EFC01

September 25, 2019

1 IA006 - Exercícios de Fixação de Conceitos

1.1 EFC1 - 2s2019

1.1.1 Parte 1 - Atividades teóricas

Exercício 1
Distribuição:

X/Y	Y=0	Y=1	Marg. X
X=0	1/6	3/8	13/24
X=1	1/8	1/3	11/24
Marg. Y	7/24	17/24	1

a) $P(X)$ e $P(Y)$

Resposta:

- $P(X = x) = \{\frac{13}{24}, \frac{11}{24}\}$
- $P(Y = y) = \{\frac{7}{24}, \frac{17}{24}\}$

b) $P(X = 0|Y = 0)$
$\frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1}{6} \times \frac{24}{7} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$
$\frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1}{8} \times \frac{24}{7} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

Resposta:

- $P(X = 0|Y = 0) = \frac{4}{7}$

c) $E[X]$ e $E[Y]$
$E[X] = \sum_k x_k P(x_k)$
$E[X] = 0 \times \frac{13}{24} + 1 \times \frac{11}{24}$
$E[Y] = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{17}{24}$

Resposta:

- $E[X] = \frac{11}{24}$
- $E[Y] = \frac{17}{24}$

d) São independentes? Por quê?
Resposta:
X e Y NÃO são independentes, pois a probabilidade do evento Y não afeta X, de acordo com a formulação:
$P(X, Y) = P(X)P(Y)$
Verificamos:
$P(X = x, Y = 0) = P(X = x)P(Y = 0)$
Por fim temos:
$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) => \frac{1}{6} = \frac{13}{24} \times \frac{7}{24} => \frac{1}{6} \neq \frac{91}{576}$
$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0) => \frac{1}{8} = \frac{11}{24} \times \frac{7}{24} => \frac{1}{8} \neq \frac{77}{576}$

Exercício 2
Distribuição:

X/Y	Y=0	Y=1	Marg. X
X=0	0	1/4	1/4
X=1	3/8	3/8	3/4
Marg. Y	3/8	5/8	1

a) $H(X), H(Y), H(X, Y)$
Sendo: $H(X) = -\sum_x p(x) log_2[p(x)]$
$H(X) = H(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
$H(X) = -((\frac{1}{4} \times log_2[\frac{1}{4}]) + (\frac{3}{4} \times log_2[\frac{3}{4}]))$
$H(X) = -((\frac{1}{4} \times -2) + (\frac{3}{4}(log_2[3] - 2)))$
$H(X) = -((-\frac{1}{2}) + (\frac{3}{4}(log_2[3] - 2)))$
$H(X) = 0.8112$

$H(Y) = H(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$
$H(Y) = -((\frac{3}{8} \times log_2[\frac{3}{8}]) + (\frac{5}{8} \times log_2[\frac{5}{8}]))$
$H(Y) = -((\frac{3}{8}(log_2(3) - 3)) + (\frac{5}{8}(log_2(5) - 3)))$
$H(Y) = 0.9544$

Calculando $H(X,Y)$
Sendo: $H(X,Y) = -\sum_x \sum_y p(x,y)log_2[p(x,y)]$
$H(X,Y) = -((\frac{1}{4}log_2(\frac{1}{4})) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{3}{8})) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{3}{8})))$
$H(X,Y) = 1.5612$

Resposta:
$H(X) = 0.8112$
$H(Y) = 0.9544$
$H(X,Y) = 1.5612$

b) $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$
$H(Y|X) = -\sum_x \sum_y p(x,y)log_2[p(y|x)]$
$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X)$
$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$

$P(Y=1|X=0) = \frac{P(X=0,Y=1)}{P(X)} => \frac{1}{4} \times \frac{4}{1} = 1$
$P(Y=0|X=1) = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X)} => \frac{3}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{2}$
$P(Y=1|X=1) = \frac{P(X=1,Y=1)}{P(X)} = \frac{1}{2}$

$H(Y|X) = -((\frac{1}{4}log_2(1)) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{1}{2})) + (\frac{3}{8}log_2(\frac{1}{2})))$
$H(Y|X) = -((\frac{3}{8} \times -1) + (\frac{3}{8} \times -1))$
$H(Y|X) = -((-\frac{3}{8}) + (-\frac{3}{8}))$
$H(Y|X) = 0.75$

