FACULTAD DE CIENCIAS
GRUPO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA

Problemas de Teoría de Números

Jimmy Espinoza

05 de Marzo del 2018

1. Probar que 5 es un resto cuadrático de un primo impar $p \neq 5$ si y sólo si $p \equiv \pm 1$ (mod 10).
2. Sea p un primo impar. Asumimos que el conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos no vacíos S y T, $S \neq T$, tal que el producto ($mod\ p$) de cualesquiera dos elementos en el mismo subconjunto pertenece a S y el producto ($mod\ p$) de cualquier elemento de S con cualquier elemento de T pertenece a T. Probar que S es el conjunto de los restos cuadráticos ($mod\ p$) y T es el conjunto de los restos no cuadráticos ($mod\ p$).
3. Probar que si n es un entero positivo impar, entonces cada factor primo de $2^n - 1$ es de la forma $8k \pm 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
4. Probar que para todo primo p existen enteros x y y tales que: $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0$ ($mod\ p$).
5. Sean m y n enteros positivos. Probar que $4mn - m - n$ nunca puede ser un cuadrado perfecto.
6. Sea a el menor resto no cuadrático ($mod\ p$) (entre $\{0, 1, \ldots, p-1\}$). Demostrar que:
$$a < 1 + \sqrt{p}$$
7. Demostrar que:
$$\sum_{i=1}^{p-2} \left(\frac{i(i+1)}{p} \right) = -1$$
8. Probar que 16 es una octava potencia perfecta módulo p para cualquier primo p.