数值分析第二次大作业

梁寒杲　自 75　2017011582

2019 年 12 月 24 日

1　项目要求

本项目要求采用逼近, 数值积分, 常微分方程中的至少两种算法计算 sin(x) 的值, 并且要求计算结果精确到小数点后 4 位. 其中 $x \in [-10, 10]$

2　方案设计与程序使用说明

此处我使用了逼近和常微分方程中的龙格-库塔法; 采用的编程语言为 C++; 在程序中, 所有的常量和每一次的计算结果都使用 double 类型变量保存.

点击 exe 后出现的界面如 1

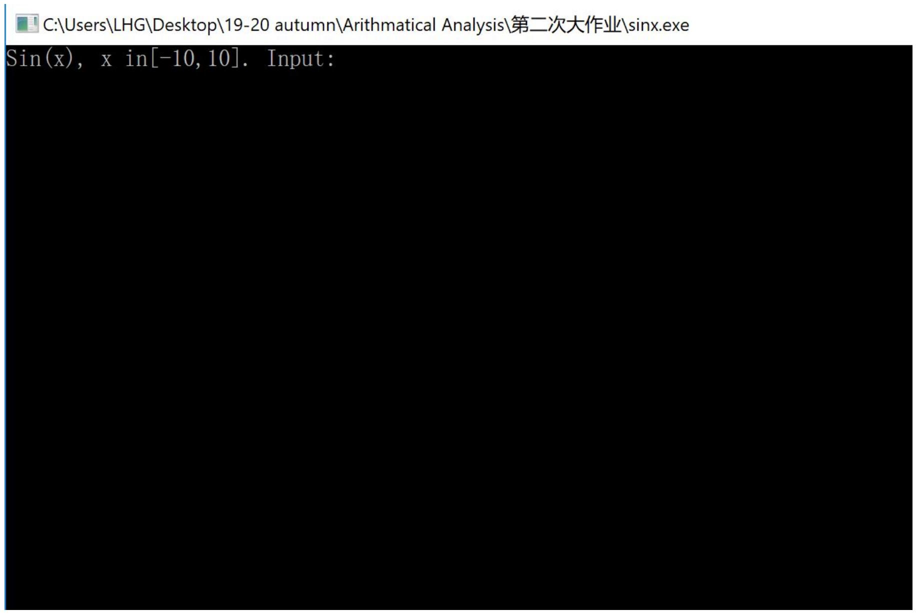

图 1: 程序启动界面

进入之后可以输入一个 [-10,10] 之间的数然后回车 (如果输入有误程序会提醒重新输入). 之后显示的计算结果如图 2. 此时"Runge Kutta" 后为龙格-库塔法的计算结果, "Lagrangian Approximation" 为最佳一致多项式的逼近结果.

