

SÉQUENCE 2 : LOGIQUE - EXERCICES

1) Écrire sans symbole de négation les énoncés suivants :

a. $\neg(x < 9) \Leftrightarrow (x \geq 9)$

b. $\neg(a \geq 40) \Leftrightarrow (a < 40)$

c. $\neg(a \text{ est pair}) \Leftrightarrow (a \text{ est impair})$

d. $\neg((x \text{ est un nombre premier}) \vee (x < 0))$

$\Leftrightarrow \neg(x \text{ est un nb premier}) \wedge \neg(x < 0)$

$\Leftrightarrow (x \text{ n'est pas premier}) \wedge (x \geq 0)$

e. $\neg((x \text{ est une femme}) \wedge (\text{âge de } x \text{ est } < 30))$

$\Leftrightarrow \neg(x \text{ est une femme}) \vee \neg(\text{âge de } x \text{ est } < 30)$

$\Leftrightarrow (x \text{ est un homme}) \vee (\text{âge de } x \text{ est } \geq 30)$

2) Construire la table de vérité de chacune des formes suivantes :

a. $\neg p \wedge q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
F	F	V	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	V	F	F

b. $p \wedge (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \wedge (\neg p \vee q)$
F	F	V	V	F
F	V	V	V	F
V	F	F	F	F
V	V	F	V	V

c. $p \wedge (p \oplus q)$

p	q	$p \oplus q$	$p \wedge (p \oplus q)$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	F	F

d. $(p \wedge q) \vee \neg r$

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$(p \wedge q) \vee \neg r$
F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	F	V

e. $(p \wedge q) \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \vee \neg q$
F	F	F	V	V
F	V	F	F	F
V	F	F	V	V
V	V	V	F	V

f. $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V

tautologie

3) Donner la valeur de vérité de la fonction propositionnelle

$$«x \text{ est pair}» \wedge («x \leq 15» \vee «x \text{ est un carré}»)$$

a. Si $x = 21$

$$«21 \text{ est pair}» \wedge («21 \leq 15» \vee «21 \text{ est un carré}»)$$

$$F \wedge (F \vee F)$$

Donc Faux

b. Si $x = 20$

$$«20 \text{ est pair}» \wedge («20 \leq 15» \vee «20 \text{ est un carré}»)$$

$$V \wedge (F \vee F)$$

$$V \wedge F$$

Donc Faux

c. Si $x = 36$

$$«36 \text{ est pair}» \wedge («36 \leq 15» \vee «36 \text{ est un carré}»)$$

$$V \wedge (F \vee V)$$

$$V \wedge V$$

Donc Vrai

4) Vérifiez l'équivalence des lois de De Morgan à l'aide de tables de vérité.

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F
V	V	V	F	F	F	F

même table de vérité donc équivalente

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F

même table de vérité donc équivalente

- 5) Dans un système Informatique gérant les dossiers des élèves actuellement inscrits au collège, on retrouve, entre autres, les champs suivants :

AN : année d'inscription

NbrS : nombre de sessions complétées à temps plein.

NbrCR : nombre de cours réussis

PROG : programme suivi (SH=Sciences humaines, SN=Sciences de la nature, IN= technique informatique,

DEV PAM=programmation d'applications mobiles, INF=technique de soins infirmiers)

Écrivez sous forme propositionnelle les requêtes identifiant les étudiants :

- a. inscrits avant 2001 et n'ayant pas réussi plus de 15 cours

$$(AN < 2001) \wedge (NbrCR \leq 15)$$

- b. ayant au moins trois sessions à temps plein complétées ou ayant réussi au moins 15 cours.

$$(NbrS \geq 3) \vee (NbrCR \geq 15)$$

- c. ayant complété 2 sessions à temps plein dans un programme technique.

$$(NbrS = 2) \wedge ((PROG = IN) \vee (PROG = INF))$$

- 6) Certains langages de programmation offrent la possibilité d'arrêter l'évaluation d'une forme propositionnelle dès que l'on est certain du résultat. Par exemple, l'évaluation $(3 > 0) \vee (5 < 2)$ s'arrêtera après l'évaluation de la première parenthèse, car $(3 > 0)$ est V et est suivi par un \vee (ou). Combien de parenthèses devra-t-on minimalement évaluer pour décider avec certitude de la valeur de vérité des formes suivantes ?

