201-0Q3-SW Outils mathématiques

Systèmes de numération

Le matériel

- Synthèse du professeur
- Site Web: https://www.prodafor.com/informatique
  - > Section Arithmétique ordinateur

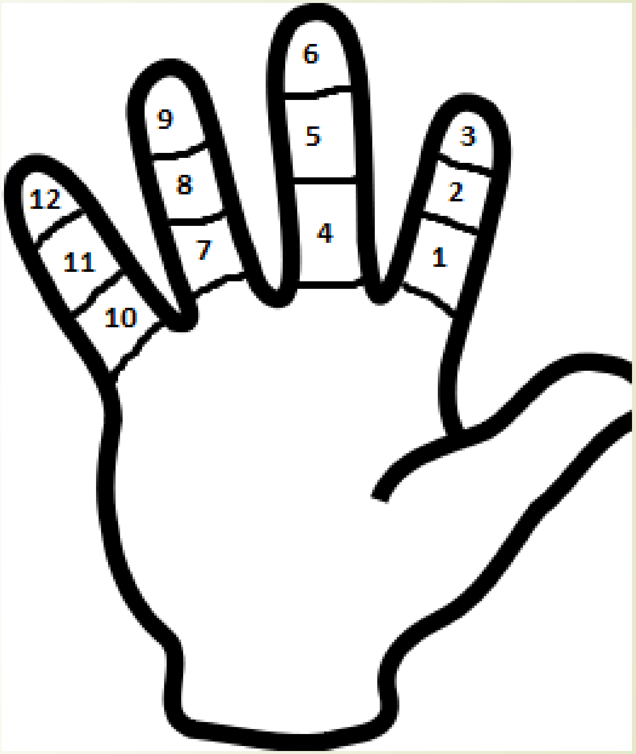
Introduction

- Dans la préhistoire, il gravait des entailles dans un os pour compter des objets.

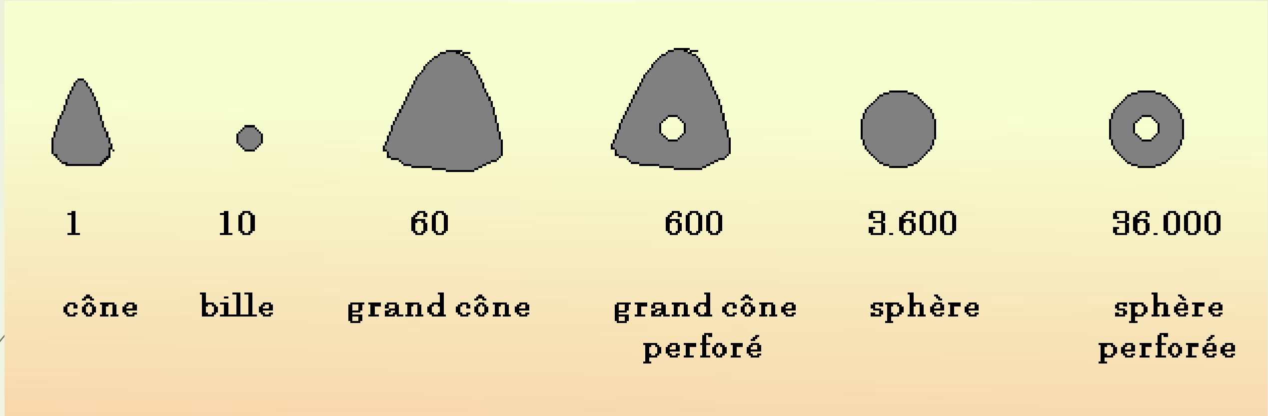
- Les bergers faisaient un nœud sur une cordelette pour chaque mouton.

- Les Aztèques employaient un système utilisant les doigts et les orteils.

