

# NANOPHYSIQUE

## INTRODUCTION PHYSIQUE AUX NANOSCIENCES

### *2. PRINCIPALES METHODES DE MICROSCOPIE*

James LUTSKO

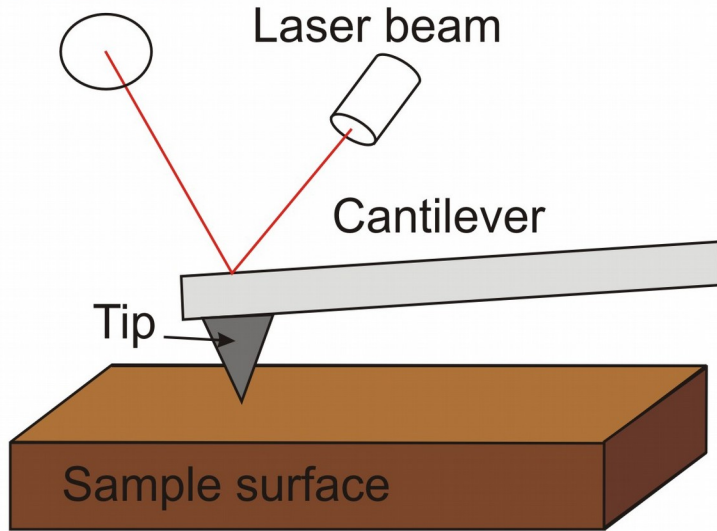
2020-2021

# *METHODES DE MICROSCOPIE*

- Paramètres Fondamentaux
- Microscopes Optiques
  - Principe
  - Améliorations: phase contrast, dark field, fluorescent, ...
  - Cristallographe aux Rayon X
- Microscope Electronique
  - à Transmission
  - à Balayage
- Microscope à emission champ
- Microscope à effet tunnel électronique
- **Microscope à force atomique**
- Optical Tweezere
- Light Sctattering

# Microscope à force atomique

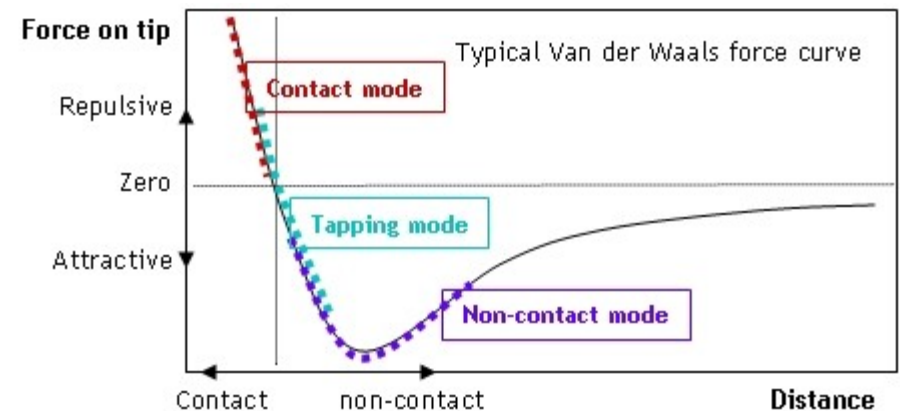
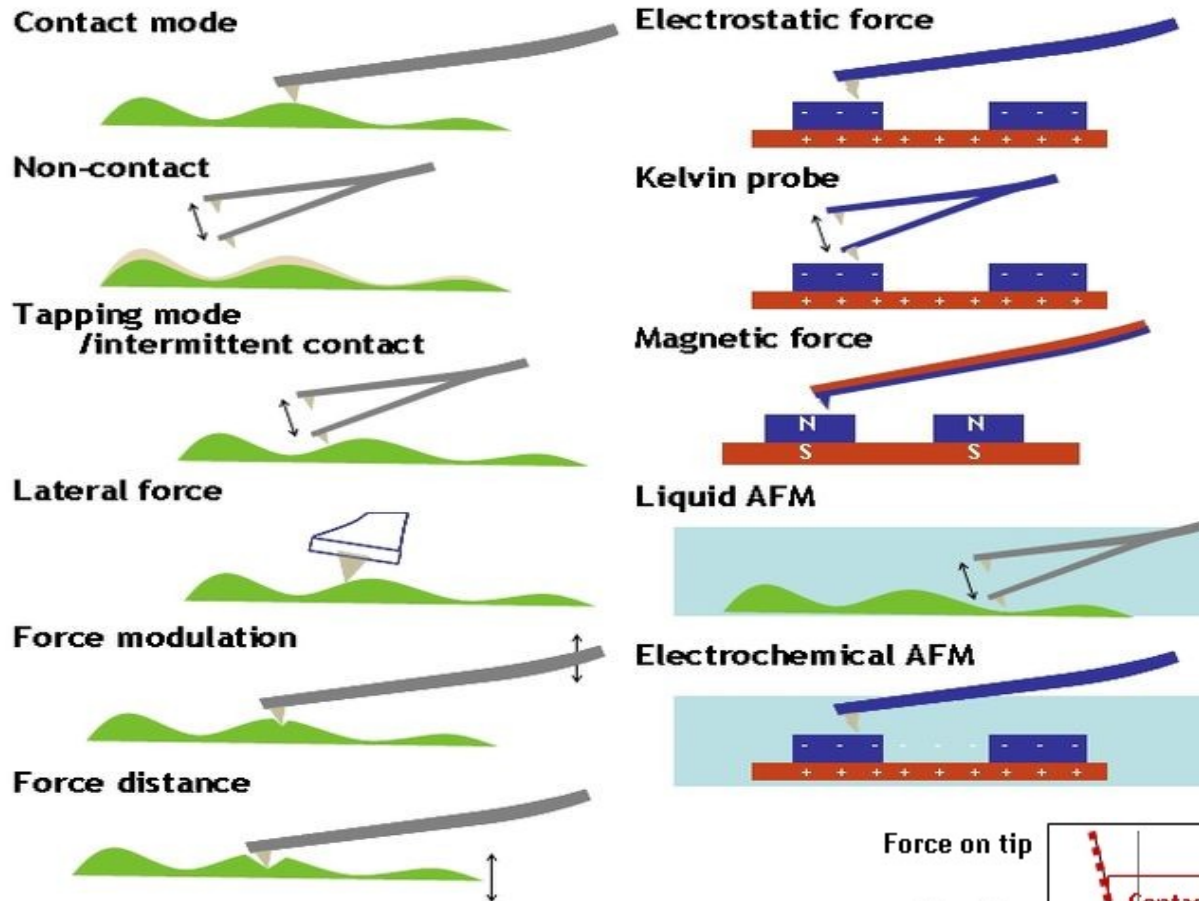
Photodetector



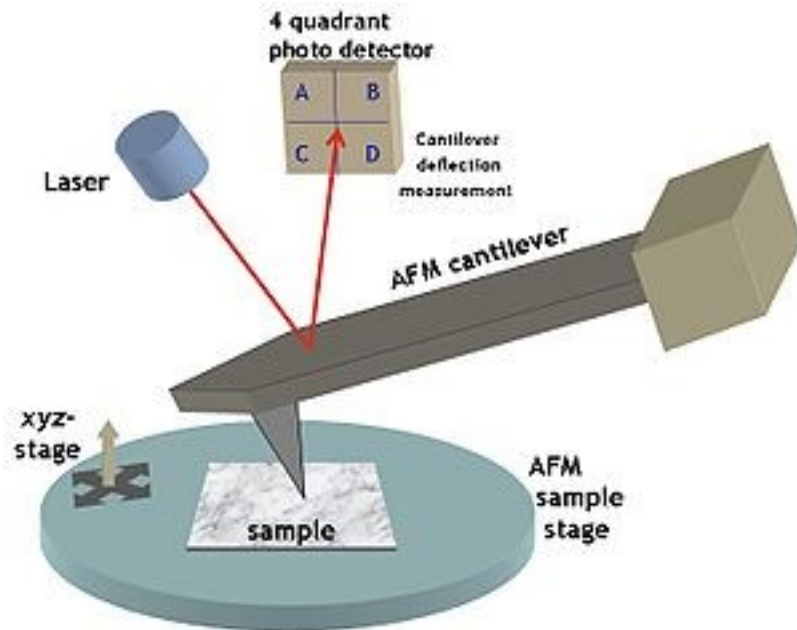
	<b>STM</b>	<b>AFM</b>
Lateral Resolution	0.5-1 nm	0.5 nm
Vertical Resolution	2D only	0.05nm
Field of view	1-2 X 1-2 mm	100 x 100 $\mu\text{m}$
Vertical range		100 $\mu\text{m}$
Preparation	Couche conductrice	----
Environment	vide	L'air, liquide

Kurganskaya, I.; Luttge, A.; Barron, A. The Application of VSI (Vertical Scanning Interferometry) to the Study of Crystal Surface Processes, Connexions Web site. <http://cnx.org/content/m22326/1.4/>, Jul 13, 2009.