$H(X|Y) = 1.5612 - 0.9544$
$H(X|Y) = 0.6068$

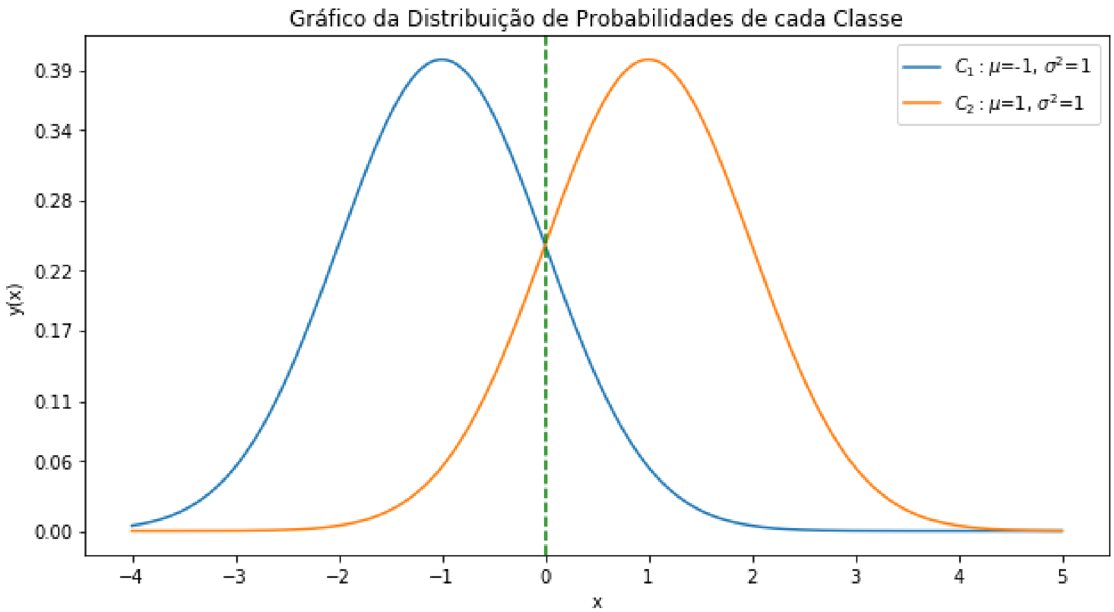
Resposta:
$H(Y|X) = 0.75$
$H(X|Y) = 0.6068$

c) $I(X,Y)$
Dado que,
$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$
temos portanto,
$I(X,Y) = 0.8112 - 0.6068$
$I(X,Y) = 0.2044$

Resposta:
$I(X,Y) = 0.2044$

Exercício 3 **a)**

$C_1 => \mu = -1, \sigma^2 = 1$
$C_2 => \mu = 1, \sigma^2 = 1$



Função de probabilidade de densidade da Distribuição Normal é dada por:
$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x-\mu)^2)}{2\sigma^2})$
Dado que MLE propõe:
$\theta_{MLE} = argmax_\theta log[p(x|\theta)]$
Sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$, portanto a MLE pode ser calculada usando:
$L(x|\mu, \sigma^2) = log[p(x|\mu, \sigma^2)]$
Usando a distribuição acima e a regra do estimado de máxima verossimilhança, calcula-se:
$L(x|\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x-\mu)^2$
Aplicando acima, sendo $n = 1$:
$L(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(x+1)^2$
$L(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

Dada as fórmulas acima podemos concluir portanto que quando $x = 0$, as equações terão valores iguais, definindo a fronteira no valor 0, sendo 0 indecisão (ambas as classes poderiam ser escolhidas).

Para demonstrar, podemos definir 2 (dois) valores para x, consideremos $x = (0, 1)$.

Assim temos:
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(1+1)^2$
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(2)^2$
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - 2$
$L(x = 1|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -2.9189$

$L(x = 1|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}(1-1)^2$
$L(x = 1|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(0)^2$

$L(x = 1|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -0.9189$

Definindo $x = 0$:
$L(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}(0 - 1)^2$
$L(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(-1)^2$
$L(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -1.4189$

$L(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}(0 - (-1))^2$
$L(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -0.9189 - \frac{1}{2}(1)^2$
$L(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -1.4189$

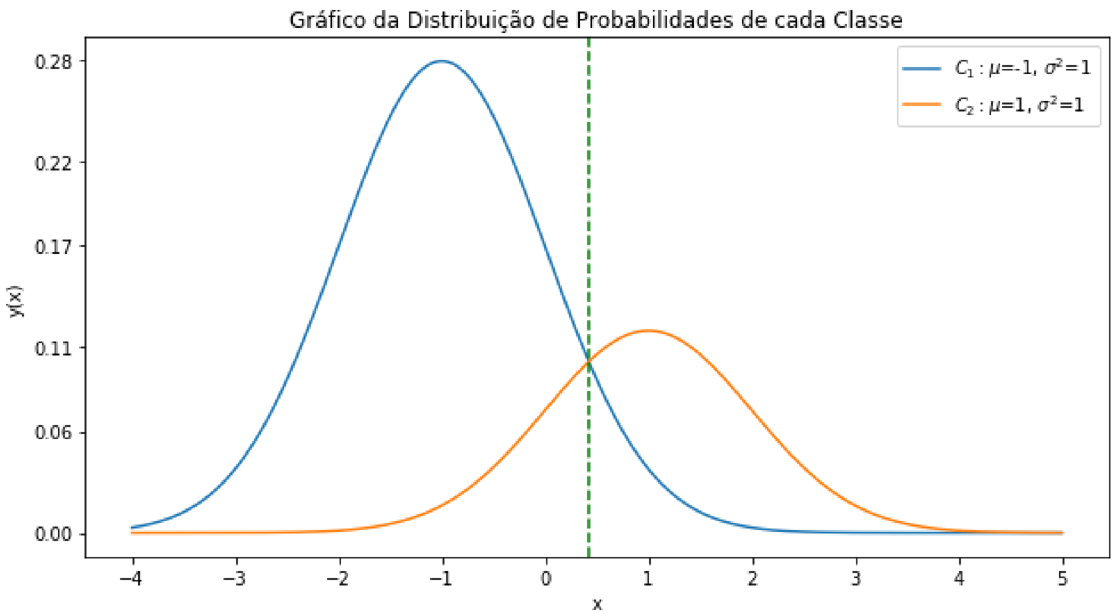
Resposta:
Dessa maneira, pode-se concluir que (conforma apresentado pelo gráfico também), amostras menores que 0 (zero) poderão ser classificados como sendo da classe C_1 e valores acima de 0 (zero) sendo da classe C_2, e 0 (zero) sendo a fronteira onde encontraremos indecisão.
$C_1 : x < 0$
$C_2 : x > 0$

