ДЗ #9. Киселев Павел

Задача 1.

Какова матрица линейного оператора, который действует в трехмерном пространстве и задается тензором

$$(e^1 + e^3) \otimes e_1 + e^2 \otimes (e_1 + 2e_3)?$$

Решение:

Раскроем скобки.

$$(e^1 + e^3) \otimes e_1 + e^2 \otimes (e_1 + 2e_3) = e^1 \otimes e_1 + e^2 \otimes (e_1 + 2e_3) + e^3 \otimes e_1.$$

С учетом $(e^i \otimes e_j)(x) = e^i(x)e_j = x_i e_j$, матрица оператора есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Элемент тензорного произведения векторных пространств $U \otimes V$ называется разложимым, если он представим в виде $u \otimes v$, где $u \in U, v \in V$. Приведите пример элемента, не являющегося разложимым.

Решение:

Таким элементом является, например, $\sum_i e^i \otimes e_i$ при $U = V^*, V = V$ и $\dim V > 1$.

Задача 3.

Даны операторы φ и ψ с матрицами соответственно A и B. Найдите матрицу оператора $\varphi \otimes \psi$.

Решение:

Пусть φ действует на $V = \langle e_1, ..., e_n \rangle$, ψ действует на $W = \langle f_1, ..., f_m \rangle$ и

$$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w).$$

Тогда оператор $\varphi \otimes \psi$ действует на $V \otimes W = \langle e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, ..., e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, ..., e_2 \otimes f_m, ..., e_n \otimes f_1, e_n \otimes f_2, ..., e_n \otimes f_m \rangle$. Рассмотрим действие оператора $\varphi \otimes \psi$ на базисных векторах:

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)(e_j \otimes f_l) &= \varphi(e_j) \otimes \psi(f_l) = \\ &= \Big(\sum_i a_{ij} e_i\Big) \otimes \Big(\sum_k b_{kl} f_k\Big) = \\ &= \sum_{i,k} a_{ij} b_{kl}\ e_i \otimes f_k.\end{aligned}$$

Тогда первым m векторам $e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, ..., e_1 \otimes f_m$ соответствуют

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)(e_1 \otimes f_k) &= \sum_{i,k} a_{i1} b_{kl}\ e_i \otimes f_k = \\ &= a_{11} \sum_k b_{lk}\ e_1 \otimes f_k + a_{21} \sum_k b_{lk}\ e_2 \otimes f_k + \\ &\quad + \cdots + a_{n1} \sum_k b_{lk}\ e_n \otimes f_k.\end{aligned}$$

Аналогично для других блоков матрицы. По итогу, матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Задача 4.

Докажите, что $T^p_q \otimes T^l_m \cong T^{p+l}_{q+m}$.

Решение:

Искомый изоморфизм есть

$$\otimes : T^p_q \times T^l_m \to T^{p+l}_{q+m},$$
$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_q,\ x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+l} \otimes \alpha_{q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{q+m}) \vdash$$

Задача 5.

Найдите размерность образа линейного оператора, которому соответствует разложимый тензор.

Решение:

Пусть линейный оператор соответствует тензору $\alpha \otimes v \ (\alpha \in V^*, v \in V)$ и

$$\forall x \in V: \quad (\alpha \otimes v)(x) = \alpha(x)v.$$

Тогда, очевидно, размерность образа $= 1$.

Задача 6.

Какому оператору соответствует тензор $\sum_i e^i \otimes e_i \in V^* \otimes V$?

Решение:

Пусть $(e^i \otimes e_i)(x) = e^i(x)e_i = x_i e_i$. Тогда тензору $\sum_i e^i \otimes e_i$ соответствует оператор id:

$$\forall x \in V: \quad \Big(\sum_i e^i \otimes e_i\Big)(x) = \sum_i x_i e_i = x = id(x).$$

Задача 7.

Отображение вычисления сопоставляет паре $(\varphi, v) \in V^* \times V$ из линейной формы и вектора значение $\varphi(v) \in R$ этой линейной формы на этом векторе. Оно билинейно и потому соответствует некоторому линейному отображению $V^* \otimes V \to R$. В то же время элементы тензорного произведения $V^* \otimes V$ однозначно (и линейно) соответствуют линейным операторам $V \to V$, так что линейное отображение выше сопоставляет (линейным образом) каждому такому линейному оператору число. Какую уже известную вам операцию над матрицами мы только что описали?

Решение:

Все возможные линейные отображения $V^* \otimes V \to \mathbb{R}$ есть линейные формы на векторном пространстве $V^* \otimes V$, т.е. они являются элементами векторного пространства $(V^* \otimes V)^*$. В то же время элементы $V^* \otimes V$ однозначно и линейно соответствуют линейным операторам $V \to V$, т.е.

$$V^* \otimes V \cong \mathcal{L}(V).$$

Представим каждый элемент $T \in V^* \otimes V$ в виде

$$T = t_i^j e^i \otimes e_j.$$

Тогда частным случаем линейной формы на $V^* \otimes V$ может быть оператор

$$\alpha : V^* \otimes V \to \mathbb{R}, \quad t_i^j e^i \otimes e_j \mapsto t_i^i,$$

который соответствует операции взятия следа матрицы линейного отображения, соответствующего тензору $T \in V^* \otimes V$.