# AFM: les modes de fonctionnement

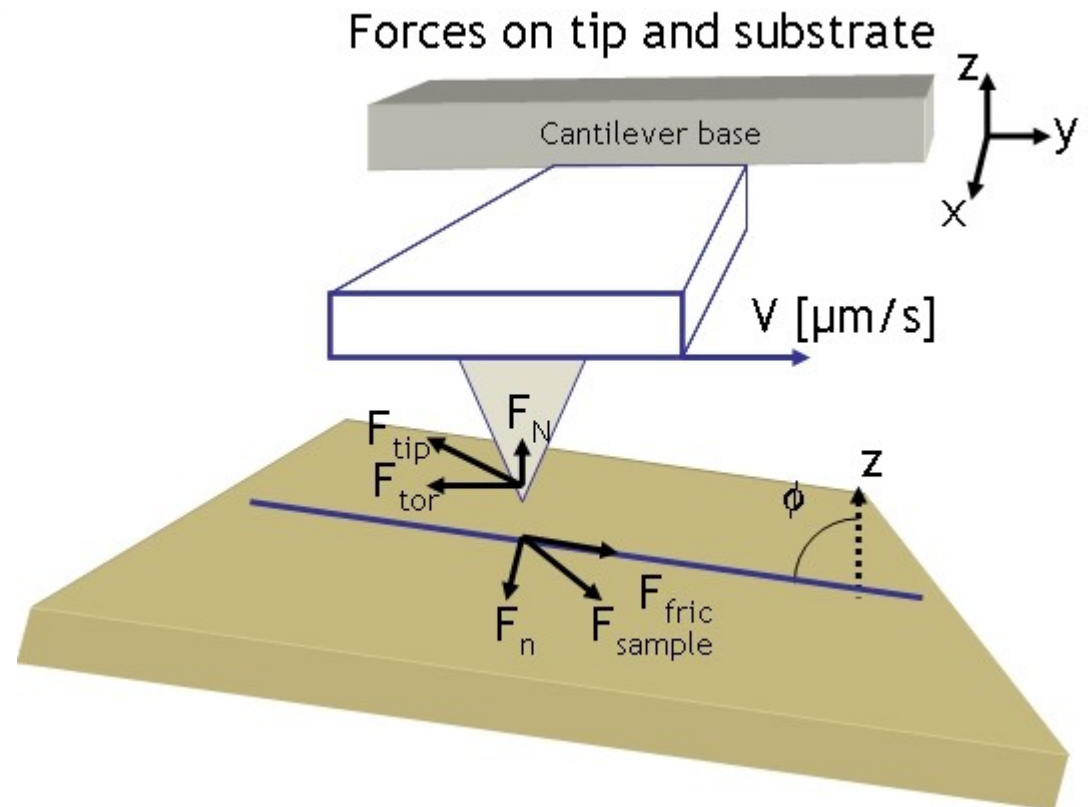


# Microscope à force atomique



Signal de droit-gauche:  $A+C-(B+D)$

Signal de haut en bas:  $A+B-(C+D)$



# Microscope à force atomique

## I. PRINCIPE GÉNÉRAL: UNE OSCILLATEUR CLASSIQUE

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = \gamma \cos \omega t + \frac{1}{m} F(D, u)$$

où

$D$  = distance entre la surface et la position de la pointe  
quand le cantilever n'est pas défléchi.

$z$  = distance entre la surface et la position de la pointe actuelle

$u = z - D$  = déviation

$m$  = mass effective

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  = la fréquence de résonance de l'oscillateur

$k$  = la raideur du cantilever

$\beta$  = un terme de dissipation

$\gamma$  = l'amplitude de l'excitation

$\omega$  = fréquence de l'excitation

$F(D, u)$  = la force d'interaction pointe-surface

N.B.  $Q \equiv \frac{\omega_0}{2\beta}$  est le *facteur de qualité*.

# Microscope à force atomique

## II. CASE I: CONTACT MODE

Ne pas d'excitation:

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{1}{m} F(D, u) \implies ku = F(D, u)$$

e.g.

$$ku \simeq F(D) + uF'(D) \implies u = \frac{F(D)}{k - F'(D)}, \text{ Si } k \gg F'(D), \quad u \simeq \frac{F(D)}{k}$$

## III. CASE II: LE MODE RÉSONNANT LINÉAIRE

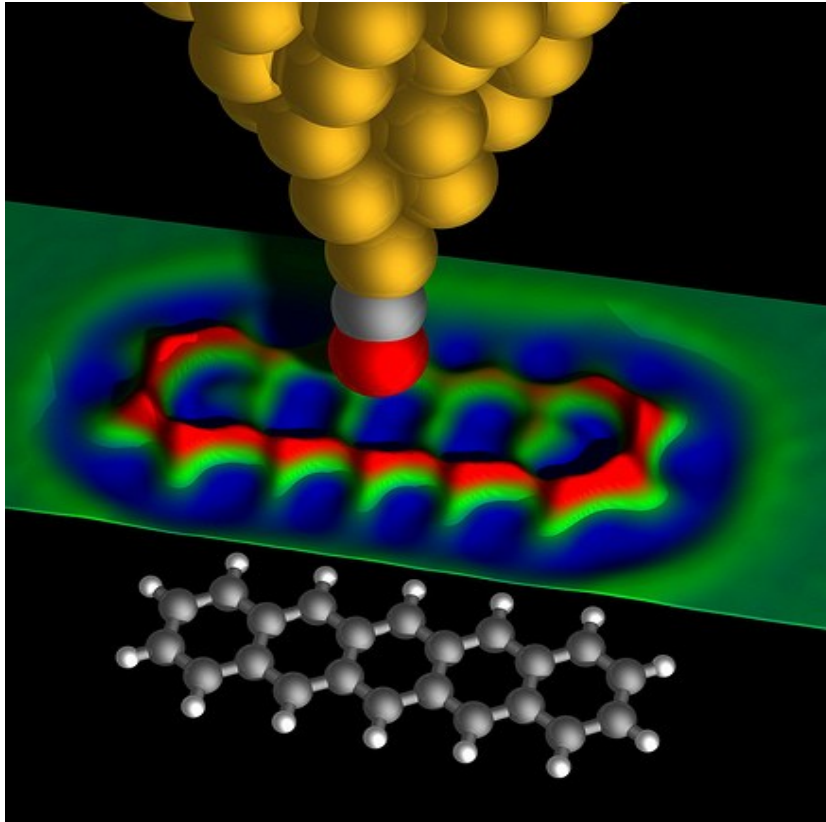
$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u \simeq \gamma \cos \omega t + \frac{1}{m} F(D) + u \frac{1}{m} F'(D)$$

de sorte que

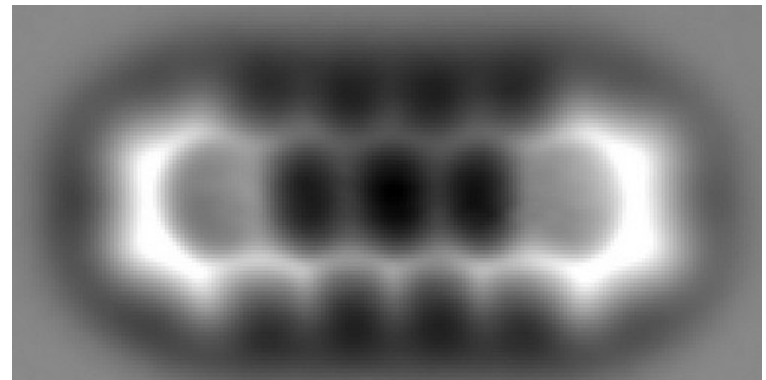
$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{k} F'(D)\right) u \simeq \gamma \cos \omega t + \frac{1}{m} F(D)$$

Ça veut dire que il y a un changement de fréquence naturelle de l'oscillateur.

