ДЗ #2. Киселев Павел

Задача 1.

Подпространство четных многочленов $P^{\text{чет}}$ имеет базис

$$(1, x^2, x^4, ..., x^n),$$

(при четном n). Подпространство нечетных многочленов $P^{\text{нечет}}$ имеет базис

$$(x, x^3, ..., x^{n-1}).$$

Их пересечение составляет нуль-вектор:

$$P^{\text{чет}} \cap P^{\text{нечет}} = \{0\}.$$

Произвольный многочлен можно представить в виде суммы четного и нечетного, т.к. любой многочлен (и функцию вообще) можно представить в виде

$$p(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2} + \frac{p(x) - p(-x)}{2} = p^{\text{чет}}(x) + p^{\text{нечет}}(x), \qquad (1)$$

здесь $p(x), p^{\text{чет}}(x), p^{\text{нечет}}(x)$ — векторы. Такое разложение единственно, т.к. подпространства $P^{\text{чет}}, P^{\text{нечет}}$ линейно независимы:

$$p^{\text{чет}}(x) + p^{\text{нечет}}(x) = 0 \iff p^{\text{чет}}(x) = p^{\text{нечет}}(x) = 0.$$

Следовательно, нельзя найти такую комбинацию $p^{\text{чет}}(x), p^{\text{нечет}}(x)$ не из нулей, чтобы, прибавив ее к левой и правой частям равенства (1), в левой остался бы исходный многочлен.

Задача 2.

Базисом будут $n^2 - 1$ матриц $\{E_{ij} | i \neq j\} \cup \{E_{11} - E_{ii} | i = 2, 3, ..., n\}$, т.к. любая матрица с нулевым следом определяется n^2 элементами за исключением одного на главной диагонали (предположим a_{11}), который имеет значение равное тому, чтобы сделать след матрицы нулевым.

Задача 3.

Пусть $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n)$, тогда

$$a^T b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в виде $a^T b$ могут быть представлены только матрицы с линейно зависимыми столбцами и строками (если рассматривать их как как векторы-столбцы и векторы-строки соответственно). Строки и столбцы в $a^T b$ совпадают с точностью до множителя.

Задача 4.

Пусть векторы $e_1, ..., e_n \in V$ образуют базис линейного пространства V, а $\varphi : V \to W$ изоморфизм. Докажем, что $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n) \in W$ образуют базис W.

Проверим, является ли набор векторов $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ линейно независимым. Предположим, что он таковым не является, тогда существует $\alpha_1 \neq 0$ (для конкретности) такой, что

$$\alpha_1 \varphi(e_1) + \alpha_2 \varphi(e_2) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = 0, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

В таком случае мы можем выразить $\varphi(e_1)$ через остальные вектора:

$$\varphi(e_1) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\varphi(e_2) - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\varphi(e_n).$$

Используя линейные свойства изоморфизма, перепишем равенство:

$$\varphi(e_1) = \varphi\Bigg(- \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} e_n \Bigg).$$

Т.к. изоморфизм биективен, следовательно

$$e_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} e_n.$$

Тогда система векторов $e_1, ..., e_n$ не является базисом, что противоречит условию задачи. Следовательно, $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ линейно независимы.

Теперь проверим, можно ли дополнить $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ до $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n), \varepsilon_{n+1}$ так, чтобы набор векторов остался линейно независимым.

Предположим, что такой ε_{n+1} существует. Т.к. изоморфизм биективен, то существует обратное отображение φ^{-1}, ставящее ε_{n+1} в соответствие вектор в V:

$$\varphi^{-1}(\varepsilon_{n+1}) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

для некоторых λ_i. Но также в W существует вектор

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 \varphi(e_1) + \lambda_2 \varphi(e_2) + \cdots + \lambda_n \varphi(e_n) \\ &= \varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) \end{aligned}$$

такой что

$$\varphi^{-1}(w) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \quad w \neq \varepsilon_{n+1}.$$

Из предположения что такой ε_{n+1} существует следует, что изоморфизм φ не биективен, что противоречит определению. Следовательно, $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ — максимальный линейно независимый набор векторов в $W \implies \varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ является базисом в W.

Задача 5.

Пусть $v_1, ..., v_n \in V$ набор векторов линейного пространства V.

а) Если набор векторов $v_1, ..., v_n$ линейно зависим, то хотя бы один из них линейно выражается через остальные $n-1$ векторов. Предположим, что линейно зависим вектор v_1, тогда

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

для фиксированных λ_i. В таком случае,

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= \varphi(\lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_2 \varphi(v_2) + ... + \lambda_n \varphi(v_n). \end{aligned}$$

Т.е. линейное отображение $\varphi(v_1)$ полностью детерминированно λ_i и $\varphi(v_i), i = 2, .., n$. Следовательно, значения линейной функции нельзя выбрать произвольно для всех i. Если же набор векторов $v_1, ..., v_n$ линейно *не*зависим, то такого ограничения нет, и мы можем свободно выбрать в соответствие $v_i \in V$ произвольное $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$. Т.е. выбрать *хотя бы одно* линейное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}$ такое, что $\varphi(v_1) = \alpha_1, ..., \varphi(v_n) = \alpha_n$ (и строго больше одного, если $\dim V > n$, т.к.

существует множество вариантов определить соответствия для полного набора, зафиксировав соответствия для $v_1, ..., v_n$).

б) Если набор $v_1, ..., v_n$ полон в V, тогда возможны два случая:

1. Набор $v_1, ..., v_n$ линейно независим. Тогда $\dim V = n$ и поставить в соответствие $v_i \in V$ произвольное $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ — значит с точностью определить линейное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}$ (т.е. существует ровно одно линейное отображение).

2. Набор $v_1, ..., v_n$ линейно зависим. Тогда невозможно поставить в соответствие *каждому* $v_i \in V$ произвольное $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ по причине, описанной в пункте (а).

Следовательно, существует *не больше одного* линейного отображения $\varphi : V \to R$ такого, что $\varphi(v_1) = \alpha_1, ..., \varphi(v_n) = \alpha_n$.

в) Если набор $v_1, ..., v_n$ образует базис в V, тогда этот набор линейно независим. Следовательно, существует *ровно одно* линейное отображение $\varphi : V \to R$ такое, что $\varphi(v_1) = \alpha_1, ..., \varphi(v_n) = \alpha_n$ аналогично подпункту 1 пункта (б).