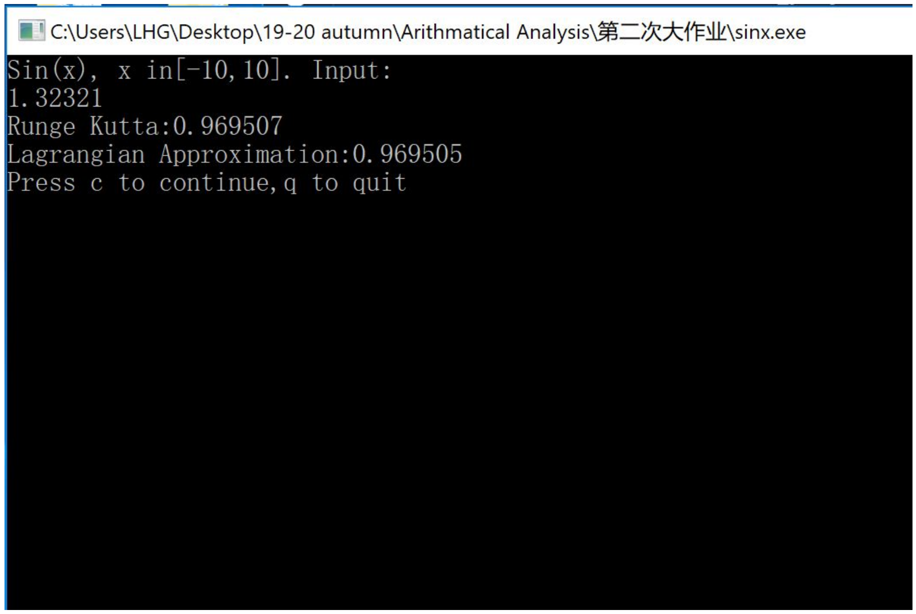

图 2: 计算结果

之后可以输入 c 继续计算或者输入 q 退出程序.

3 算法一: 多项式最佳一致逼近

取插值节点 $x_k = \cos\frac{2k-1}{2k}\pi, k = 1,2,...,7$, 由最小零偏差多项式定理此时 $w_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ 为最小零偏差多项式, 且 $max_{-1\leq x\leq 1}|f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \frac{M_n}{n!}\frac{1}{2^{n-1}}$

本项目中要求输入 $x \in [-10,10]$. 考虑到实际的计算精度问题, 此处只计算 $[0,\pi]$ 之内 $\sin(x)$ 的值; 对于区间在这之外的 $\sin(x)$ 使用 $\sin(x)$ 的诱导公式得到它的值. 具体表示如下:

对 $x \in [-10,10]$, 取 $k \in N$ 使得 $x - k*\pi \in [-\pi,\pi]$; 记 $m = |x - k*\pi|$, 则 $m \in [0,\pi]$.

由于使用最佳一致多项式插值逼近需要满足区间为 $[-1,1]$ 的要求, 需要进一步采用区间变换. 此处可在 $[-1,1]$ 区间上对函数 $\sin(\frac{(m+1)*pi}{2})$ 进行插

值即可.

如果 $x-k*\pi\geq 0$, 则 $\sin(x)=\sin(m)$, 返回 $\sin(m)$; 如果 $x-k*\pi<0$, 则 $\sin(x)=-\sin(m)$, 返回 $-\sin(m)$. 算法的流程图如 3:

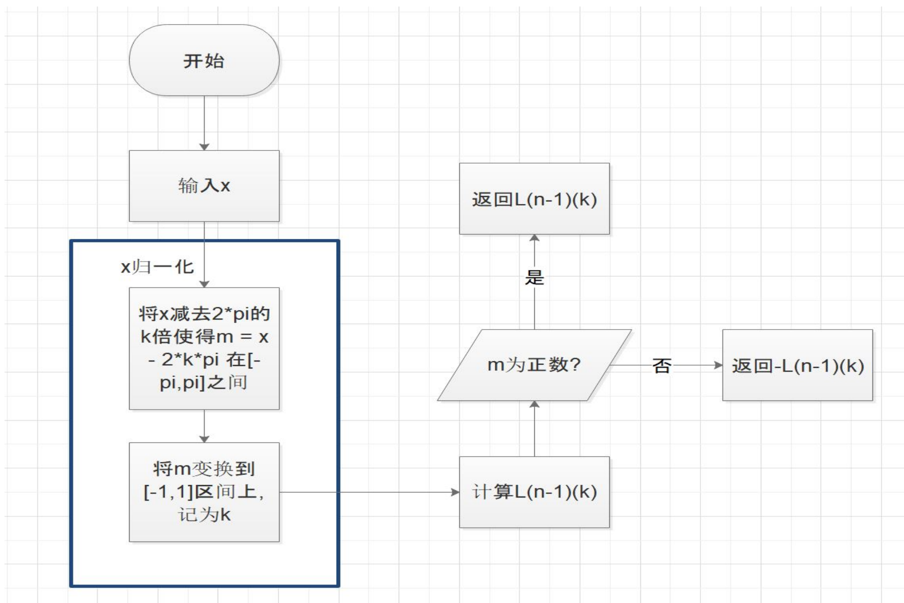

图 3: 多项式最佳一致逼近流程图

4 算法二: 龙格-库塔法解微分方程

类似于算法一, 此处我们可以将问题化简为求 $x\in[0,\pi]$ 之内 $\sin(x)$ 的值. 首先将 $y=\sin(x)$ 化为二次微分方程 $y^{(2)}=-y$, 再将二次微分方程化为二次一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{cases}$$

此处 $y_1=\sin(x)$, $y_2=\cos(x)$.