# AFM Recherche actuelle ...



Imaging the "anatomy" of a pentacene molecule - 3D rendered view: By using an atomically sharp metal tip terminated with a carbon monoxide (CO) molecule, IBM scientists were able to measure in the short-range regime of forces which allowed them to obtain an image of the inner structure of the molecule. The colored surface represents experimental data. (Image courtesy of IBM Research/Zurich)





# Resume

	<b>Optique</b>	<b>Xray</b>	<b>Confocal</b>	<b>TEM/SEM</b>	<b>STM</b>	<b>AFM</b>
Lateral Resolution	200nm	25nm	200nm	0.1nm/3nm	0.1 nm	0.5 nm
Vertical Resolution	2D only	-----	500nm	-----	2D only	0.05nm
Field of view	grande	50µm	grande	Bayalage	1-2 X 1-2 mm	100 x 100 µm
Vertical range	-----	-----	Limité par le temps (1-1000 sec/mm2/tranche)	-----	-----	100 µm
Preparation	-----	-----	-----	tres mince	Couche conductrice	----
Environment	L'air, liquide, ...	L'air, liquide	liquide	vide	vide	L'air, liquide

# *METHODES DE MICROSCOPIE*

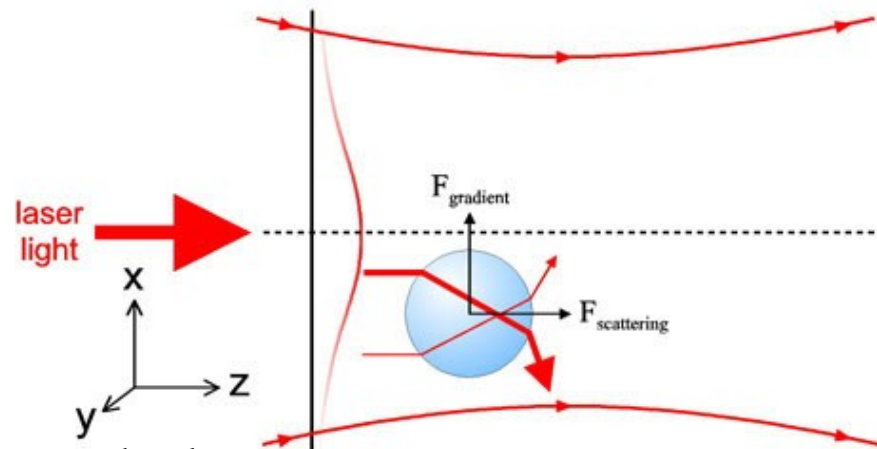
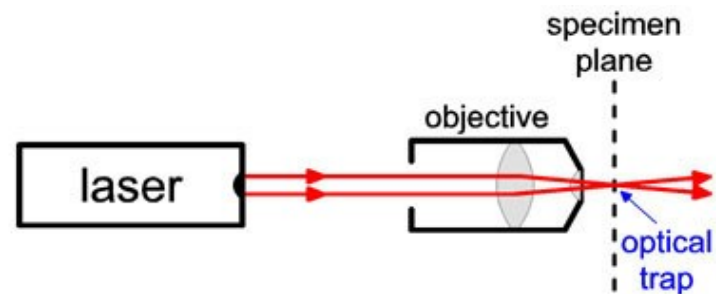
- Paramètres Fondamentaux
- Microscopes Optiques
  - Principe
  - Améliorations: phase contrast, dark field, fluorescent, ...
  - Cristallographe aux Rayon X
- Microscope Electronique
  - à Transmission
  - à Balayage
- Microscope à emission champ
- Microscope à effet tunnel électronique
- Microscope à force atomique
- **Optical Tweezers**
- Light Scattering

# Optical Tweezers

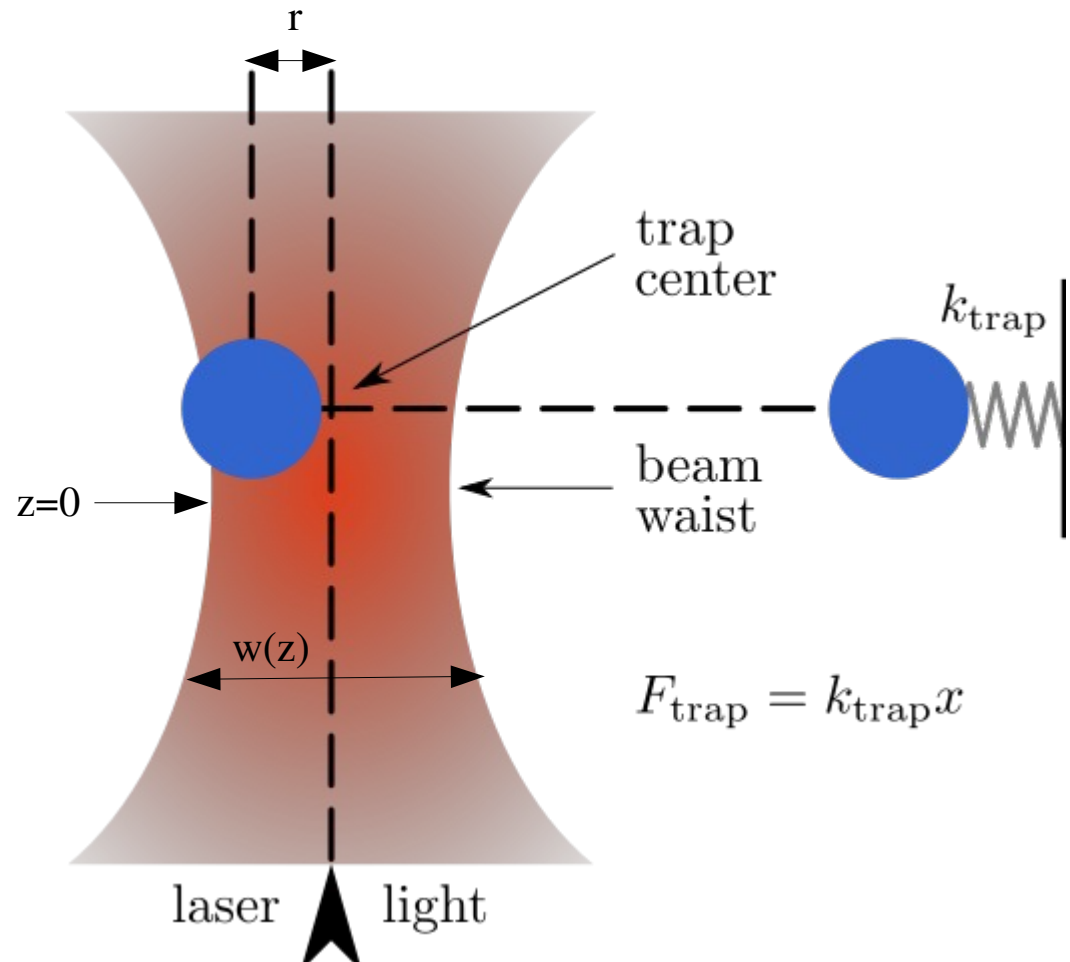
**Optical Tweezers** use light to manipulate microscopic objects as small as a single atom. The radiation pressure from a focused laser beam is able to trap small particles. In the biological sciences, these instruments have been used to apply forces in the pN-range and to measure displacements in the nm range of objects ranging in size from 10 nm to over 100 nm.

