδίας δεν βρίσκεται στην χαμηλότερη συχνότητα, όπως θα αναμενόταν. Στην δεύτερη αντιστροφή X_4^6 ούτε η ποιότητά της (quality) βρίσκεται χαμηλότερα της πηγής (source). Κανονικά με τις αντιστροφές ασχολούμαστε μόνο σε επίπεδο *voice leading*, αλλά δεν φαίνεται να βλάπτει αν τις κατατάσσαμε σαν ενδιάμεσες καταστάσεις κυρίως της άφιξης σε σταθμό. Τις κατατάσσω λοιπόν ως $\mathrm{X}_4^6 \to \mathrm{X}^6 \to \mathrm{X}$, χωρίς άλλο ισχυρότερο επιχείρημα υπέρ αυτού.
Όπως αναφέρθηκε στα όρια της αυτο-ομοιότητας, στη σελίδα 10, ο υποστηρικτικός ρόλος δεν συνάδει με την θέση της χαμηλότερης συχνότητας της συγχορδίας. Στην μπάσα συχνότητα ταιριάζει ο ρόλος της υποστηριγμένης φανερής τονικότητας. Ας θεωρείται λοιπόν ότι η μπάσα συχνότητα των αντιστροφών προαναγγέλλει την μετάβαση σε αυτήν[44], ειδικά η μπάσα συχνότητα της δεύτερης αντιστροφής. Πρέπει να έχουμε συνειδητοποιήσει, μέχρι τώρα, ότι, σε κάθε κλίμακα, οι συγχορδίες που έχουν φανερές τονικότητες είναι μόνον οι τρεις ματζόρε. Με αναφορά στις σχετικές C ματζόρε και A μινόρε κλίμακες, αυτές οι συγχορδίες είναι οι G, C και F. Κινούμαστε, από σταθμό σε σταθμό, πάντα ενεργητικά, όπως τα οχήματα κινούνται πάντα εμπρός. Πριν την κίνηση προς τα πίσω, βάζουμε όπισθεν και ανάβουν προαναγγελτικά τα φώτα οπισθοπορείας. Αυτή την λειτουργία, προαναγγελίας παθητικής μετάβασης, μου αρέσει να φαντάζομαι ότι έχει ειδικά η δεύτερη αντιστροφή. Ας δούμε τις δύο αντιστροφές.

Η δεύτερη αντιστροφή X_4^6 μινόρε συγχορδιών (όπως EAC), επειδή θα προανήγγειλε την κίνηση $(-R)$, αντί προς τις φυσιολογικά μινόρε συγχορδίες (όπως EGC), προς τις, φανερής τονικότητας, ματζόρε (όπως $EG\#C$), δεν χρησιμοποιείται, διότι οι τελευταίες είναι εκτός κλίμακας. Η παθητική πρόοδος δεν συνάδει με αποτέλεσμα τόσο ενεργητικό όσο η αλλαγή κλίμακας. Το ίδιο συμβαίνει και με την δεύτερη αντιστροφή της δεσπόζουσας. Η δεύτερη αντιστροφή όμως της τονικής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνει την πτώση, όπως $I_4^6 - V - I$[45]. Της δε υποδεσπόζουσας, για εκτεταμένη παραμονή στην περιοχή της τονικής, όπως $I - (IV_4^6) - I$.

Η πρώτη αντιστροφή δεν χρησιμοποιείται για προαναγγελία παθητικής προόδου για δύο λόγους. Η προαναγγελία παθητικής κίνησης $(-Q)$ από ματζόρε ACF σε ματζόρε $AC\#E$ δεν ισχύει διότι η τελευταία δεν ανήκει στην κλίμακα και, συγχρόνως, η κίνηση $(-Q)$ από μινόρε CEA σε ματζόρε CEG,

[42] Η συγχορδία $GBDF = G(7, 11, 2, 5) = [1/36, [7, 11, 2, 5], 5]$, με το μικρό υποπολλαπλάσιο $1/36$ της $7 = G$, έχει τονικότητα την $5 = F$.

[43] Η συγχορδία $BDF = G(11, 2, 5) = [1/60, [11, 2, 5], 0]$, με το μικρό υποπολλαπλάσιο $1/60$ της $11 = B$, έχει τονικότητα την $0 = C$.

