Vecteurs

Par Jessica Turcotte

Qu'est-ce qu'un vecteur?

- Permet de représenter mathématiquement des situations où interviennent les concepts suivants :
  - Grandeur : longueur, intensité, distance
  - Direction : Points cardinaux (ex: marcher vers l'Est), en degré
    - Orientation
    - Sens
- Exemple :
  - Une force pour déplacer un objet
  - La vitesse d'une voiture sur une route
  - Direction prise par un personnage de jeux vidéo

À quoi servent les vecteurs?

- Modélisation des forces physiques (moteurs physiques des jeux vidéos)
- Représenter des trajectoires et dessiner des contours

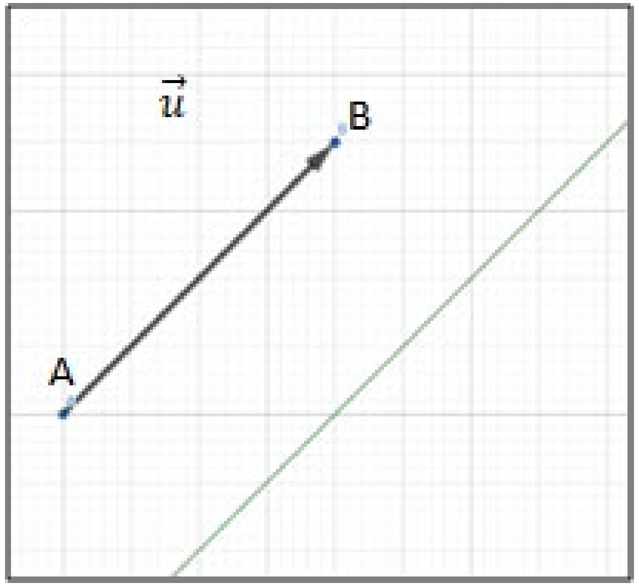
  (courant dans les jeux vidéos, algorithme de *path-finding*, gestion des collisions)
- Stocker des images
  - Format matriciel : on conserve chaque pixel. Plus facile, mais risque de perte de qualité lorsque agrandi

    (fichier bitmap (bmp), portable network graphique (png) et joint graphic expert group (jpeg)
  - Format vectoriel : on stocke différent point de repère et les lignes les liant. L'image doit être calculée à partir des données à chaque affichage (+ professionnel)

    (scalable vector graphics (svg) ou portable document format (pdf))

Vecteurs géométriques

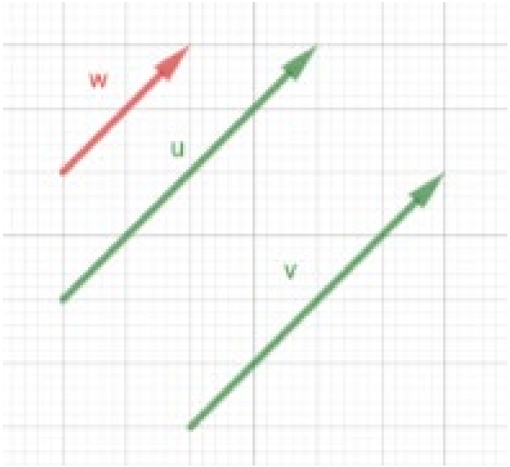
- Vecteur : segment de droite orienté, on le note $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$.
- Il possède :
  - Une norme ou module (longueur)
    - Notation : $\|\vec{u}\|$
  - Une orientation
    - direction (droite en vert)
    - sens (position de la pointe de flèche)
    - Donner avec les points cardinaux ou avec un angle anti-horaire
- Angle entre 2 vecteurs
  - Plus petit angle entre les 2, donc $0 \leq \theta \leq 180°$

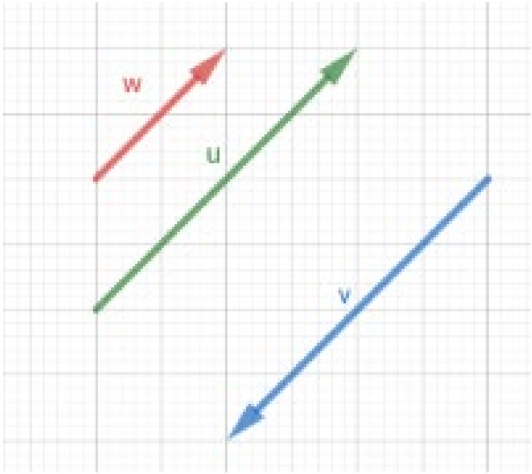


Vecteurs particuliers

- **Vecteurs égaux**
  - Deux vecteurs sont égaux si :
    1. Ils ont la même longueur
    2. Ils ont la même direction
    3. Ils ont le même sens
- **Vecteurs parallèles**
  - Deux vecteurs sont parallèles s'ils ont la même direction
- **Vecteurs orthogonaux**
  - Deux vecteurs sont orthogonaux si l'angle entre les vecteurs est 90°

Exemple :





- **Vecteur nul**
  - $\vec{0}$ est le vecteur nul
  - Son origine et son extrémité sont au même point $\overrightarrow{AA}$
  - Longueur de 0, pas de direction ni de sens
- **Vecteurs opposés**
  - Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est de même longueur, de même direction, mais de sens inverse
  - On le note $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- **Vecteur unitaire**
  - Vecteur de longueur 1 ($\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$)
  - On peut obtenir un vecteur unitaire de même orientation qu'un vecteur $\vec{u}$ en faisant :