3 regimes:

- $D \gg \lambda \implies$  ray optics
- $D \sim \lambda \implies$  Maxwell's equations
- $D \ll \lambda \implies$  Electrostatics



# Optical Tweezers: gaussian beam profile

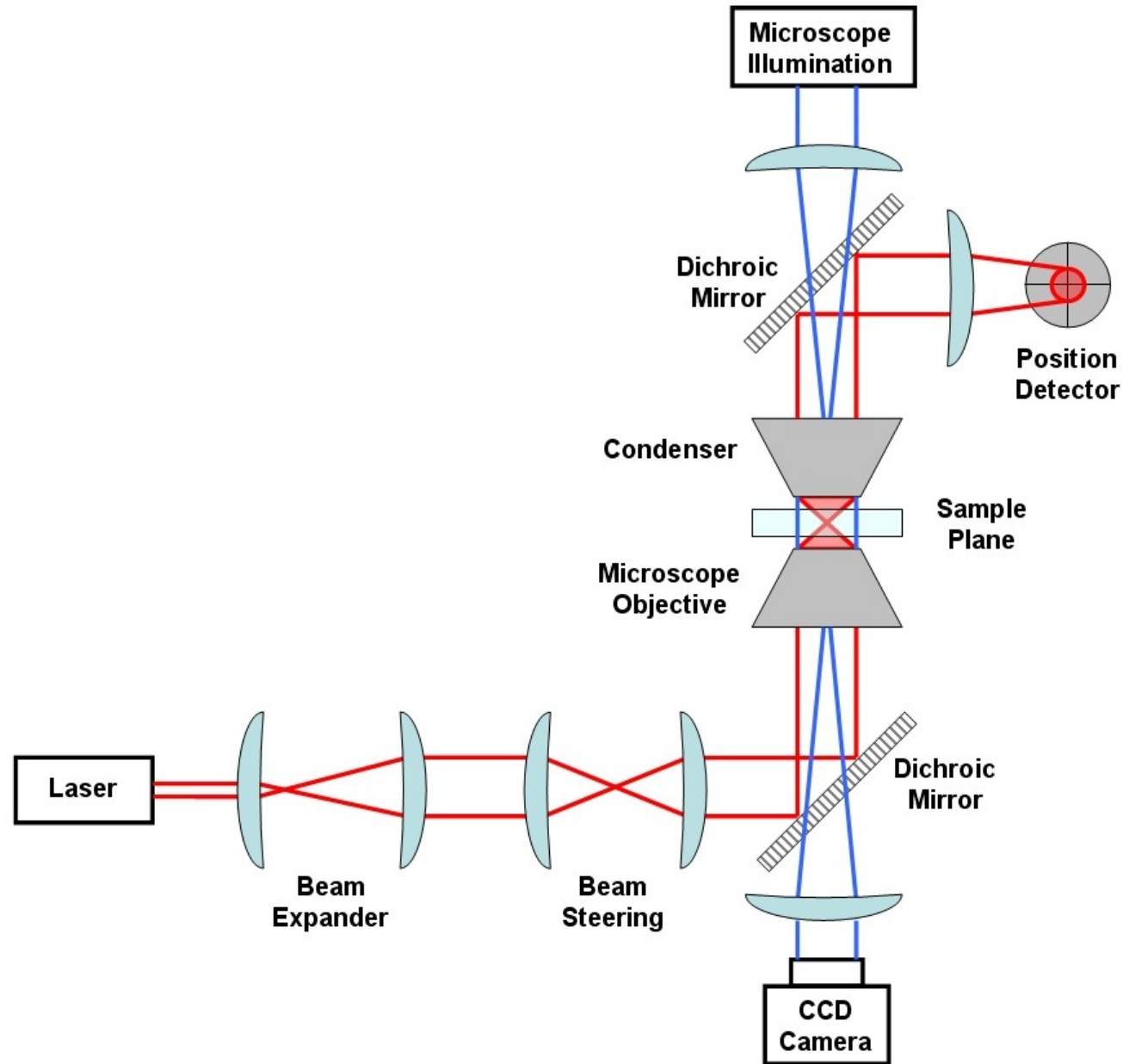


$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\eta} E^2(\mathbf{r}) = I_0 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left( -\frac{2r^2}{w(z)^2} \right)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2}$$

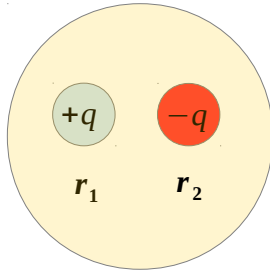
$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

# Optical Tweezers



# Optical Tweezers: $D \ll \lambda$

Particle is treated as a point (induced) dipole



$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{d} = q \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}_i = q_i \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{total} &= q \left\{ \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) \right\} + \text{higher order in } r \\ &= \mathbf{d} \cdot \nabla \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{d\mathbf{d}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \text{higher order in } r \end{aligned}$$

Assuming linear dielectric:  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}$

and using one of Maxwell's equations:  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\mathbf{F}_{total} = \alpha \left\{ \nabla E(\mathbf{R})^2 + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\mathbf{E}(\mathbf{R}) \times \mathbf{B}(\mathbf{R}))}_{\text{power per unit area}} \right\} + \text{higher order in } r$$

$$\langle \mathbf{F}_{total} \rangle_T = \alpha \nabla \langle I(\mathbf{R}) \rangle_T + \text{higher order in } r$$

For dielectric sphere

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi D^3 \epsilon_0}{2} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \\ &\approx \frac{\pi D^3 \epsilon_0}{2} \frac{n^2 - n_0^2}{n^2 + 2n_0^2} \end{aligned}$$

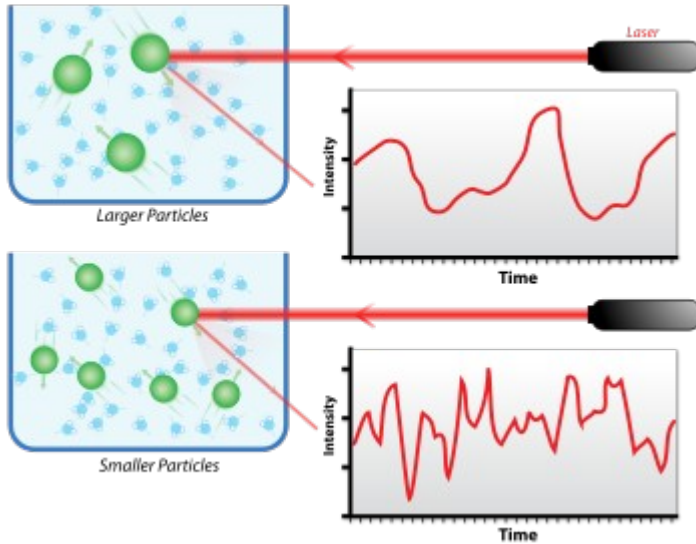
Proof = exercise!

# *METHODES DE MICROSCOPIE*

- Paramètres Fondamentaux
- Microscopes Optiques
  - Principe
  - Améliorations: phase contrast, dark field, fluorescent, ...
  - Cristallographe aux Rayon X
- Microscope Electronique
  - à Transmission
  - à Balayage
- Microscope à emission champ
- Microscope à effet tunnel électronique
- Microscope à force atomique
- Optical Tweezers
- **Light Scattering**

# Dynamic light scattering

- Typically used for particles diffusing in a liquid bath
- Determines size of particles



Field auto-correlation function (what you want):

$$g_1(q, t) = \frac{\langle E(q, t) E(q, t + \tau) \rangle}{\langle E(q, t) E(q, t) \rangle} \quad q = \frac{4 \pi n_0}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$g_1(q, t) = \exp(-q^2 D t), \quad D = \text{diffusion constant}$$

$$D = \frac{k_B T}{6 \pi \eta R} \quad \begin{array}{l} \text{Radius of particles} \\ \text{(Stokes-Einstein relation)} \end{array}$$

Intensity auto-correlation function (what you can easily measure):

$$g_2(q, t) = \frac{\langle I(q, t) I(q, t + \tau) \rangle}{\langle I(q, t) I(q, t) \rangle}$$

$$g_2(q, t) \sim 1 + \text{const} \times [g_1(q, t)]^2$$



# NANOPHYSIQUE

## INTRODUCTION PHYSIQUE AUX NANOSCIENCES

### *3. AMAS OU AGREGATS ATOMIQUES*

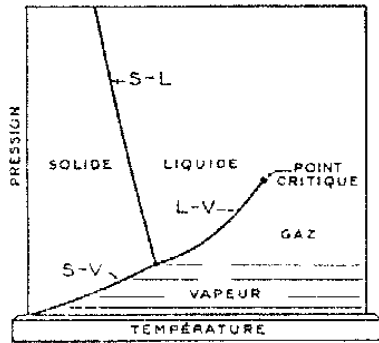
James Lutsko

2020-2021

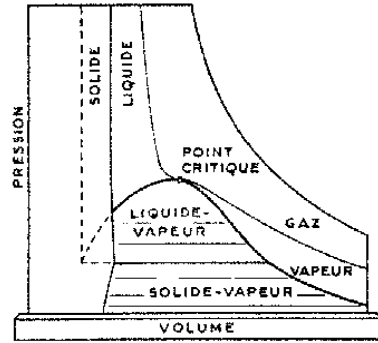
# *AMAS OU AGREGATS ATOMIQUES*

- L'auto-assemblage: Nucleation
  - Modele de l'amas: “capillary model”.
  - Thermodynamics
  - Becker-Doring model
  - Zeldovich equation
  - Taux de nucléation
- Nanoparticules cristalline
  - Structure cristalline
  - Indices de Miller
  - Tension de surface
  - Forme des Cristaux
  - Transitions de phase
- Propriétés électronique des agregats