- Le plus ancien système de numération connu est celui des Sumériens associant des nombres à des petits objets d'argile. La valeur de chaque symbole était additionnée pour obtenir le nombre représenté. **(Principe additif)**

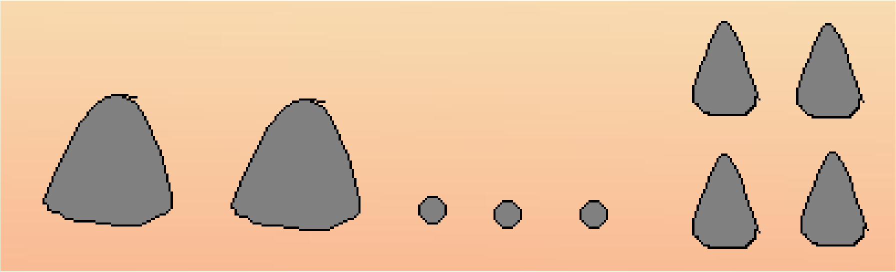


Dans le système Sumériens, chaque symbole vaut 6 fois ou 10 fois le symbole précédent. Chaque symbole représente un multiple appelé « **base** ».



Exemple : pour représenter le nombre 154 , décomposons 154 :

154 = 2 x 60 + 34 = 2 x 60 + 3 x 10 + 4 x 1



- La **position** des symboles dans le système romain permet d'identifier les différents nombres.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2	3	4	5	6	7	8	9

X	XI	XII	XX	XXX	XL	L	LX
10	11	12	20	30	40	50	60

LXX	LXXX	XC	C	D	M
70	80	90	100	500	1000

Il existe plusieurs systèmes de numération:

- La numération égyptienne;
- La numération chinoise;
- La numération grecque;
- La numération aztèque;
- …

Pour qu'un système de numération soit efficace, il doit être économique du point de vue du nombre de signes utilisés et les opérations de base (+, -, *, /) doivent se faire facilement.

Systèmes positionnels

- Les **systèmes positionnels** sont des systèmes où la position occupée par un symbole (**chiffre**) change sa valeur.

- Exemple de représentation en décimal.

$$534 = 500 + 30 + 4$$

$$534 = 5\times10^2 + 3\times10^1 + 4\times10^0$$

Le système décimal

- Le système décimal est le système de numération le plus communément répandu dans notre monde. Il est fondé sur l'utilisation de 10 caractères différents qui représentent les valeurs de nombres. Généralement un système de numération nous indique, de par son appellation, le nombre de caractères différents sur lesquels il est fondé.

- Les dix caractères du système décimal sont:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , et 9

- Que fait-on quand le nombre d'objets à compter dépasse 9 ? Comme nous le savons tous, on ajoute des chiffres à la gauche de la colonne originale. Nous pouvons dire, en fait, que le nombre suivant à gauche nous indique le nombre de fois que nous avons complètement épuisé la colonne de droite.

- Nous disons, généralement, que chaque colonne possède un poids qui lui est affecté. Ces **poids** sont des **puissances de 10**. La première colonne est celle des unités, la seconde, celle des dizaines, la troisième, celle des centaines, etc.

- En utilisant une notation fondée sur les puissances successives de 10, on peut représenter le **poids** de la première colonne sous la forme 10^0, celui de la seconde, 10^1, celui de la troisième, 10^2, etc. On remarque ainsi que le poids de chaque colonne s'exprime par la **base** élevée à une certaine puissance qui n'est autre que la position de la colonne.

- Ainsi le nombre 6321 correspond à

10^3	10^2	10^1	10^0
6	**3**	**2**	**1**

- L'évaluation que nous obtenons à partir de cette représentation s'obtient de la manière suivante:

$$6x10^3 + 3x10^2 + 2x10^1 + 1x10^0 = 6321$$

- Cette dernière expression est appelée la ***<u>représentation polynomiale</u>*** du nombre 6321.

- **Ex : 0,752 =**

Le système binaire

- A de nombreux égards, le système binaire est plus simple que le système décimal. Le système binaire ne comporte que deux caractères et il est utilisé en électronique numérique parce que les circuits ne peuvent prendre que deux états. Le plus souvent, on utilise les caractères 0 et 1.

- Évaluons un nombre binaire afin de trouver sa valeur dans le système décimal,

$$\mathbf{101101_2}$$

$$\mathbf{1x2^5+0x2^4+1x2^3+1x2^2+0x2^1+1x2^0 = 45_{10}}$$

- Dans le système décimal chaque position porte le nom de **<u>chiffre</u>** ou, plus précisément, de chiffre décimal. Dans le cas du système binaire, le nom attribué à chaque position est **<u>bit</u>** (ce terme provient de *binary digit*).