[44] Δεν βγάζει νόημα το να προαναγγέλλουμε φανερά μια τονικότητα που θα πραγματωθεί ως κρυφή. Αν λόγοι του leading voice διαψεύδουν τον ισχυρισμό, δεν το γνωρίζω.

[45] Η κατ' αυτόν τον τρόπο χρήση της I_4^6 πολλές φορές συμβολίζεται με Cad_4^6, όπως $Cad_4^6 - V - I$

με δύο κοινές νότες μεταξύ των συγχορδιών, είναι μικρή και δεν χρειάζεται προαναγγελία της μίας εξ αυτών. Η πρώτη αντιστροφή χρησιμοποιείται κυρίως για την διαλεκτική σύνθεση της αντίθεσης μεταξύ των αρμονικών και μελωδικών προόδων, που αναφέρθηκε στη σελίδα 29. Παραδείγματος χάριν, στην πρόοδο $IV - ii^6 - V$ η επιθυμητή ενεργητική πρόοδος με άλματα των τονικοτήτων συνδυάζεται από την επίσης επιθυμητή μελωδική πρόοδο του μπάσου με βήμα δευτέρας.

Οι κλίμακες και οι συγχορδίες επί της δομής του δακτυλίου αποκαλύπτονται στο σχήμα 19.
Οι δώδεκα νότες είναι κατανεμημένες, ανά τρεις, στους τέσσερις σταθμούς.
Ας επικεντρωθούμε στην παράπλευρη επιφάνεια του δακτυλίου, όπως την βλέπουμε να αναπτύσσεται από την κίνηση του βέλους στήριξης $\vec{EC}$. Η επιφάνεια που παράγεται από το βέλος αντιστοιχεί στις σχετικές C ματζόρε και a μινόρε κλίμακες.

Η άφιξη των ματζόρε συγχορδιών σε σταθμό, όπως από την G ματζόρε του βορείου σταθμού στην C ματζόρε του ανατολικού, χαρακτηρίζεται από την σύγχρονη άφιξη αμφότερων των δύο άκρων του βέλους $\vec{EC}$ και την άνω καμπύλη μετακίνησης $\vec{GC}$. Επειδή οι νότες είναι συνυφασμένες με τις φανερές τονικότητες και αυτές με τις ματζόρε συγχορδίες, **οι ματζόρε συγχορδίες αντιστοιχίζονται σε τμήμα καμπύλης μοναδιαίας μετακίνησης, από προηγούμενο σταθμό, προς την ομώνυμη τονικότητα του σταθμού άφιξης**, έτσι η C ματζόρε συγχορδία αντιστοιχεί στην καμπύλη $\vec{GC}$. Επειδή οι κλίμακες αντιστοιχίζονται στην τονική συγχορδία τους, *οι ματζόρε κλίμακες αντιστοιχίζονται στο ίδιο τμήμα καμπύλης μοναδιαίας μετακίνησης* επίσης.

Η άφιξη των μινόρε συγχορδιών σε σταθμό, όπως από την E μινόρε του ανατολικού σταθμού στην A μινόρε του νότιου, χαρακτηρίζεται από την άφιξη μόνον του άκρου A της κάτω καμπύλης μετακίνησης $\vec{EA}$. Η καμπύλη όμως αντιστοιχεί ήδη στην A ματζόρε συγχορδία. Έχουμε δεί όμως, στη σελίδα 37, ότι χρειαζόμαστε μισή κίνηση Q ώστε η ρίζα A της μινόρε συγχορδίας να μετακινηθεί στην ρίζα F της ματζόρε συγχορδίας. Αυτή η μετακίνηση αντιστοιχεί στο βέλος στήριξης $\vec{AF}$. Έτσι, αντιστοιχούμε την μινόρε συγχορδία στην μισή μετακίνηση η οποία αντιστοιχεί σε πλευρά σταθμού, οπότε **οι μινόρε συγχορδίες αντιστοιχίζονται σε βέλος πλευράς σταθμού που ξεκινά από την ομώνυμη τονικότητα**. Κατά το παράδειγμα, η a μινόρε συγχορδία αντιστοιχεί στο βέλος $\vec{AF}$. Επειδή οι κλίμακες αντιστοιχίζονται στην τονική συγχορδία τους, *οι μinόρε κλίμακες αντιστοιχίζονται στο ίδιο βέλος του σταθμού άφιξης* επίσης.

