

FACULTAD DE CIENCIAS
GRUPO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA
Problemas de Teoría de Números

Jimmy Espinoza

11 de Enero del 2018

1. Un número racional a/b con $(a, b) = 1$ es llamada "fracción reducida". Si la suma de dos fracciones reducidas a/b y c/d es un entero, probar que $|b| = |d|$.
2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, b) = 1$. Probar que:
 - $(a + b, a - b)$ es 1 ó 2;
 - $(a + b, a^2 - ab + b^2)$ es 1 ó 3.
 - $(a^n, b^k) = 1$ para todo n, k enteros positivos.
3. Un entero positivo es llamado *libre de cuadrados* si no es divisible por un número cuadrado perfecto mayor que 1. Probar que para cada $n \geq 1$, existen únicos a, b enteros positivos con b libre de cuadrados tal que $n = a^2b$.
4. Probar que $\frac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible para todo número natural n .
5. Sean a, b, c, n enteros positivos. Si $(a, b) = 1$ y $ab = c^n$, probar que $a = x^n$ y $b = y^n$ para algunos x, y enteros positivos.
6. Hallar $(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1)$ en función de a .
7. Sean a, b, x, y enteros positivos. Si $(a, b) = 1$ y $x^a = y^b$ entonces probar que $x = n^b$ y $y = n^a$ para algún n entero positivo.
8. Si a, m, n son enteros positivos con $a > 1$, probar que $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m, n)} - 1$.
9. Sea n un entero positivo y sea S un conjunto de enteros positivos menores o iguales a $2n$ tal que si a y b están en S y $a \neq b$ son diferentes, entonces a no divide a b . Hallar el máximo número de elementos de S .
10. Hallar todos los pares de enteros positivos (a, b) tales que $a|b + 1$ y $b|a + 1$.
11. Hallar todos los pares de enteros positivos (a, b) tales que $a|8b + 1$ y $b|8a + 1$.
12. Halle todos los números enteros positivos n tales que el conjunto $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ puede ser particionado en dos subconjuntos de modo que el producto de los números en cada subconjunto sea igual.
13. Sean m y n números enteros positivos tales que:

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

Probar que m es divisible por 1979. *Ayuda : 1979 es primo.*