

# Παιγνίδι θέρμανσης

22 Ιανουαρίου 2023

## Περίληψη

Στην παράγραφο 1.2 του άρθρου 1 του ΠΔ27-9/7-11-85(631Δ) αναφέρει ότι Η κεντρική θέρμανση των κτιρίων ...είναι κοινόχρηστο αγαθό... Θα έλεγε κανείς ότι, αν είναι έτσι τα πράγματα, σε ένα διώροφο κτήριο με ίσους ορόφους και ίδια θερμοκρασία σε κάθε όροφο, κάθε όροφος θα έπρεπε να έχει το ίδιο κόστος θέρμανσης. Θα μπορούσε κάτι τέτοιο να συμβαίνει, αν οι δύο όροφοι είχαν την ίδια πλευρική θερμομόνωση και θερμομονωμένο δώμα. Όμως, σε παλαιά, χωρίς θερμομόνωση, διώροφα, οι δαπάνες θέρμανσης του ορόφου (στον οποίο ανήκει το δώμα) μπορούν κάλλιστα να είναι διπλάσιες του ισογείου, παρόλο που έχει ίσο εμβαδόν και θερμοκρασία με το αυτό. Ο τύπος κατανομής κόστους θέρμανσης του Π.Δ. δεν φαίνεται να λαμβάνει επαρκώς υπόψη του την περίπτωση αυτή.

**Ένα παιγνίδι** σύγχρονων επιλογών δημιουργείται μεταξύ ορόφου και ισογείου, στην περίπτωση ενός διωρόφου χωρίς θερμομόνωση, όπου οι επιλογές του κάθε ορόφου είναι αν θα ζεσταθεί επαρκώς ή όχι, μέσα στο καταχeyίμωνο. Στο παιγνίδι αυτό δεν φαίνεται να υπάρχει συνθήκη που να υποχρεώνει την ενίσχυση του ενός από τον άλλο, ώστε η ισοκατανομή των δαπανών να καθιστά την θέρμανση του κτιρίου όντως κοινόχρηστη. Η θέρμανση των, χωρίς θερμομόνωση διωρόφων, δεν είναι κοινόχρηστη. Έτσι, ο καθένας πληρώνει ανεξάρτητα, με βάση την ένδειξη του μετρητή του, που, με ίσα εμβαδά και θερμοκρασίες, αυξομειώνεται ανάλογα με τον όροφο στον οποίο αναφέρεται. Δυστυχώς, χωρίς την ύπαρξη μιας ισορροπίας παιγνιδιού που θα καθιστούσε την θέρμανση κοινόχρηστη, άρα ισοπληρωμένη, απομένει η εκμετάλωση αυτού του γεγονότος, όπου η στατιστική παρατήρηση ορόφων της ίδιας στάθμης καθιστά δυνατή την εκτίμηση της τάξης ευμάρειας των ορόφων της άλλης στάθμης.

## 1 Ενέργεια θέρμανσης

**Η ενέργεια που χρειάζεται** για να ζεσταθεί μία πολυκατοικία κοστίζει ελάχιστα. Πιθανώς ένα γυμνασιόπαιδο, διαθέτοντας κάποιο χαρτζιλίκι του, να μπορεί να ζεστάνει μία πολυκατοικία για όλον τον χειμώνα. Η ενέργεια που χρειάζεται για να ζεσταθεί μια πολυκατοικία είναι παντελώς αμελητέα, σε σχέση με την ενέργεια που χρειάζεται για να αναπληρώνει τις απώλειές της, λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας με τον ψυχρότερο περιβάλλοντα χώρο. **Οι απώλειες θερμότητας είναι αυτό που κοστίζει.** Σημαίνουν απώλεια ενέργειας, η οποία πρέπει να αναπληρωθεί με αγορά πετρελαίου ή όποιο άλλο πρόσφορο τρόπο.

**Έχοντας δεδομένες τις θερμοκρασίες,** της μέσης θερμοκρασίας περιβάλλοντος χώρου και τις επιθυμητές θερμοκρασίες κάθε ορόφου, η εύρεση των αναγκαίων αναπληρώσεων ενέργειας του κάθε ορόφου βρίσκεται με απλή επίλυση γραμμικών εξισώσεων, διότι η μετάδοση θερμότητας μέσω επιφανειών περιγράφεται από γραμμική εξίσωση.

Για τους εκτιμητικούς υπολογισμούς θεώρησα:

την μέση χειμωνιάτικη θερμοκρασία στους 9 βαθμούς Κελσίου (δεδομένο του τόπου μου).

την επιλογή Π της πλήρους θέρμανσης, στους 18 βαθμούς, που ορίζονται συνήθως ως θερμοκρασία θερμικής άνεσης

την επιλογή Ε της ελλιπούς θέρμανσης, στους 14 βαθμούς, διότι θεώρησα ότι το 'δεν ανοίγω θέρμανση' δεν σημαίνει ότι ψοφολογώ αλλά ότι αναπληρώνω σε μια ελάχιστη θερμοκρασία, την οποία έθεσα υποκειμενικά.

## 2 Το κτίσμα

Ενδιαφερόμαστε για τον λόγο των επιφανειών απωλειών θερμότητας των ορόφων, που αντιστοιχούν στον λόγο των ποσοτήτων ενεργειών που κάθε όροφος είναι αναγκασμένος να αναπληρώνει. Δεν είναι αντικείμενο ή συστατικό του παιγνιδιού το πόσο ακριβώς θα στοιχίσει η χειμωνιάτικη θέρμανση.

### 2.1 Επιφάνειες

**Ο λόγος των απωλειών θερμότητας** μεταξύ των ορόφων, όταν αυτοί θερμαίνονται, ισούται με τον λόγο των επιφανειών που τους χωρίζουν από τον περιβάλλοντα χώρο. Υποθέστε κάθε όροφο με ύψος 3 μέτρων και τετραγωνική κάτοψη μήκους πλευράς  $\alpha$  μέτρων. Από το δάπεδο του ισόγειου θεωρείται γενικά, εκ κατασκευής, ότι δεν χάνεται ενέργεια, ούτε και από την οροφή του, διότι ο πάνω όροφός του θα έχει την ίδια με αυτό θερμοκρασία. Το ισόγειο χάνει ενέργεια μόνο από την παράπλευρη επιφάνειά του, που ισούται με  $\pi_l = 3 \cdot (4 \cdot \alpha) = 12 \cdot \alpha$  τετραγωνικά μέτρα. Ο όροφος δεν χάνει ενέργεια από το δάπεδό του, διότι το ισόγειο, από κάτω του, θα έχει την ίδια με αυτόν θερμοκρασία. Θα χάνει όμως ενέργεια από το δώμα και από την, ιδίου εμβαδού με το ισόγειο, παράπλευρη επιφάνειά του, δηλαδή  $\pi_o = 12 \cdot \alpha + \alpha^2$ . Ο λόγος λοιπόν απωλειών του ορόφου προς το ισόγειο  $\pi_o/\pi_l = 1 + \alpha/12$  είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Στο παράδειγμα που κατασκευάστηκε, η κάτοψη, αντί για τετραγωνική, θεωρήθηκε ορθογώνια  $10 \cdot 15$  μέτρων, με εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας ίσο με αυτό του δαπέδου των 150 τετραγωνικών μέτρων<sup>1</sup>.

### 2.2 Μόνωση δαπέδου

Η μόνωση δαπέδου, ή η εκτεταμένη χρήση χαλιών προς επίτευξη αντίστοιχου αποτελέσματος, δεν έχει κανένα αποτέλεσμα αν ο κάτω όροφος έχει την ίδια θερμοκρασία αλλά, εμποδίζει την ανταλλαγή θερμότητας, ή αλλιώς ενέργειας, όταν ο κάτω όροφος βρίσκεται σε μικρότερη θερμοκρασία.

**Στην επιλογή πλήρους θέρμανσης (Π)**, αν ο κάτω όροφος έχει επιλέξει επίσης (Π), είναι αδιάφορο αν θα στρώσουμε χαλιά ή όχι. Αν όμως ο κάτω όροφος επιλέξει ελλιπή θέρμανση (Ε), είναι καλύτερα να στρώσουμε χαλιά για να μην χάσουμε ενέργεια προς τον κάτω όροφο που θα έχει χαμηλότερη θερμοκρασία. Συνεπώς, στην επιλογή πλήρους θέρμανσης (Π), η μη χρήση χαλιών, ως ενέργεια του παιγνιδιού, κυριαρχείται ασθενώς από την χρήση τους.