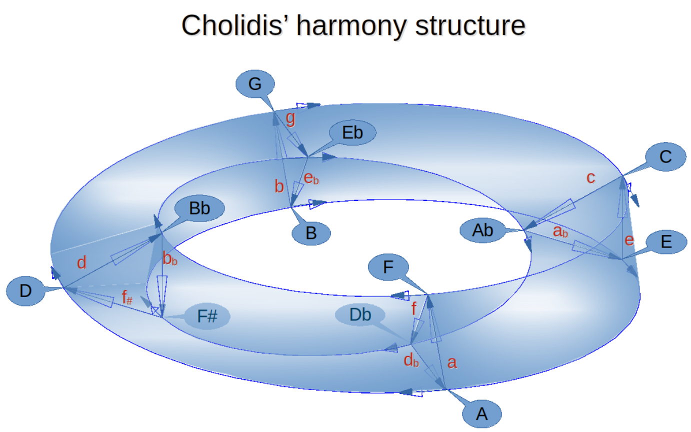
Στο σχήμα 19 σημειώθηκαν: οι μινόρε συγχορδίες δίπλα στις αντίστοιχες πλευρές των σταθμών, οι δώδεκα τονικότητες στις κορυφές αυτών και παραλείφτηκαν οι ματζόρε συγχορδίες, ως τα αυτονόητα τμήματα καμπύλων που καταλήγουν στις ομόνυμες κορυφές. Κατ' αυτόν τον τρόπο η δομή δείχνει πλήρης.

Η δομή του ομφαλικού δακτυλίου περιέχει

τις δώδεκα νότες, ως κορυφές των τεσσάρων τριγωνικών σταθμών άφιξης - αναχώρησης,

τις δώδεκα ματζόρε συγχορδίες, κατ' αντιστοιχία και τις δώδεκα ματζόρε κλίμακες, ως τμήματα καμπύλης μοναδιαίας μετακίνησης μεταξύ σταθμών, και

τις δώδεκα μινόρε συγχορδίες, κατ' αντιστοιχία και τις δώδεκα μινόρε κλίμακες, ως πλευρές των τεσσάρων τριγωνικών σταθμών άφιξης - αναχώρησης.



Σχήμα 19: Χωλίδειος αρμονική δομή

Η ανάγνωση δομής εξαρτάται από το αντικείμενο ενδιαφέροντός μας. Για την πρόοδο και σύνδεση των συγχορδιών της ίδιας τονικότητας μπορεί να προτιμήσουμε την ανάγνωσή τους από το σχήμα 18, όπου "σημειώθηκε" η πρόοδος ακολουθιών κινήσεων Q ματζόρε κλίμακας, με την αντίστοιχη πρόοδο μινόρε κλίμακας να αναφέρθηκε απλώς στο κείμενο, ως αυτονόητης. Για την αλλαγή και σύνδεση κλιμάκων, όπως και για την πρόοδο συγχορδιών που "φλερτάρουν" με την αλλαγή κλιμάκων, ίσως προτιμήσουμε το σχήμα 19. Κατά την ανάγνωση προκύπτουν τα εξής:

- Σε κάθε τονικότητα καταλήγει η ομώνυμη ματζόρε και η σχετική μινόρε κλίμακα ή συγχορδία *του προηγούμενου* σταθμού, π.χ. στην τονικότητα F καταλήγει η F ματζόρε ($\vec{CF}$) και η a μινόρε ($\vec{AF}$) [46].

[46] Η μεγαλύτερη δυσκολία σε αυτό το γεγονός είναι οι αντιθέσεις της προόδου Q από μία ματζόρε

- Οι συνδέσεις βελών των ματζόρε γίνονται κατά μήκος, π.χ. από C ματζόρε ($\vec{CF}$) σε F ματζόρε ($\vec{FB_b}$).

- Οι συνδέσεις βελών των μινόρε γίνονται εν παραλλήλω, π.χ. από a μινόρε ($\vec{AF}$) σε d μινόρε ($\vec{DB_b}$).