b) $P(C_1) = 0,7, P(C_2) = 0,3$
Tendo a probabilidade a priori e utilizando o MAP cuja formulação apresenta:
$\theta_{MAP} = argmax_\theta log[p(x|\theta)] + log[p(\theta)]$
Sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$ e para o caso da classe C_1:
$f(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = log[p(x|\mu = -1, \sigma^2 = 1)] + log[p(\mu = -1, \sigma^2 = 1)]$
Podemos definir para $x = 0$:
$log[p(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1)] = -1.4189$
$p(\mu = -1, \sigma^2 = 1) = 0.7$
Dessa maneira temos:
$f(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -1.4189 + log[0.7]$
$f(x = 0|\mu = -1, \sigma^2 = 1) = -1.7755$
Para a classe C_2 temos:
$f(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -1.4189 + log[0.3]$
$f(x = 0|\mu = 1, \sigma^2 = 1) = -2.6228$

Resposta:
Portanto no caso a amostra de valor 0 (zero) já não representa mais a região de indecisão do novo modelo dado as probabilidades.
Caso as distribuições sejam uniformes com média equidistantes e variâncias iguais a média, como o exercício fornece, pode-se calcular o ponto de intersecção, indiferente da densidade de probabilidades tendo valores a posteriori usando:
$\frac{P(C_1 x)}{P(C_2 x)} = \frac{f1(x)}{f2(x)} \times \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$
$\frac{P(C_1 x)}{P(C_2 x)} = log\frac{f1(x)}{f2(x)} + log\frac{P(C_1)}{P(C_2)}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = log\frac{f1(x=-1)}{f2(x=1)} + log\frac{P(C_1)}{P(C_2)}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = log\frac{0.3989}{0.3989} + log\frac{0.7}{0.3}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = 0 + 0.8472$
Como temos 2 classes:

$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = \frac{0.8472}{2}$
$\frac{P(C_1 x=-1)}{P(C_2 x=1)} = 0.4236$
Neste caso a fronteira de decisão será igual a 0.4236.