<sup>1</sup>Για την ακρίβεια, υπολογίστηκαν οι απώλειες για κάθε προφίλ επιλογών τριωρόφου, αλλά για λόγους συντομίας του παρόντος απομονώθηκαν μόνο οι περιπτώσεις όπου το ισόγειο έχει επιλέξει να θερμαίνεται επαρκώς σε κάθε περίπτωση. Έτσι, στο παρόν, το παιγνίδι καθορίζεται δια των απωλειών του τελευταίου και προτελευταίου ορόφου.

**Στην επιλογή ελλιπούς θέρμανσης (Ε),** αν ο κάτω όροφος έχει επιλέξει επίσης (Ε), είναι αδιάφορο αν θα στρώσουμε χαλιά ή όχι. Αν όμως ο κάτω όροφος επιλέξει πλήρη θέρμανση (Π), είναι καλύτερα να μην στρώσουμε χαλιά για να κερδίσουμε ενέργεια από τον κάτω όροφο που θα έχει υψηλότερη θερμοκρασία. Συνεπώς, στην επιλογή ελλιπούς θέρμανσης (Ε), η χρήση χαλιών, ως ενέργεια του παιγνιδιού, κυριαρχείται ασθενώς από την μη χρήση τους.

**Οι σημαντικές για το παιγνίδι ενέργειες κάθε ορόφου** είναι δύο.

Π: πλήρης θέρμανση με χρήση χαλιών

Ε: ελλιπής θέρμανση χωρίς χρήση χαλιών

### 3 Απώλειες θερμότητας

Οι απώλειες υπολογίστηκαν θεωρώντας ότι όλες οι επιφάνειες έχουν την ίδια θερμοπερατότητα. Δεν ενδιαφερόμαστε ούτε για τις ακριβείς ανάγκες κάθε ορόφου ούτε καν για τον ακριβή λόγο μεταξύ των αναγκών θέρμανσης κάθε ορόφου. Ενδιαφερόμαστε ως προς ποιες ενέργειες μπορεί να επιλέγονται όταν, για ίσες διαστάσεις και θερμοκρασίες, οι ανάγκες του πάνω και κάτω ορόφου δεν είναι εκ των πραγμάτων ίσες. Για αυτόν τον λόγο, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα αποτελέσματα της εκτιμητικής μελέτης πολλαπλασιάστηκαν έτσι ώστε οι όποιες τιμές απωλειών να προσιδιάζουν σε χρηματικά κόσθη θέρμανσης. Τα τελευταία, για κάθε προφίλ ενεργειών, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| όροφος\ισόγειο | Π            | Ε           |
|----------------|--------------|-------------|
| Π              | -2700, -1350 | -2700, -150 |
| Ε              | -900, -1950  | -1500, -150 |

Οι παραπάνω απώλειες θερμότητας εκφράζονται ως αρνητικές απολαβές.

#### Παρατηρήσεις

επί του πίνακα των απωλειών.

**Όταν ο όροφος θερμαίνεται πλήρως,** έχει τις ίδιες απώλειες (2700) ό,τι και αν αποφασίσει το ισόγειο, διότι, με την χρήση μόνωσης δαπέδου, ως κυριαρχούσα ενέργεια, δεν έχει απώλειες προς το ισόγειο.

**Όταν το ισόγειο θερμαίνεται ελλιπώς,** οι απώλειές του παραμένουν σταθερές (150), ανεξάρτητα από την όποια επιλογή του ορόφου. Δεν διαφεύγει, προς όφελος του ισογείου, ενέργεια από τον όροφο, διότι όταν ο τελευταίος θερμαίνεται πλήρως, τότε επιλέγει οπωσδήποτε την χρήση της μόνωσης του δαπέδου του.

**Όταν το ισόγειο θερμαίνεται πλήρως,** έχει λιγότερες απώλειες όταν ο όροφος επιλέγει (Π), παρά όταν έχει επιλέξει (Ε)<sup>2</sup>.

**Ισχυρισμοί αποζημίωσης** μπορούν να δημιουργούν με επιμέρους παρατηρήσεις του πίνακα.

Ο όροφος δύναται να ισχυρίζεται προς το ισόγειο ότι "Αν επιλέξω ελλιπή θέρμανση, τότε για να ζεσταθείς θα αντιμετωπίσεις απώλειες -1950. Αν όμως επιλέξω πλήρη θέρμανση και εγώ, σου προσφέρω την τέλεια μόνωση, οπότε οι απώλειές σου μειώνονται σε -1350. Θα ήθελες να με αποζημιώσεις για αυτήν την ωφέλειά μόνωσης των 600;". Ακόμα και αν το ισόγειο παραδεχτεί ότι ο όροφος έχει δίκιο,

<sup>2</sup>Αυτή η παρατήρηση ήταν και το έναυσμα για να μελετηθεί η θέρμανση ως παιγνίδι.

αναγνωρίζει ότι θα παίξει το "παιγνίδι της ατιμωρησίας"<sup>3</sup>, όπου οι απώλειές του, σε πλήρη θέρμανση, είναι όντως -1950, αλλά συγχρόνως του προσφέρονται 600 τα οποία καλείται να τα μοιράσει κατά το δοκούν χωρίς συνέπειες. Συνεπώς, επιλέγοντας την ισορροπία, δεν θα προσφέρει καμία αποζημίωση.

**Το ισόγειο** δύναται να ισχυρίζεται προς τον όροφο ότι "Αν επιλέξεις ελλιπή θέρμανση, τότε με την, από μέρους μου, επιλογή ελλιπής θέρμανσης επίσης, θα αντιμετωπίσεις απώλειες -1500. Αν όμως επιλέξω πλήρη θέρμανση, εξ ανάγκης θα σου προσφέρω κάποια ζεστασιά από την οροφή μου, οπότε οι απώλειές σου θα μειωθούν σε -900. Θα ήθελες να με αποζημιώσεις για αυτήν την ωφέλειά δωρεάν ενέργειας των 600;". Ακόμα και αν ο όροφος παραδεχτεί ότι το ισόγειο έχει δίκιο, αναγνωρίζει επίσης ότι θα παίξει το "παιγνίδι της ατιμωρησίας", όπου οι απώλειές του, σε ελλιπή θέρμανση, είναι όντως -1500 αλλά συγχρόνως του προσφέρονται 600 τα οποία καλείται να τα μοιράσει κατά το δοκούν χωρίς συνέπειες. Συνεπώς, επιλέγοντας την ισορροπία, δεν θα προσφέρει ούτε αυτός καμία αποζημίωση.

**Δεν καταβάλλονται αποζημιώσεις στην ισορροπία**, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση. Πιθανώς, μπορούμε επιπρόσθετα να ισχυριστούμε ότι, εφόσον οι επιλογές του παιγνιδιού γίνονται συγχρόνως, οι δύο ισοδύναμοι, αλλά αντίθετοι, ισχυρισμοί διατυπώνονται και αυτοί συγχρόνως, εξουδετερώνοντας ο ένας τον άλλο.

## 4 Απολαβές παικτών παιγνιδιού

Εάν οι δύο όροφοι ενδιαφερόταν μόνο για το κόστος, είναι φανερό ότι ο όροφος θα επέλεγε την γραμμή (Ε) και το ισόγειο την στήλη (Ε), της ελλιπούς δηλαδή θέρμανσης με το ελάχιστο κόστος των 1500 για τον όροφο και ελάχιστο κόστος των 150 για τον όροφο. Οφείλουμε όμως να αποτιμήσουμε ή να αντιστοιχίσουμε την επιθυμία του καθενός για πλήρη θέρμανση σε αξία, ώστε να μπορούν να αποφασίσουν αν τελικά επιθυμούν την θέρμανση παρά το κόστος της ή όχι.

