ДЗ #1. Киселев Павел

Задача 1.

Возьмем два произвольных вектора $a, b \in E^2$ с покомпонентными сложением и умножением на скаляр. Проверим, что отображение f линейно:

$$\begin{aligned} f(a+b) = f\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (a_1+b_1)\cos\varphi - (a_2+b_2)\sin\varphi \\ (a_1+b_1)\sin\varphi + (a_2+b_2)\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1\cos\varphi - a_2\sin\varphi \\ a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1\cos\varphi - b_2\sin\varphi \\ b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi \end{pmatrix} = f(a) + f(b) \end{aligned}$$

$$f(\lambda a) = f\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1\cos\varphi - \lambda a_2\sin\varphi \\ \lambda a_1\sin\varphi + \lambda a_2\cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1\cos\varphi - a_2\sin\varphi \\ a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda f(a)$$

Матрица отображения f есть

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл — поворот вектора на угол φ.

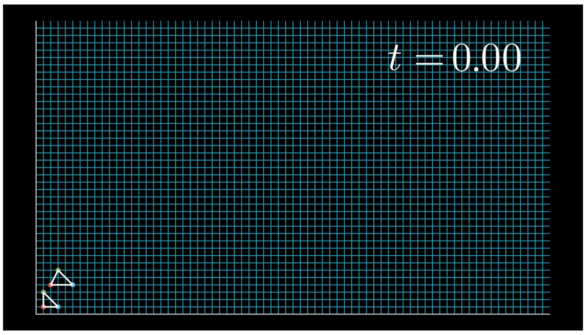
Задача 2.

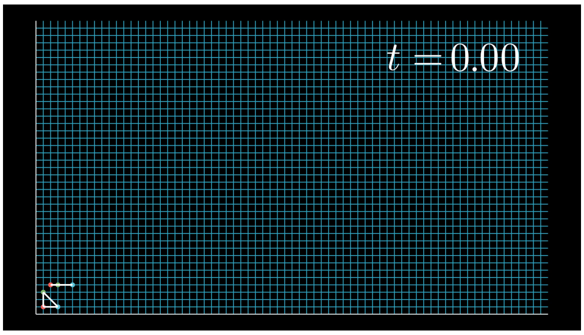
а) Поставим во взаимооднозначное соответствие каждому треугольнику вектор-столбец из его координат. Векторное пространство, очевидно, изоморфно $\mathbb{R}^6$ и, как следствие, удовлетворяет аксиомам векторного пространства. Нулем в нашем пространстве будет вырожденный в точку треугольник с координатами трех вершин $(0,0),(0,0),(0,0)$. Противоположным элементом — треугольник, отраженный относительно начала координат.

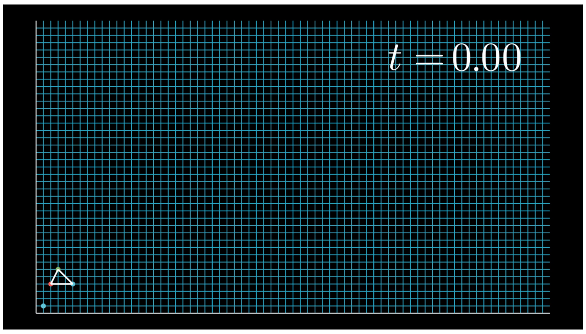
б) Прямая в наше пространстве — множество треугольников, заданных следующим образом:

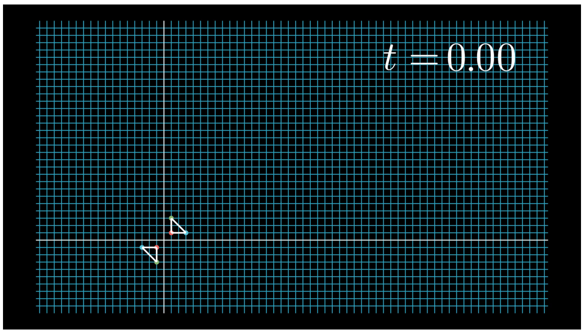
$$l = \{a + tb | t \in \mathbb{R}\}$$

где $a, b \in V$ (два треугольника). Ниже приведены несколько примеров для $t \geq 0$ (проигрываются при открытии редактируемой версии).









в) $\dim V = 6$, самый очевидный пример базиса — шесть вырожденных треугольников (на самом деле, отрезков):

$$\Big((1,0),(0,0),(0,0), \quad (0,1),(0,0),(0,0), \quad ..., \quad (0,0),(0,0),(0,1)\Big).$$

Задача 3.