$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$$

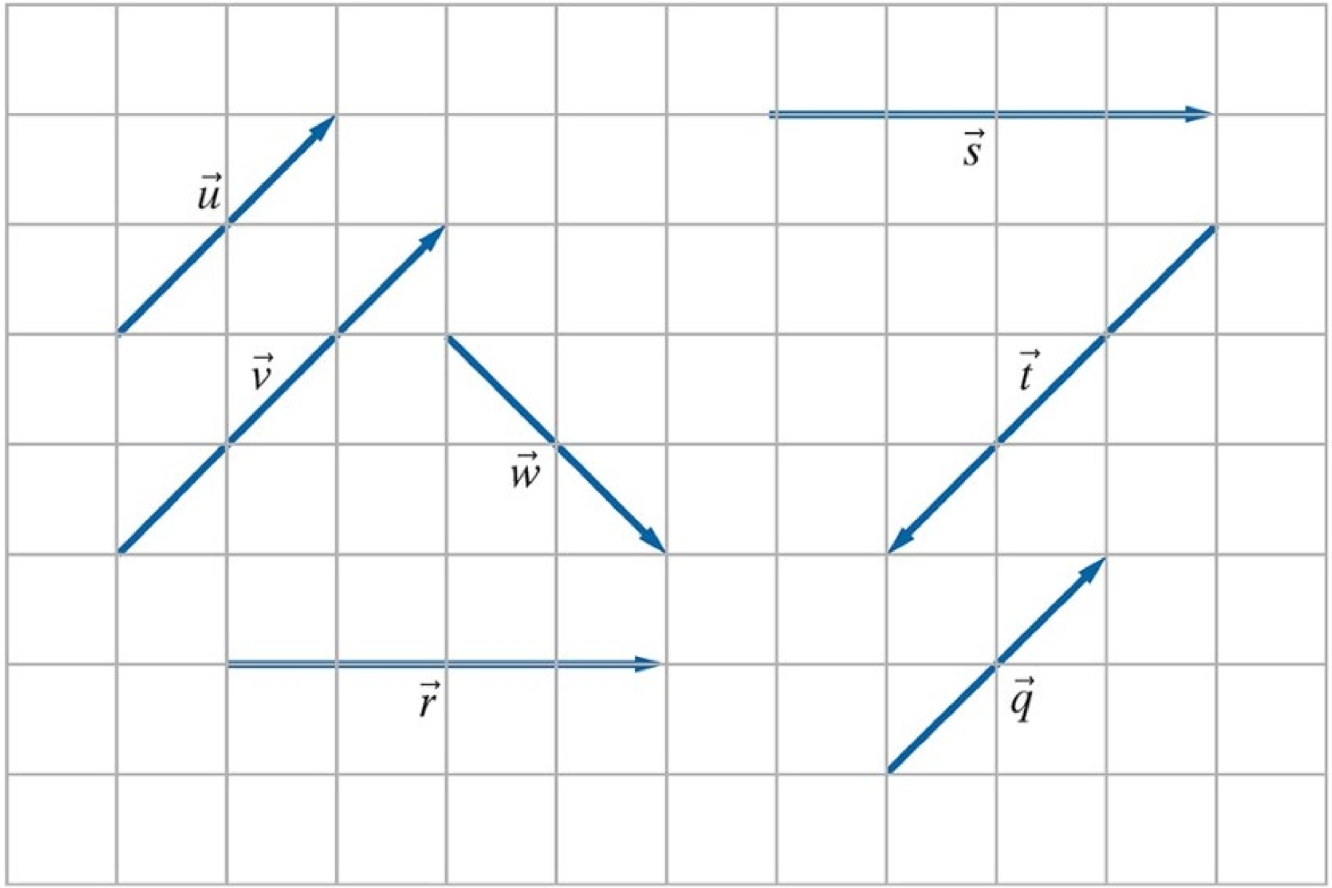
Exercice

- Parmi les vecteurs de l'image suivante, quels vecteurs sont

a) Parallèles

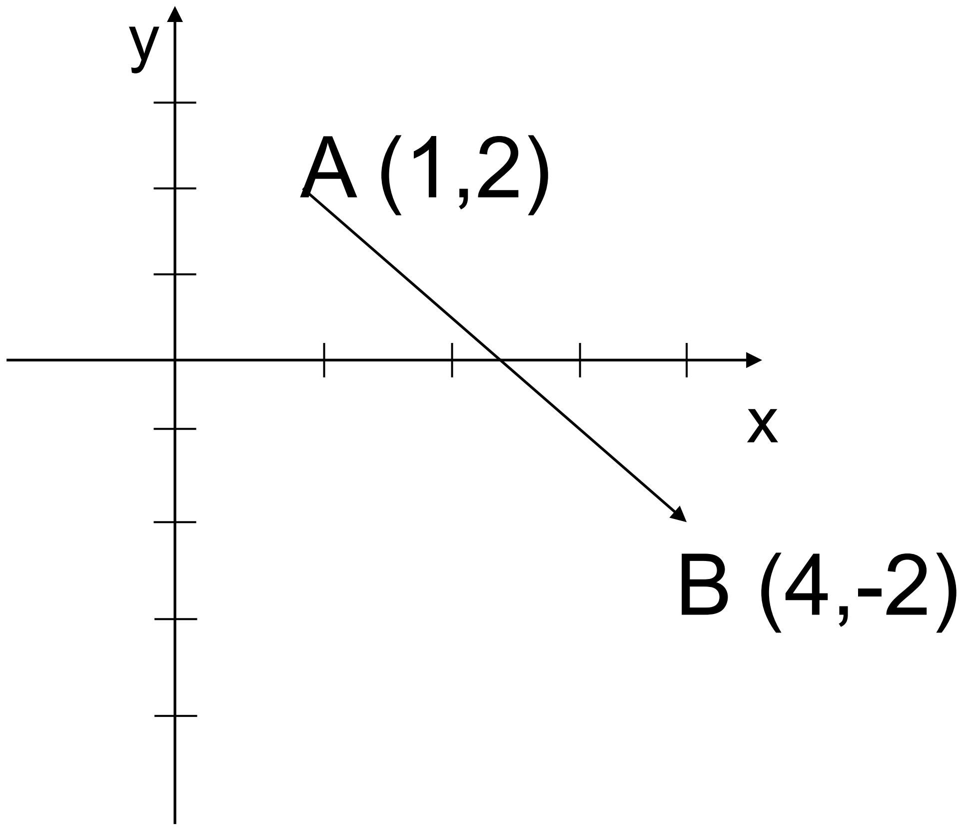
b) Orthogonaux

c) Opposés



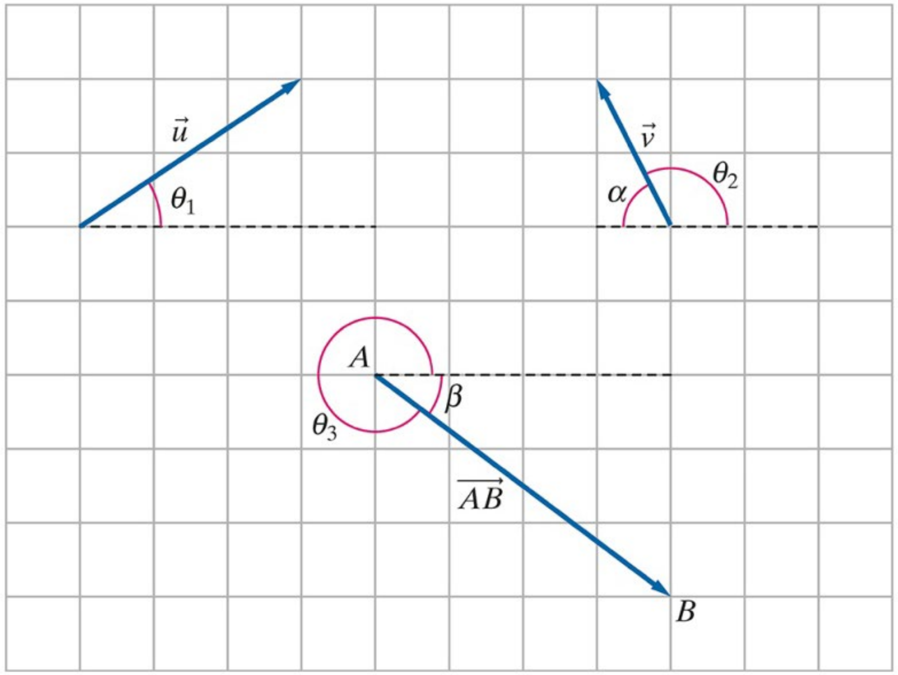
Vecteurs algébriques (cartésiens)

- Composantes d'un vecteur
  - $\vec{u} = [u_x \quad u_y]$