Portanto:
$C_1 : x < 0.436$
$C_2 : x > 0.436$

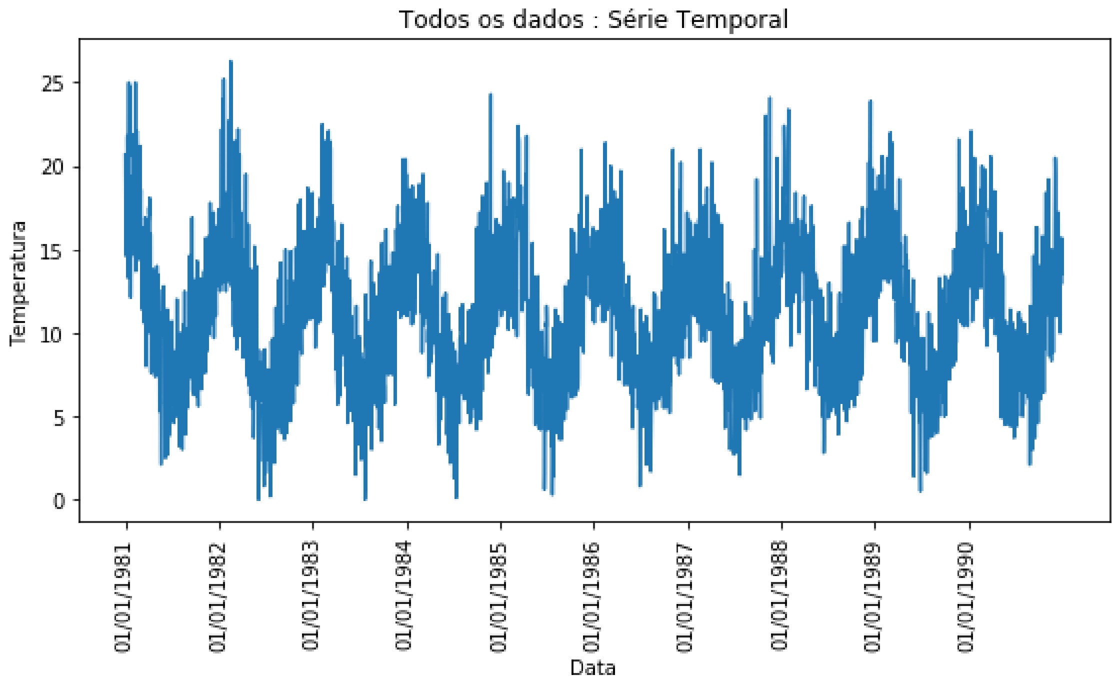


1.1.2 Parte 2 – Atividade computacional

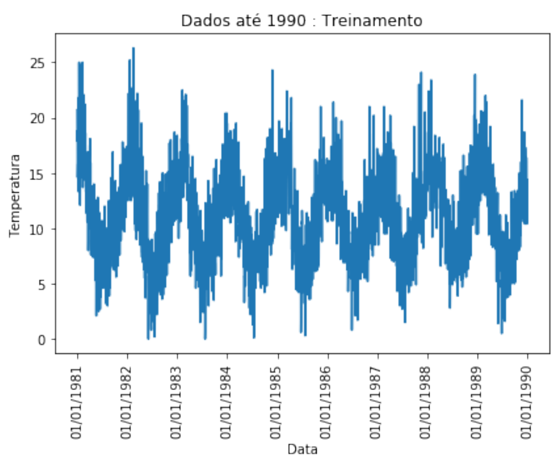
Importação dos dados do *Australian Bureau of Meteorology* e sua apresentação.
Os dados, são definidos como uma série temporal onde em determinada data é apresentada a temperatura. Abaixo é apresentado os primeiros 10 registros dos 3650 itens.

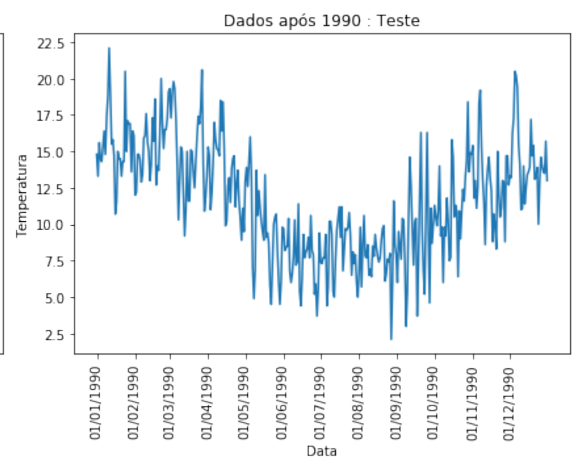
	Data	Temperature
0	01/01/1981	20.7
1	02/01/1981	17.9
2	03/01/1981	18.8
3	04/01/1981	14.6
4	05/01/1981	15.8
5	06/01/1981	15.8
6	07/01/1981	15.8
7	08/01/1981	17.4
8	09/01/1981	21.8

9 10/01/1981 20.0



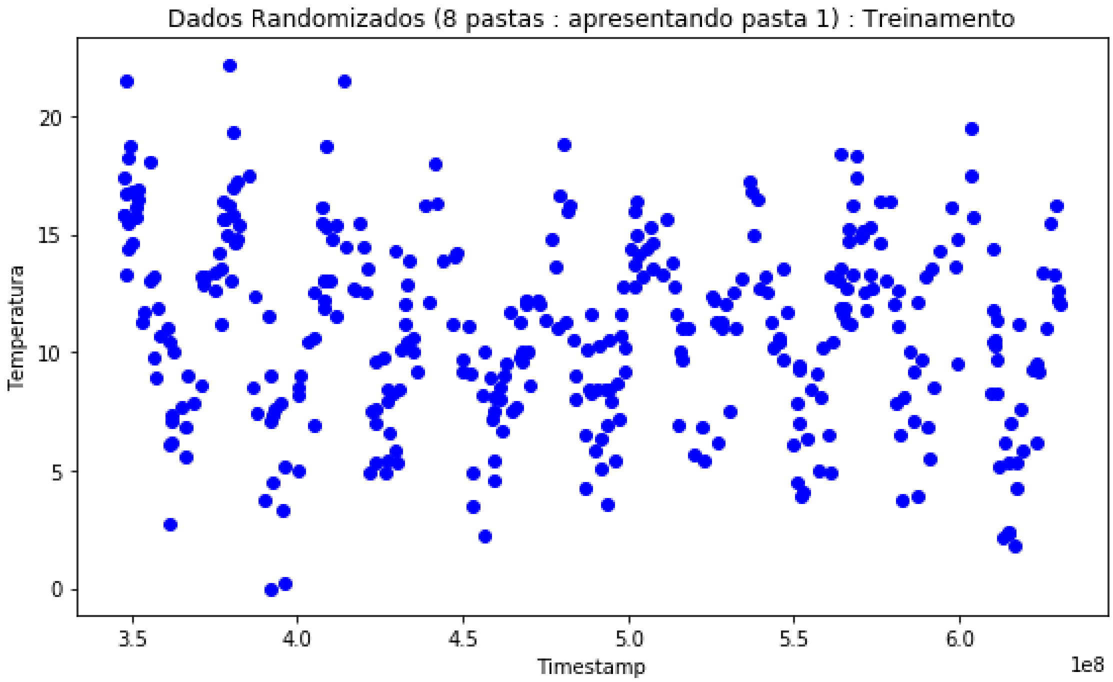
Divisão dos dados em treinamento e teste. Conforme solicitado os dados até 1990 serão usado para treinamento e os posteriores para teste.