写成矩阵形式即为:

$$Y'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}*Y$$

记

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $F(x, Y) = MY$, 使用四阶龙格库塔公式:

$$\begin{cases} Y_{n+1} & = Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + K_4) \\ K_1 & = F(x_n, Y_n) \\ K_2 & = F(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 & = F(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 & = F(x_{n+1}, Y_n + hK_3) \end{cases}$$

可以从初值 $Y = [0, 1]^T$ 推导出 $x \in [0, \pi]$ 之间的所有值.

由于使用该方法时, 只能求出 x 是 h 整数倍时 $\sin(x)$ 的值, 与输入的 x 之间存在观测误差; 为了平衡计算量和精度, 此处采用了 h 的递减策略: h 的递减序列为 $0.01- > 0.001- > 0.0001- > 0.00001- > 0.000001$; 这样自变量 x 的值逐步逼近输入值, 同时可以控制计算量在一个合理的范围之内.

该算法的算法流程图如 4:

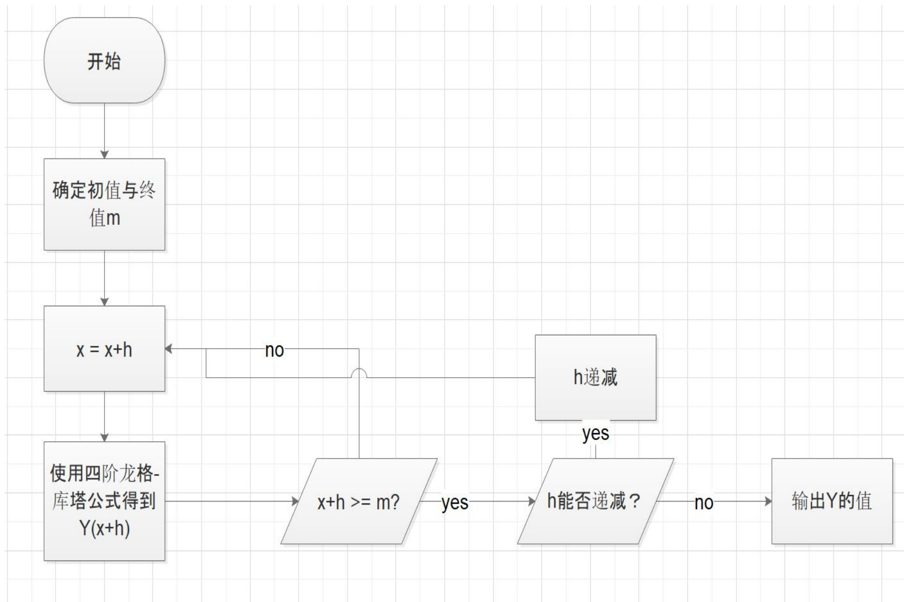

图 4: 龙格-库塔法流程图

5 误差分析

5.1 一致逼近法误差分析

该算法的模型误差和观测误差不存在, 因此下面只考虑方法误差和舍入误差.

方法误差 此处经过归一化并将插值区间线性映射到 $[-1,1]$ 之后, 相当于在 $[-1,1]$ 上通过最佳一致逼近多项式 $L_7(x)$ 逼近 $\sin(\frac{\pi(x+1)}{2})$).