  - u_x est le déplacement fait en x pour passer de l'origine à l'extrémité
  - u_y est le déplacement fait en y pour passer de l'origine à l'extrémité



Exercices

- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.



Dans un triangle rectangle

- Pythagore

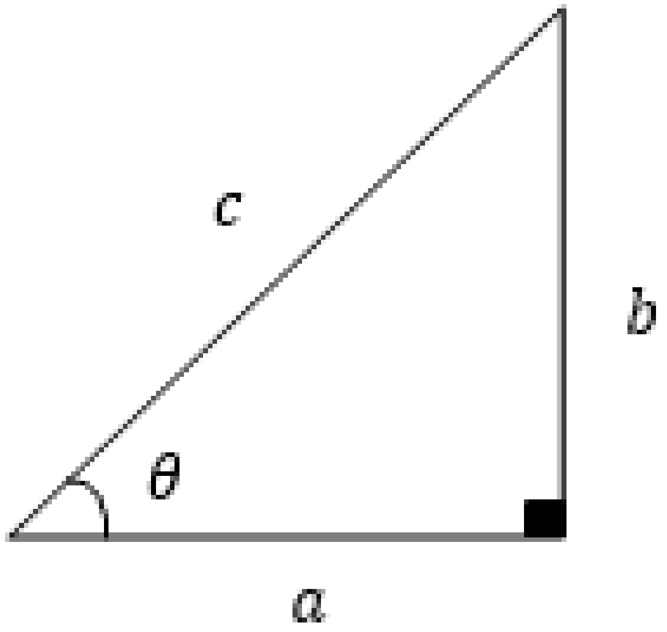
$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Relation trigonométrique