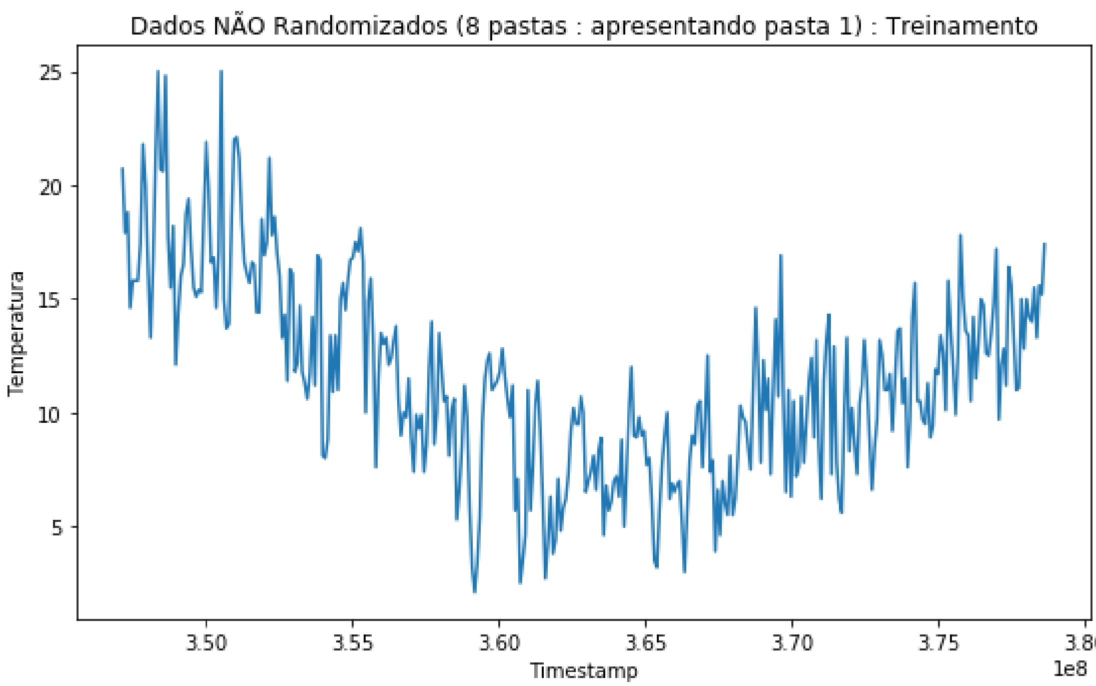




Utilização de K-Folds para dividir os dados de treinamento em pequenas "pastas" para verificar melhor configuração de treinamento dado os dados.

Conforme solicitado, os dados serão divididos em até 30 pastas, além disso, será testado a possibilidade de cada pasta conter dados randomicamente misturados de diferentes épocas para avaliar se o modelo se comporta de modo melhor ou pior em questão a temporalidade das informações.





Exercício 1 Calcular a melhor predição de acordo com os dados usando Quadrados Mínimos.

$w = \phi^T(\phi\phi^T)^{-1}y$

Usando K-Fold Cross Validation, o dataset foi dividido e executado para cada parâmetro de K. Sendo k a quantidade de atrasos.

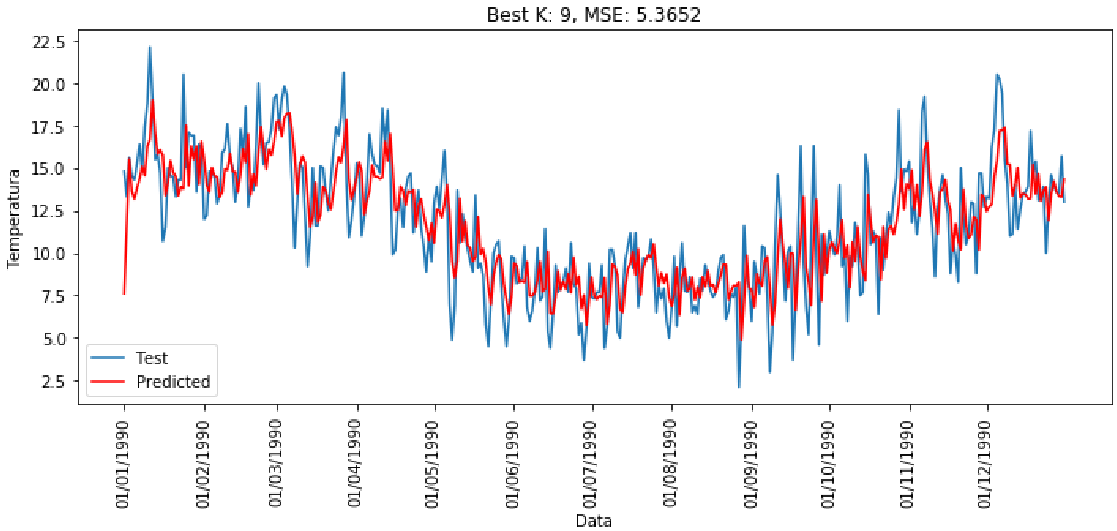
Conforme discutido em aula, os atrasos da série, aqueles cujas valores começam a posição inicial poderiam ser preenchidos com 0 (zero). Entretanto, tentanto evitar um desvio inicial muito grande, essa série atrasada inicial foi preenchidas com valores de uma distribuição uniforme variando do valor mínimo e máximo contido dentro do dataset, conforme abaixo.

