FACULTAD DE CIENCIAS
GRUPO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA

Seminario de Análisis Real

Jimmy Espinoza

13 de diciembre del 2017

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.
   - Muestre que el conjunto $f([a, b])$ es acotado superiormente.
   - Sea $s = \sup f([a, b])$. Muestre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = s$.
2. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Demuestre que f tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. De un ejemplo de una función continua $f : [0, 1) \to [0, 1)$ sin punto fijo.
3. Probar que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto y si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua en I, entonces f es uniformemente continua en I.
4. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Una función f es llamada semicontinua superior en el punto $a \in X$ si, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \epsilon$. Se dice que f es semicontinua superior si lo es en cada punto de X. Demuestre que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si su función característica $\xi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es semicontinua superior. (Aclaración: La función característica $\xi_A(x)$ es 1 si $x \in A$ y 0 caso contrario).
5. Sea $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$. Pruebe que:
   - $\lim_{x \to +\infty} x^a e^{-bx} = 0$;
   - $\lim_{t \to 0^+} t^b (-log(t))^a = 0$.
6. Si $f : I \to \mathbb{R}$ posee un punto crítico no degenerado $c \in int(I)$ (o sea: $f''(c) \neq 0$) en el que f'' es continua, demuestre que existe $\delta > 0$ tal que f es convexa o cóncava en el intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.
7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supóngase que $f(a) = a$, $f(b) = b$. Demuestre que:
   - existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 1$;
   - existen distintos puntos $c_1, c_2 \in (a, b)$ tal que $f'(c_1) + f'(c_2) = 2$.
8. Sea n un número par y sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones n veces diferenciables en el punto $a \in int(I)$. Si $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, demuestre que $f^{(n)}(a) \geq g^{(n)}(a)$.
9. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Definimos la función: $\chi_{\mathcal{C}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como $\chi_{\mathcal{C}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{C}$ o $\chi_{\mathcal{C}}(x) = 0$ en otro caso.
   - Probar que $\chi_{\mathcal{C}}$ es integrable.
   - Evaluar $\int_0^1 \chi_{\mathcal{C}}(x)dx$.
10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y definimos: $F(x) = \int_0^{x^3} f(y)dy$. Pruebe que: $F'(x) = 3x^2 f(x^3)$.

11. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en [0,1] satisfaciendo $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Probar que existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = \int_0^c f(x)dx$.

12. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Supóngase que f es integrable, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Demuestre que el conjunto $\{x \in [a,b]; f(x) > 0\}$ tiene medida cero.

13. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de grado ≥ 1. Demuestre que la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = p(x)+1/n$, converge uniformemente a p en $\mathbb{R}$; sin embargo $\{f_n^2\}$ no converge uniformemente a p^2.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$. Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ y $f'(\pi)$.

15. Sean $f_n(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ una secuencia de funciones convergiendo uniformemente a la función f. Probar que $\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

16. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias cuyos coeficientes están determinados por las igualdades $a_0 = a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Demuestre que el radio de convergencia de dicha serie es igual a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.