- En traitant des nombres binaires, les termes **BLMS** (bit le moins significatif) et **BLPS** (bit le plus significatif) reviennent souvent. Il s'agit là de formes qui sont analogues à celles que l'on utilise dans le langage décimal où l'on parle de chiffres le plus, ou le moins, significatifs. Le BLPS est donc le bit le plus à gauche.

Conversion vers la base dix

- La procédure de conversion est simple:

  C'est le développement du nombre en puissances de 2.
  « Écrire la représentation polynomiale du nombre. »

- Ex: Convertir le nombre binaire 101101 en décimal.

$$101101 = 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$$

$$= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1$$
$$= 45$$

- **La partie fractionnaire** : on procède de la même façon en tenant compte que les positions après la virgule correspondent à des puissances négatives de la base.

- **Ex:**

$$
\begin{aligned}
1110,1101 &= 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 \\
&\quad + 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4} \\
&= 8 + 4 + 2 + 0,5 + 0,25 + 0,0625 \\
&= 14,8125
\end{aligned}
$$

- Convertir les nombres binaires suivants en nombres décimaux

a) 1101

b) 1110111

c) 110000110

d) 10110,0111

Division entière

- Si m et n sont des nombres entiers et qu'on désire diviser m par n, le résultat est un nombre entier q, le quotient, tel que

  $$m = q*n + r, \quad 0 \leq r < |n|$$

- m **div** n = quotient

- m **mod** n = reste

- **Ex: 20 div 3 = 6**

  20 mod 3 = 2

  car 20 = 6(3)+2

Ex 2: 83 div 8 =

83 mod 8 =

- **Exercice 1**

a) 61 div 8 = et 61 mod 8 =

b) 81 div 30 = et 81 mod 30 =

- **<u>Que faire si l'on a un ou des nombres négatifs?</u>**

- **Exemple**

a) - 53 div 7 = (- 8) (car on prend toujours l'entier inférieur)

b) - 53 mod 7 = 3 (car 7 x (- 8) + 3 = - 53)

TRUC

Pour trouver le modulo à l'aide de la calculatrice, il est utile d'utiliser la touche ci-dessous pour faire la division plutôt que le symbole ÷.

Un court vidéo en anglais explique comment faire : https://www.youtube.com/watch?v=tdyUy2Lig0Y

- **Exercice 2**

On peut combiner les opérations :

Résoudre (81 mod 30) div 5=

- **Exercice 3**

On parcoure un à un tous les entiers positifs de 1 à 49 et on souhaite garder seulement ceux qui sont divisible par 3.

Dans l'optique d'éventuellement programmer une boucle, comment fera-t-on pour ne garder que les bons entiers?

De la base 10 vers la base 2

PROCÉDURE

1. Diviser le nombre à convertir par la **base** et noter le quotient et le reste de la division.
2. Diviser par la **base** le quotient obtenu à l'étape précédente et noter à nouveau le quotient et le reste.
3. Poursuivre le processus jusqu'à ce que le quotient soit zéro.
4. Utiliser les restes successifs pour écrire le nombre dans la **base choisie**, le dernier reste obtenu étant le coefficient de la plus grande puissance de la base.

Exemple pour convertir un nombre entier en binaire

57_{10} = $?_2$

Quotient (div)	Reste (mod)		
57/2 = **28**	1	BLMS	↑
28/2 = **14**	0		
14/2 = **7**	0		
7/2 = **3**	1		
3/2 = **1**	1		
1/2 = **0**	1	BLPS	

D'où 57_{10} = 111001_2

Ex : Convertir 61 en binaire.