$$\sin\theta = \frac{opposé}{hypoténuse}$$

$$\cos\theta = \frac{adjacent}{hypoténuse}$$

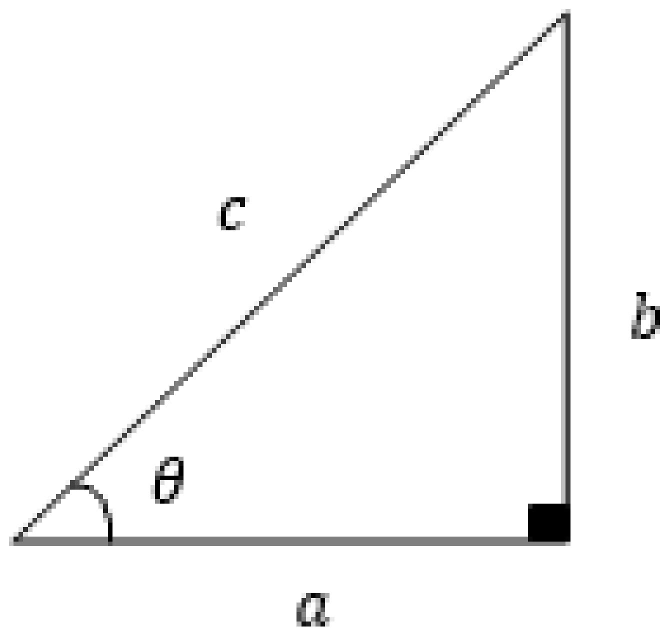
$$\tan\theta = \frac{opposé}{adjacent}$$



Exercices

a) Trouver la longueur du côté b si a = 8 et c = 9,5

b) Si θ = 54°, et que l'hypoténuse mesure 8 cm, trouvez a et b.



Norme et orientation d'un vecteur

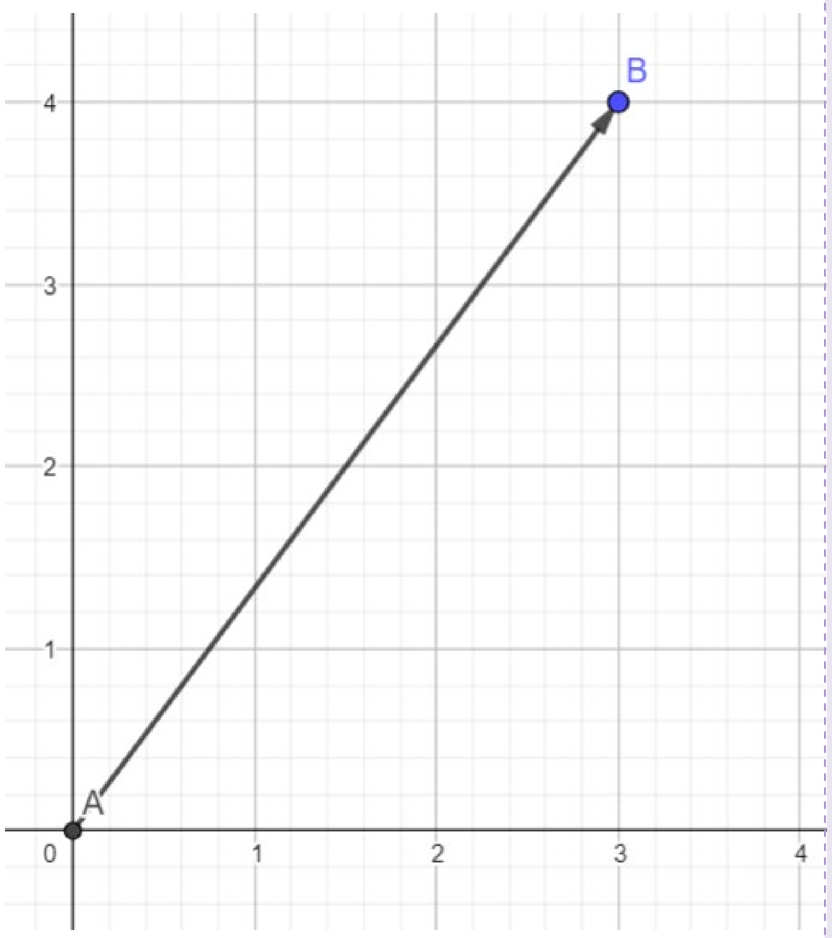
- Norme d'un vecteur

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2}$$

- Orientation !!!

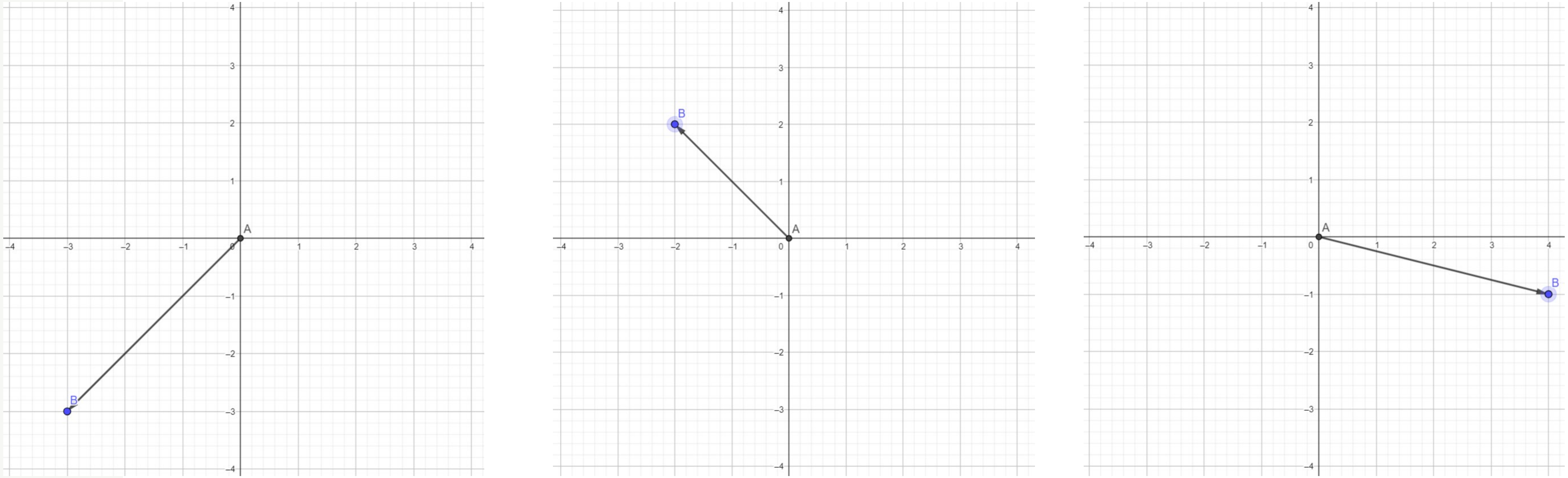
$$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x}$$

Attention !