**Η αξία πλήρους θέρμανσης του ορόφου** ορίζεται ως  $y_1$ .

**Η αξία πλήρους θέρμανσης του ισογείου** ορίζεται ως  $y_2$ .

**Ο πίνακας απολαβών** του παιγνίου ορίζεται τελικά ως

| όροφος\ισόγειο | Π                        | Ε                  |
|----------------|--------------------------|--------------------|
| Π              | $y_1 - 2700, y_2 - 1350$ | $y_1 - 2700, -150$ |
| Ε              | $-900, y_2 - 1950$       | $-1500, -150$      |

## 5 Ισορροπίες παιγνιδιού θέρμανσης

### 5.1 Καθαρές στρατηγικές

Επιλύοντας το παιγνίδι διαπιστώνουμε ότι, υπό προϋποθέσεις, κάθε συνδυασμός ενεργειών μπορεί να αποτελείται από την βέλτιστη ενέργεια για κάθε παίκτη, όπου με δεδομένη την επιλογή του άλλου παίκτη, κανείς δεν μπορεί να επιλέξει καλύτερη ενέργεια από αυτήν που ήδη επέλεξε.

<sup>3</sup>Άσκηση 6.3 στην σελίδα 274 του βιβλίου.

- (Π,Π) Και οι δύο όροφοι επιλέγουν την θερμική άνεση με πλήρη θέρμανση. Αρκεί  $y_1 \geq 1800$  και  $y_2 \geq 1200$ .
- (Π,Ε) Ο όροφος επιλέγει πλήρη θέρμανση ενώ το ισόγειο ελλιπή. Αρκεί  $y_1 \geq 1200$  και  $y_2 \leq 1200$ .
- (Ε,Π) Ο όροφος επιλέγει ελλιπή θέρμανση ενώ το ισόγειο πλήρη. Αρκεί  $y_1 \leq 1800$  και  $y_2 \geq 1800$ .
- (Ε,Ε) Και οι δύο όροφοι επιλέγουν ελλιπή θέρμανση. Αρκεί  $y_1 \leq 1200$  και  $y_2 \leq 1800$ .

**Επί των τεσσάρων βέλτιστων συνδυασμών επιλογής** παρατηρούμε ότι

- Στην σπάνια περίπτωση όπου η αποτίμηση του ορόφου, για την θερμική του άνεση, ισούται ακριβώς με  $y_1 = 1200$  και η αντίστοιχη αποτίμηση του ισογείου είναι  $y_2 \leq 1200$ , το ισόγειο επιλέγει την ελλιπή θέρμανση (Ε), ενώ ο όροφος είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών του.
- Στην σπάνια περίπτωση όπου η αποτίμηση του ισογείου, για την θερμική του άνεση, ισούται ακριβώς με  $y_2 = 1200$  και η αντίστοιχη αποτίμηση του ορόφου είναι  $y_1 \geq 1800$ , ο όροφος επιλέγει την πλήρη θέρμανση (Π), ενώ το ισόγειο είναι αδιάφορο μεταξύ των δύο επιλογών του.
- Στην σπάνια περίπτωση όπου η αποτίμηση του ισογείου, για την θερμική του άνεση, ισούται ακριβώς με  $y_2 = 1800$  και η αντίστοιχη αποτίμηση του ορόφου είναι  $y_1 \leq 1200$ , ο όροφος επιλέγει την ελλιπή θέρμανση (Ε), ενώ το ισόγειο είναι αδιάφορο μεταξύ των δύο επιλογών του.
- Στην σπάνια περίπτωση όπου η αποτίμηση του ορόφου, για την θερμική του άνεση, ισούται ακριβώς με  $y_1 = 1800$  και η αντίστοιχη αποτίμηση του ισογείου είναι  $y_1 \geq 1800$ , το ισόγειο επιλέγει την πλήρη θέρμανση (Π), ενώ ο όροφος είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών του.
- Όταν και δύο αποτιμήσεις βρίσκονται σε μια ενδιάμεση κατάσταση, δηλαδή  $1200 < y_1 < 1800$  και  $1200 < y_2 < 1800$ , τότε δεν υπάρχουν βέλτιστες στρατηγικές. Όταν ο ένας επιλέγει την θερμική του άνεση με πλήρη θέρμανση, ο άλλος θα θέλει την ελλιπή θέρμανση. Όταν ο ένας επιλέγει την ελλιπή θέρμανση, ο άλλος θα θέλει την πλήρη. Μάλιστα, αυτό συμβαίνει ανεξάρτητα από το πόσο κοντά στα δύο όρια βρίσκονται οι αποτιμήσεις του καθενός για την αξία της θερμικής άνεσής του.

## 5.2 Μεικτές στρατηγικές

Όταν και οι δύο αποτιμήσεις βρίσκονται σε μια ενδιάμεση κατάσταση, δηλαδή  $1200 < y_1 < 1800$  και  $1200 < y_2 < 1800$ , τότε υπάρχει συνεχής διαμάχη και επιθυμία αλλαγής αποφάσεων. Σε αυτήν την περίπτωση, προς αποφυγή της συνεχούς διαμάχης, οι παίκτες μπορούν κάθε φορά να επιλέγουν τυχαία το αν θα αποκτήσουν θερμική άνεση ή όχι. Αν το κάνουν αυτό, το πρόβλημα έγκειται στο με ποιά πιθανότητα πρέπει να επιλέγεται η πλήρης θέρμανση (Π), ώστε να έχουν την μέγιστη δυνατή αναμενόμενη μέση απολαβή.

**Η μοναδική μεικτή στρατηγική** που υπάρχει έγκειται στα παρακάτω.

Ο όροφος επιλέγει την πλήρη θέρμανση (Π) με πιθανότητα  $P_1(\Pi) = \frac{1800-y_2}{600}$ , οπότε η ελλιπής θέρμανση (Ε) θα επιλέγεται με πιθανότητα  $P_1(E) = \frac{y_2-1200}{600}$ . Η αναμενόμενη μέση απολαβή ισούται με  $y_1 - 2700$  και είναι ίση με την απολαβή της επιλογής (Π) σε κάθε περίπτωση<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Όμως δεν μπορεί να εμείνει, ως καθαρή στρατηγική, σε αυτήν την επιλογή διότι θα την επιλέξει και το ισόγειο, οπότε θα ήταν καλύτερα να αλλάξει σε (Ε). Εν κατακλείδι, δεν υπάρχει βέλτιστη σταθερή επιλογή, ούτε η (Π) ούτε η (Ε).

Το **ισόγειο** επιλέγει την πλήρη θέρμανση (Π) με πιθανότητα  $P_2(\Pi) = \frac{y_1 - 1200}{600}$ ,  
 οπότε η ελλειπής θέρμανση (Ε) θα επιλέγεται με πιθανότητα  $P_2(E) = \frac{1800 - y_1}{600}$ .  
 Η αναμενόμενη μέση απολαβή ισούται με  $-150$  και είναι ίση με την απολαβή  
 της επιλογής (Ε) σε κάθε περίπτωση

Οι βέλτιστες πιθανότητες για τις επιλογές κάθε ορόφου εξαρτώνται τελικά μόνον  
 από το πόσο αποτιμά ο άλλος όροφος την θερμική του άνεση.

## 6 Η αποτίμηση της θερμικής άνεσης

Η αποτίμηση σε χρήμα ενός αγαθού (π.χ. της θερμικής άνεσης) φαίνεται φυσική  
 και αυτονόητη διαδικασία. Αλλιώς, δεν θα ήταν δυνατή η ανταλλαγή χρημάτων με  
 αγαθά. Ας παρουσιάσω όμως μερικούς συλλογισμούς δια των οποίων θα μπορούσε  
 κανείς να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι ο πυρήνας της διαδικασίας αποτίμησης σε  
 χρήμα ενός συγκεκριμένου αγαθού είναι η αποτίμηση των χρημάτων που διαθέτει με  
 βάση το συγκεκριμένο υπό ανταλλαγή αγαθό.

### 6.1 Υποκειμενική αξία ανταλλακτικού μέσου

Έχουν γραφτεί πολλά και υπάρχουν πάμπολλες θεωρίες σχετικές με την υποκειμενική  
 αξία των χρημάτων. Πρώτη φορά συνάντησα την έννοια της υποκειμενικής αξίας  
 των χρημάτων προ πλέον των τεσσάρων δεκαετιών, σε μάθημα που είχε σχέση με  
 την λήψη αποφάσεων. Δεν μπόρεσα να βρω σχετικές πληροφορίες αλλά θυμάμαι  
 ότι σε έναν άξονα αναγράφονταν η ονομαστική αξία ποσοτήτων χρημάτων και κάθε  
 ποσότητα αντιστοιχούσε σε μια υποκειμενική αυθαίρετη αξία.

