Problemas de entrenamiento

Jimmy Espinoza

09 de febrero del 2018

1. Sean a, b, c números reales positivos. Probar que:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

2. Probar que la secuencia $\{a_n\}$ definida por $a_n = [n\sqrt{2}]$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ (donde los corchetes denotan la función máximo entero) contiene un número infinito de potencias enteras de 2.

3. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(f(x)) = x^2 - 2$ o probar que no existe tal función.

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω, y sea P un punto en la prolongación de AC (C entre P y A) tal que PB y PD son tangentes a ω. La tangente por C a ω interseca a PD en Q y a la recta AD en R. Sea E el segundo punto de intersección de AQ y ω. Probar que B, E y R son colineales.

5. Sea n un entero positivo. n personas están en una fiesta. Para cualesquiera dos de los participantes, cada uno de ellos se conocen o no se conocen. Hallar el máximo número posible de pares de participantes que no se conocen pero conocen a otro participante en común.

6. Sean a, b, c números reales positivos. Probar que:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

7. Probar que si la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ tiene una solución de enteros positivos x, y, z, entonces $z = 3$.

8. Un triángulo ABC, con $AB > BC$, está inscrito en una circunferencia Ω. Los puntos M y N se escogen en los lados AB y BC, respectivamente, de tal forma que $AM = CN$. Las rectas MN y AC se intersectan en K. Sea P el incentro del triángulo AMK, y sea Q el excentro del triángulo CNK opuesto al vértice K. Pruebe que el punto medio del arco ABC de Ω equidista de P y Q.