ДЗ #6. Киселев Павел

Задача 1.

Решите уравнение $x^2 - 2x + E = 0$ *в квадратных матрицах размера* 2×2*. Решение можно находить в удобном базисе.*

Решение:

Найдем такую матрицу, для которой $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ является аннулирующим многочленом. Такая матрица должна состоять из жордановых клеток порядка не выше двух и с собственным значением $\lambda_i = 1$. Тогда многочлен $(x-1)^2$ будет аннулировать каждую из клеток в отдельности, и, следовательно, всю матрицу в целом.

Подходящими жордановыми клетками являются:

$$(1), \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицами размера 2×2, аннулирующими многочлен, тогда являются:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Пусть T^n*— множество всех полилинейных форм* $V^n \to \mathbb{C}$ *с* n *аргументами на линейном пространстве* V*. Докажите, что* T^n *с поточечными сложением и умножением на число — линейное пространство, найдите его размерность и базис.*

Решение:

Пусть при сложении полилинейных форм и умножении их на числа соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, пространство полилинейных отображений изоморфно пространству многомерных матриц. Базису пространства матриц, состоящему из матриц с единицей в позиции $(i_1, i_2, ..., i_n)$ и нулями в остальных местах, отвечает базис пространства полилинейных отображений, состоящий из отображений

$$\delta_{(i_1, i_2, ..., i_n)}(v_1, v_2, ..., v_n) = x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_n}^{(n)},$$

где $x_{i_1}^{(1)}$ — i_1-я координата вектора v_1 и так далее. Следовательно, $\dim T^n = n^n$.

Докажем, что T^n — линейное пространство. Пусть α, β — полилинейные формы, тогда

$$\alpha(v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} A_{(i_1, i_2, ..., i_n)} x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n},$$
$$\beta(v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} B_{(i_1, i_2, ..., i_n)} x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n}.$$

Матрица оператора $(a\alpha + b\beta)$ есть

$$aA + bB = \left(aA_{(i_1, i_2, ..., i_n)} + bB_{(i_1, i_2, ..., i_n)} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
(a\alpha + b\beta)(v_1, v_2, ..., v_n) \\
&= \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} (aA_{(i_1, i_2, ..., i_n)} + bB_{(i_1, i_2, ..., i_n)}) x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n} \\
&= \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} aA_{(i_1, i_2, ..., i_n)} x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n} + \\
&\quad \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} bB_{(i_1, i_2, ..., i_n)} x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n} \\
&= a \cdot \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} A_{(i_1, i_2, ..., i_n)} x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n} + \\
&\quad b \cdot \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n)} B_{(i_1, i_2, ..., i_n)} x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdots x^{(n)}_{i_n} \\
&= a \cdot \alpha(v_1, v_2, ..., v_n) + b \cdot \beta(v_1, v_2, ..., v_n).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(a\alpha + b\beta)(cv_1, ..., v_n) &= a \cdot \alpha(cv_1, v_2, ..., v_n) + b \cdot \beta(cv_1, v_2, ..., v_n) \\
&= (ac) \cdot \alpha(v_1, v_2, ..., v_n) + (bc) \cdot \beta(v_1, v_2, ..., v_n) \\
&= c[a \cdot \alpha(v_1, v_2, ..., v_n) + b \cdot \beta(v_1, v_2, ..., v_n)] \\
&= c \cdot (a\alpha + b\beta)(v_1, ..., v_n),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a\alpha + b\beta)(v_1 + v_1', ..., v_n) &= a \cdot \alpha(v_1 + v_1', ..., v_n) + b \cdot \beta(v_1 + v_1', ..., v_n) \\
&= a \cdot [\alpha(v_1, ..., v_n) + \alpha(v_1', ..., v_n)] + \\
&\quad\; b \cdot [\beta(v_1, ..., v_n) + \beta(v_1', ..., v_n)] \\
&= a \cdot \alpha(v_1, ..., v_n) + b \cdot \beta(v_1, ..., v_n) \\
&\quad\; a \cdot \alpha(v_1', ..., v_n) + b \cdot \beta(v_1', ..., v_n) \\
&= (a\alpha + b\beta)(v_1, ..., v_n) + (a\alpha + b\beta)(v_1', ..., v_n).
\end{aligned}
$$