- Η μισή κίνηση Q γίνεται καθέτως αριστερά, π.χ. από a μινόρε ($\vec{AF}$) σε F ματζόρε ($\vec{FB_b}$) ή από C ματζόρε ($\vec{CF}$) σε a μινόρε ($\vec{AF}$).

- Η μισή κίνηση $(-Q)$ γίνεται κατά το πρότυπο $(-R) \circ Q$ π.χ. από a μινόρε ($\vec{AF}$) σε C ματζόρε ($\vec{CF}$) ή από F ματζόρε FB_b σε a μινόρε ($\vec{AF}$).

- Η σύνδεση ματζόρε κλιμάκων με την παράλληλή τους μινόρε κλίμακα γίνεται καθέτως δεξιά, π.χ. από C ματζόρε ($\vec{CF}$) σε c μινόρε $\vec{CA_b}$ και αντιστρόφως για την σύνδεση μινόρε στην παράλληλη ματζόρε. Αυτό προκύπτει από τον ρόλο της κοινής, εξ ανάγκης ματζόρε, δεσπόζουσας των παράλληλων κλιμάκων. Δεν συμβαίνει το ίδιο στις συνδέσεις συγχορδιών. Η διαφορά έγκειται στο ότι στις συνδέσεις κλιμάκων παρεμβάλλεται, με διαδοχή συγχορδιών, η προετοιμασία για χρήση της κοινής δεσπόζουσας, ενώ ως σύνδεση συγχορδιών εννοείται η απλή διαδοχή τους.

- Ως περίληψη ανάγνωσης μπορούμε να θεωρούμε σύντομες προόδους τις εξής: Από την κορυφή C ματζόρε $\vec{GC}$ κλιμάκων μεταβαίνουμε στις μινόρε c και e των εκατέρωθεν τις καμπύλης $\vec{GC}$ επιφανειών.
  Από τα βέλη $\vec{AF}$ των επιφανειών a μινόρε κλιμάκων μεταβαίνουμε στις ματζόρε καμπύλες $\mathrm{A} = \vec{C_\# A}$ και $F = \vec{CF}$ των άκρων της a.

Η χρήση συμμετρικών συγχορδιών είναι χρήσιμη στην εναλλαγή κλιμάκων. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις.

Η χρήση επαυξημένων τριάδων είναι σύγχρονη άφιξη και στις τρεις πλευρές του σταθμού. Η άφιξη σε πλευρά όμως χαρακτηρίζει την άφιξη ματζόρε συγχορδίας. Έτσι, η άφιξη CEA_b θεωρείται ως άφιξη σε οποιασδήποτε από τις τρεις ματζόρε που αντιστοιχούν στις κορυφές, με αποτέλεσμα, από αυτό τον σταθμό, να συνεχίζουμε, αναλόγως της επιλογής μας, επί οποιωνδήποτε από τις τρεις επιφάνειες ή κορυφών του.

στην σχετική της, του επόμενου σταθμού, μινόρε κλίμακα, που ενώ αλλάζει σταθμό (άρα υπάρχει απομάκρυνση) δεν αλλάζει κλειδί (άρα δεν υπάρχει τόση απομάκρυνση), και της προόδου από μία μινόρε στην, του ίδιου σταθμού, ματζόρε κλίμακα, που ενώ δεν αλλάζει σταθμό (άρα δεν υπάρχει τόση απομάκρυνση) αλλάζει κλειδί (άρα υπάρχει απομάκρυνση). Άποψή μου είναι ότι στις, πάντα ενεργητικές, προόδους κλιμάκων δεν έχει σημασία η σύγκριση άφιξης και προορισμού αλλά ο δρόμος που επιλέγουμε. Έτσι, παρόλο που ισχύει ότι $QQ = R$, ο δρόμος δύο μισών κινήσεων $Q \circ Q$ είναι μεγαλύτερος της μοναδιαίας κίνησης R.