Ας κατασκευάσουμε μία τέτοια καμπύλη για κάποιον άπορο. Το πιο πιθανό είναι  
 να κατασκευάσουμε μια καμπύλη με αρνητική καμπυλότητα που ξεκινά με κλίση 1  
 και, σε μεγάλες ποσότητες, καταλήγει σε κλίση μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί  
 να ξεχωρίσει μεταξύ της επιλογής να απολαύσει ένα καφέ με 1 ευρώ από το να τον  
 αγοράσει με 10 ευρώ. Δεν ξεχωρίζει όμως αποφασιστικά μεταξύ της επιλογής να  
 ευεργετηθεί με 1 εκατομμύριο ευρώ ή με 10 εκατομμύρια. Μπορεί να ισχυρίζεται,  
 όντας άπορος, "δώστε μου 1 ή 10 εκατομμύρια ευρώ και δεν με ενδιαφέρει τι από τα  
 δύο θα επιλέξετε να μου δώσετε".

Μία καμπύλη για κάποιον εύπορο με μηνιαίες απολαβές της τάξης του 1 εκατομμυ-  
 ρίου, το πιο πιθανό είναι να έχει θετική καμπυλότητα που ξεκινά με κλίση μηδενική  
 και, σε μεγάλες ποσότητες, καταλήγει με κλίση 1. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να  
 ξεχωρίσει μεταξύ της επιλογής του να αυξήσει την μηνιαία απολαβή του από 1  
 εκατομμύριο σε 10 εκατομμύρια. Δεν ξεχωρίζει όμως αποφασιστικά μεταξύ της α-  
 πόλαυσης ενός καφέ με 1 ευρώ ή της αγοράς του ίδιου καφέ με 10 ευρώ. Μπορεί να  
 ισχυρίζεται, όντας εύπορος, "φέρτε μου έναν καφέ και δεν με ενδιαφέρει αν θα τον  
 χρεωθώ με 1 ή 10 ευρώ".

Με τους χαρακτηρισμούς άπορος ή εύπορος, θα υποδηλώνω ότι η καμπύλη υποκειμε-  
 νικής αξίας του κατόχου χρημάτων έχει αρνητική ή θετική καμπυλότητα αντίστοιχα.  
 Γενικά, η υποκειμενική καμπύλη αξίας των χρημάτων θα αναμενόταν να έχει την  
 μορφή κάποιας τροποποιημένης συνάρτησης της αντιστρόφου της εφαπτομένης, όπου  
 στο εύρος ενδιαφέροντος του παίκτη θα είχε κλίση ίση με 1 και σε πολύ μεγαλύτερες  
 ή μικρότερες ποσότητες χρημάτων θα είχε κλίση μηδενική.

### 6.2 Ανταλλαγή ομοιογενών αγαθών

Πριν κάποια χρόνια, προσπάθησα, χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό της θεωρίας κα-  
 τηγοριών, γραμμικής άλγεβρας και ίσως τανυστικής ανάλυσης, να αναδιατυπώσω

τους ισχυρισμούς ενός φιλοσοφικο-οικονομικού βιβλίου, που προσπαθούσε να εξηγήσει την έννοια της εκμετάλλευσης. Τότε θεώρησα αξιωματικά δεδομένο ότι οι αποτιμήσεις του ίδιου αγαθού από διάφορους ανθρώπους δεν είναι απαραίτητα ίσες. Γρήγορα κατέληξα στο συμπέρασμα ότι πάντα υπάρχει αμοιβαία επωφελή ανταλλαγή όταν οι αποτιμήσεις των αγαθών που ανταλλάσσονται είναι διαφορετικές για κάθε συμβαλλόμενο μέρος. Αυτό το συμπέρασμα καθιστούσε μη καλά ορισμένες λοιπές έννοιες που χρησιμοποιούσε το βιβλίο, καθιστώντας το περισσότερο φιλοσοφικό παρά μαθηματικό, και για αυτό το λόγο έχασα το ενδιαφέρον μου και εγκατέλειψα την συνέχεια της προσπάθειάς μου.

**Το συμμαχικό παιγνίδι** και δη “η ανταλλαγή ομοιογενών αλόγων”<sup>5</sup> αποτέλεσε ευχάριστη έκπληξη και σημαντική συνέχεια του συμπεράσματος της ύπαρξης επωφελών ανταλλαγών λόγω της ύπαρξης διαφορετικών αποτιμήσεων. Γιατί όμως διατυπώνεται ρητά η προϋπόθεση της ομοιογένειας των αγαθών; Φαίνεται σωστό και προφανές ότι ο λόγος είναι για να μην υπάρχει διαφοροποίηση των εκάστοτε ιδιοκτητών, πωλητών ή αγοραστών, εκ του αγαθού που κατέχουν. Δύο αγοραστές όπου ο ένας αγοράζει αμάξι και ο άλλος πατατάκια, διαφοροποιούνται μεταξύ τους εκ του αγαθού που αγόρασαν και για αυτό ανεξαρτητοποιείται και η τιμή αγοράς του κάθε προϊόντος.

**Η ομογένεια** του αγαθού φαίνεται να καθιστά το μοντέλο του παιγνιδιού της ανταλλαγής καλά ορισμένο και το συμπέρασμα, ότι *στις βέλτιστες για όλους καταστάσεις ισορροπίας το αγαθό πωλείται σε ενιαία σταθερή τιμή, ασφαλές*. Όμως, η επίλυση του μοντέλου προϋποθέτει την ύπαρξη συναρτήσεων απολαβής που συσχετίζουν τις δύο μεταβλητές τους, το διακριτό ομογενές αγαθό και την ποσότητα χρήματος που ανταλλάσσεται. **Η λύση λοιπόν προϋποθέτει** επίσης, εκτός του αγαθού, την αυτονόητη, και για αυτό τον λόγο αφανή, **ομογένεια του χρήματος** μεταξύ πωλητών και αγοραστών.

**Το χρήμα**, όπως το γνωρίζαμε σε χαρτί, σε σχέση τουλάχιστον με την ανταλλακτική του αξία, αποτελούσε ένα από τα πιο άχρηστα φυσικά πράγματα. Νόημα ύπαρξης αποκτούσε μόνον όταν υπήρχαν σχέσεις συναλλαγής αποκλειστικά μεταξύ ανθρώπων<sup>6</sup>. Τελούσε δε υπό την εγγύηση συνέχισης της ύπαρξης του κράτους ή της επικράτειας που το εξέδωσε και την δυνατότητα πρόσβασης σε αυτό, που, εν τέλει, αποτελούσε εγγύηση ότι πάντα θα υπάρχει ένα σύνολο ανθρώπων πρόθυμων να το χρησιμοποιήσουν ως μέσο συναλλαγής.

Ως υποθετικό παράδειγμα χρήματος μηδενικής αξίας, ας υποθέσουμε έναν άνθρωπο αποκλεισμένο στον αρκτικό πόλο με ένα εκατομμύριο χάρτινα πεντάευρα. Αυτός θα μπορεί να κάψει μερικά για να ζεσταθεί προς στιγμή, ώστε να γράψει στα υπόλοιπα τις τελευταίες σκέψεις ή επιθυμίες του. Εκεί σταματά η αξία του μεγάλου χρηματικού ποσού. Δεν μπορεί να τα φάει, ούτε να τα πει, ούτε να πληρώσει κάποια πολιτική αρκούδα να τον αφήσει ήσυχο, διότι, όπως προείπαμε, τα χρήματά του αφορούν μόνον τον ίδιο και τις σχέσεις του με άλλους ανθρώπους. Ούτε έχει πρόσβαση σε άλλον άνθρωπο ώστε να ανταλλάξει χρήματα για όπλο, τρόφιμα ή νερό ή να τον πείσει ώστε να θέσει αυτοβούλως τον εαυτό του υπό την δούλεψή του. Ακόμα όμως και αν εμφανιζόταν κάποιος, θα έπρεπε για οποιαδήποτε σχέση συναλλαγής με χρήματα, αυτός ο άλλος να πιστεύει θα μπορεί με την σειρά του να τα ανταλλάξει, πιστεύοντας ότι η χώρα των χρημάτων υπάρχει και μπορεί είτε ο ίδιος είτε κάποιος άλλος μελλοντικά να έχει πρόσβαση σε αυτή. Αν ο αποκλεισμένος, αντί για τυπωμένα χρήματα, τα κατείχε άυλα σε λογαριασμό τραπεζής, τότε θα βρισκόταν σε χειρότερη κατάσταση αφού δεν θα μπορούσε ούτε να ζεσταθεί προς στιγμή ούτε

<sup>5</sup>Κεφάλαιο 8.4 στη σελίδα 368 του βιβλίου

<sup>6</sup>Αφορούσε δηλαδή σύνολα ανθρώπων με πληθικό αριθμό μεγαλύτερο του 1.