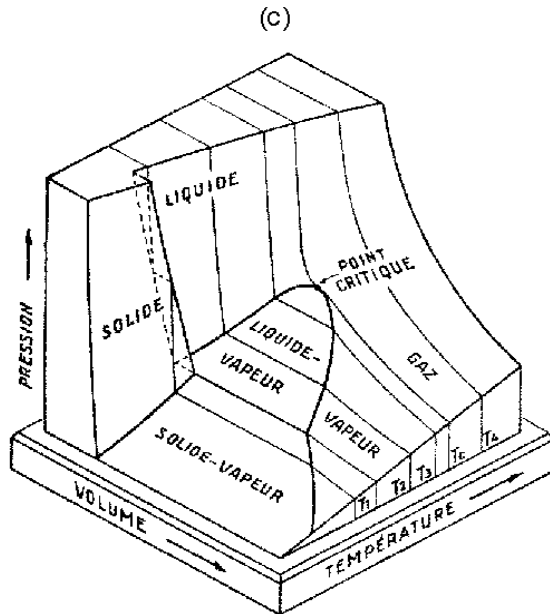
# A simple but realistic example: Liquid-vapor transition



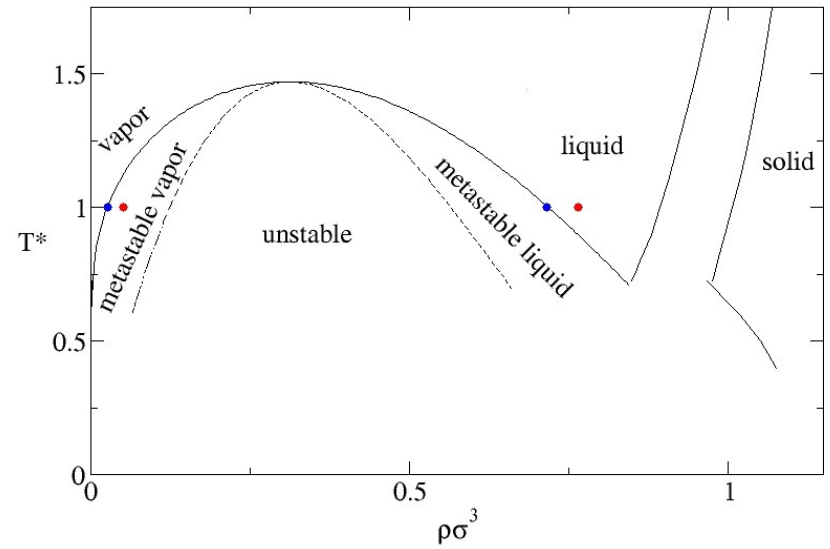
(a)



(b)



(c)



# Modele de l'Amas : “Capillary model”

L'energie libre (ensemble généralisé)

$$\Omega = V(R) \omega_1 + S(R) \gamma_{12} + (V - V(R)) \omega_2$$

$\omega$  est l'energie volumique par unite de volume,  $\gamma$  est l'energie surface

Minimisez par rapport à R:

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial R} \rightarrow S(R) \omega_1 + S'(R) \gamma_{12} = S(R) \omega_2$$

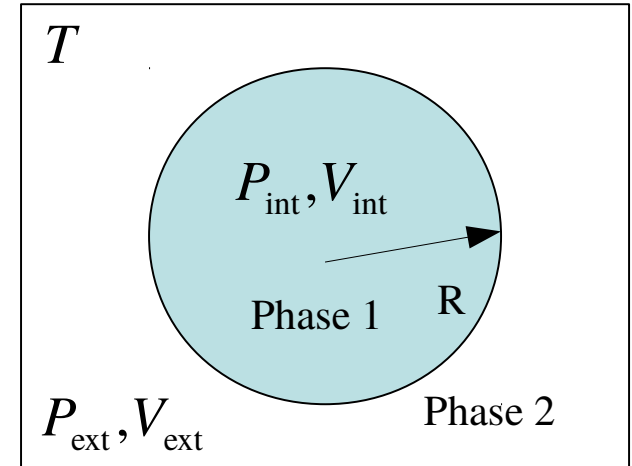
Si  $\omega_i = \omega(\rho_i)$  on doit minimiser par rapport aux densities:

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i} \rightarrow \frac{\partial \omega(\rho_i)}{\partial \rho_i} = 0$$

Rappelez-vous que  $\omega(\rho) = f(\rho) - \mu \rho \rightarrow \omega'(\rho) = f'(\rho) - \mu$

Donc,  $f'(\rho_i) = \mu \rightarrow \omega(\rho_i) = f(\rho_i) - f'(\rho_i) \rho_i = -P(\rho_i)$

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial R} \rightarrow -P(\rho_1) + \frac{S'(R)}{S(R)} \gamma_{12} = -P(\rho_2)$$



Equation de Laplace: 
$$P_{\text{int}} = P_{\text{ext}} + \frac{2\gamma}{R}$$

# Modele de l'Amas : “Capillary model”

L'energie libre (ensemble canonique)

$$F = V(R) f_1 + S(R) \gamma_{12} + (V - V(R)) f_2$$

$f$  est l'energie volumique par unite de volume,  
est c'est  $N$  qui est constante:  $\rho_1 V(R) + \rho_2 (V - V(R)) = N$

Minimiser par rapport à  $R$ :

$$0 = \frac{\partial F}{\partial R} = S(R) f_1 + S'(R) \gamma_{12} - S(R) f_2 + (V - V(R)) f'_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial R}$$

$$S(R) f_1 + S'(R) \gamma_{12} = S(R) f_2 + S(R) f'_2 (\rho_1 - \rho_2)$$

$$S(R) (f_1 - f'_2 \rho_1) + S'(R) \gamma_{12} = S(R) (f_2 - f'_2 \rho_2)$$

Minimize par rapport à la premiere densite:

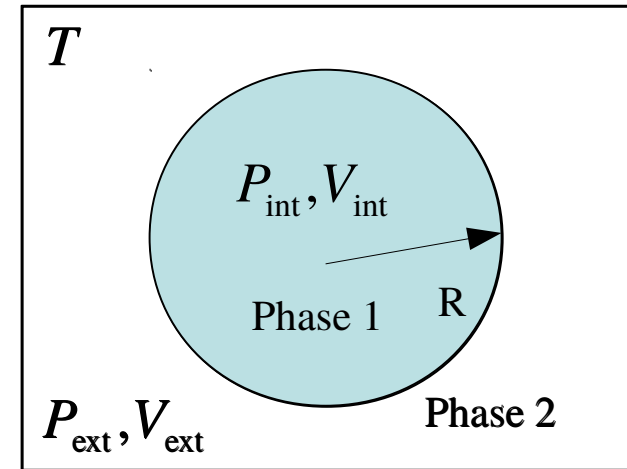
$$0 = V(R) f'_1 + (V - V(R)) f'_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \rho_1} = V(R) (f'_1 - f'_2)$$

Puis, c'est la même qu'avant sauf

$$\rho_2 = \frac{N - \rho_1 V(R)}{(V - V(R))} = \frac{N}{V} + \left( \frac{N}{V} - \rho_1 \right) \frac{V(R)}{V} + \dots$$

Donc, la deux calcul (dans l'ensemble canonique est dans l'ensemble généralisé) sont équivalent dans la limit  $V \rightarrow \infty$

En fait et en general, les ensembles sont equivalent dans ce cas.