Η χρήση ελαττωμένων εβδόμων θεωρεί ότι υπάρχει σύγχρονη άφιξη σε όλους τους σταθμούς. Αν θυμηθούμε ότι, δίδοντας σημασία στη φανερή τονικότητα, ακόμα και οι μινόρε συγχορδίες μπορούν να ειδωθούν σαν ματζόρε εβδόμης χωρίς ρίζα (root), κάθε κορυφή της ελαττωμένης εβδόμης θεωρείται ως ποιότητα (quality) ματζόρε συγχορδίας που έφτασε στον σταθμό της κορυφής. Έτσι, η $BDF_{\#}A$ θεωρείται ως άφιξη σε οποιασδήποτε από τις τέσσερις ματζόρε που η ποιότητά τους αντιστοιχεί σε κάποια από τις συγκεκριμένες κορυφές, με αποτέλεσμα, π.χ., από τον σταθμό με την B σαν ποιότητα της GBD, να συνεχίζουμε σαν να ήμασταν στην επιφάνεια των σχετικών C ματζόρε και a μινόρε και μόλις φτάσαμε στην G ματζόρε [47].

Παραδείγματα προόδου κλιμάκων ή συγχορδιών θα δώσω τελικά ελάχιστα, διότι θεωρώ ότι όταν και αν αποφασίσω να ξαναδιαβάσω θεωρία αρμονίας, αξίζει το κόπο να το πράξω έχοντας σαν βοήθημα οπτικοποίησης το σχήμα 19.

Οι ενδιάμεσες κλίμακες είναι χρήσιμο εργαλείο για την εναλλαγή τους. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Από την C ματζόρε στη d μινόρε κλίμακα ο ποιο σύντομος δρόμος φαίνεται να είναι μεσω F ή a. Πρατηρήστε πως $\vec{a}$ και $\vec{d}$ είναι "παράλληλα". Το παράδειγμα το αναφέρω λόγω της δυνατότητας χρήσης ενδιάμεσων κλιμάκων στην πορεία προς την κλίμακα που στοχεύουμε. Οι ενδιάμεσες τονικότητες δεν χρειάζεται να εδραιώνονται πλήρως, μάλλον το αντίθετο, αφού χρησιμοποιούνται απλά σαν βοήθημα στο ταξίδι μας. Σημειώνοντας μόνον τις κλίμακες, οι σύντομες μεταβάσεις στο παράδειγμά μας είναι οι $C-F-d$ ή $C-a-d$.

Η Νεαπολιτάνικη έκτης θα μπορούσε να περιγραφεί σαν μία περίτεχνη περιστροφή - επιστροφή στην C ματζόρε, που πραγματοποιείται με συνεχή εναλλαγή ματζόρε καμπύλων και μινόρε επιφανειών, όπως $C-F|f-D_b-F_{\#}|f_{\#}-b-G-C$. Ο συμβολισμός $F|f$ χρησιμοποιείται για να δείξει ότι αν η C θεωρηθεί κοινή δεσπόσουσα των παράλληλων κλιμάκων, μπορούμε να καταλήξουμε σε οποιαδήποτε από αυτές. Από το βέλος της μινόρε $\vec{f}$ αντιλαμβανόμαστε αμέσως ότι η D_b συγχορδία είναι η VI της f μινόρε. Η f μινόρε κλίμακα όμως, ως ενδιάμεση κλίμακα, δεν χρειάζεται να εδραιωθεί. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί απλώς για την συγκόληση - πρόοδο $V-VI$ των βαθμών της, χωρίς να εμφανιστεί η τονική της. Έτσι η ακολουθία μας γίνεται $C-D_b^6-F_{\#}|f_{\#}-b-G-C$ [48]. Όπως η C είναι δεσπόζουσα των $F|f$ έτσι και η D_b είναι δεσπόζουσα της $f_{\#}$ μινόρε. Επειδή σκοπός μας είναι να περάσουμε στην G σαν δεσπόζουσα της C, η νότα $[F_{\#}]$, σαν leading tone της G ματζόρε, θα αντιμαχόταν σθεναρά τον ρόλο της ως δεσπόζουσας. Η πρόοδος $V-(i)-iv$ της $f_{\#}$ μινόρε κλίμακας, με την $[b]$ σαν υποδεσπόζουσά της, φαίνεται λογικός, αλλά η $[f_{\#}]$ είναι παρούσα και στην υποδεσπόζουσα. Η λύση είναι να συνθέσουμε την πρόοδο με μια κίνηση Q, που έτσι κι αλλιώς δεν αλλάζει

[47] Αυτή η θεώρηση συμπίπτει με το αποτέλεσμα της συνάτησης $G()$, της σελίδας 20, η οποία υπολογίζει σαν μία από της τονικότητες της $BDF_{\#}A$ την $[C]$, οπότε και η ελαττωμένη εβδόμη θεωρείται εναλλακτική της δεσπόζουσας της C ματζόρε κλίμακας.