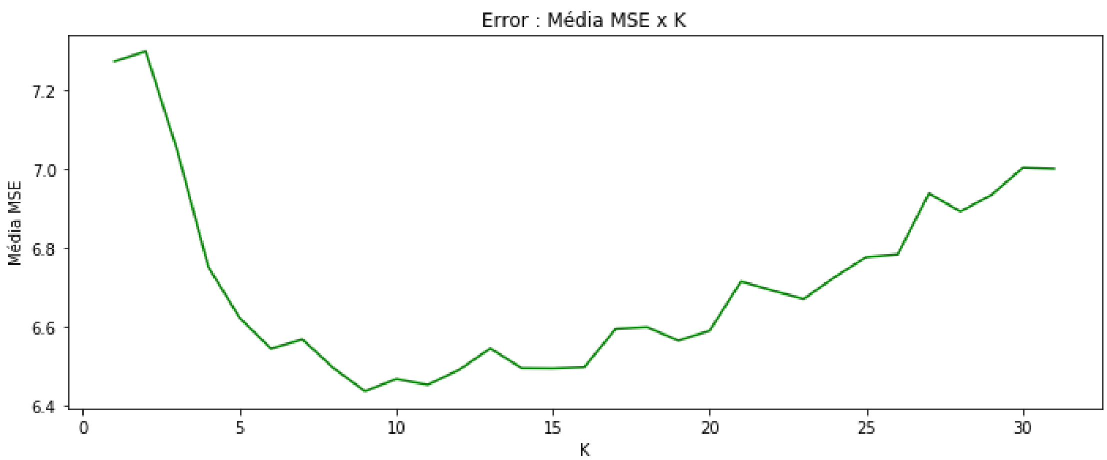
```
Valores:
--------------------
Min: 0.0
Max: 26.3
```

Dessa maneira foi executado um modelo de Regressão Linear nos dados, partindo de uma séria de K=1 até K=30 e usando K-Fold (variando até 20 folds).

O resultados obtidos são apresentados abaixo.

```
Melhores valores
--------------------
K     : 9
K-Fold: 6 / 6
```





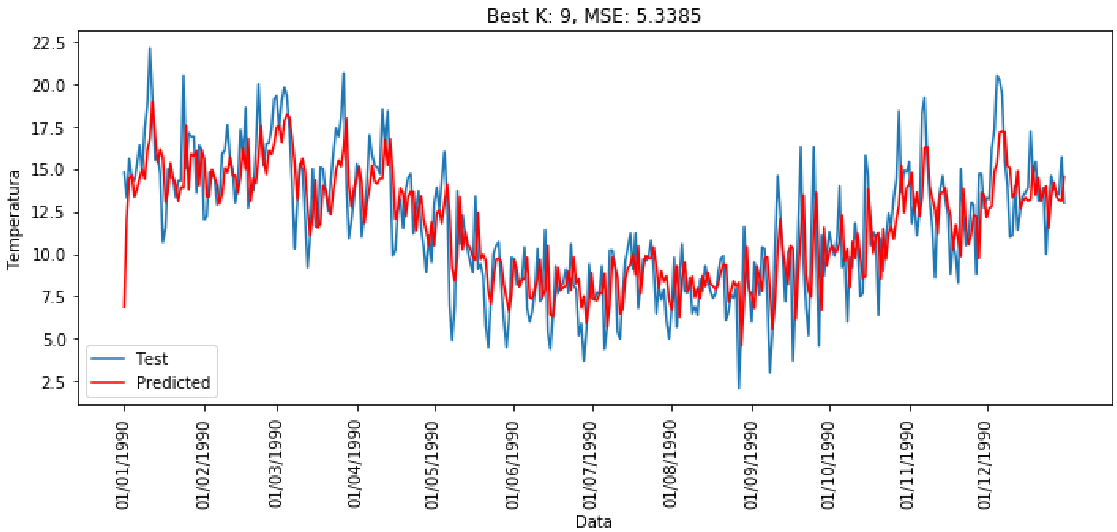
Os gráficos acima, apresentam os valores após filtro pós-processamento para escolher o melhor valor de K.

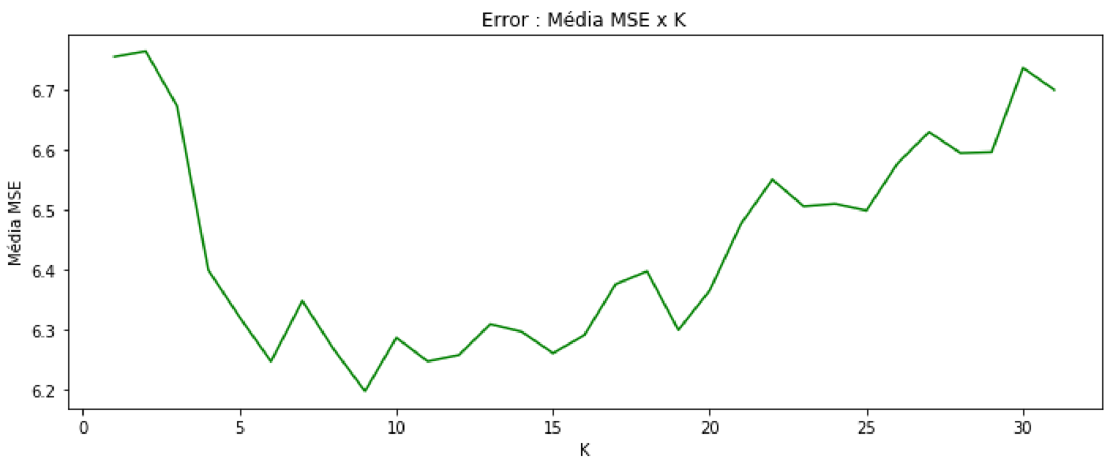
Abaixo, são apresentados os primeiros 10 itens da iteração total executada. O primeiro item não representa a melhor opção, pois para escolha da melhor opção foi calculada a média dos valores.