να γράψει τις τελευταίες σκέψεις του.

**Η ονομαστική τιμή** από μόνη της είναι άνευ νοήματος. Πρέπει οπωσδήποτε να συνοδεύεται από το κράτος που αφορά. Ως χρήμα πάντα εννοούνταν το ζεύγος (ονομαστική τιμή, κράτος) μιας ονομαστικής τιμής με το κράτος που αφορούσε. Για να έχει δε αξία έπρεπε να συνοδεύεται από εγγύηση συνέχισης της ύπαρξης του κράτους και της δυνατότητας πρόσβασης σε υπηκόους του.

**Το ζεύγος χρήματος** σήμερα, από (ονομαστική τιμή, κράτος), τείνει να αντικατασταθεί με το ζεύγος (ονομαστική τιμή, τράπεζα) με αντίστοιχη αντικατάσταση σε εγγύηση συνέχισης της ύπαρξης της τράπεζας και της δυνατότητας πρόσβασης σε πελάτες της<sup>7</sup>. Άλλο ζεύγος χρήματος μπορεί να είναι (ονομαστική τιμή, εταιρία) με αντίστοιχη αντικατάσταση σε εγγύηση συνέχισης της ύπαρξης της εταιρίας και της δυνατότητας πρόσβασης σε ανθρώπους που είναι διατεθειμένοι να συναλλασθούν με μετοχές της εταιρίας.

**Οι αποτιμήσεις** του ανταλλασσόμενου αγαθού κατά την δημιουργία του μοντέλου του παιγνιδιού, εκτός από την ομογένεια των αγαθών υπονοεί, λόγω της χρήσης μόνον ονομαστικής τιμής, και την ομογένεια των παικτών (πωλητών και αγοραστών) ως προς την χρήση του δεύτερου συστατικού του ζεύγους του χρήματος που χρησιμοποιούν. Εάν επιλύουμε πρακτικό πρόβλημα μεταξύ παικτών που χρησιμοποιούν διαφορετικά δεύτερα συστατικά ζευγών χρήματος, αλλά επιθυμούν να συναλλασθούν μεταξύ τους, οφείλουμε να ορίσουμε ισοτιμίες ονομαστικών τιμών μεταξύ κρατών (νομισμάτων), τραπεζών<sup>8</sup>, μετοχών ή οποιονδήποτε τέτοιων κατηγοριών μεταξύ τους.

**Η ομογένεια στην χρήση** του αγαθού δεν είναι απαραίτητη στον καλό ορισμό και την επίλυση του παιγνιδιού ανταλλαγής. Η ομογένεια χρήματος και αγαθών είναι ικανά να μας δώσουν τις βέλτιστες σταθερές καταστάσεις και το εύρος εντός του οποίου θα βρίσκεται η ενιαία τιμή πώλησης. Όμως, οι λύσεις ενός παιγνιδιού συνδέονται με τις διαφορετικές αποτιμήσεις των παικτών και αυτές με τα διαφορετικά χαρακτηριστικά τους. Αν θέλουμε, εκ των λύσεων, να εκτιμήσουμε τα χαρακτηριστικά των παικτών, οφείλουμε να απαιτήσουμε και ομογένεια στην σκοπούμενη χρήση του ομογενούς αγαθού. Αλλιώς, όποια μας εκτίμηση για τα χαρακτηριστικά μιας ομάδας παικτών μπορεί να είναι εσφαλμένη επειδή η λύση αλλοιώθηκε από τις τυχόν διαφορετικές χρήσεις του αγαθού εκ μέρους των παικτών που τα αγόρασαν.

Ας δούμε μια παραλλαγή του μοντέλου 8.4.1 της σελίδας 369 του βιβλίου. (Θα δανειστώ γνωστή ρήση που χρησιμοποιεί μιά εκπομπή του τρίτου προγράμματος) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν  $k$  πωλητές, που έκαστος κληρονόμησε, και ως εκ τούτου για τον ίδιο δεν έχει κάποια ιδιαίτερη αξία, ένα ομογενές, ίδιο χάλκινο πνευστό. Έστω ότι υπάρχουν  $k$  αγοραστές, μέλη ορχήστρας πνευστών, που αποτιμούν το χάλκινο πνευστό σε τιμές  $100 \leq b_i \leq 200$  και ένας ακόμα αγοραστής, που θα εκτιμούσε το μουσικό όργανο στα 201, αν ασχολείτο με την μουσική, αλλά, άσχετος με

<sup>7</sup>Η ονομαστική τιμή, εκτός από την τράπεζα αναφέρεται και σε νόμισμα, όμως όταν όλοι οι παίκτες αναφέρονται στο ίδιο νόμισμα, η αναφορά του νομίσματος δεν παρέχει καμία πληροφορία και παραλείπεται. Μπορεί κάποιος να επιλέξει να έχει λογαριασμούς σε πολλές τράπεζες αλλά τα περισσότερα από αυτά να τα έχει σε μία από αυτές θεωρώντας υποκειμενικά ότι, λόγω της διαφοροποίησης των υπηρεσιών της, τα χρήματα σε αυτήν έχουν περισσότερη αξία.

<sup>8</sup>Ο καθορισμός ισοτιμίας μεταξύ τραπεζών επί του πρακτέου, θεωρώντας τις τράπεζες ισοδύναμες, δείχνει περιττός, αλλά από άποψη μαθηματικής πληρότητας είναι αναγκαίος. Γενικώς ο καθορισμός ισοτιμίας είναι αναγκαίος κάθε φορά που το δεύτερο συστατικό κάποιου ζεύγους χρήματος δίδει διαφορετική πληροφορία.



αυτήν, χρειάζεται απλώς μπρούτζο και, ως εκ τούτου, εκτιμά το χάλκινο πνευστό σε τιμή  $b_{k+1} = 10$ . Η επίλυση του παιγνιδιού προβλέπει ότι σε σταθερή βέλτιστη για όλους κατάσταση, τα μέλη της ορχήστρας είναι αυτά που θα αγοράσουν από ένα χάλκινο πνευστό στην ίδια τιμή  $10 \leq P^* \leq 100$ . Αν επαναληφθεί το παιγνίδι με μόνη διαφορά ο τελευταίος, όντως να αποτιμά το όργανο στα 201, τότε, στην σταθερή βέλτιστη κατάσταση, η ενιαία τιμή πώλησης των οργάνων θα είναι  $100 \leq P^* \leq 200$ . Η παρατήρηση των τελικών τιμών  $P^*$  των δύο περιπτώσεων διαφοροποιεί σαφώς τις δύο περιπτώσεις, διότι σαφώς η όποια τελική τιμή πώλησης, στην πρώτη περίπτωση, είναι μικρότερη των 100 και σαφώς είναι μεγαλύτερη των 100 στην δεύτερη περίπτωση. Κρίνοντας εκ των τελικών τιμών αγοράς, κινδυνεύουμε να θεωρήσουμε τους αγοραστές της δεύτερης ομάδας παικτών πιο εύπορους από αυτούς της πρώτης, ενώ η αλήθεια είναι ότι κάποιος από τους αγοραστές της πρώτης ομάδας δεν ξέρει να παίζει χάλκινα πνευστά.

Το πετρέλαιο θέρμανσης δεν γνωρίζω να διαθέτει άλλη χρήση, η θερμική άνεση που αποκτάται μέσω καύσης πετρελαίου είναι ένα ομογενές στην χρήση του αγαθό, και έτσι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συγκριθούν χαρακτηριστικά των παικτών.