# Modele de l'Amas : “Capillary model”

Équivalence d'ensemble (d'après Oxtoby et Evans, J. Chem. Phys. 89, 7521 (1988)):

$$\Omega = -PV + \gamma S$$

$$F = -PV + \gamma S + \mu N = \Omega + \mu N$$

Donc, pour la difference:

$$\Omega_1 - \Omega_2 = -(P_1 - P_2)V + \gamma S$$

$$F_1 - F_2 = -(P_1 - P_2)V + \gamma S + (\mu_1 - \mu_2)N$$

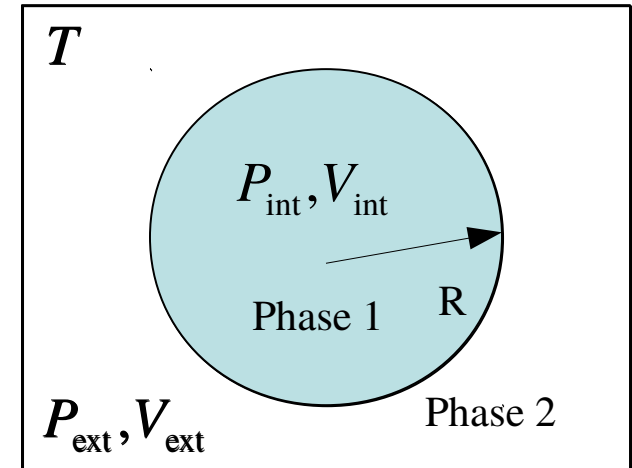
$$\Delta \Omega = \Delta F \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \text{thermodynamic limit}$$

# Modele de l'Amas : “Capillary model”

Par ailleurs, une méthode plus simple  
dans l'ensemble canonique:

$$dF = -SdT - PdV + \gamma dA$$

$$dF = -SdT - P_{\text{int}} dV_{\text{int}} - P_{\text{ext}} dV_{\text{ext}} + \gamma dA$$



$$V_{\text{int}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \quad dV_{\text{int}} = 4\pi R^2 dR$$

$$V_{\text{ext}} = V - V_{\text{int}} \quad dV_{\text{ext}} = -dV_{\text{int}}$$

$$A = 4\pi R^2 \quad dA = 8\pi R dR$$

$$0 = dF = (-P_{\text{int}} + P_{\text{ext}}) 4\pi R^2 dR + \gamma 8\pi R$$

Equation de Laplace:

$$P_{\text{int}} = P_{\text{ext}} + \frac{2\gamma}{R}$$

# Energie libre

Energie libre de Helmholtz (ensemble canonique):

$$F(\rho; T, V) = f(\rho; T) V$$

Gaz parfait:

$$\beta f(\rho; T) \equiv \beta f_{id}(\rho; T) = \rho \ln \rho - \rho$$

Gaz hard-sphere avec diametre  $d$  (Carnahan-Starling approximation):

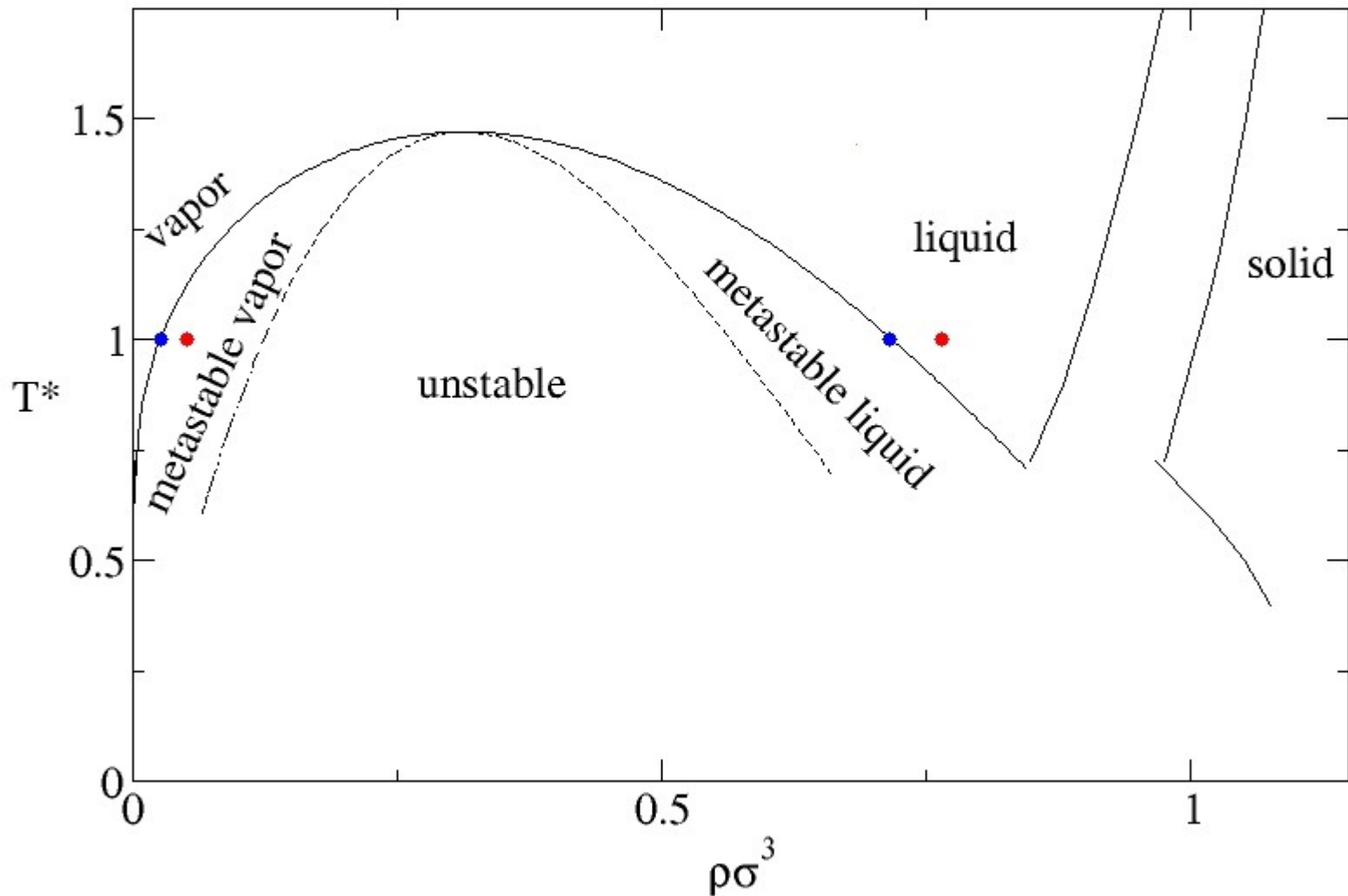
$$\beta f_{hs}(\rho; T) = \beta f_{id}(\rho; T) + \rho \eta \frac{4 - 3\eta}{(1 - 2\eta)^2}, \quad \eta = \frac{4\pi}{3} (d/2)^3 \rho = \frac{\pi}{6} \rho d^3$$

Champ moyenne (van der Waals):

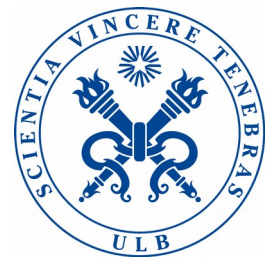
$$\beta f(\rho; T) = \beta f_{hs}(\rho; T) - \frac{1}{2} a \rho^2 \quad a = \beta \int v_{att}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$



# Les transitions de phase



Coexistence de deux phase:  $p_1 = p_2$ ,  $f_1 = f_2$



# Crystallization is a hot topic ...

**nature**  
International journal of science

MENU ▾

Letter | Published: 26 June 2019

## Observing crystal nucleation in four dimensions using atomic electron tomography

Jihan Zhou, Yongsoo Yang, Yao Yang, Dennis S. Kim, Andrew Yuan, Xuezheng Tian, Colin Ophus, I Sun, Andreas K. Schmid, Michael Nathanson, Hendrik Heinz, Qi An, Hao Zeng, Peter Ercius & Jianwei Miao

**Science** Contents ▾ News ▾ Careers ▾ Journals ▾

**SHARE** **REVIEW**

## Crystallization by particle attachment in synthetic, biogenic, and geologic environments

James J. De Yoreo<sup>1,2</sup>, Pupa U. P. A. Gilbert<sup>3,4,\*</sup>, Nico A. J. M. Sommerdijk<sup>5,6</sup>, R. Lee Penn<sup>7</sup>, Stephen Whitelam<sup>8</sup>, Derk Joeste...