Exercices :

Calculez la norme et l’angle à partir des composantes

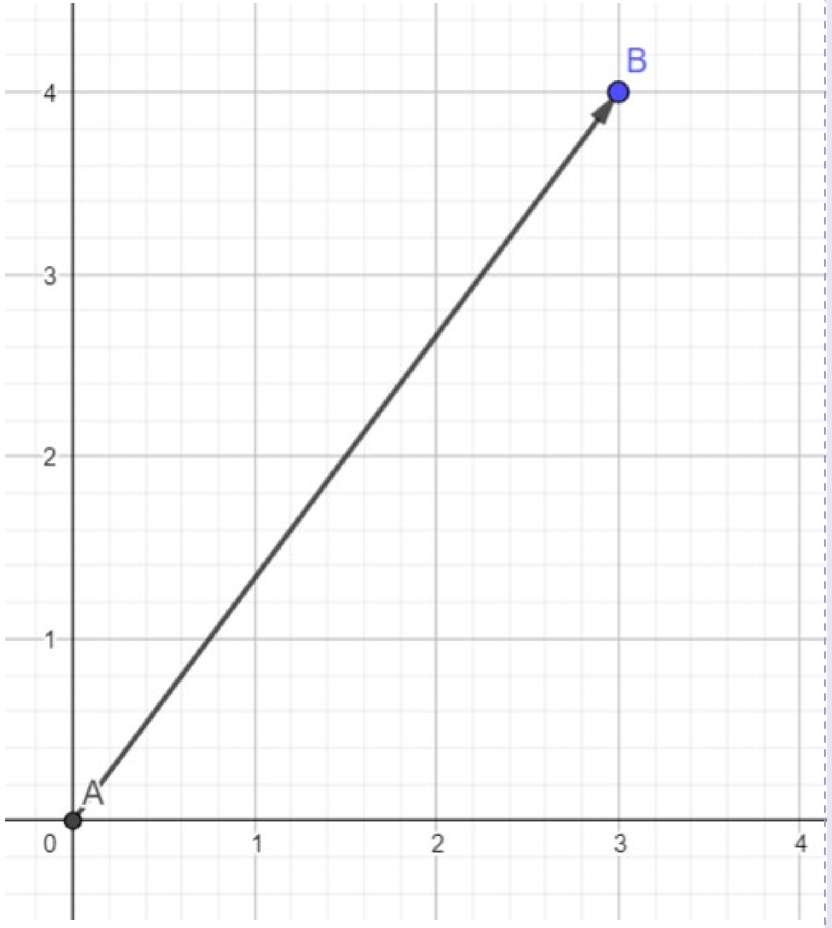


Coordonnées à partir de la norme et de l'orientation

- Composante en x :
$$u_x = \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta$$

- Composante en y :
$$u_y = \|\vec{u}\| \cdot \sin\theta$$

Exercice : Trouvez les composantes du vecteur $\vec{w}$ dont la norme est de 20 et l'orientation est de 300°.

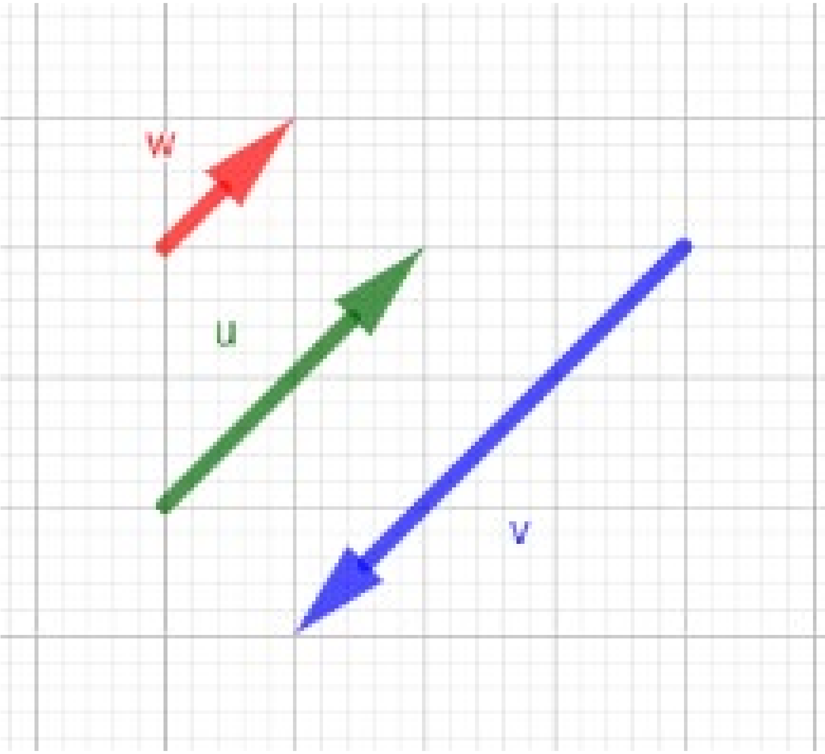


Multiplication d'un vecteur par un nombre

- Soit le vecteur $\vec{u}$ et $k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot \vec{u} = [k \cdot u_x \quad k \cdot u_y]$$