**Η αξία ενός αγαθού και η αποτίμησή του** ως έννοιες, πιθανώς ταυτόσημες στην καθομιλουμένη, έχουν διαφορετική σημασία κατά την επίλυση παιγνιδιών ανταλλαγής. Η αξία αγαθού προσιδιάζει στην τελική τιμή πώλησης  $P^*$  του αγαθού σε κάποια, βέλτιστη για όλους, σταθερή κατάσταση. Με την ερώτηση "πόσο κάνει η μπριζόλα" εννοούμε σε ποια τιμή πωλείται για να την αγοράσουμε. Αντιθέτως με την συνήθη σημασία της αξίας ενός αγαθού, επειδή συνήθως αθροίζουμε την τιμή αγοράς των επιμέρους τμημάτων του, όταν λέμε ότι αποτιμάμε την αξία του, παραγνωρίζουμε ότι αποτιμάμε όντως την αξία του, όχι το ίδιο το αγαθό, και δεν αντιλαμβανόμαστε, σε πρώτη ανάγνωση, την τεράστια αρνητική σημασία που έχει η αποτίμηση ενός αγαθού στα παιγνίδια ανταλλαγής. **Η αποτίμηση ενός αγαθού από έναν παίκτη, εξαιρουμένων των επιζήμιων τιμών, είναι η χειρότερη δυνατή τιμή με την οποία μπορεί να το αγοράσει ή να το πουλήσει** και, για αυτό, η αγορά ή η πώληση στην τιμή αποτίμησης τον αφήνει παντελώς αδιάφορο. Ας δούμε την διαφορά των εννοιών με ένα τελευταίο παράδειγμα, παραλλαγή της άσκησης 8.13 στη σελίδα 375 του βιβλίου.

Ένας εστιατορας πουλά μια γκουρμέ μπριζόλα. Αν δεν την πουλήσει θα αναγκαστεί να την πετάξει, οπότε την αποτιμά με μηδενική αξία  $\sigma_1 = 0$ . Δύο αγοραστές μπορούν να την αγοράσουν επί πιστώσει. Το να συνεχίσουν την συνήθη διαβίωση τους και να μην αγοράσουν την μπριζόλα, τους είναι το ίδιο με το να την αγοράσουν αλλά να μην έχουν να φάνε τις επόμενες δύο ημέρες. Οι ημερήσιες απολαβές τους είναι ίσες με το ημερήσιο κόστος διατροφής τους, 3ευρώ/ημέρα για τον πιο ευκατάστατο και 1ευρώ/ημέρα για τον πιο φτωχό. Με αυτά τα δεδομένα αποτιμούν την μπριζόλα ο καθένας με αξία ίση με το κόστος διατροφής τριημέρου. Οπότε η αποτίμησή της από τον ευκατάστατο είναι ίση με  $b_1 = 9$  και από τον φτωχό ίση με  $b_2 = 3$ . Σε οποιαδήποτε βέλτιστη για όλους σταθερή κατάσταση, η αξία της μπριζόλας ή η τιμή πώλησής της θα ισούται με  $3 \leq P^* \leq 9$ . Η τιμή  $P^* = 3$ , που ανήκει στο εύρος των βέλτιστων επιλογών, είναι η τιμή που, έστω ως χειρότερη και αδιάφορη, θα μπορούσε να προσφέρει ο φτωχός. Για να έχουμε όμως σταθερότητα, δεν πρέπει να φάει την μπριζόλα ο φτωχός, γιατί πάντα ο πιο ευκατάστατος μπορεί να προσφέρει κάτι παραπάνω. Την μπριζόλα, ακόμα και στην τιμή που θα μπορούσε να προσφέρει ο φτωχός, πρέπει να την φάει ο ευκατάστατος, έτσι ώστε ο φτωχός να έχει την ορθή πεποίθηση ότι δεν υπάρχει επιλογή που να βελτιώνει την θέση του. Με άλλα λόγια, ο φτωχός δεν ανήκει στους αγοραστές των σταθερών, βέλτιστων για όλους, καταστάσεων. Κάθε τιμή  $P^*$  είναι, κατά πολύ ή λίγο, ευχάριστη για τον ευκατάστατο, που ανήκει στους αγοραστές της σταθερής κατάστασης, με εξαίρεση την χειρότερη για αυτόν τιμή  $P^* = 9$ , που τον αφήνει αδιάφορο.

Μπορούμε να πούμε ότι οι μη αγοραστές και οι μη πωλητές δεν συμμετέχουν στην

ευχαρίστηση της αγοραπωλησίας. Η αξία του αγαθού είναι η ευχάριστη τιμή πώλησης, για όσους συμμετέχουν σε αγοραπωλησίες. Η αποτίμηση του αγαθού, από τους ίδιους, είναι οι χειρότερη δυνατή κατάσταση για αυτούς.

**Η επιθυμία για αγαθά και επιβίωση**, είναι το τελευταίο που θα εξετάσουμε, ώστε να απομονώσουμε την σημασία της θερμικής άνεσης ως αγαθού. Με την αγοραπωλησία ομογενούς αγαθού, που είναι ομογενές και στην χρήση του, και με την ομογένεια των ονομαστικών τιμών ζευγών χρήματος που χρησιμοποιούνται για την αποτίμησή του, οι διαφοροποιήσεις των αποτιμήσεων των υποψήφιων αγοραστών εξαρτώνται από το κατά πόσο πολύ επιθυμούν το αγαθό και αν μπορούν να το αγοράσουν. Αν κάποιος επιθυμούν περισσότερο ένα αγαθό, μπορεί να είναι διατεθειμένος να πληρώσουν περισσότερα για να το αποκτήσουν. Μπορούμε όμως να δεχτούμε ότι, με ό,τι έχει να κάνει με την επιβίωση, όλοι έχουν την ίδια επιθυμία να επιβιώσουν. Προς ισχυροποίηση, αποκλείουμε, από τα όποια σύνολα των αγοραστών, όσους έχουν αυτοκτονικές τάσεις. Τότε, όταν το προς πώληση αγαθό, που είναι ομογενές, ως αντικείμενο και ως χρήση, αφορά στην επιβίωση, μπορούμε να δεχτούμε ότι όλοι το επιθυμούν στον ίδιο βαθμό. Έτσι, τα δεδομένα του παιγνιδιού ομογενοποιούνται και ως προς την επιθυμία για το αγαθό και έτσι, *η αποτίμηση των αγοραστών μπορεί να θεωρηθεί αμφιμονοσήμαντη αύξουσα συνάρτηση με μεταβλητή μόνον την αγοραστική δύναμη ή ευμάρεια τους.*

**Η εκτίμηση των ιδίων χρημάτων** από τους παίκτες ενυπάρχει στις αποτιμήσεις των παικτών.

Σε παρενθετική σημείωση στη σελίδα 370 του βιβλίου αναφέρεται ότι ο μη συνυπολογισμός των αρχικών χρημάτων δεν σημαίνει ότι οι παίκτες δεν εκτιμούν τα χρήματα που είχαν αρχικά. Από άποψη εύρεσης των ισορροπιών, η καταγραφή των αρχικών χρημάτων  $m_i$ , σαν σταθερές στις συναρτήσεις απολαβών, υπάρχει σε κάθε επιλογή του παίκτη και έτσι τα αποτελέσματα της σύγκρισης μεταξύ των επιλογών του δεν επηρεάζονται. Άρα δεν επηρεάζονται ούτε οι ισορροπίες του παιγνιδιού. Έτσι, ο αποδεικτικός ισχυρισμός του βιβλίου, ως προς το αν οι παίκτες εκτιμούν τα χρήματά τους, είναι δεν είναι ισχυρός. Για να ισχύει η απόδειξη θα έπρεπε, αν ο συνυπολογισμός των αρχικών χρημάτων στις συναρτήσεις απολαβών ήταν ικανός για να συμπεράνουμε ότι οι παίκτες εκτιμούν τα χρήματά τους τότε το ότι οι παίκτες εκτιμούν τα χρήματά τους θα έπρεπε να καθιστά αναγκαίο τα αρχικά χρήματα να συνυπολογίζονται στις απολαβές. Λόγω τις απαλοιφής τους όμως, βλέπουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει, αφού ο συνυπολογισμός των αρχικών χρημάτων δεν είναι αναγκαίος.