+ See all authors and affiliations

Science 31 Jul 2015:  
Vol. 349, Issue 6247, aaa6760  
DOI: 10.1126/science.aaa6760

AAAS Become a Member

**Science** Contents ▾ News ▾ Careers ▾

**SHARE**

## Controlling Zeolite Nucleation

+ See all authors and affiliations

Science 06 Jan 2012:  
Vol. 335, Issue 6064, pp. 11  
DOI: 10.1126/science.335.6064.11-f

nature > nature communications > articles > article

MENU ▾ **nature COMMUNICATIONS**

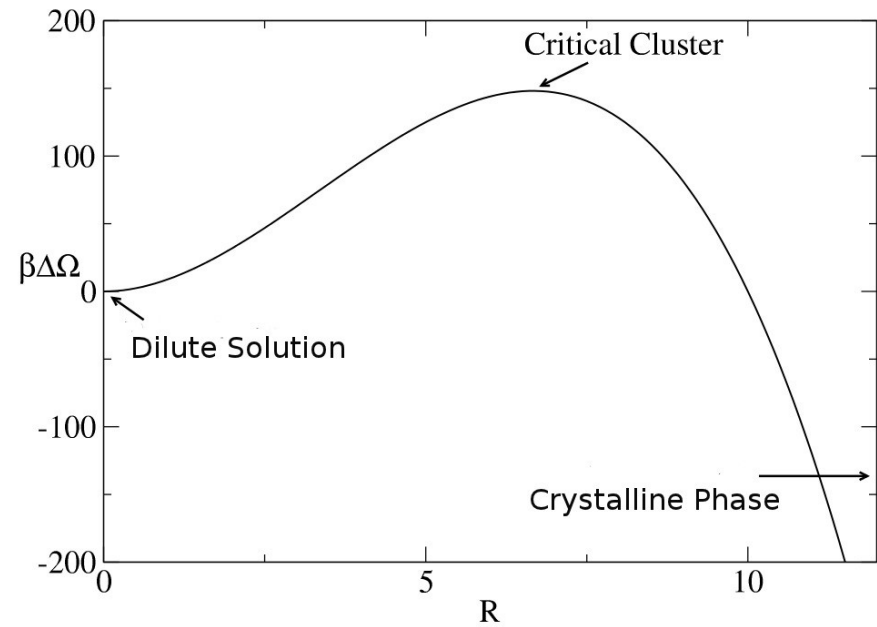
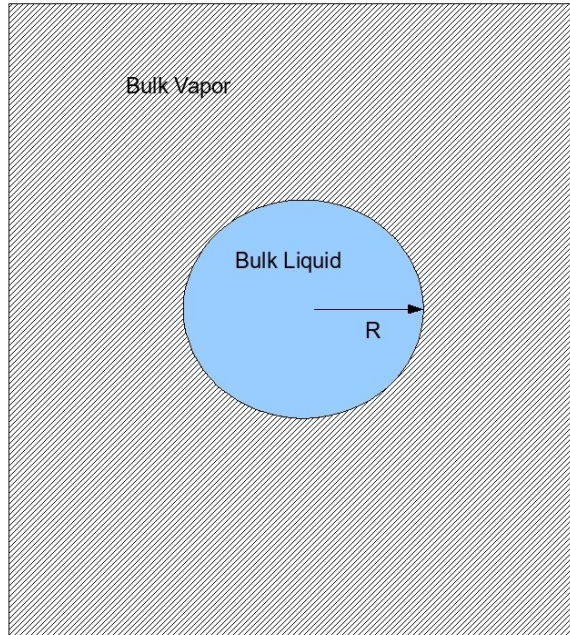
Article | Open Access | Published: 03 December 2014

## Observing classical nucleation theory at work by monitoring phase transitions with molecular precision

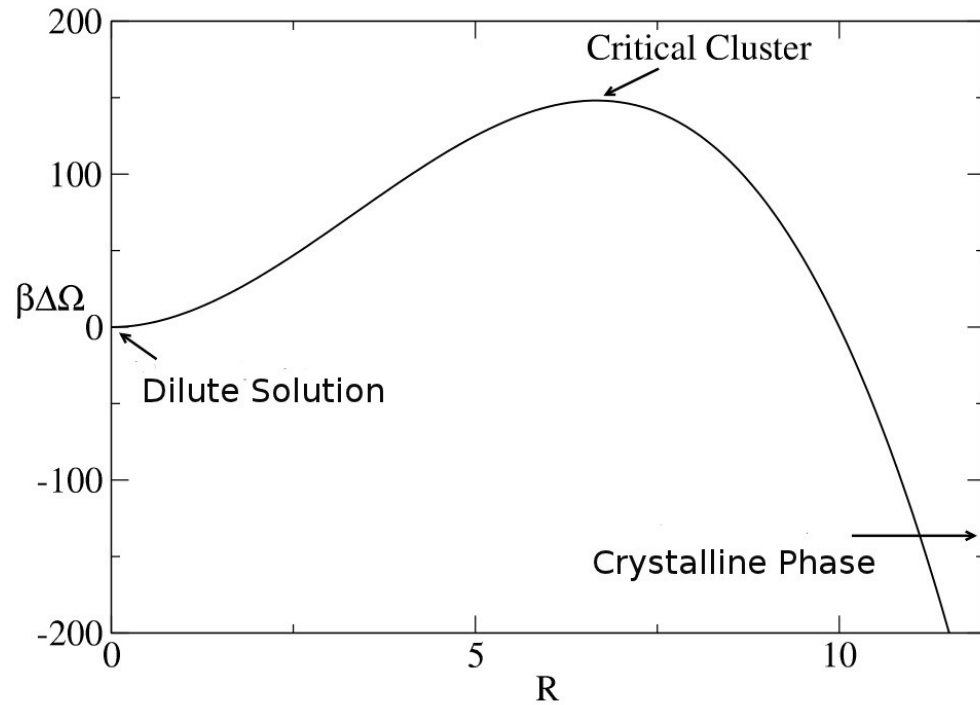
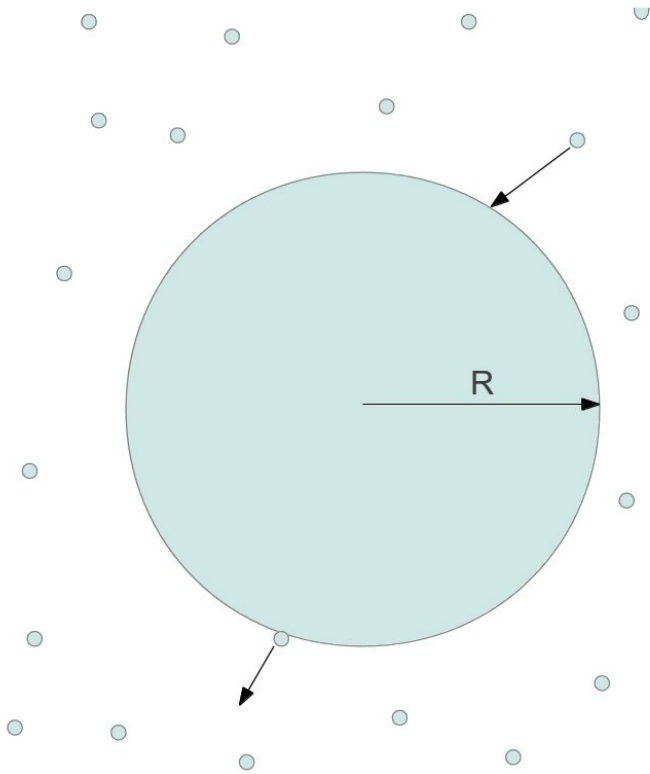
Mike Sleutel, Jim Lutsko, Alexander E.S. Van Driessche, Miguel A. Durán-Olivencia & Dominique Maes

