ДЗ #7. Киселев Павел

Задача 1.

Докажите, что если $q(x)$ *положительно определенная квадратичная форма, то формула*

$$(x, y) = \frac{q(x) + q(y) - q(x-y)}{2}$$

задает скалярное произведение.

Решение:

Формула из условия задачи определяет положительно определенную билинейную симметрическую форму $\alpha(x, y)$:

$$\begin{gathered} q(x-y) = \alpha(x-y, x-y) = q(x) + q(y) - 2\alpha(x, y), \\ \alpha(x, y) = \frac{q(x) + q(y) - q(x-y)}{2}. \end{gathered}$$

Данная билинейная форма удовлетворяет свойствам скалярного проивзедения

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \alpha(y, x), & (1) \\ \alpha(x + \lambda x', y) &= \alpha(x, y) + \lambda\alpha(x', y), & (2) \\ \alpha(x, x) &> 0 \ \forall x \neq 0, & (3) \\ \alpha(x, x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0. & (4) \end{aligned}$$

Следовательно, формула

$$\frac{q(x) + q(y) - q(x-y)}{2} = \alpha(x, y)$$

действительно задает скалярное произведение.

Задача 2.

а) Докажите тождество параллелограмма

$$\frac{|x+y|^2 + |x-y|^2}{2} = |x|^2 + |y|^2.$$

Решение:

а) Произвольная норма может не удовлетворять тождеству параллелограмма. Если имелась в виду норма, порожденная скалярным произведением, то $\|x\|^2 = \alpha(x, x) = q(x)$ и

$$\begin{aligned} q(x+y) &= q(x) + q(y) + 2\alpha(x, y), \\ q(x-y) &= q(x) + q(y) - 2\alpha(x, y). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{q(x+y) + q(x-y)}{2} = q(x) + q(y) \Leftrightarrow \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Задача 3.

а) Докажите, что на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ будет положительно определена квадратичная форма $q(A) = \mathrm{tr}(A^\top A)$.

б) Какой симметрической билинейной форме соответствует эта квадратичная форма?

в) Найдите какой-нибудь ортогональный базис для этой квадратичной формы.

Решение:

а) Пусть a_i — вектор-столбцы матрицы A, тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} a_1^\top \\ a_2^\top \\ \vdots \\ a_n^\top \end{pmatrix}.$$

В данных определениях

$$\begin{aligned} q(A) = \mathrm{tr}(A^\top A) &= a_1^\top a_1 + a_2^\top a_2 + \dots + a_n^\top a_n = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{1i}^2 + \sum_{i=1}^n a_{2i}^2 + \dots + \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 = \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, квадратичная форма $q(A)$ положительно определена.

б) Эта квадратичная форма соответствует симметрической билинейной форме

$$\alpha(A, B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

в) Ортогональным базисом для α будет стандартный для матриц базис $\{E_{ij}\}$.

Задача 4.

Докажите, что условие $\alpha(v, v') = \varphi(v)(v')$ определяет взаимно однозначное соответствие между билинейными формами $\alpha : V \times V \to R$ и линейными отображениями $\varphi : V \to V^*$. Найдите связь между матрицей α в произвольном базисе пространства V и матрицей соответствующего ей φ относительно этого же базиса V и двойственного ему базиса V^*.

Решение:

Пусть $\{e_1, ..., e_n\}$ — произвольный базис V, $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ — сопряженный базис V^*. Учитывая, что V и V^*конечномерны, и их размерности равны, то они изоморфны, и $\varphi : V \to V^*$ — изоморфизм. Поставим отображению φ во взаимооднозначное соответствие его матрицу Φ. Тогда формулу α можно переписать в матричных обозначениях

$$\alpha(v, v') = \varphi(v)(v') = (\bar{v}')^\top \Phi \bar{v},$$

где $\bar{v}', \bar{v}$ — вектор-столбцы координат векторов v', v. Следовательно, $\alpha(v, v')$ также находится во взаимооднозначном соответствии с Φ.

И, следовательно, условие $\alpha(v, v') = \varphi(v)(v')$ определяет взаимооднозначное соответствие между билинейными формами $\alpha : V \times V \to R$ и линейными отображениями $\varphi : V \to V^*$.

Найдем связь с матрицей α. Билинейная форма однозначно определяется своей матрицей $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$. Формула билинейной формы может быть переписана в матричных обозначениях:

$$\alpha(v, v') = \bar{v}^T A \bar{v}'.$$

Следовательно, матрицы Φ и A связаны отношением

$$(\bar{v}')^\top \Phi \bar{v} = \bar{v}^T A \bar{v}'.$$

Задача 5.

Докажите, что в евклидовом пространстве $(U^\perp)^\perp = U$ для любого подпространства U.

<u>**Решение:**</u>

Пусть $V = \langle e_1, ..., e_n \rangle$ — евклидово пространство, $U = \langle e_1, ..., e_k \rangle$ — подпространство в нем $(k \le n)$. Тогда, по определению,

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{y \in V : \alpha(x, y) = 0 \ \ \forall x \in U\} = \\ &= \{y \in V : \alpha(e_i, y) = 0, \ \ i = 1, ..., k\}. \end{aligned}$$

Записав уравнения в координатной форме, получим систему линейных уравнений,

$$Ay = 0,$$

Тогда, учитывая что α в евклидовом пространстве положительно определена,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha(e_i, v) = \alpha\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, v\Big) \neq 0$$

для ненулевых λ_i, v. Следовательно, $\operatorname{rk} A = \dim U = k$, и пространство решений имеет размерность $n - k$, что означает $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - k$.

Далее, по определению,

$$(U^\perp)^\perp = \{z \in V : \alpha(y, z) = 0 \ \ \forall y \in U^\perp\}.$$

Заметим, что $(U^\perp)^\perp \supset U$. Действительно,

$$\forall y \in U^\perp, \forall z \in (U^\perp)^\perp : \alpha(y, z) = 0 \Rightarrow z \in U.$$

По той же формуле

$$\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = n - (n - k) = k.$$

Следовательно, $(U^\perp)^\perp = U$.