Η απολαβή ενός παίκτη στο παιγνίδι αγοραπωλησίας ενός αγαθού είναι στην γενικότητά της μία συνάρτηση δύο μεταβλητών (της ποσότητας αγαθών και της ποσότητας χρημάτων) με τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Έστω η  $f(a, r)$ , όπου  $a$  η ποσότητα αγαθών και  $r$  η ποσότητα χρημάτων. Η, ενός συγκεκριμένου αγοραστή, αποτίμηση  $b$ , μιας ( $a = 1$ ) μονάδας αγαθού, είναι εξ ορισμού εκείνη η ποσότητα χρημάτων που μηδενίζει την απολαβή του. Συνεπώς ισχύει  $f(1, b) = 0$ . Επειδή η σειρά των μεταβλητών δεν έχει σημασία για τον ορισμό της συνάρτησης, όταν ισχύει η προηγούμενη σχέση λέμε ισοδύναμα ή ότι για τον αγοραστή 1 μονάδα αγαθού αποτιμάται σε εισροή  $b$  χρημάτων ή ότι για τον αγοραστή η εισροή  $b$  χρημάτων αποτιμάται σε 1 μονάδα αγαθού. Η απολαβή αγοραστή  $i$ , ενός αλόγου, στο μοντέλο της σελίδας 370 του βιβλίου, ισούται με  $v_i + r$ . Συνεπώς, για την αποτίμηση του αλόγου από αυτόν, ισχύει  $v_i + b_i = 0 \Rightarrow b_i = -v_i$ . Η τιμή είναι αρνητική, άρα πρόκειται για εκροή χρημάτων, οπότε, για τον συγκεκριμένο αγοραστή, ένα άλογο αξίζει  $b$  χρήματα ή  $b$  χρήματα αξίζουν ένα άλογο.

Ας υποθέσουμε ότι φτωχός αγοραστής αποτιμά το ομογενές αγαθό, δηλαδή το ένα άλογο, με 1200 ευρώ και ένας πλούσιος με 1800 ευρώ, τότε, χρησιμοποιώντας την πα-  
ραπάνω ισοδύναμη διατύπωση, λέμε ότι τα 1200 ευρώ του φτωχού αξίζουν όσο και τα

1800ευρώ του πλούσιου που, και τα δύο, αξίζουν το ίδιο, ένα ομογενές άλογο. Οπότε είναι προφανές ότι η μονάδα χρήματος του φτωχού έχει μιάμιση φορά μεγαλύτερη αξία από αυτήν που έχει για τον πλούσιο αγοραστή ή, περιγραφικά σε ό,τι αφορά μικρές ποσότητες χρημάτων, ότι ο φτωχός εκτιμά περισσότερο τα χρήματά του από ότι ο πλούσιος εκτιμά τα δικά του.

Εκ των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η *εκτίμηση των ιδίων χρημάτων από τους παίκτες ενυπάρχει στις αποτιμήσεις τους*.

**Μερικές τελικές παρατηρήσεις** επί των παραπάνω εννοιών είναι απαραίτητες σε μια προσπάθεια αποφυγής κυκλικών, ατερμόνων συλλογισμών.

Λόγω της ισοδυναμίας των δύο μεταβλητών των συναρτήσεων απολαβής, από άποψη παιγνιδιού ή μαθηματικών, οι δύο πλευρές της συναλλαγής είναι εννοιολογικά ισοδύναμες. Ο ένας αγοράζει άλογα και ο άλλος αγοράζει χρήματα.

Με την έννοια "αγοραστής" καταργούμε εξωγενώς αυτήν την ισοδυναμία και εννοούμε τον αρχικό κάτοχο χρημάτων, που θέλει να αποκτήσει το αγαθό που δεν κατέχει. Μπορούμε να συγκρίνουμε ως προς το πόσο εκτιμούν τα χρήματά τους μόνον οι αγοραστές, λόγω της ομογένειας του αγαθού και στην χρήση του. Δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε πόσο εκτιμούν τα άλογά τους οι "αγοραστές" χρημάτων, διότι τα χρήματα ως αγαθό έχουν κάθε δυνατή χρήση, με την προϋπόθεση ότι μπορούν να την αποκτήσουν δια μελλοντικών συμμετοχών σε παιγνίδια ανταλλαγής κάθε αγαθού. Αυτή η ιδιότητα καθιστά τα χρήματα το πιο χρήσιμο αγαθό των ανθρώπων.

Η ομογενής χρήση του αγαθού και η σταθερότητα της τελικής κατάστασης αποκλείει την μεταπώληση των ιδίων αγαθών σε μελλοντικά παιγνίδια ανταλλαγής, διότι η σκοπούμενη μεταπώληση ενός αγαθού, ως άλλη χρήση, το διαφοροποιεί από όσα θεωρείται ότι έχουν ομογενή χρήση. Συνεπώς, οποιαδήποτε σύγκριση αποτιμήσεων αγοραστών, αν περιέχει τους εμπόρους μεταξύ των μελών της, αποκλείεται ως μέσο για την εξαγωγή συνεπών συμπερασμάτων.

Οι έννοιες "φτωχός" και "πλούσιος" είναι μη απαιτητές και πρόσθετες, για περιγραφικούς λόγους. Αυτό που παρατηρείται είναι απλώς οι χαμηλές ή υψηλές αποτιμήσεις. Οι δύο ως άνω χαρακτηρισμοί θέλουν να αποτυπώσουν την γνώμη των παρατηρητών των αποτιμήσεων, ως προς το τι άποψη έχουν, για το συγκεκριμένο παιγνίδι, οι αγοραστές για τον εαυτό τους. Π.χ σε μία υψηλή αποτίμηση πιθανόν είναι ο αγοραστής να κατέχει πολλά χρήματα. Πιθανόν όμως να είναι φτωχός, αλλά, για το συγκεκριμένο παιγνίδι ανταλλαγής, να εκτιμά ότι κάποιο δάνειο τον έχει καταστήσει πλούσιο.

### 6.3 Το πετρέλαιο θέρμανσης,

ως αγαθό προς ανταλλαγή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εκτίμηση της αγοραστικής ικανότητας μέσω της σύγκρισης των αποτιμήσεών του από τους αγοραστές, εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις του προηγούμενου εδαφίου. Δηλαδή:

- Είναι ομογενές. (Έχει την ίδια θερμική ικανότητα για όλους)
- Είναι ομογενές στη χρήση του. (Δεν θα μεταπωληθεί, αλλά θα χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά για ζεστασιά)
- Είναι το ίδιο επιθυμητό από κάθε μέλος του συνόλου των αγοραστών που επιθυμούμε να συγκρίνουμε. (Χρησιμοποιείται για επιβίωση και ουδείς των αγοραστών έχει αυτοκτονικές τάσεις.)
- Η ονομαστική τιμή των ζευγών του χρήματος συνοδεύεται από την ίδια ή ισοδύναμη κατηγορία χρημάτων.

## 7 Ερμηνεία ισορροπιών

Η ερμηνεία βασίζεται στη ύπαρξη και παρατήρηση δωματίων χωρίς θερμομόνωση, κατά συνέπεια στον διαφορετικό ρυθμό απώλειας θερμοκρασίας σε σχέση με τους λοιπούς ορόφους.

### 7.1 Κλίμακα αποτιμήσεων θερμικής άνεσης

Το κύριο δεδομένο του μοντέλου είναι ο λόγος μεταξύ των απωλειών θερμότητας ισόγειου και ορόφου. Τα σχετικά αποτελέσματα της εκτιμητικής μελέτης θέρμανσης πολλαπλασιάστηκαν έτσι ώστε οι σταθερές των απολαβών να προσιδιάζουν σε πραγματικά κόστη θέρμανσης. Επαναφέροντας την σχετικότητα στην ερμηνεία, θα θεωρήσουμε ως βασική μονάδα κόστους, στο μοντέλο του παιγνιδιού, το απαιτούμενο κόστος προς επίτευξη θερμικής άνεσης στον όροφο.