Nature Communications 5, Article number: 5598 (2014) | Download Citation

# Les transitions de phase : le processus

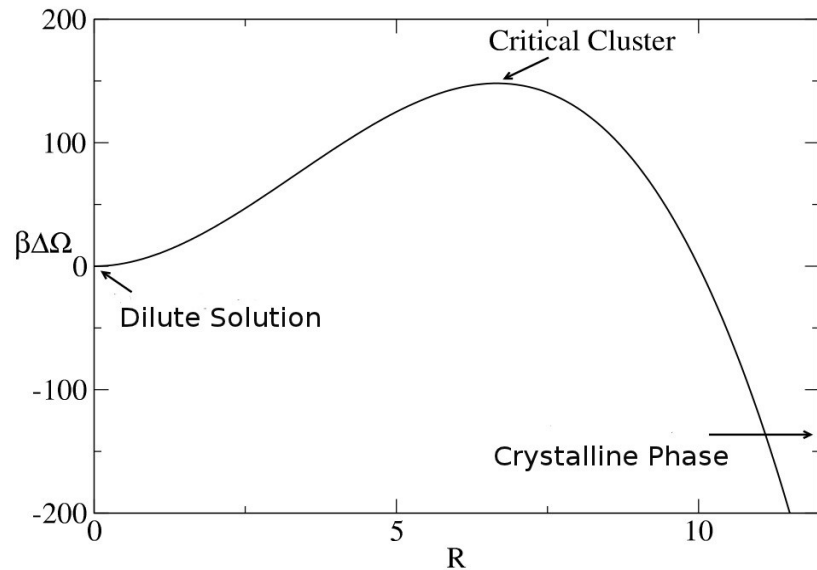
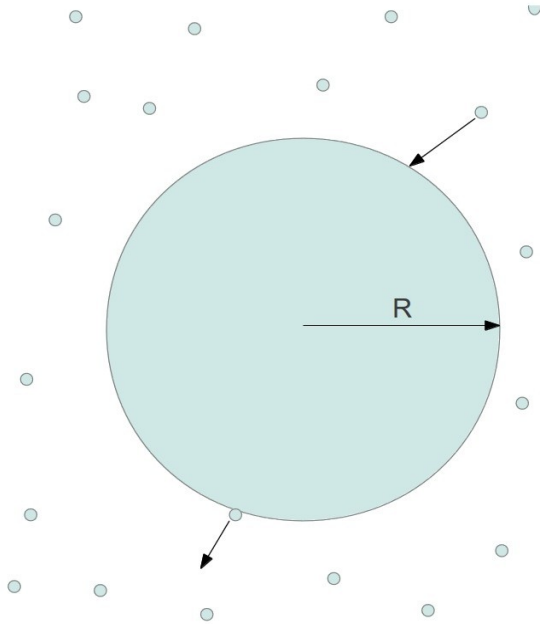


# Classical Nucleation Theory (CNT) : Thermodynamics



$$\begin{aligned}\Omega &= V(R)\omega_2 + S(R)\gamma + (V - V(R))\omega_1 \\ &= V(R)\Delta\omega + S(R)\gamma + V\omega_1 \\ \Delta\Omega &= V(R)\Delta\omega + S(R)\gamma\end{aligned}$$

# Classical Nucleation Theory (CNT) : Dynamics



Monomer attachment/detachment (Becker-Doring c. 1930):

$$\frac{dc_n}{dt} = (f_{n-1}c_{n-1}c_1 - g_nc_n) - (f_nc_nc_1 - g_{n+1}c_{n+1})$$

$f_n, g_n$  sont les taux de fixation et de détachement des monomères

# Classical Nucleation Theory (CNT) : Dynamics

Monomer attachment/detachment (Becker-Doring c. 1930):

$$\frac{dc_n}{dt} = (f_{n-1} c_{n-1} c_1 - g_n c_n) - (f_n c_n c_1 - g_{n+1} c_{n+1})$$

Si l'on developper pour  $n \gg 1, c_n(t) \rightarrow c(n, t)$  etc.

$$f(n-1) = f(n) - f'(n) + \frac{1}{2} f''(n) + \dots$$

on se trouve

$$\frac{dc(n, t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial n} \left( (g(n) - f(n)) c(n, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} (f(n) + g(n)) c(n, t) + \dots \right)$$

“Tunitskii equation”

# Classical Nucleation Theory (CNT) : Dynamics

Monomer attachment/detachment (Becker-Deering c. 1930):

Si l'on demande aussi la condition de bilan détaillé (“detailed balance”),

$$f(n) e^{-\beta \Delta \Omega(n)} = g(n+1) e^{-\beta \Delta \Omega(n+1)}$$

est developpe comme

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n-1) e^{\beta \Delta \Omega(n) - \beta \Delta \Omega(n-1)} \\ &= f(n) - \frac{\partial f(n)}{\partial n} + f(n) \frac{\partial \beta \Delta \Omega(n)}{\partial n} + \dots \end{aligned}$$

on trouve une resultat très connu, l'équation de Zeldovich (1942):

$$\frac{dc(n,t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial n} \left( -f(n) \frac{\partial \beta \Delta \Omega}{\partial n} + f(n) \frac{\partial}{\partial n} \right) c(n,t)$$

Notez qu'il semble un équation de type Fokker-Planck.

# Classical Nucleation Theory (CNT) : Nucleation rates

Si l'on commence avec une solution de monomères, éventuellement un cristal sera nucléé et il va consommer les monomères. C'est un processus pas soutenu. Mais, si l'on ajoute des monomères est si l'on enlève des amas post-critique, on peut faire un état stationnaire. Dans ce cas, la solution de l'équation Zeldovich est facile:

$$0 = \frac{dc(n, t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial n} \left( -f(n) \frac{\partial \beta \Delta \Omega}{\partial n} + f(n) \frac{\partial}{\partial n} \right) c(n, t)$$

$$\begin{aligned} J &= -f(n) \frac{\partial \beta \Delta \Omega}{\partial n} c(n, t) + f(n) \frac{\partial}{\partial n} c(n, t) \\ &= -f(n) e^{-\beta \Delta \Omega} \frac{\partial}{\partial n} e^{\beta \Delta \Omega} c(n, t) \end{aligned}$$

$$c(n) = A e^{-\beta \Delta \Omega(n)} + B e^{-\beta \Delta \Omega} \int_1^n e^{\beta \Delta \Omega(n')} / f(n') dn'$$

Alors, car  $c(n^*) = 0$ , la solution est  $c(n) = B e^{-\beta \Delta \Omega} \int_n^{n^*} e^{\beta \Delta \Omega(n')} / f(n') dn'$



# Classical Nucleation Theory (CNT) : Nucleation rates

On peut écrire le résultat comme

$$c(n) = c(1) e^{-\beta(\Omega(n) - \Omega(1))} \int_n^{n^*} e^{\beta \Delta \Omega(n')} / f(n') dn' / \int_1^{n^*} e^{\beta \Delta \Omega(n')} / f(n') dn'$$

La taux est simplement la flux:

$$\begin{aligned} J &= -f(n) e^{-\beta \Delta \Omega} \frac{\partial}{\partial n} e^{\beta \Delta \Omega} c(n, t) \\ &= c(1) \left( \int_1^{n^*} e^{\beta \Delta \Omega(n)} / f(n) dn \right)^{-1} \end{aligned}$$

Un évaluation par “steepest descent” donne le resultat

$$J \approx c_1 f(n_c) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sqrt{|\Delta \beta \Omega''(n_c)|} \exp(-\Delta \beta \Omega(n_c))$$

# Classical Nucleation Theory (CNT) : Dynamics

## Monomer attachment frequency: Diffusion-limited growth

La taux de fixation de monomères est évidemment déterminé par la taux auquel les monomères frappe la surface. Pour ça, on suppose que le mouvement des monomères est par le processus de diffusion. Donc,

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D \nabla^2 c_1 = D \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r c_1$$

On suppose que il y a un état de quasi-equilibre,

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = 0 = D \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r c_1 \rightarrow c_1(r) = c_1(\infty) + \frac{a}{r}$$

Si chaque molécule qui arrive est fixé, la condition à la limite est  $c(R) = 0$  de sorte que

$$c_1(r) = c_1(\infty) \left(1 - \frac{R}{r}\right)$$

# Classical Nucleation Theory (CNT) : Dynamics

## Monomer attachment frequency: Diffusion-limited growth

Parce-que on a une état stationnaire, la nombre total des monomères dans la volume total est constant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_V c_1(r; t) d\mathbf{r} &= D \int_V \nabla^2 c_1 d\mathbf{r} \\ &= D \left( S(R_{max}) c'_1(R_{max}) - S(R) c'_1(R) \right)\end{aligned}$$

Donc, la nombre fixé sur la surface par unité de temps est simplement  $DS(R) c'_1(R)$  de sorte que

$$\begin{aligned}f_n &= f(R(n)) \\ &= D 4 \pi R^2(n) c'_1(R) \\ &= D 4 \pi R(n) c_1(\infty)\end{aligned}$$

$$c_1(r) = c_1(\infty) \left( 1 - \frac{R}{r} \right)$$

$$c'_1(r) = c_1(\infty) \frac{R}{r^2}$$