由教材 P64 定理 (2.15) 可知, 此时方法误差

$$\Delta_m = max|f(x) - L_7(x)| \leq \frac{M_8}{8!}\frac{1}{2^7} \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^8}{8!} * \frac{1}{2^7} = 6.7270 \times 10^{-5}$$

舍入误差 对 $t \in [-1,1]$,

$$\sin(\frac{(t+1)\pi}{2}) \approx L_7(t) = \Sigma_{j=1}^{8} \sin(\frac{(x_j+1)\pi}{2})\Pi_{j\neq k}\frac{t-x_k}{x_j-x_k}$$

在程序中,π, $x_k, k=1,2,...,8$ 以及 $\sin(\frac{(x_k+1)\pi}{2}), k=1,2,...,8$ 我均使用常量存储, 因此这三种存储误差需要考虑; 此外, 在累加时的舍入误差也需要考虑.

由于程序中均使用 double 变量, 此时每一步的存储误差 $\delta_d = \frac{1}{2}\times 10^{-15}$ 的精度.[1]

1. π 的存储误差 $|\frac{\partial L_7(t)}{\partial \pi}| = |\Delta\pi * \Sigma_{j=1}^{8}(\frac{(x_j+1)}{2} * \cos\frac{(x_j+1)\pi}{2}) * \Pi_{k\neq j}\frac{t-x_k}{x_j-x_k}| \leq |\Delta\pi * \Pi_{k\neq j}\frac{t-x_k}{x_j-x_k}|$

由均值不等式,$|\Pi_{k\neq j}(t-x_k)| \leq (\Sigma_{k\neq j}(t-x_k)/7)^7 \leq ((1+\Sigma_{k=1}^{8}((1-x_k)))/7)^7 = 0.0291$

因此 π 带来的误差为

$$\Delta_1 \leq 0.0291 * \delta_d$$

2. x_k 的存储误差 此处 x_k 的存储误差对 $\Pi_{j\neq k}\frac{t-x_k}{x_j-x_k}$ 的影响过于繁杂, 我们此处不考虑该式带来的误差, 只考虑 $\sin[\frac{(x_j+1)\pi}{2}]$ 这一项的误差.

此时

$$|\frac{\partial L_7(t)}{\partial x_j}| \leq \delta_d * \cos(\frac{(x_j+1)\pi}{2}) * \frac{\pi}{2} * \Pi_{j\neq k}\frac{t-x_k}{x_j-x_k} \leq 0.0458\delta_d$$

因此 x_j 的存储误差带来 $\Delta_2 \leq 8 * 0.0458\delta_d = 0.3661\delta_d$

3. $\sin(\frac{(x_k+1)\pi}{2})$ 的存储误差

记 $m_k = \sin(\frac{(x_k+1)\pi}{2})$, 则有:

$$|\frac{\partial L_7(t)}{\partial m_k}| = \Pi_{k\neq k}\frac{t-x_k}{x_j-x_k} \leq 0.0291$$

因此 m_k 带来的误差为 $\Delta_3 \leq 8 * 0.0291\delta_d = 0.2328\delta_d$

[1] 此处不同的系统以及不同的编译器环境下, double 的精度不同; 此处取 $\delta_d = \frac{1}{2}\times 10^{-15}$ 为大多数环境所采用

4. 累加误差

此时经过 8 次累加, 因此累加带来的误差为 $\Delta_4 \leq 8\delta_d$

综上所述, 总的舍入误差 $\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \leq 8.8980\delta_d \leq 4.449 \times 10^{-15}$.

总误差限为: $\Delta = \Delta_m + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \leq 6.727 \times 10^{-5}$

5.2 龙格-库塔法误差分析

此处不存在模型误差; 由于此处输入的 x 有六位有效数字, 在程序中我使用 h 递减策略时, 最小的 h 步长为 0.000001, 因此输入的 x 也是准确值, 因此也没有观测误差. 下面只需考虑方法误差和舍入误差.