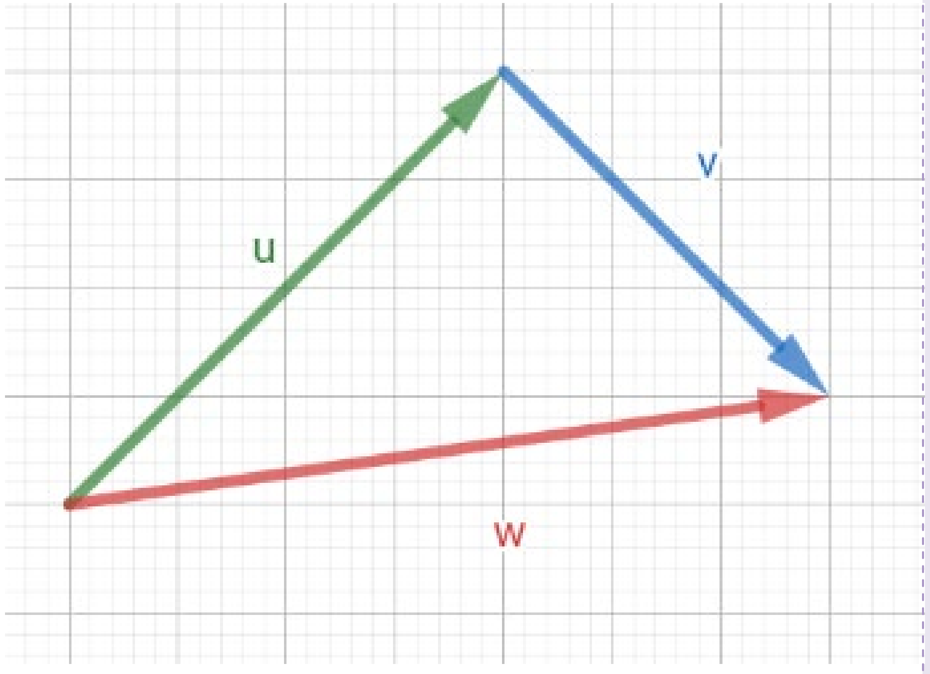
- $k \cdot \vec{u}$ est de même direction que $\vec{u}$ si k est positif
- $k \cdot \vec{u}$ est de sens contraire à $\vec{u}$ si k est négatif
- Tous les vecteurs obtenus d'une multiplication entre un vecteur et un scalaire sont parallèles au vecteur initial.



Exercice : écrire les vecteur $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme une multiplication du vecteur $\vec{u}$ par un scalaire.

Addition et soustraction de vecteurs

- Méthode géométrique
  - Méthode du triangle (pour l'addition) :
    1. On met les vecteurs bout à bout
    2. Le vecteur résultant est tracé en partant de l'origine jusqu'à la dernière extrémité.



- Méthode algébrique
  - On additionne/soustrait les coordonnées en x
  - On additionne/soustrait les coordonnées en y

Exercices
(utiliser les 2 méthodes de résolution)

Soit les points A=(1,1) , B=(4,3) et C=(2,4)

a) Quel est le résultat de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

b) Quel est le résultat de $2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Relation de Chasles

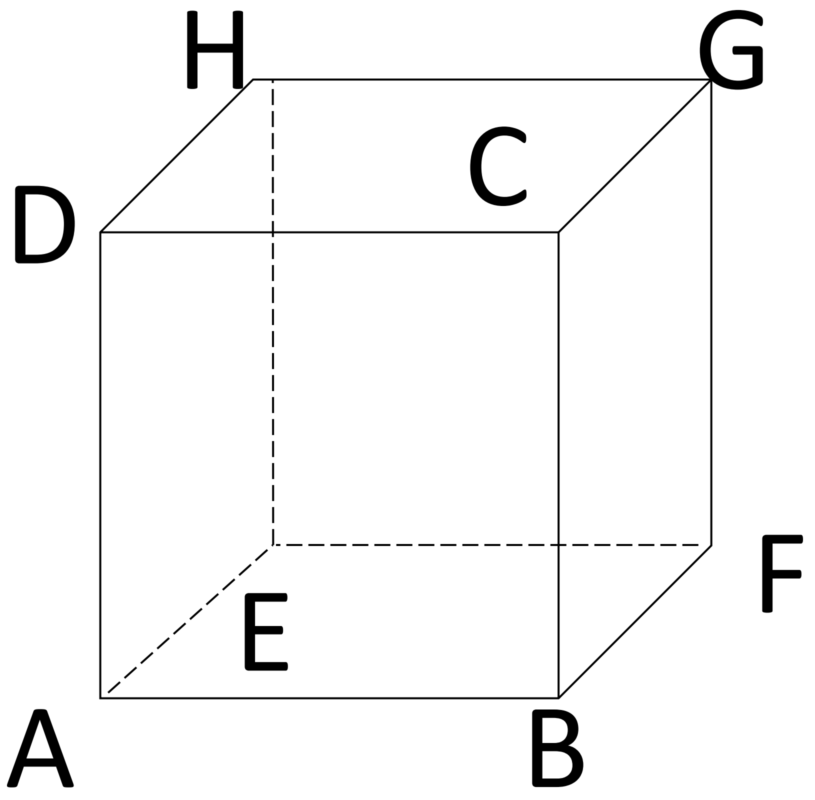
- S'applique lors d'une addition lorsque l'extrémité du 1er vecteur correspond à l'origine du 2e vecteur.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Exercices :