Следовательно, оператор $(a\alpha + b\beta)$ является полилинейной формой. В таком случае, множество полилинейных форм T^n с определенными выше операциями умножения и сложения замкнуто относительно них.

Далее проверим аксиомы линейного пространства (каждой операции над полилинейными формами соответствует операция над матрицами).

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in T^n, \;\; \forall A, B, \Gamma \in \mathrm{Mat}_{n^n}, \;\; \forall c, d \in \mathbb{C}$:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad [A + B = B + A]$;
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \quad [(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)]$;
3. $\forall \alpha \; \exists 0 \in T^n : \;\; \alpha + 0 = \alpha \quad [\forall A \; \exists 0 \in \mathrm{Mat}_{n^n} : \;\; A + 0 = A]$;
4. $\forall \alpha \; \exists (-\alpha) : \;\; \alpha + (-\alpha) = 0 \quad [\forall A \; \exists (-A) \in \mathrm{Mat}_{n^n} : \;\; A + (-A) = 0]$;
5. $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta \quad [c(A + B) = cA + cB]$;
6. $(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha \quad [(c + d)A = cA + dA]$;
7. $(cd)\alpha = c(d\alpha) \quad [(cd)A = c(dA)]$;
8. $1\alpha = \alpha \quad [1A = A]$.

Следовательно, T^n с поточечными сложением и умножением на число — линейное пространство, что напрямую следует из изоморфизма пространству многомерных матриц Mat_{n^n}.

Задача 3.

Для квадратичной формы $q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$:

а) найдите соответствующую симметрическую билинейную форму;

б) найдите канонический вид;

в) исследуйте положительную определенность и найдите индексы инерции.

Решение:

а) Соответствующая симметрическая билинейная форма есть

$$
\begin{aligned}
\alpha(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\
&= \frac{1}{2}[2(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 - 4(x_1+y_1)(x_2+y_2) \\
&\quad - 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 2y_1^2 - y_2^2 + 4y_1y_2] \\
&= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 1x_2y_2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\alpha(x,y)$ имеет матрицу

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

б) Пусть квадратичная форма $q(x)$ имеет вид $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ в некотором базисе (e_1, e_2). Найдем ортогональный базис (f_1, f_2), в котором квадратичная форма будет иметь канонический вид.

Пусть $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 + \lambda e_1$. Найдем λ, удовлетворяющее условию ортогональности

$$
\alpha(f_1, f_2) = 0.
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\alpha(f_1, f_2) &= \alpha(e_1, e_2 + \lambda e_1) \\
&= \alpha(e_1, e_2) + \lambda\alpha(e_1, e_1) \\
&= -2 + \lambda \cdot 2,
\end{aligned}
$$

где $\alpha(e_i, e_j) = a_{ij}$. Следовательно, $\lambda = 1$ и ортогональный базис есть

$$
\begin{aligned}
f_1 &= e_1, \\
f_2 &= e_1 + e_2.
\end{aligned}
$$

Матрица квадратичной формы A' в базисе (f_1, f_2) определяется соотношением

$$
A' = C^\top A C,
$$

где C — матрица перехода в базис (e_1, e_2) из базиса (f_1, f_2), а именно

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$C^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, канонический вид квадратичной формы есть

$$q(x) = 2x_1^2 - x_2^2.$$

в) Квадратичная форма не вляется ни положительно определенной, ни отрицательно определенной. Положительный индекс инерции $k = 1$, отрицательный индекс инерции $l = 1$.

