




14. 變異數分析 Analysis of Variance

鄒慶士 (Ching-Shih Tsou)
台北商業技術學院資訊與決策科學所
E-mail : cstsou@mail.ntcb.edu.tw



One-way analysis of variance

- 前面使用 t 檢定來檢驗兩個母體的平均數是否相同，但是若欲檢驗兩個以上的母體，則必須兩兩比較，如此非常地耗時且會放大檢驗誤差。
- ANOVA是Analysis Of Variances的縮寫，由R. A. Fisher所提出的統計方法，可解決兩個以上的母體平均數是否相等之顯著性檢定。

© Vince Tsou, IDS, NTCB 100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫



One-way analysis of variance

- 單因子變異數分析，簡稱為one-way ANOVA，主要用於檢定三組或三組以上的獨立樣本觀察值，其母體平均數彼此間是否相等。
- 如前所述，獨立 t 檢定只能檢定兩組獨立樣本其母體平均數是否相等。



舉例說明

- 多位評審對獎學金的申請案進行評分，為了確保這些評審的評分標準是一致的，不會產生不公平的現象，校方必須檢定各個評審所做的評分是否有差異。



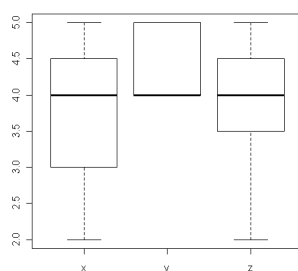
- 一開始在R中建立的三位評審的評分資料。

```
> x = c(4,3,4,5,2,3,4,5)
> y = c(4,4,5,5,4,5,4,4)
> z = c(3,4,2,4,5,5,4,4)
> scores = data.frame(x,y,z)
> boxplot(scores)
> |
```

建立資料表的內容

將三筆資料集成scores資料框架物件

製作盒鬚圖



© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

5



```
> scores = stack(scores)
> names(scores)
[1] "values" "ind"
```

- 堆疊起來的資料框架其變數名稱為 values，因子變數為ind，這些動作完成後我們就可以進行單因子變異數分析!

© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

6



- 變異數分析用以檢定兩個以上的母體平均數是否有差異，如果使用T檢定的方式兩兩比較，可能會增加型 I (Type I error) 與型 II (Type II error) 誤差，因此必須使用較嚴苛的ANOVA檢定，才能避免誤差在進行分析時無謂的增加。

```
> oneway.test(values ~ ind, data=scores, var.equal=T)
```

模型公式符號

以SCORES為資料

假設變異數相等



One-way analysis of means

```
data: values and ind  
F = 1.1308, num df = 2, denom df = 21, p-value = 0.3417
```

假設如下:

$H_0: U_1 = U_2 = U_3$ (評審所給的評分標準是一樣的)

$H_1: U_i$ 不全等, $i=1,2,3$ (評審所給的評分標準是不一樣的)

- 結果顯示，變異數分析的F檢定統計量值為1.1308，P值為0.3417>顯著性水準($\alpha=0.05$)，因此無法拒絕虛無假設，亦即評審的評分標準是一樣的。

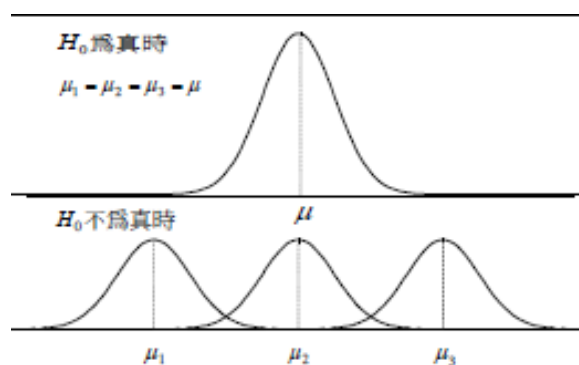


變異數分析的假設

- 假設因子對依變數的影響效果是固定的。
- 每個母體均服從常態分配。
- 變異數齊一性(Homogeneity)，即各母體的變異數均相等。
- 抽樣方法為簡單隨機抽樣，亦即自 k 個母體分別抽取獨立之隨機樣本。



虛無假設與對立假設





- 總平方和，代表每一筆資料與總平均之差異平方的總和，自由度為n-1。

$$\text{total SS} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2$$

- 組內平方和或稱誤差平方和，代表各組內的資料與該組平均數之差異平方的總和，自由度為n-p。

$$\text{within SS} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2$$

- 組間平方和，代表各組平均與總平均之差異平方的加權總和，其中權數為各組樣本數(n_j)，自由度為p-1。

$$\text{between SS} = \sum_j \sum_i (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = \sum_j n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = \text{treatment SS.}$$

© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

11



- 下列為主要的關係式：
total SS = within SS + between SS
- 檢定統計量為

$$F_0 = (\text{treatment SS}/P-1)/(\text{within SS}/n-p)$$

F_0 為檢定統計量，且在 H_0 為真的情況下， F_0 服從F分佈，自由度分別為p-1與 n-p。 $F_0 > F_{\alpha, k-1, k(n-1)}$ ，則拒絕虛無假設，反之則接受 H_0 。

© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

12



單因子變異數分析表如下

變異原因	平方和	自由度	均方	F_0
組間	$SS_R = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$	$k - 1$	$MS_R = \frac{SS_R}{k-1}$	$\frac{MS_R}{MS_E}$
組內	$SS_E = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$	$k(n - 1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{k(n-1)}$	
總和	$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$kn - 1$		

© Vince Tsou, IDS, NTCB

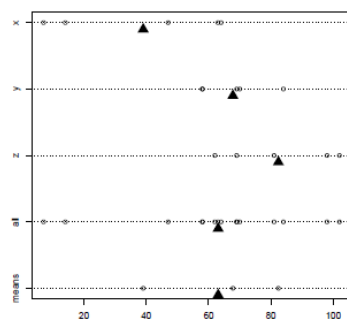
100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

13



舉例說明

- 圖55為一個點狀圖，分為有X、Y、Z三組隨機樣本。其中X的平均數為40，Y和Z的平均數為60，X、Y、Z的標準差均為10的平方。



© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

14



舉例說明(續)

```
x=rnorm(5,40,10)
y=rnorm(5,60,10)
z=rnorm(5,60,10)
data.frame(x,y,z)
```

各模擬五個標準常態的隨機數字

集成資料框架物件

	x	y	z
1	61.51440	56.66780	41.68414
2	40.11684	49.41073	67.20900
3	41.27864	69.20849	71.62350
4	43.32686	59.47866	70.21904
5	31.78542	79.41412	57.97735

- $H_0: U_1 = U_2 = U_3$
- $H_1: U_i$ 不全等, $i=1,2,3$



用 oneway.test 進行 ANOVA 檢定

- 將資料堆疊起來後重新命名為df，並進行 one-way test。

```
df=stack(data.frame(x,y,z))
oneway.test(values~ind,data=df,var.equal=T)
```

One-way analysis of means

```
data: values and ind
F = 4.2712, num df = 2, denom df = 12, p-value = 0.03974
```

- 結果顯示F值為4.2712，而P-value為0.03974。



用 anova 進行ANOVA檢定

```
> anova(lm(values~ind,data=df))
Analysis of Variance Table

Response: values
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
ind         2  1166.73   583.37   4.2712 0.03974 *
Residuals  12  1638.99   136.58
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- 變異數分析結果顯示，F值等於4.2712，
 $P=0.03974 < 0.05$ 。



用 aov 進行ANOVA檢定

```
> aov(lm(values~ind,data=df))
Call:
aov(formula = lm(values ~ ind, data = df))

Terms:
          ind Residuals
Sum of Squares  1166.734  1638.988
Deg. of Freedom      2      12

Residual standard error: 11.68684
Estimated effects may be unbalanced
```

- aov也是可以進行變異數分析的指令，但需以
summary彙總其結果。



舉例說明(續)-aov

```
> summary(aov(values~ind,data=df))
      Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
ind      2 1166.73   583.37   4.2712 0.03974 *
Residuals 12 1638.99   136.58
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- 結果顯示F值為4.2712，而P-value為0.03974，也與oneway.test和anova的檢定相同。



The Kruskal-Wallis Test

- 用來檢定K個獨立樣本是否來自不同的母群，也可以說是用來檢驗K個獨立樣本是否來自同一母群或平均數是否相等的無母數統計方法。
- 克-瓦單因子等級變異數分析，不需要符合F統計量的基本假設，即K個母體不須為常態分配，而其依變項不需要是等距或比率的變項，而是次序變項，其檢驗的是各組平均等級的差異。



The Kruskal-Wallis test

- 假設我們有K個樣本，其樣本數分別為 n_1, n_2, \dots, n_k 。K-W檢驗的分析步驟如下：
 - 將所有的資料合起來排序，然後計算它們的等級。
 - 分別計算各樣本的等級和。
 - 計算 H，其抽樣分配為卡方分配（df=k-1）

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

21



The Kruskal-Wallis test

```
> kruskal.test(values~ind,data=df)
```

```
Kruskal-Wallis rank sum test
```

```
data: values by ind
```

```
Kruskal-Wallis chi-squared = 8.82, df = 2, p-value = 0.01216
```

- 結果顯示，卡方檢定統計量為8.82，P-value = 0.01216 < 0.05，達到顯著水準，表示有顯著差異。所以拒絕虛無假設。其P-value與 oneway.test、anova、aov等不相同。
- $H_0: U_1=U_2=U_3$; $H_1: H_0$ 中至少有一等式不成立

© Vince Tsou, IDS, NTCB

100年度教育部補助技專校院建立
特色典範計畫

22

