

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**GRUPO ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA**  
Problemas de Teoría de Números

Jimmy Espinoza

22 de Enero del 2018

1. Hallar todos los enteros positivos  $n$  tal que:

- $\varphi(n) = n/2$
- $\varphi(n) = \varphi(2n)$
- $\varphi(n) = 12$

2. Probar que  $\sum_{d^2|n} \mu(d) = \mu^2(n)$ .

3. Probar que:

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

.

4. Si  $d(n)$  denota el número de divisores positivos de  $n$ , probar que  $d(n)$  es impar si y sólo si  $n$  es cuadrado perfecto.

5.  $d(n)$  es el mismo del problema anterior. Probar que:  $\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}$ .

6.  $d(n)$  es el mismo del problema anterior. Probar que:  $\sum_{t|n} d(t)^3 = (\sum_{t|n} d(t))^2$ .

7. Asumir que  $f$  es multiplicativa. Probar que:

- $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$  para todo  $n$  libre de cuadrados (o sea, producto de primos distintos).
- $f^{-1}(p^2) = f(p)^2 - f(p^2)$  para todo primo  $p$ .

8. Asumir que  $f$  es multiplicativa. Probar que  $f$  es completamente multiplicativa si y sólo si  $f^{-1}(p^a) = 0$  para todo primo  $p$  y todos los enteros  $a \geq 2$ .

9. Sea  $P(n)$  el producto de los enteros positivos menores o iguales a  $n$  y coprimos con  $n$ . Probar que:

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n} \left( \frac{d!}{d^d} \right)^{\mu(n/d)}$$

.