FACULTAD DE CIENCIAS
GRUPO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA

Algunos teoremas interesantes en Teoría de Números

Jimmy Espinoza

05 de Marzo del 2018

1. Introducción:

Estos teoremas pueden ser usados muy a menudo en algunos problemas de teoría de números como herramientas auxiliares. Las demostraciones de algunos de los teoremas requieren de conocimientos más avanzados, por lo que por ahora no vamos a dar estas demostraciones, pero eso no significa que dejen de ser interesantes y sencillos de entender.

2. Teoremas:

2.1. Teorema de la divergencia de las inversas de los números primos:

La demostración de este teorema fue probada por primera vez por Euler en 1737, lo cual implica directamente la infinidad de los números primos.

- Sea p_n la secuencia de los números primos en orden creciente (o sea, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.). Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ es divergente.

2.2. Teorema de Dirichlet:

El teorema de Dirichlet fue conjeturado por Gauss y finalmente demostrado en 1837 por Dirichlet.

- Sean a y b dos enteros positivos coprimos. Entonces existen infinitos primos de la forma $ak + b$ donde k es algún entero positivo.
- Ejemplo: Demostrar que existen infinitos primos tal que su representación decimal termina en el bloque 123456789.

2.3. Postulado de Bertrand:

El postulado de Bertrand fue inicialmente formulado en 1845 por Joseph Bertrand (1822 - 1900) y la demostración de esta conjetura la encontró Chebyshev (1821 - 1894) en 1850.

- Para todo entero $n > 1$ existe al menos un primo p tal que $n < p < 2n$.
- Ejemplo: Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ nunca es entero.

2.4. Último teorema de Fermat:

El último teorema de Fermat fue conjeturado por Pierre de Fermat en 1637, pero no fue demostrado hasta 1995 por Andrew Wiles ayudado por el matemático Richard Taylor.

- Si n es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros positivos x, y, z tales que se cumple:

$$x^n + y^n = z^n$$

2.5. Teorema de Zsigmondy:

El teorema de Zsigmondy fue descubierto y demostrado por Karl Zsigmondy entre 1894 y 1925.

- Sean a y b enteros coprimos con $a > b > 0$, entonces para cualquier entero $n > 1$ existe un número primo p (llamado divisor primo primitivo) que divide a $a^n - b^n$ pero no divide a $a^k - b^k$ para todo entero positivo $k < n$, con las siguientes excepciones:

  1. $a = 2$, $b = 1$ y $n = 6$;
  2. $a + b$ potencia de 2 y $n = 2$.

- Ejemplo: Sean b, m, n enteros positivos con $b > 1$ y $m \neq n$. Suponga que $b^m - 1$ y $b^n - 1$ tienen el mismo conjunto de divisores primos. Probar que $b + 1$ es una potencia de 2.

- Ejemplo: Encontrar todas las quintuplas de enteros positivos (a, n, p, q, r) tales que:

$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1)$$

2.6. Teorema de Kronecker:

Este teorema tiene que ver un poco con Análisis Real, pero es útil en algunos problemas de Teoría de Números.

- Si a es un número irracional, entonces la secuencia $(\{na\})_{n\geq 1}$ es densa en $[0, 1]$, donde $\{x\}$ indica la parte fraccionaria de x, o sea $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

- Ejemplo: Probar que el conjunto $\{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en el conjunto de los números reales.

3. Bibliografía para algunas demostraciones:

1. La demostracion del teorema de la divergencia de las inversas de los números primos se puede encontrar en el libro de **Teoría Analítica de Números** de Tom Apostol (página 18).

2. La demostracion del teorema de Dirichlet tambien se puede encontrar en el libro de **Teoría Analítica de Números** de Tom Apostol; existe un capítulo dedicado a este teorema (capítulo 7).

3. La demostracion del Postulado de Bertrand se puede encontrar en el libro de **Proofs from the Book** de Martin Aigner y Gunter M. Ziegler (página 7).

4. La demostración del teorema de Zsigmondy se encuentra en un artículo de **Bart Michels** y también en otro artículo de **Lola Thompson**.

5. Observación: Todas las fuentes que he mencionado, las subiré al grupo de facebook de Teoría de Números.