ДЗ #3. Киселев Павел

Задача 1.

Докажите, что пространство матриц размера $n \times n$ *разлагается в прямую сумму симметрических и кососимметрических матриц, и найдите разложение для матрицы*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}: \quad A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

где

$$\begin{aligned} (A + A^\top)^\top &= A^\top + A = (A + A^\top) &&\Rightarrow (A + A^\top) \in \mathrm{Sym}_n, \\ (A - A^\top)^\top &= A^\top - A = -(A - A^\top) &&\Rightarrow (A - A^\top) \in \mathrm{Skew}_n. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\mathrm{Sym}_n \cap \mathrm{Skew}_n = 0,$$

можно заключить

$$\mathrm{Mat}_{n\times n} = \mathrm{Sym}_n \oplus \mathrm{Skew}_n.$$

Найдем разложение для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\frac{1}{2}(A + A^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(A - A^\top) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.

Докажите, что проектор $P \in L(V)$ однозначно задается своим ядром (т. е. если два проектора имеют одинаковые ядра, то они совпадают).

Решение:

Утверждение неверно. Существуют проекторы на разные подпространства вдоль одной прямой.

Задача 3.

В пространстве полиномов рассмотрим два подпространства U и V. Причем $U =< t^2 + 2t + 1,\ t^2 + 3t + 2,\ t^2 - t - 2 >$, $V =< t^2 - 4t + 4,\ t^2 - 3t + 2,\ t^2 - 2t >$. Вычислите размерности и проверьте формулу Грассмана для пространств $U, V, U + V, U \cap V$, а также укажите какие-нибудь базисы в этих пространствах.

Решение:

Построим изоморфизм между пространством полиномов $\mathrm{Pol}_{\leq 2}$ и пространством строк $\mathbb{R}^3$. Тогда набор векторов в линейных оболочках пространств U, V линейно зависим тогда и только тогда, когда существует нетривиальная линейная комбинация строк, дающая нулевую строку.

Путем элементарных преобразований матрицы строк покажем, что строки линейно зависимы (это аналогично составлению нетривиальной линейной комбинации с коэффициентами $\in \mathbb{Z}$):

$$U : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$U = \langle t^2 - 1,\ t + 1 \rangle, \quad \dim U = 2.$$

Аналогично для V,

$$V: \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$V = \langle t^2 - 4,\ t - 2 \rangle, \quad \dim V = 2.$$

Аналогично для $U + V$,

$$U + V: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно $U + V = \mathrm{Pol}_{\leq 2}$, и

$$U + V = \langle t^2,\ t,\ 1 \rangle, \quad \dim U + V = 3.$$

Далее, если $x \in U \cap V$, следовательно $x \in U \wedge x \in V$, тогда

$$\alpha_1(t^2 - 1) + \beta_1(t + 1) = \alpha_2(t^2 - 4) + \beta_2(t - 2),$$
$$\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + (-\alpha_1 + \beta_1) = \alpha_2 t^2 + \beta_2 t + (-4\alpha_2 - 2\beta_2).$$

И, следовательно,

$$\begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \\ -\alpha_1 + \beta_1 = -4\alpha_2 - 2\beta_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \alpha_2 = \lambda \\ \beta_1 = \beta_2 = -\lambda \end{matrix}$$

Найдем линейную оболочку $U \cap V$:

$$\lambda(t^2 - 1) - \lambda(t + 1) = \lambda(t^2 - t - 2)$$

Следовательно,

$$U \cap V = \langle t^2 - t - 2 \rangle, \quad \dim U \cap V = 1$$

Полученные размерности пространств находятся в соответствии с формулой Грассмана:

$$\begin{aligned} \dim U + V &= \dim U + \dim V - \dim U \cap V \\ 3 &= 2 + 2 - 1 \end{aligned}$$

Задача 4.

Пусть $\varphi_{1,2} \in V^*$ — ненулевые линейные функционалы. Докажите, что $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ тогда и только тогда, когда их ядра совпадают.

Решение:

1. Пусть $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$, докажем, что их ядра совпадают.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{Ker}\varphi_2 : \quad & \varphi_2(x) = 0 \\ & \varphi_1(x) = (\lambda\varphi_2)(x) = \lambda\varphi_2(x) = \lambda 0 = 0. \end{aligned}$$

   Следовательно,

$$(x \in \mathrm{Ker}\varphi_2 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\varphi_1) \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi_2 = \mathrm{Ker}\varphi_1.$$

2. Пусть $\mathrm{Ker}\varphi_1 = \mathrm{Ker}\varphi_2 = K$, докажем, что $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in K : \quad & \varphi_2(x) = 0, \\ & \varphi_1(x) = 0. \\ \forall x \in (V \setminus K) : \quad & \varphi_2(x) = \alpha, \quad \alpha \in (\mathbb{R} \setminus 0), \\ & \varphi_1(x) = \beta, \quad \beta \in (\mathbb{R} \setminus 0). \end{aligned}$$

   Следовательно,

$$\forall x \in V : \quad \varphi_1(x) = \lambda \cdot \varphi_2(x) = (\lambda\varphi_2)(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \lambda\varphi_2.$$

Задача 5.

Докажите, что если линейное отображение $T : V \to V$ из конечномерного линейного пространства V в него же представляется в каком-либо базисе диагональной матрицей, то его можно записать как линейную комбинацию проекторов с *непересекающимися образами, т. е.* $T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$ *для некоторых чисел* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *и проекторов* $P_1, ..., P_k$ *с* $\mathrm{Im} P_i \cap \mathrm{Im} P_j = \{0\}$*при* $i \neq j$.

Решение:

Докажем, что $T \backsimeq D_n \Rightarrow T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$ в каком-либо базисе для некоторых чисел $\lambda_1, ..., \lambda_k$ и проекторов $P_1, ..., P_k$ с $\mathrm{Im} P_i \cap \mathrm{Im} P_j = \{0\}$при $i \neq j$.

Если $T \backsimeq D_n$, значит матрица оператора $T : V \to V$ диагонализируема для некоторого базиса. Матрица диагонализируема тогда и только тогда, когда существует базис V, состоящий из собственных векторов T такой, что

$$\langle \bar{e}_1, ..., \bar{e}_n \rangle = V$$

Тогда, в силу линейности T, справедливо утверждение

$$\begin{aligned} \forall x \in V: \quad T(x) &= T(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) \\ &= x_1 T(\bar{e}_1) + x_2 T(\bar{e}_2) + \dots + x_n T(\bar{e}_n) \\ &= x_1 \lambda_1 \bar{e}_1 + x_2 \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \lambda_n \bar{e}_n. \end{aligned}$$

где λ_i — собственные значения оператора T.

Тогда можно определить $P_1, ..., P_n$ как проекторы на собственные векторы, т.е.

$$P_i(x) = x_i \bar{e}_i.$$

Проекторы, определенные так, будут с непересекающимися образами, т.к. базис по определению линейно независим.

Следовательно, отображение $T(x)$ можно представить как

$$\begin{aligned} \forall x \in V: \quad T(x) &= \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \dots + \lambda_n P_n(x) \\ &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n)(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n.$$

Набор $P_1, ..., P_n$ редуцируется до $P_1, ..., P_k$, если для некоторых i: $\lambda_i = 0$. Т.е. $k \leq n$ — число не нулевых собственных значений, тогда

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k, \quad k \leq n.$$

Следовательно, мы доказали, что линейное отображение T можно представить как линейную комбинацию проекторов $P_1, ..., P_k$ с непересекающимися образами.