Проверим, что функция tr линейная

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \operatorname{tr}(\alpha(a_{ij}) + \beta(b_{ij})) = \operatorname{tr}((\alpha a_{ij}) + (\beta b_{ij})) = \operatorname{tr}((\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}))\\ = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B).\end{aligned}$$

Далее, чтобы найти матрицу функции, представим произвольную матрицу как элемент векторного пространства $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ размерностью n^2. Базис в нем определим как $(E_{11}, E_{12}, ..., E_{nn})$.

Поставим в соответствие каждому вектору (т.е. произвольной матрице) столбец из его координат в базисе $(E_{11}, E_{12}, ..., E_{nn})$. Тогда функции tr можно поставить в соответствие матрицу (на самом деле, вектор)

$$(a_j)|a_j = \begin{cases}1, & \textit{при } j = 1 + (n+1)k \\ 0, & \textit{иначе}\end{cases},$$

где $k = 0, 1, ..., n-1$, которая суммирует координаты вектора исключительно по позициям, соответствующим $E_{11}, E_{22}, ..., E_{nn}$.

Задача 4.

а) Являются, т.к. множества Sym_n и Skew_n замкнуты относительно умножения на скаляр и сложения, а также наследуют все свойства данных операций.

б) Пересечением $\mathrm{Sym}_n \cap \mathrm{Skew}_n$ является нулевая матрица, т.к. одновременно должны выполнять да условия: $A = A^T, A = -A^T$. Нуль-матрица, очевидно, является подпространством в $\mathrm{Mat}_{n\times n}$, Sym_n, Skew_n.

в) Любую матрицу можно представить как сумму симметричной и антисимметричной матрицы:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

где $A + A^T = (A + A^T)^T$ — симметричная матрица, $A - A^T = -(A - A^T)^T$ — антисимметричная матрица. Следовательно, множество $\mathrm{Sym}_n + \mathrm{Skew}_n$ совпадает со всем $\mathrm{Mat}_{n\times n}$.

Задача 5.

$$\begin{gathered}(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)\\ (a\phi)(x) = a\phi(x)\end{gathered}$$

Первое, что мы должны требовать:

$$\phi(x), \psi(x) \in V^* \to (\phi + \psi)(x) \in V^* \tag{1}$$

$$\phi(x) \in V^* \to (a\phi)(x) \in V^* \tag{2}$$

Нам дано, что V^* — множество всех линейных отображений из V в $\mathbb{R}$, следовательно

$$\forall \phi \in V^*, \forall x, y \in V \ \ \to \ \ \phi(ax + by) = a\phi(x) + b\phi(y)$$

Проверим первое утверждение:

$$\begin{aligned}
(\phi + \psi)(ax + by) &= \phi(ax + by) + \psi(ax + by) \\
&= a\phi(x) + b\phi(y) + a\psi(x) + b\psi(y) \\
&= a\phi(x) + a\psi(x) + b\phi(y) + b\psi(y) \\
&= a(\phi(x) + \psi(x)) + b(\phi(y) + \psi(y)) \\
&= a(\phi + \psi)(x) + b(\phi + \psi)(x)
\end{aligned}$$

Действительно, $(\phi + \psi)(x)$ — линейная функция, следовательно $(\phi + \psi)(x) \in V^*$.

Проверим второе утверждение:

$$(a\phi)(x) = a\phi(x) = \phi(ax)$$

Действительно, $(a\phi)(x)$ — линейная функция, следовательно $(a\phi)(x) \in V^*$.

Далее проверим аксиомы линейного пространства:

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x) = \psi(x) + \phi(x) = (\psi + \phi)(x)$$

$$((\phi + \psi) + \theta)(x) = (\phi + \psi)(x) + \theta(x) = \phi(x) + \psi(x) + \theta(x) = \phi(x) + (\psi(x) + \theta(x)) = (\phi + (\psi + \theta))(x)$$

$$\forall \phi(x) \ \ \exists 0 : (\phi + 0)(x) = \phi(x) + 0 = \phi(x)$$

$$\forall \phi(x) \ \ \exists (-\phi)(x) : (\phi + (-\phi))(x) = \phi(x) + (-\phi)(x) = \phi(x) - \phi(x) = 0$$

$$a(\phi + \psi)(x) = a(\phi(x) + \psi(x)) = a\phi(x) + a\psi(x)$$

$$(a + b)\phi(x) = \phi((a + b)x) = \phi(ax + bx) = a\phi(x) + b\phi(x)$$

$$(ab)\phi(x) = a(b\phi)(x)$$

$$1\phi(x) = \phi(x), \quad 0\phi(x) = 0$$

Здесь нуль и нуль-вектор, единица и единица-вектор совпадают. Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что V^* — линейное пространство.

Описать $\mathbb{R}^*$ можно как одномерное пространство над $\mathbb{R}$. Пример базиса — $(\cdot 1)$, т.е.пространство включает в себя все возможные операции умножения на скаляр.