	K	K-Fold	Validation Fold	Média MSE
287	16	3	3	6.087971
268	15	3	3	6.115867
249	14	3	3	6.126024
157	9	6	6	6.127955
192	11	3	3	6.133455
363	20	3	3	6.135489
344	19	3	3	6.143807
290	16	6	6	6.145325
154	9	3	3	6.145530
195	11	6	6	6.147887

É possível também, usar de outra alternativa no método de K-Fold... no caso estamos embaralhando os dados antes de passar para o método e consequentemente o modelo. Por fim, chegamos aproximadamente no mesmo resultado, entretanto tomando um caminho de certa maneira diferente... Neste sentido, podemos encontrar os melhores valores W para o modelo em folds totalmente direfentes.

```
Melhores valores
--------------------
K     : 9
K-Fold: 5 / 1
```





Abaixo, são apresentados os primeiros 10 itens da iteração total executada. O primeiro item não representa a melhor opção, pois para escolha da melhor opção foi calculada a média dos valores.

	K	K-Fold	Validation Fold	Média MSE
286	16	2	1	5.750690
346	19	5	3	5.826303
266	15	1	1	5.835400
343	19	2	2	5.868697
457	25	2	2	5.877817
172	10	2	2	5.879661
513	28	1	1	5.891007
381	21	2	2	5.892352
156	9	5	1	5.905596
478	26	4	2	5.909008

Exercício 2 No exercício 2 usando o mesmo dataset usando anteriormente com a mesma questão de atraso, passaremos cada um dos itens por uma Rede Neural, usando como função de ativação a função hiperbólica.

Para validar a quantidade de unidades (ou neurônios) faremos a geração dessas unidades variando de 1 até 100 com seus pesos dentro de uma distribuição uniforme variando de -1 até 1.

Como valores para λ (regularização) será utilizado o seguinte range: 1e+1 até 1e-6, dando espaçamentos de 0.1. Para visualmente ficar mais legível (devido a grande variação), os dados (os valores de regularização) são apresentados em escala logarítimica.

Para a normalização dos dados, evitando a saturação da tangente hiperbólica, os dados serão normalizados entre os valores de mínimo e máximo dos dados (os quais já foram apresentados acima).

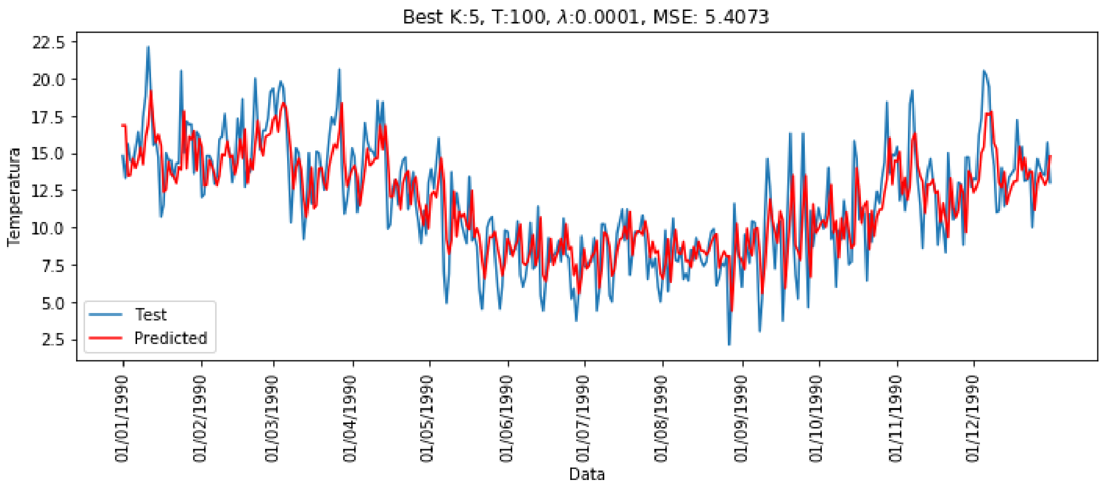
Valores de K, estão dentro da faixa de 5 até 20 e o K-Fold utilizado foi de 1 até 10 folds.