[48] Η πρώτη αντιστροφή της D_b χρησιμοποιήθηκε για να τονιστεί ο ρόλος της f, που η τονική της δεν χρησιμοποιήθηκε.

σταθμό ή τονικότητα, αφού η $[G]$ είναι κρυφή τονικότητα της συγχορδίας b μινόρε. Έτσι, με αναφορά στην $f_{\#}$ μινόρε κλίμακα, η ακολουθία $D_b^6 - F_{\#}|f_{\#} - b - G$ γίνεται $V - (i - iv \circ Q) = V - bII = D_b^6 - G$.
Η D_b^6 ονομάζεται Νεαπολιτάνικη έκτης της C ματζόρε κλίμακας.
Αν παρατηρήσω την D_b, με αναφορά στην C ματζόρε κλίμακα, και συγκρίνω την G, με αναφορά στην $f_{\#}$ μινόρε κλίμακα, υποθέτω βάσιμα ότι, χωρίς αντιστροφή, *η G συγχορδία είναι η Νεαπολιτάνικη συγχορδία της $f_{\#}$ μινόρε κλίμακας* [49].

Επίλογος

Παρόλο που σκοπός της συγγραφής του παρόντος ήταν η συστηματική καταγραφή, πριν τα ξεχάσω, όσων νόμιζα ότι είχα καταλάβει για τις μουσικές αρμονικές προόδους, τελικά ολοκληρώθηκε ένα υπέροχο, για μένα, μαθηματικό ταξίδι. Είναι εντυπωσιακό το πως, από δύο βασικά κλαδιά υποστήριξης, τις ελάχιστες προσεγγίσεις των συχνοτήτων του δωδεκατονικού συστήματος και την πολλαπλότητα, η οποία είναι εργαλείο που χρησιμοποιεί κατά κόρον η γενική θεωρία της σχετικότητας, προέκυψε η τρισδιάστατη επιφάνεια επί της οποίας μπορούν να τοποθετηθούν οι δώδεκα συχνότητες και οι εικοσιτέσερις συγχορδίες και κλίμακες, οπτικοποιώντας τις βασικές σχέσεις τους.
Ακόμα και αν αμφισβητηθούν οι ισχυρισμοί που αφορούν τις σχέσεις συγχορδιών και κλιμάκων, και πράγματι θα ήταν πολύ πιο χρήσιμο να αμφισβητηθούν, πιστεύω ότι η τρισδιάστατη επιφάνεια της αρμονικής δομής θα παραμένει ένα αντικειμενικό εργαλείο οπτικοποίησης, κάθε μουσικής θεωρίας επί του δωδεκατονικού συστήματος.
Υπό την παραπάνω έννοια, δεν είναι αναγκαία η ανάγνωση όλου του άρθρου, παρά μόνον η κατασκευή της επιφάνειας και η σημείωση των δώδεκα τόνων επάνω της. Η ανάγνωση του παρόντος θα ενδιαφέρει όσους έχουν την περιέργεια του πώς προέκυψε η πολλαπλότητα από το μηδέν, σχεδόν από μόνη της, και όσους κατανοούν ότι η αλλαγή των βασικών προϋποθέσεων δημιουργίας της, όπως η χρήση τριών βασικών κλαδιών αντί για δύο, πιθανώς θα επέφερε και την ανάγκη τροποποίησής της, ίσως σε τρισδιάστατο αντικείμενο, από την δισδιάστατη επιφάνεια που κατασκευάστηκε.

Ευχαριστώ εκ των προτέρων όλους τους αναγνώστες για το ενδιαφέρον τους.
Δημήτριος Χωλίδης

[49] Δεν βγάζει ξεκάθαρο νόημα αλλά, φαίνεται ότι η ακολουθία $C - D_b^6 - G$ είναι διαδοχή δύο Νεαπολιτάνικων συγχορδιών, πρώτα της C ματζόρε, σε πρώτη αντιστροφή, και κατόπιν της "αντιδιαμετρικής" $f_{\#}$ μινόρε κλίμακας, χωρίς αντιστροφή.