ДЗ #8. Киселев Павел

Задача 1.

Пусть $\omega \in \Lambda^{2k+1}$. *Докажите, что* $\omega \wedge \omega = 0$. *Верно ли это для* $\omega \in \Lambda^{2k}$*?*

Решение:

Пусть $k = 1, 2, ...$, т.к. при $k = 0$ утверждение не имеет смысла. Рассмотрим общий случай. Пусть $u \in \Lambda^p(V), v \in \Lambda^q(V)$, тогда

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u,$$

т.к. для перестановки u и v нужно переставить каждую компоненту v (q штук) p раз. (Или каждую компоненту u (p штук) q раз).

В случае, если компонент из u содержится в v, $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u = 0$. Покажем это в экстремальном случае $u = v = \omega \in \Lambda^{2k+1}$:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k+1}) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k+1}) = \\ &= (-1)^{2k} (x_1 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{2k}) \wedge (x_{2k+1} \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k+1}) = \\ &= (-1)^{2k+1} (x_1 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{2k}) \wedge (x_{2k+1} \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k+1}) = 0. \end{aligned}$$

(Сперва делаем $2k$ перестановок, далее еще одну — меняем местами x_1 с x_1).

Для $\omega \in \Lambda^{2k}$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k}) \wedge (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k}) = \\ &= (-1)^{2k-1} (x_1 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{2k-1}) \wedge (x_{2k} \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k}) = \\ &= (-1) (x_1 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{2k-1}) \wedge (x_{2k} \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k}) = \\ &= (-1)^2 (x_1 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{2k-1}) \wedge (x_{2k} \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{2k}) = 0. \end{aligned}$$

(Сперва делаем $2k - 1$ перестановок, далее еще одну — меняем местами x_1 с x_1).

Задача 2.

Опишите пространство кососимметрических билинейных форм в $\mathbb{R}^2$ *и* $\mathbb{R}^3$.

Решение:

Пусть f — кососимметрическая билинейная форма в $\mathbb{R}^2$. Тогда,

$$
\begin{aligned}
\forall a, b \in \mathbb{R}^2 : f(a,b) &= f(a_1e_1 + a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2) = \\
&= a_1b_2f(e_1,e_2) + a_2b_1f(e_2,e_1) = \\
&= a_1b_2f(e_1,e_2) - a_2b_1f(e_1,e_2) = \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)f(e_1,e_2) = \\
&= \det A \cdot f(e_1,e_2),
\end{aligned}
$$

где

$$
(a,b) = (e_1,e_2)A = (e_1,e_2)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.
$$

Следовательно, пространство кососимметрических билинейных форм в $\mathbb{R}^2$ имеет базис $\{f(e_1,e_2)\}$, размерность пространства — 1.

Пусть f — кососимметрическая билинейная форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда,

$$
\begin{aligned}
\forall a, b \in \mathbb{R}^3 : f(a,b) &= f(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = \\
&= a_1b_2f(e_1,e_2) + a_1b_3f(e_1,e_3) + a_2b_1f(e_2,e_1) + \\
&+ a_2b_3f(e_2,e_3) + a_3b_1f(e_3,e_1) + a_3b_2f(e_3,e_2) = \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)f(e_1,e_2) + (a_1b_3 - a_3b_1)f(e_1,e_3) + \\
&+ (a_2b_3 - a_3b_2)f(e_2,e_3).
\end{aligned}
$$

Следовательно, пространство кососимметрических билинейных форм в $\mathbb{R}^3$ имеет базис $\{f(e_1,e_2), f(e_1,e_3), f(e_2,e_3)\}$, размерность пространства — $3 = \binom{3}{2}$.

Задача 3.

Докажите, что билинейная форма α кососимметрична, $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)\ \forall x, y$, тогда и только тогда, когда она равна нулю при равных значениях аргументов, $\alpha(x,x) = 0\ \forall x$.

Решение:

$(\Rightarrow)$ Пусть $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)\ \forall x, y$, тогда при $y = x$

$$
\alpha(x,x) = -\alpha(x,x) = 0.
$$

$(\Leftarrow)$ Пусть $\alpha(x,x) = 0\ \forall x$, тогда при $x = x + y$

$$\begin{aligned}0=\alpha(x+y,x+y)&=\alpha(x,x)+\alpha(y,y)+\alpha(x,y)+\alpha(y,x)=\\&=0+0+\alpha(x,y)+\alpha(y,x)=\\&=\alpha(x,y)+\alpha(y,x).\end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha(x,y)=-\alpha(y,x)$.

Задача 4.

Найдите площадь параллелограмма, три из четырёх вершин которого имеют декартовы координаты $(0,0)$, (a,b) *и* (c,d).

Решение:

Пусть векторы x, y декартова векторного пространства, на которые натянут параллелограмм, выражаются через векторы ортонормированного базиса $\{e_1, e_2\}$ при помощи матрицы A:

$$(x,y)=(e_1,e_2)A.$$

Тогда

$$A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix},\quad \text{area}=|\det A|=|ad-cb|.$$

Задача 5.

а) Пусть (e,f) *базис двумерного пространства* V, $\omega=e\wedge f\in\Lambda^2V$, $\varphi:V\to V$ *линейное преобразование. Выразите* $\varphi(\omega)=\varphi(e)\wedge\varphi(f)$ *через* ω *и элементы матрицы* φ.

б) Аналогичный вопрос для Λ^3V *и трёхмерного* V.

Решение:

а) Пусть

$$(\varphi(e),\varphi(f))=(e,f)A=(e,f)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$
\begin{aligned}
\varphi(\omega) = \varphi(e) \wedge \varphi(f) &= (a_{11}e + a_{21}f) \wedge (a_{12}e + a_{22}f) = \\
&= a_{11}a_{22} \cdot e \wedge f + a_{21}a_{12} \cdot f \wedge e = \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot e \wedge f = \\
&= \det A \cdot w.
\end{aligned}
$$

б) Аналогично для $\Lambda^3 V$ и трёхмерного V: $\omega = e \wedge f \wedge g$ и

$$
(\varphi(e), \varphi(f), \varphi(g)) = (e, f, g)A = (e, f, g) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
\varphi(\omega) = \det A \cdot w.
$$