Valores de regularização testados: 8
[1.e+01 1.e+00 1.e-01 1.e-02 1.e-03 1.e-04 1.e-05 1.e-06]

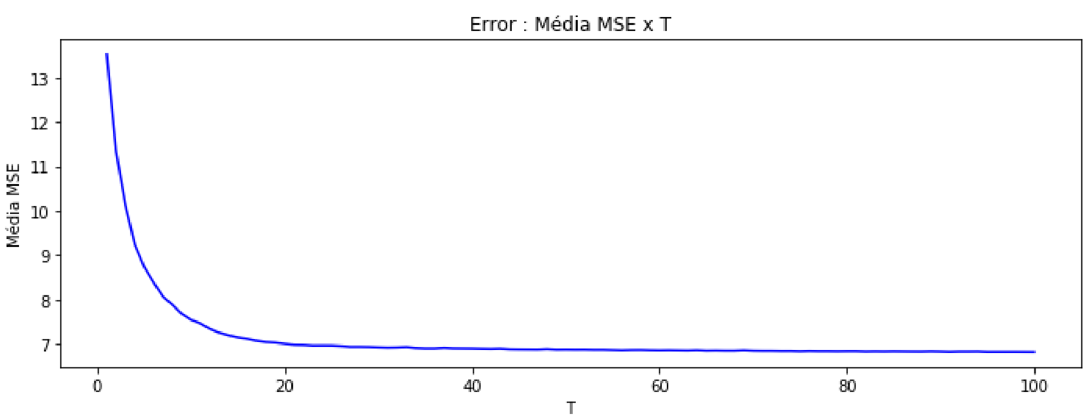
K: 5 <=> Time to run: 163.76 secs
K: 6 <=> Time to run: 168.24 secs
K: 7 <=> Time to run: 168.59 secs
K: 8 <=> Time to run: 167.77 secs
K: 9 <=> Time to run: 167.6 secs
K: 10 <=> Time to run: 167.5 secs
K: 11 <=> Time to run: 166.18 secs
K: 12 <=> Time to run: 167.34 secs
K: 13 <=> Time to run: 168.47 secs
K: 14 <=> Time to run: 190.73 secs
K: 15 <=> Time to run: 192.71 secs
K: 16 <=> Time to run: 182.79 secs
K: 17 <=> Time to run: 210.97 secs
K: 18 <=> Time to run: 187.06 secs
K: 19 <=> Time to run: 188.91 secs
K: 20 <=> Time to run: 174.61 secs

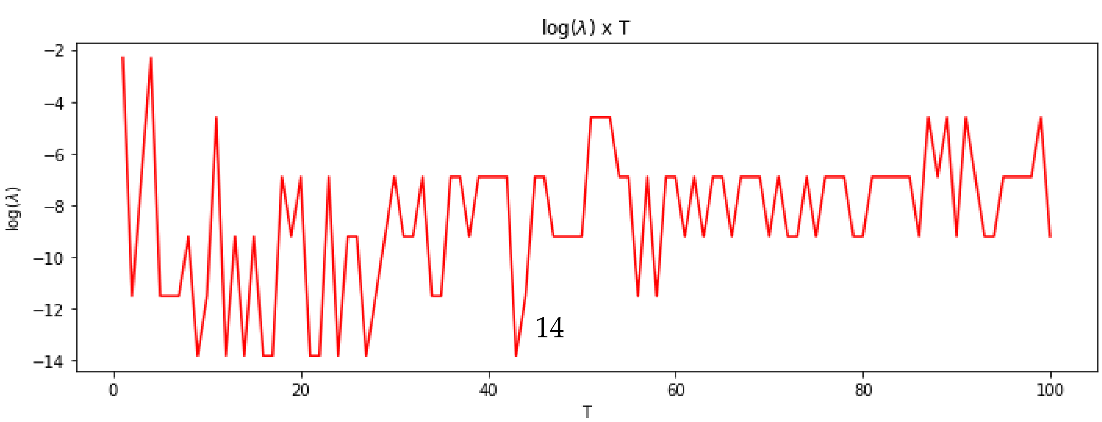
Melhores resultados:

K-Fold : 1 / 1
K : 5
T : 100
lambda : 0.0001
MSE da validação : 6.952768332192359


Best K:5, T:100, λ:0.0001, MSE: 5.4073
Temperatura
Test
Predicted
Data


Error : Média MSE x K
Média MSE
K


Error : Média MSE x T
Média MSE
T


log(λ) x T
log(λ)
T

Abaixo, são apresentados os primeiros 10 itens da iteração total executada. O primeiro item não representa a melhor opção, pois para escolha da melhor opção foi calculada a média dos valores.

	K	K-Fold	Validation Fold	T	Regularizacao	Média MSE
8483	14	3	2	101	0.00100	6.479141
9378	15	3	2	87	0.01000	6.488502
8459	14	3	2	77	0.00100	6.491464
8469	14	3	2	87	0.00010	6.492263
9374	15	3	2	83	0.00100	6.493626
9337	15	3	2	46	0.00100	6.495681
8440	14	3	2	58	0.00001	6.496261
8479	14	3	2	97	0.00100	6.497782
8468	14	3	2	86	0.00010	6.498737
9386	15	3	2	95	0.00100	6.500816

O resultado do modelo acima ficou bem próximo do executado usando apenas a Regressão Linear simples (sem uma camada intermediára entre as entradas e o Regressor). Neste sentido, pela natureza dos dados, mesmo usando modelos mais complexos podemos acabar por chegar no mesmo resultado.

Rodolfo De Nadai - 208911
Todo o código deste relatório esta disponível em: https://github.com/rdenadai/ia006c