BLMS

BLPS

Quotient	Reste
61	2
30	1
15	0
7	1
3	1
1	1
0	1

Rep: 111101

- Convertir les nombres décimaux suivants en nombres binaires

a) 134

b) 1003

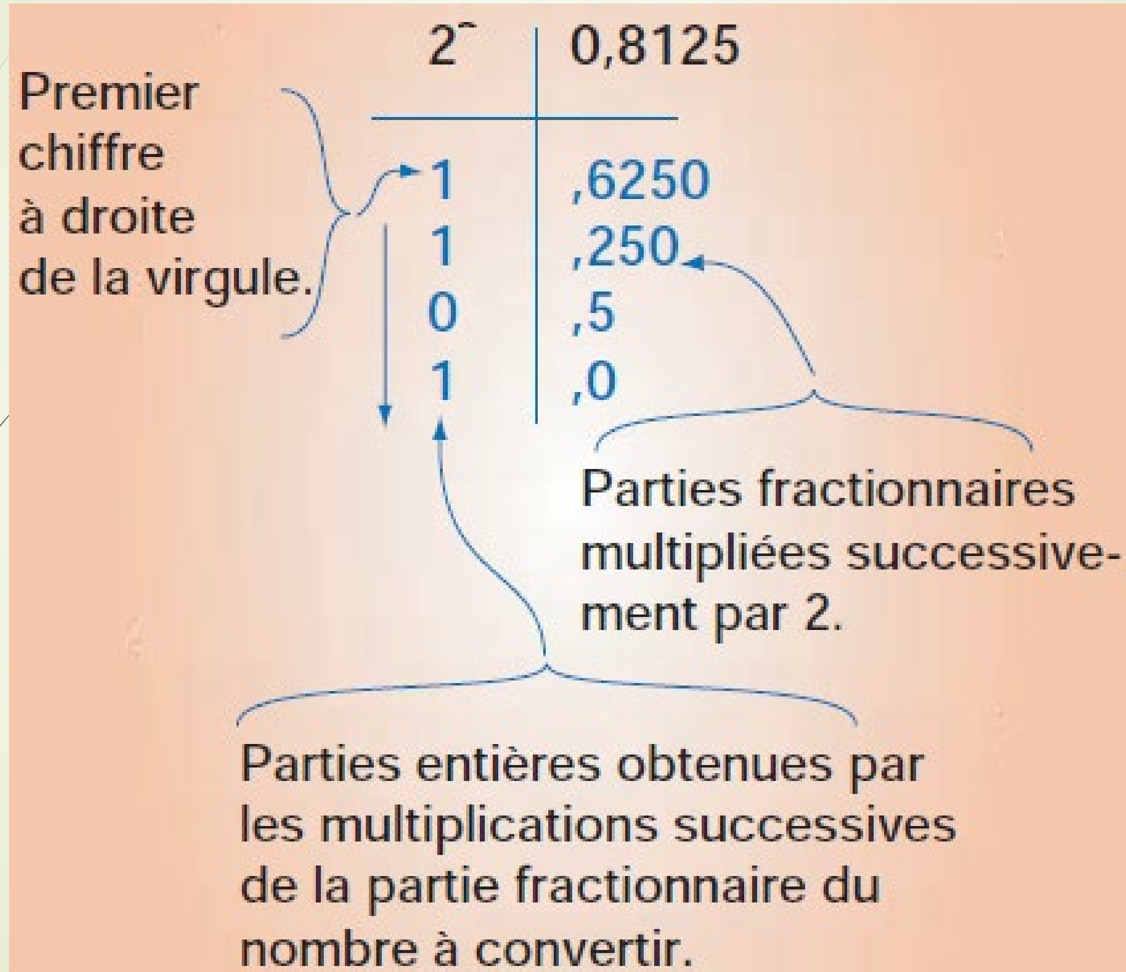
c) 8435

Conversion d'un nombre fractionnaire (en base 10) vers la base 2

PROCÉDURE

1. Multiplier le nombre fractionnaire par la **base** et noter la partie entière et la partie fractionnaire obtenues.
2. Multiplier à nouveau la partie fractionnaire du produit par la **base**, et noter le résultat.
3. Poursuivre le processus jusqu'à ce que la partie fractionnaire soit nulle.
4. Utiliser les parties entières successives pour écrire le nombre dans la **base choisie**, la première partie entière étant le premier chiffre après la virgule.

Ex: Convertir 0,8125 en binaire.



$$(0{,}8125)_{10} = (0{,}1101)_2$$

Ex: Convertir 0,2 en binaire.

BLPS

2	0,2
0	,4
0	,8
1	,6
1	,2
0	,4
0	,8
.	.
.	.

BLMS

REP: $(0,\overline{0011})_2$

- Convertir les nombres décimaux suivants en nombres binaires

a) 25,7

b) 70,83

c) 205,326

Devoir rencontre 1

- Document exercice disponible sur Omnivox :

  Exercices système de numération décimale et binaire

- Écouter, si nécessaire, les capsules vidéo suivantes (sur prodafor.com):
  - **Numeration01**
  - **Numeration02**
  - **Numeration03**
  - **Numeration04**
  - **Numeration05**
  - **Numeration06**