ДЗ #4. Киселев Павел

Задача 1.

Докажите, что след является линейным функционалом на пространстве матриц, и найдите его координатную строку для какого-нибудь базиса.

Решение:

Функция $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ линейна:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \mathrm{tr}(\alpha(a_{ij}) + \beta(b_{ij})) = \mathrm{tr}((\alpha a_{ij}) + (\beta b_{ij})) = \mathrm{tr}((\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})) \\ = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha\mathrm{tr}(A) + \beta\mathrm{tr}(B),\end{aligned}$$

и ее значения лежат в $\mathbb{R}$, следовательно, tr — линейный функционал. Зафиксируем базис

$$(E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n},\ E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n},\ ...,\ E_{n1}, E_{n2}, ..., E_{nn}).$$

Тогда, линейному функционалу tr соответствует координатная строка

$$(1, 0, ..., 0,\ 0, 1, ..., 0,\ ...,\ 0, 0, ..., 1).$$

Задача 2.

Опишите инвариантные подпространства оператора, заданного верхнетреугольной матрицей.

Решение:

Пусть оператору $\mathscr{A} : V \to V$ поставлена в соответствие матрица A для некоторых базисов $(e_1, ..., e_n)$ и $(f_1, ..., f_n)$.

Собственные значения оператора лежат на главной диагонали матрицы этого оператора. Действительно, имея матрицу A оператора в верхнетреугольной форме, вычтем из нее $a_{ii}E$:

$$A - a_{ii}E.$$

Столбцам полученной матрицы поставим в соответствие векторы a'_i, тогда

$$\langle a'_1, a'_2, ..., a'_i\rangle = \langle f_1, f_2, ..., f_{i-1}\rangle.$$

Следовательно, $a'_1, a'_2, ..., a'_i$ линейно зависимы. В таком случае,

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{A} - a_{ii}\mathscr{E}) > \{0\}.$$

Следовательно, a_{ii} — собственное значение оператора $\mathscr{A}$, а $\mathrm{Ker}(\mathscr{A} - a_{ii}\mathscr{E})$ — собственное подпространство оператора $\mathscr{A}$.

Задача 3.

Вычислите n-ю степень матрицы

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Решение:</u>

$$J_1 = J_0^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{n-1} = J_0^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(J_0 соответствует оператору дифференцирования многочлена степени не выше n в базисе $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, ..., \frac{x^n}{n!}\}$).

Задача 4.

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_n$ есть линейное пространство многочленов степени не больше n. Докажите, что отображение дифференцирования (взятия производной) $D : V \to V$,

$$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

линейно, и найдите его матрицу в базисе $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
&D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) = \\
&= D((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n) \\
&= (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x + \cdots + n(a_n + b_n)x^{n-1} \\
&= D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + D(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D(\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)) = \\
&= D(\lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \dots + \lambda a_nx^n)) \\
&= \lambda a_1 + 2\lambda a_2x + \dots + n\lambda a_nx^{n-1} \\
&= \lambda(a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}) \\
&= \lambda D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)
\end{aligned}$$

Следовательно, отображение дифференцирования линейно. Его матрица в базисе $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$ есть

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.

По аналогии с многочленами определим оператор дифференцирования $D : \mathbb{R}[\![x]\!] \to \mathbb{R}[\![x]\!]$ *правилом*

$$D(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) = a_1x^0 + (2a_2)x^1 + \cdots.$$

Найдите его собственные векторы и собственные значения.

Решение:

С одной стороны, по определению

$$D(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) = a_1x^0 + (2a_2)x^1 + \cdots.$$

С другой стороны, для собственного вектора должно выполняться два условия:

1. $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots \neq 0$,
2. для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) &= \lambda(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots) \\ &= \lambda a_0x^0 + \lambda a_1x^1 + \lambda a_2x^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_1 = \lambda a_0,\ 2a_2 = \lambda a_1,\ 3a_3 = \lambda a_2,\ ...,\ na_n = \lambda(n-1),\ ... .$$

Тогда,

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= \lambda a_0 \\ a_2 &= \frac{\lambda a_1}{2} = \frac{\lambda(\lambda a_0)}{2!} = \lambda^2 \frac{a_0}{2!} \\ a_3 &= \frac{\lambda a_2}{3} = \lambda^3 \frac{a_0}{3!} \\ &\vdots \\ a_n &= \lambda^n \frac{a_0}{n!}. \end{aligned}$$

Собственный вектор имеет вид:

$$\begin{aligned} &a_0x^0 + \lambda a_0x^1 + \lambda^2 \frac{a_0}{2!}x^2 + \lambda^3 \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots + \lambda^n \frac{a_0}{n!}x^n + \cdots = \\ &= a_0(\lambda x)^0 + a_0(\lambda x)^1 + \frac{a_0}{2}(\lambda x)^2 + \frac{a_0}{3!}(\lambda x)^3 + \cdots + \frac{a_0}{n!}(\lambda x)^n + \cdots \\ &= a_0\left(\frac{(\lambda x)^0}{0!} + \frac{(\lambda x)^1}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= a_0e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

где $e^{\lambda x} = \frac{(\lambda x)^0}{0!} + \frac{(\lambda x)^1}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + \cdots$ по определению. Т.е. бесконечное множество всех собственных векторов оператора D состоит из векторов вида

$$a_0 e^{\lambda x} | a_0 \in \mathbb{R} \setminus 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$