1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{FM}} =$

2) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DF} =$



Produit scalaire

- Multiplication de 2 vecteurs qui nous donne un scalaire (nombre réel).
- Il existe 2 formules pour trouver le produit scalaire :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta$$

- Particularité : le produit scalaire est nul si l’angle entre les 2 vecteurs est 90° (donc s’ils sont orthogonaux/perpendiculaire)

Exemple

$\vec{a} = [3 \quad 0]$ et $\vec{b} = [8 \quad -1]$

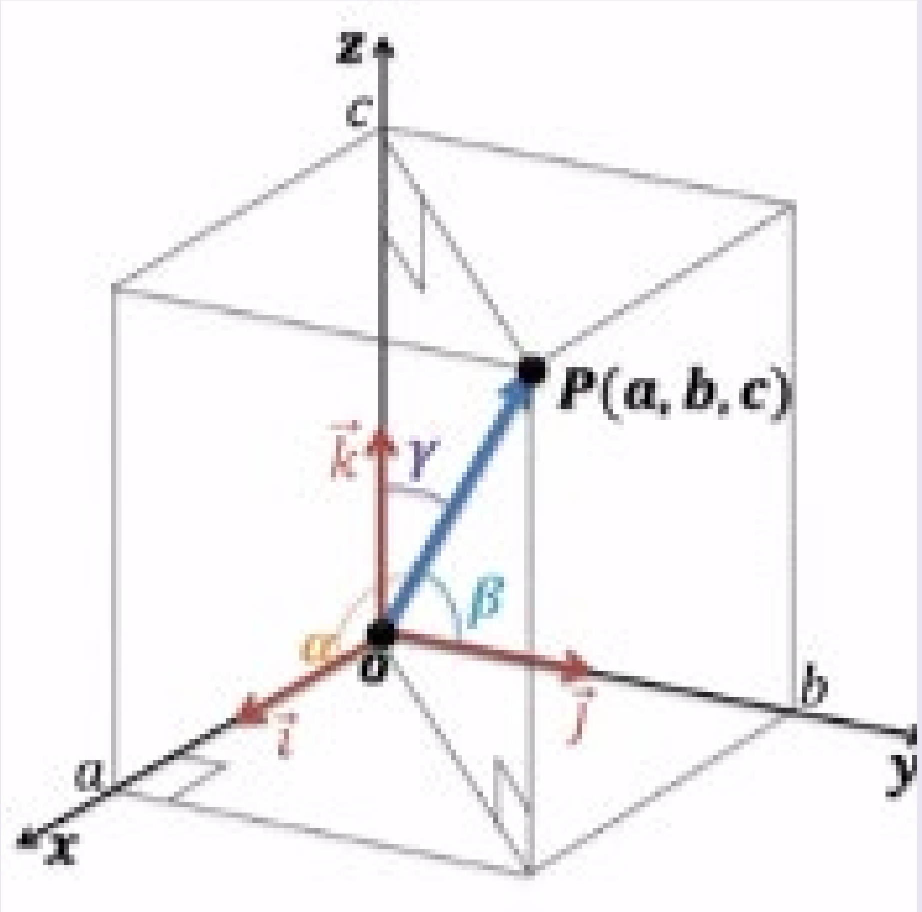
Faire le produit scalaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Quel est l'angle entre les 2 vecteurs?

Vecteurs dans l'espace

- Un vecteur algébrique dans l'espace a 3 composantes
$$\vec{u} = [u_x \quad u_y \quad u_z]$$

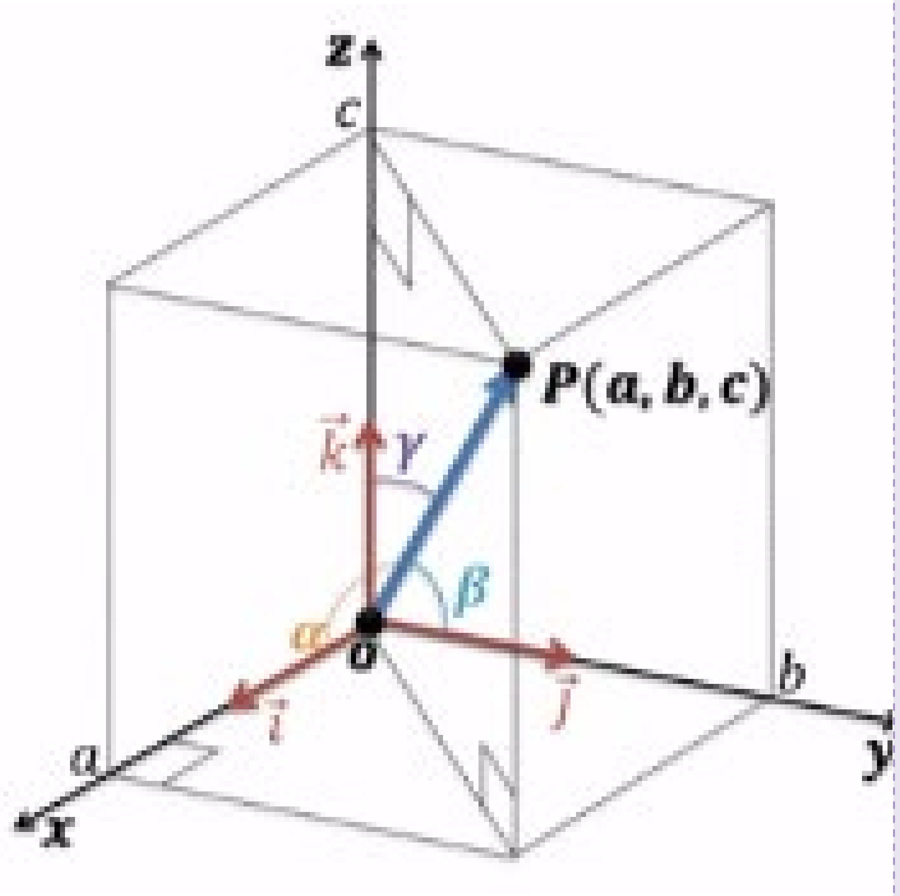
- Tous vecteurs de l'espace peut être décrit par 3 vecteurs de base :
$$\vec{i} = [1 \quad 0 \quad 0]$$
$$\vec{j} = [0 \quad 1 \quad 0]$$
$$\vec{k} = [0 \quad 0 \quad 1]$$