Задача 4.

Найдите все аннулирующие многочлены

а) оператора умножения на $\lambda \in C$*;*

б) произвольного диагонализуемого оператора.

<u>**Решение:**</u>

а) Минимальный аннулирующий многочлен оператора $\mathscr{A}$ умножения на $\lambda \in C$ есть

$$m_{\mathscr{A}} = (t - \lambda).$$

Любой другой аннулирующий многочлен получается умножением минимального на произвольный многочлен $p(t) \neq 0$. Следовательно, все аннулирующие многочлены есть многочлены вида

$$f_{\mathscr{A}} = (t - \lambda) \cdot p(t), \quad p(t) \neq 0.$$

б) Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_s$ — все различные собственные значения диагонализируемого оператора $\mathscr{A}, m_1, ..., m_s = 1$ — максимальный порядок жордановых клеток с собственным значением λ_i.

Тогда минимальный аннулирующий многочлен оператора $\mathscr{A}$ есть

$$m_{\mathscr{A}} = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_s).$$

Любой другой аннулирующий многочлен получается умножением минимального на произвольный многочлен $p(t) \neq 0$. Следовательно, все аннулирующие многочлены есть многочлены вида

$$f_{\mathscr{A}} = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_s)\cdot p(t), \quad p(t) \not= 0.$$

Задача 5.

а) Докажите, что у любого оператора есть аннулирующий многочлен (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) степени не выше размерности пространства, в котором этот оператор действует.

б) Приведите пример оператора, имеющего аннулирующий многочлен степени ниже размерности пространства, в котором этот оператор действует, и оператора, не имеющего такого аннулирующего многочлена.

Решение:

а) Пусть оператор $\mathscr{A}$ действует на векторное пространство V, $\dim V = n$.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_s$ — все *различные* собственные значения оператора $\mathscr{A}$, $m_1, ..., m_s$ — максимальный порядок жордановых клеток с собственным значением λ_i в жордановой форме матрицы оператора $\mathscr{A}$ $(\sum_{i=1}^s m_i \le n)$. Рассмотрим многочлен

$$m_{\mathscr{A}}(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\lambda_i)^{m_i}.$$

Пусть оператор $\mathscr{A}$ действует на произвольное векторное пространство V, тогда справедливо следующее утверждение:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V^{\lambda_i}, \;\; \forall x \in V : x = x_1 + x_2 + \cdots x_k \;\; (x_i \in V^{\lambda_i}),$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — все собственные значения оператора $\mathscr{A}$ (возможно, *повторяющиеся*). Проверим, является ли $m_{\mathscr{A}}$ аннулирующим многочленом для оператора $\mathscr{A}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in V: \quad & (\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{m_1}(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{m_2}\cdots(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{m_s}x \\
=&(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{m_1}(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{m_2}\cdots(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{m_s}(x_1+x_2+\cdots+x_k) \\
=&(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{m_1}(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{m_2}\cdots(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{m_s}x_1+ \\
+&(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{m_1}(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{m_2}\cdots(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{m_s}x_2+ \\
&\cdots \\
+&(\mathscr{A}-\lambda_1\mathscr{E})^{m_1}(\mathscr{A}-\lambda_2\mathscr{E})^{m_2}\cdots(\mathscr{A}-\lambda_s\mathscr{E})^{m_s}x_k = 0,
\end{aligned}$$

т.к. $(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{m_i}x_j = 0$ для x_j, отвечающему собственному значению λ_i. Следовательно, $\prod_{i=1}^s(t-\lambda_i)^{m_i}$, — аннулирующий многочлен степени не выше размерности пространства.

б) *Пример оператора, имеющего аннулирующий многочлен степени ниже размерности пространства:* любой оператор с повторяющимися собственными значениями.

Пример оператора, не имеющего такого аннулирующего многочлена: любой диагонализируемый оператор с $n = \dim V$ различными собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_n$.