ДЗ #5. Киселев Павел

Задача 1.

а) Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathscr{D}_x$, действующего в пространстве многочленов от переменной x степени не выше n. Найдите его ЖНФ.

б) Рассмотрим оператор $\mathscr{D}_x + \mathscr{D}_y$, действующий в пространстве многочленов от двух переменных x, y степени не выше двух. Найдите его матрицу в базисе мономов, а также его ЖНФ.

Решение:

а) Оператор дифференцирования $\mathscr{D}_x$ — нильпотентный высоты $m = n + 1$, с единственным собственным значением $\lambda = 0$. Корневое подпространство

$$V^\lambda = \mathrm{Ker}\mathscr{D}_x^m,$$

отвечающее данному собственному значению заполняет все пространство V. Следовательно,

$$V = \langle \mathscr{D}^n e, \mathscr{D}^{n-1} e, ..., \mathscr{D}e, e\rangle = \langle 1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, ..., \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \frac{x^n}{n!}\rangle.$$

В выбранном жордановом базисе оператор $\mathscr{D}_x$ имеет матрицу

$$D_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Пусть $\mathscr{D} = \mathscr{D}_x + \mathscr{D}_y$. В базисе мономов

$$1, x, y, xy, \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}$$

оператору $\mathscr{D}$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Пусть $\mathscr{N}$ — нильпотентный оператор в конечномерном пространстве V, и k — наименьшее число такое, что $\mathscr{N}^k = 0$. Докажите, что $k \leq \dim V$.

Решение:

Предположим $k > \dim V$.

По определению

$$\mathscr{N}^k = 0, \quad \mathscr{N}^{k-1} \neq 0.$$

Следовательно, в пространстве V существует система из k линейно независимых векторов

$$e, \mathscr{N}e, \mathscr{N}^2 e, ..., \mathscr{N}^{k-1}e.$$

Но $\dim V =$ максимальному количеству линейно независимых векторов. Противоречие.

Задача 3.

Докажите, что любой проектор диагонализуем.

Решение:

Для любого проектора $\mathscr{P}$ имеем

$$V = \mathrm{Im}\mathscr{P} \oplus \mathrm{Ker}\mathscr{P} = \langle e_1, ..., e_k \rangle \oplus \langle e_{k+1}, ..., e_n \rangle,$$

где $n = \dim V$. Т.к.

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\mathscr{P} : \mathscr{P}x = 0,$$
$$\forall y \in \mathrm{Im}\mathscr{P} : \mathscr{P}y = y,$$

оператор $\mathscr{P}$ в базисе $(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$ имеет матрицу

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица порядка k. Матрица P диагональна.

Задача 4.

Найдите ЖНФ матрицы

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

<u>**Решение:**</u>

Система уравнений

$$\Pi x = \lambda x, \quad x \neq 0$$

сводится к уравнению в λ

$$\sin^2\varphi + (\cos\varphi - \lambda)^2 = 0.$$

Корнями уравнения являются

$$\lambda_1 = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi,$$
$$\lambda_2 = \cos\varphi - i \cdot \sin\varphi.$$

Собственными векторами являются $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0,$$
$$\begin{pmatrix} i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & i\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0.$$

В базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ЖНФ матрицы Π есть

$$J_\Pi = \begin{pmatrix} \cos\varphi + i\sin\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi - i\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Задача 5.

Докажите, что каждый оператор в комплексном векторном пространстве представляется в виде суммы нильпотентного и диагонализуемого (разложение Жордана–Шевалле).

<u>**Решение:**</u>

Любому оператору в комплексном векторном пространстве можно поставить в соответствие матрицу в жордановой нормальной форме. Данная матрица есть сумма диагональной матрицы и матрицы с нулями на главной диагонали и ниже нее:

$$A = A_D + A_N.$$

Первая есть матрица диагонализируемого оператора, ограничение которого на корневые подпространства V^{λ_i} действует умножением на λ_i векторов из него.

Вторая есть матрица нильпотентного оператора, т.к. для матрицы такого вида существует $m \in \mathbb{Z}_+$ такой, что$A_N^m = 0$.

Т.к.

$$\varphi : \mathrm{Mat}_{n\times n} \to \mathcal{L}(V)$$

изоморфизм,

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_D + \mathscr{A}_N.$$

Следовательно, каждый оператор в комплексном векторном пространстве представляется в виде суммы нильпотентного и диагонализуемого.