Composantes et norme d'un vecteur en 3D

- Composantes :
  - Extrémité – origine pour chaque composante
- Norme

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2}$$



Exercice

a) Trouver le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ à partir des points P=(2,-3,2) et Q=(-4,3,-1)

b) Trouver la norme d'un vecteur qui passe par L=(0,2,1) et B=(-1,0,3)

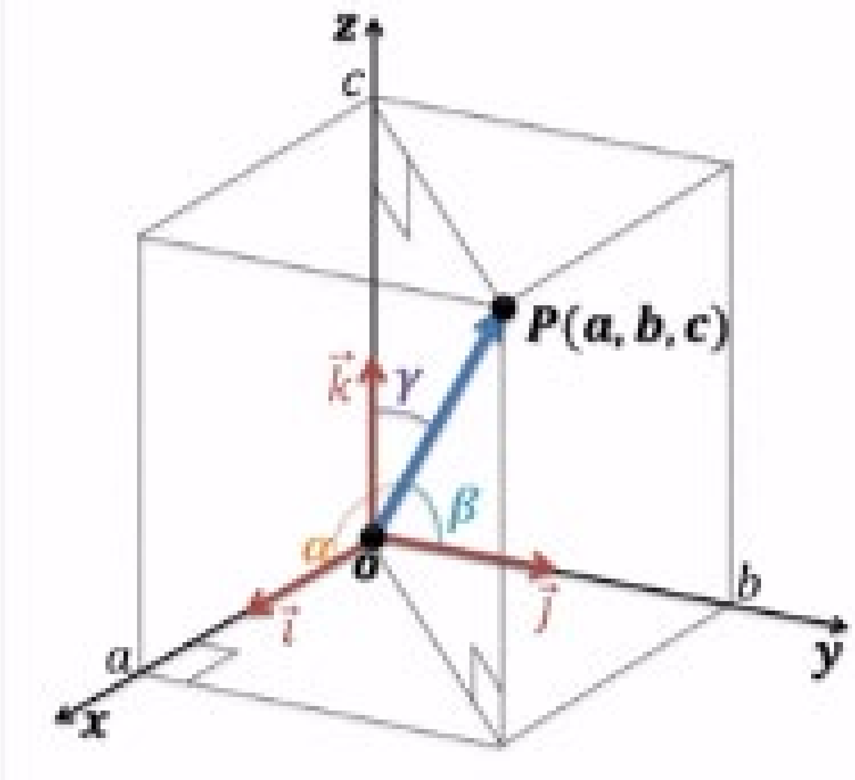
Direction d'un vecteur dans l'espace

- 3 angles directeurs :
  - α : angle entre l'axe des x positif et le vecteur
  - β : angle entre l'axe des y positif et le vecteur
  - γ : angle entre l'axe des z positif et le vecteur
- Pour placer un vecteur dans l'espace les 3 angles sont nécessaires.

$$\alpha = \arccos \frac{u_x}{\|\vec{u}\|} \qquad ou \qquad u_x = \|\vec{u}\| \cdot \cos \alpha$$

$$\beta = \arccos \frac{u_y}{\|\vec{u}\|} \qquad ou \qquad u_y = \|\vec{u}\| \cdot \cos \beta$$

$$\gamma = \arccos \frac{u_z}{\|\vec{u}\|} \qquad ou \qquad u_z = \|\vec{u}\| \cdot \cos \gamma$$



- Un mot sur les cosinus directeur

Exercices

1. Soit $\overrightarrow{AB}$ où $A = (1,2,3)$ et $B = (4,-3,5)$
   a) Trouvez les composantes de $\overrightarrow{AB}$
   b) Trouvez $\|\overrightarrow{AB}\|$
   c) Trouvez les angles directeurs de $\overrightarrow{AB}$

Exercices (suite)

2. Sachant que $\|\vec{u}\| = 6$ et que les angles directeurs du vecteur $\vec{u}$ sont $\alpha = 99{,}7°$, $\beta = 32{,}3°$ et $\gamma = 59{,}5°$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u}$.

Angle entre 2 vecteurs dans l'espace Et produit scalaire

- L'angle θ entre 2 vecteurs est toujours l'angle le plus petit trouver entre 2 vecteurs

- Les formules du produit scalaire peuvent être modifiées pour s'appliquer à des vecteurs de l'espace. Voici les nouvelles formules :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

- Rappel : Si le résultat de $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est 0, alors les vecteurs sont orthogonaux (ils forment un angle de 90°.

Exercice

Trouvez l'angle entre les vecteurs $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{m} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$