方法误差 令 $F(x, Y) = MY$ 四阶龙格-库塔公式为:

$$\begin{cases} Y_{n+1} &= Y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 3K_3 + K_4) \\ K_1 &= F(x_n, Y_n) \\ K_2 &= F(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 &= F(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 &= F(x_{n+1}, Y_n + hK_3) \end{cases}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

考虑累计误差, 设第 n 次迭代时累积误差为 Δ_n, 我们有 (下面的矩阵和向量的范数均取无穷范数):

$$\begin{cases} \Delta K_2 &\leq [1 + \frac{h}{2}\frac{\partial F}{\partial Y}]\Delta_n = (\frac{h*M^2}{2} + M)\Delta_n \\ \Delta K_3 &\leq M * (\Delta_n + \frac{h}{2}\Delta K_2) = (\frac{h^2M^3}{4} + \frac{h*M^2}{2} + M)\Delta_n \\ \Delta K_4 &\leq M * (\Delta_n + h\Delta K_3) = (\frac{h^3M^4}{4} + \frac{h^2M^3}{2} + h*M^2 + M)\Delta_n \end{cases}$$

其中 $\frac{\partial F}{\partial Y} = M$ 此时由 $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 2*K_2 + 2*K_3 + K_4]$ 得到

$$||\Delta_{n+1}|| \leq ||\Delta_n|| * ||(1 + Mh + \frac{M^2h^2}{2} + \frac{M^3h^3}{6} + \frac{M^4h^4}{24} + \frac{Lh^5}{120})||$$

其中 $L = max|Y^{(5)}(x)| = (1,1)^T$
记

$$K = Mh + \frac{M^2h^2}{2} + \frac{M^3h^3}{6} + \frac{M^4h^4}{24} + \frac{Lh^5}{120} = \begin{bmatrix} \frac{h^4}{24} - \frac{h^2}{2} & h - \frac{h^3}{6} \\ -h + \frac{h^3}{6} & \frac{h^4}{24} - \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}$$

此时有:

$$||(\Delta_{n+1}+K^{-1}\frac{L*h^5}{120})|| \le ||(K+I_2)[\Delta_n+K^{-1}\frac{L*h^5}{120}]|| \le ... \le ||(K+I_2)^{n+1}K^{-1}\frac{L*h^5}{120}||$$

其中

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-(24*(h^2-12))}{(-h^6+8*h^4+48*h^2-576)} & \frac{(96*(h^2-6))}{(h^7-8*h^5-48*h^3+576*h)} \\ \frac{-(96*(h^2-6))}{(h^7-8*h^5-48*h^3+576*h)} & \frac{-(24*(h^2-12))}{(-h^6+8*h^4+48*h^2-576)} \end{bmatrix}$$

$$K + I_2 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{h^4}{24} - \frac{h^2}{2} & h - \frac{h^3}{6} \\ -h + \frac{h^3}{6} & 1 + \frac{h^4}{24} - \frac{h^2}{2} \end{bmatrix}$$
$$= V^{-1} * D * V$$

其中

$$V = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{h^4}{24} + \frac{(h^3*i)}{6} - \frac{h^2}{2} - h*i + 1 & 0 \\ 0 & \frac{h^4}{24} - \frac{(h^3*i)}{6} - \frac{h^2}{2} + h*i + 1 \end{bmatrix}$$

由于 $h \ll 1$, 上述的 D 和 K^{-1} 可近似为:

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & -1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} + i & -\frac{h}{2} - i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 - h*i & 0 \\ 0 & 1 + h*i \end{bmatrix}$$

此时

$$(K+I_2)^{n+1} = V^{-1}D^{n+1}V$$

由 $h*n<\pi$ 可知 $|(1-h*i)^n| \le e^{-\pi}$, $|(1+h*i)^n| \le e^{\pi}$ 因此

$$||\Delta_{n+1}|| \le ||(K+I_2)^{n+1}K^{-1}\tfrac{L*h^5}{120}|| + ||K^{-1}\tfrac{L*h^5}{120}||$$
$$\le ||V^{-1}||*||D^{n+1}||*||V||*||K^{-1}||*||\tfrac{L*h^5}{120}|| + ||K^{-1}||*||\tfrac{L*h^5}{120}||$$
$$= 1*(1+1/h)*(e^{\pi})*(2+h)*\tfrac{h^5}{120} + (1+1/h)*\tfrac{h^5}{120} \le 0.4821*h^4$$

在程序中, h 的最大值为 0.01, 因此方法误差 $\Delta_1 \le 4.821\times10^{-9}$

舍入误差 此处考虑累计舍入误差.