**Η βασική μονάδα κόστους** αντιστοιχεί στη σταθερά 2700 των απολαβών, όπως φαίνεται στον πίνακα της σελίδας 4. Οι τιμές αποτιμήσεων 1200 και 1800 αντιστοιχούν στα  $\frac{4}{9}$  και  $\frac{6}{9}$  της βασικής μονάδας κόστους.

**Φτώχεια** θα ονομάζεται η κατάσταση όπου το εύρος τιμών των αποτιμήσεων θερμικής άνεσης είναι μικρότερο της τιμής 1200 ( $y < 1200$ ). Σύμφωνα με τις ισορροπίες του εδαφίου 5, αποτιμήσεις σε αυτό το εύρος δεν επιτρέπουν σε καμία περίπτωση την επιλογή της θερμικής άνεσης. Άρα στην κατάσταση φτώχειας, όπως την ορίσαμε, οι παίκτες θα κινδυνεύουν από το κρύο του χειμώνα διότι δεν μπορούν να ανταποκριθούν στο κόστος θέρμανσης.

**Όριο φτώχειας** θα ονομάζεται η κατάσταση όπου το εύρος τιμών των αποτιμήσεων θερμικής άνεσης είναι μεταξύ των τιμών 1200 και 1800 ( $1200 \leq y < 1800$ ). Σε αυτό το εύρος, άλλοτε επιλέγεται η θερμική άνεση και άλλοτε όχι.

**Έλασσον όριο φτώχειας** θα ονομάζεται η τιμή  $y = 1200$ .

**Μείζον όριο φτώχειας** θα ονομάζεται η τιμή  $y = 1800$ .

**Εκτός ορίου φτώχειας** θα ονομάζεται το εύρος αποτιμήσεων μεγαλύτερο ή ίσο του 1800 ( $1800 \leq y$ ). Όταν οι αποτιμήσεις είναι σε αυτό το εύρος, όλοι οι παίκτες επιλέγουν πλήρη θέρμανση. Όμως, όταν η αποτίμηση είναι μικρότερη από την βασική μονάδα κόστους, επιλέγουν θερμική άνεση, προτιμώντας ζημιά από τον κίνδυνο του χειμωνιάτικου κρύου. Αυτό τους αποκλείει από τον χαρακτηρισμό τους ως ευπόρων. Ο χαρακτηρισμός "εκτός ορίων φτώχειας" περιλαμβάνει εύπορους και μη εύπορους παίκτες διότι η παρατήρηση της επιλογής για πλήρη θέρμανση δεν μπορεί να τους ξεχωρίσει.

### 7.2 Ερμηνεία παρατηρήσεων ισορροπιών

Εκτός των αποτιμήσεων των ορόφων ξεχωριστά, θα θεωρήσουμε και την περίπτωση όπου και οι δύο παίκτες ανήκουν σε ενιαία οικονομική τάξη, οπότε οι αποτιμήσεις τους θα είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με μια τιμή  $y$  που θα αναφέρεται ως **αποτίμηση της οικονομίας** ( $y_1 = y_2 = y$ ).

Παρατηρούμε τις ισορροπίες του εδαφίου 5:

**(Π,Π) Όλοι επιλέγουν πλήρη θέρμανση.** Το ισόγειο δεν είναι φτωχό και ο όροφος είναι εκτός ορίων φτώχειας. (Η οικονομία είναι εκτός ορίου φτώχειας ( $1800 \leq y$ ).)

**(Π,Ε) Μόνον οι όροφοι επιλέγουν πλήρη θέρμανση.** Το ισόγειο είναι φτωχό ή βρίσκεται ακριβώς στο έλασσον όριο της φτώχειας. Ο όροφος δεν είναι φτωχός. (Η οικονομία βρίσκεται ακριβώς στο έλασσον όριο της φτώχειας ( $y = 1200$ ).)

**(Ε,Π) Μόνον τα ισόγεια επιλέγουν πλήρη θέρμανση.** Το ισόγειο βρίσκεται εκτός ορίου φτώχειας. Ο όροφος στην καλύτερη των περιπτώσεων βρίσκεται ακριβώς επί του μείζονος ορίου φτώχειας. (Η οικονομία βρίσκεται ακριβώς επί του μείζονος ορίου φτώχειας ( $y = 1800$ )).

**(Ε,Ε) Κανείς δεν επιλέγει πλήρη θέρμανση.** Το ισόγειο στην καλύτερη των περιπτώσεων βρίσκεται ακριβώς στο μείζον όριο της φτώχειας. Ο όροφος είναι φτωχός ή, το πολύ, βρίσκεται ακριβώς στο έλασσον όριο της φτώχειας. (Η οικονομία είναι φτωχή ή βρίσκεται ακριβώς επί του ελάσσονος ορίου φτώχειας ( $y \leq 1200$ )).

**Ακριβώς οι μισοί παίκτες επιλέγουν πλήρη θέρμανση.** Όταν οι αποτιμήσεις βρίσκονται στο όριο φτώχειας (εξαιρουμένου του ελάσσονος ορίου της) δεν υπάρχει ισορροπία. Όταν ο ένας ανάβει θέρμανση, ο άλλος την σβήνει, και το ανάποδο. Όταν οι παίκτες επιλέγουν την απόφαση τους με λοταρία, οι επιλεχθείσες πιθανότητες των λοταριών του κάθε παίκτη οδηγεί στο να ανάβουν θέρμανση οι μισοί από αυτούς. Ερμηνεύοντας τις λοταρίες των παικτών ως επιλογή από πληθυσμό, τότε το άθροισμα των ορόφων και των ισογείων με πλήρη θέρμανση ισούται με τον αριθμό των κτιρίων.

**Αν ανάβουν πλέον των μισών ορόφων** τότε οι ιδιοκτήτες των ισογείων (ή η οικονομία) είναι πιο κοντά στο έλασσον όριο της φτώχειας.

**Αν ανάβουν λιγότεροι των μισών ορόφων** τότε οι ιδιοκτήτες των ισογείων (ή η οικονομία) είναι πιο κοντά στο μείζον όριο της φτώχειας.

**Περίληπτική ερμηνεία για τη οικονομία,** αν εξαιρεθούν το έλασσον και μείζον όριο φτώχειας.

- Αν ανάβουν όλοι, η οικονομία βρίσκεται εκτός ορίων φτώχειας.
- Αν δεν ανάβει κανείς, η οικονομία είναι φτωχή.
- Αν ανάβουν οι μισοί η οικονομία βρίσκεται εντός των ορίων φτώχειας. Οπότε
  - Αν ανάβουν πλέον των μισών ορόφων, η οικονομία βρίσκεται πιο κοντά στο έλασσον όριο φτώχειας.
  - Αν ανάβουν λιγότεροι των μισών ορόφων, η οικονομία βρίσκεται πιο κοντά στο μείζον όριο φτώχειας.

## Περιεχόμενα

|     |                             |   |
|-----|-----------------------------|---|
| 1   | Ενέργεια θέρμανσης          | 1 |
| 2   | Το κτίσμα                   | 2 |
| 2.1 | Επιφάνειες . . . . .        | 2 |
| 2.2 | Μόνωση δαπέδου . . . . .    | 2 |
| 3   | Απώλειες θερμότητας         | 3 |
| 4   | Απολαβές παικτών παιχνιδιού | 4 |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>5</b> | <b>Ισορροπίες παιγνιδιού θέρμανσης</b>          | <b>4</b>  |
| 5.1      | Καθαρές στρατηγικές . . . . .                   | 4         |
| 5.2      | Μεικτές στρατηγικές . . . . .                   | 5         |
| <b>6</b> | <b>Η αποτίμηση της θερμικής άνεσης</b>          | <b>6</b>  |
| 6.1      | Υποκειμενική αξία ανταλλακτικού μέσου . . . . . | 6         |
| 6.2      | Ανταλλαγή ομοιογενών αγαθών . . . . .           | 6         |
| 6.3      | Το πετρέλαιο θέρμανσης, . . . . .               | 11        |
| <b>7</b> | <b>Ερμηνεία ισορροπιών</b>                      | <b>12</b> |
| 7.1      | Κλίμακα αποτιμήσεων θερμικής άνεσης . . . . .   | 12        |
| 7.2      | Ερμηνεία παρατηρήσεων ισορροπιών . . . . .      | 12        |