- a. $(V \wedge F) \vee (V \wedge V) \vee (F \wedge F)$

↑
2^e

- b. $(V \wedge F) \wedge (V \wedge V) \wedge (F \wedge F)$

↑
1^{ère}

- c. $(x > 6) \wedge (x \text{ est un carré}) \wedge (x < 60)$

i. Pour $x = 4 \rightarrow$ une parenthèse

ii. Pour $x = 8 \rightarrow$ 2^e parenthèse

iii. Pour $x = 9 \rightarrow$ 3^e parenthèse

7) Simplifier les formes propositionnelles suivantes :

a. $\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg p$

$(\neg \neg p \vee \neg q) \vee \neg p$ Loi de DeMorgan

$(p \vee \neg q) \vee \neg p$

$\underbrace{p \vee \neg p}_{\text{toujours vrai}} \vee \neg q \rightarrow \neg q$

b. $(p \vee q) \wedge p$

Faisons la table

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p$
F	F	F	F
F	V	V	F
V	F	V	V
V	V	V	V

Donc $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$

* c. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ identique

$\equiv ((p \wedge q) \vee p) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q)$

$\equiv (p \vee p) \wedge (q \vee p) \wedge ((p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q))$

$\equiv (p \wedge (q \vee p)) \wedge ((p \vee \neg q) \wedge \underbrace{\text{Vrai}}_{\text{toujours vrai}})$
comme en b)

$\equiv p \wedge (p \vee \neg q)$

Forme semblable à b

$\equiv p$

On peut vérifier avec une table de vérité,
mais $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ est équivalente à p

8) Donner la table de vérité de la proposition suivante :

$$(p \vee q) \wedge ((r \wedge q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg q))$$

p	q	r	$p \vee q$	$r \wedge q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$(r \wedge q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg q)$	$(p \vee q) \wedge ((r \wedge q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg q))$
F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	V	F	F

9) Pour chacun des bouts de code suivants, déterminer ce qui s'affichera :

a)

```
if ((z % 2 == 0) || (z >= 65) || (z+7 > 34))
```

```
{
    cout << "Les maths, c'est extraordinaire!" << endl;
}
else
{
    cout << "J'aime les mathématiques!" << endl;
}
```

Qu'est-ce qui sera écrit selon les valeurs des variables suivantes? N'oubliez pas de mettre les valeurs de vérité des propositions rencontrées.

1) $z = 6$

$G \bmod 2 = 0$	ou	$G \geq G_5$	ou	$G + 7 > 34$
v		F		F

vrai → Les maths c'est extra!

[illegible]

3) $z = 32$ $32 \bmod 2 = 0$ ou $32 \geq 65$ ou $32 + 7 > 39$
 V ou F ou V
 vrai → les maths c'est extra!

4) $z = 27$

$27 \bmod 2 = 0$	ou	$27 \geq 65$	ou	$27 + 7 > 34$
F	ou	F	ou	F

F → J'aime les math!

div

```
cout << "Hello World" << endl;
```

propositions rencontrées.

11

Faux \rightarrow C'est trivial!

4

vrai → Hello World

V

Vrai → Hello World

10) Déterminer si les énoncés suivants sont des tautologies, des contradictions ou des contingences :

a) $\neg[p \leftrightarrow (p \vee p)]$ contradiction

b) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ contingency

c) $(p \oplus q) \vee (\neg p \vee q)$ tautologie

c)

p	q	$p \oplus q$	$\neg p \vee q$	$(p \oplus q) \vee (\neg p \vee q)$
F	F	F	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	F	V
V	V	F	V	V

11) Déterminer la négation des énoncés suivants :

$$a) \neg((A \vee B) \wedge \neg A)$$

a) $(A \vee B) \wedge \neg A$

b) $(x > 3) \wedge (x \neq 4)$

c) $(y \leq 4) \vee (y > 5)$

$$\begin{aligned} a) & \neg((A \vee B) \wedge \neg A) \\ & \neg(A \vee B) \vee A \\ & (\neg A \wedge \neg B) \vee A \end{aligned}$$
$$b) \neg ((x > 3) \wedge (x \neq 4))$$
$$\neg(x > 3) \vee \neg(x \neq 4)$$
$$(x \leq 3) \vee (x = 4)$$
$$c) \neg ((y \leq 4) \vee (y > 5))$$
$$\neg(y \leq 4) \wedge \neg(y > 5)$$
$$(y > 4) \wedge (y \leq 5)$$