设每一步的舍入误差为 $\delta_d = \frac{1}{2}*10^{-15}$ 由上述对累计方法误差的分析类似可得:

$$(\Delta_{n+1}+K^{-1}*\delta_d) \le (K+I_2)[\Delta_n+K^{-1}*\delta_d] \le ... \le (K+I_2)^{n+1}*K^{-1}*\delta_d$$

因此舍入误差

$$||\Delta_{n+1}|| \le ||(K+I_2)^{n+1}*K^{-1}||*\delta_d + ||K^{-1}||*\delta_d$$
$$\le ||V^{-1}||*||D^{n+1}||*||V||*||K^{-1}||\delta_d + ||K^{-1}||*\delta_d$$
$$= [1*(1+1/h)*(e^{\pi})*(2+h)+(1+1/h)]\delta_d < \tfrac{100}{h}*\delta_d$$

本程序中 h 的最小值为 1×10^{-6}, 因此舍入误差 $\Delta_2 \le 100\times10^{6}*\frac{1}{2}*10^{-15} = 5\times10^{-8}$ 综上, 龙格-库塔法的总误差限为: $\Delta_1+\Delta_2 \le 5.48\times10^{-8}$

6 计算代价和收敛速度

6.1 一致逼近法

计算代价

将输入的 x 归一化到区间 $[-1,1]$ 上, 需要两次乘除法, 两次加减法.

在计算插值多项式 $L_7(x)$ 的值时, 计算每一项 $\sin(\frac{(x_j+1)}{2})\Pi_{k\neq j}\frac{t-x_k}{x_j-x_k}$ 需要进行 8 次乘法,7 次除法和 14 次减法. 因此 8 项累加起来共使用了 64 次乘法, 56 次除法, 112 次减法和 8 次加法.

收敛速度

由误差分析模块可知, 一致逼近法的主要误差在方法误差. 在选取 n 个插值节点时, 方法误差为 $\frac{M_n}{n!}*\frac{1}{2^{n-1}}$. 因此收敛速度为 $n!*2^{n-1}$

6.2 龙格-库塔法

计算代价

此时迭代的每一步需要 14 次乘法和 15 次加法. 由于迭代时 h 的步长递减序列为 $0.01->0.001->0.0001->0.00001->0.000001$, 因此在区间 $[0,\pi]$ 上迭代的步数最长为 $314+1+5+9+2=331$ 次. 所以累加起来最多使用 4634 次加法和 4965 次乘法.

收敛速度 由误差分析模块可知, 龙格-库塔法的误差为 $5.48\times h^4$, 因此该方法为 4 阶收敛.

7 项目总结

本次项目让我们可以自选方法求取 $\sin(x)$ 的值, 一方面让我们巩固了课程所学知识, 另一方面也让我们对现在常用的科学计算软件的计算方法有了更深的了解, 因此对我们的理论知识和实践运用能力都有很大帮助.

从误差分析上可以看出, 利用函数逼近 (此处为插值逼近) 实现起来简单, 但是如果需要继续提高精度, 则需要修改插值节点, 因此没有很高的可扩展性; 而龙格-库塔法实现起来较为复杂, 但是只需要通过减小步长 h 就能够获得更高的精度, 因此扩展性更强.

从计算代价上来看, 由于函数 (插值) 逼近法只需要计算插值多项式的值, 因此计算代价明显小于需要多次迭代的龙格-库塔法.