# Séquence 3 : Matrices

Par Jessica Turcotte

# Qu’est-ce qu’une matrice?

C’est un tableau contenant m lignes (ou rangées) par n colonnes

$$A = A_{mxn} = \left[a_{ij}\right]_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ce tableau contient donc m x n éléments, c’est le format de la matrice.

Chaque élément se nomme par sa position :

Ex : l’élément $a_{21}$ est l’élément à la ligne 2 et à la colonne 1

# Exercices

1. Dire le format des matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Donner les valeurs des éléments suivants :

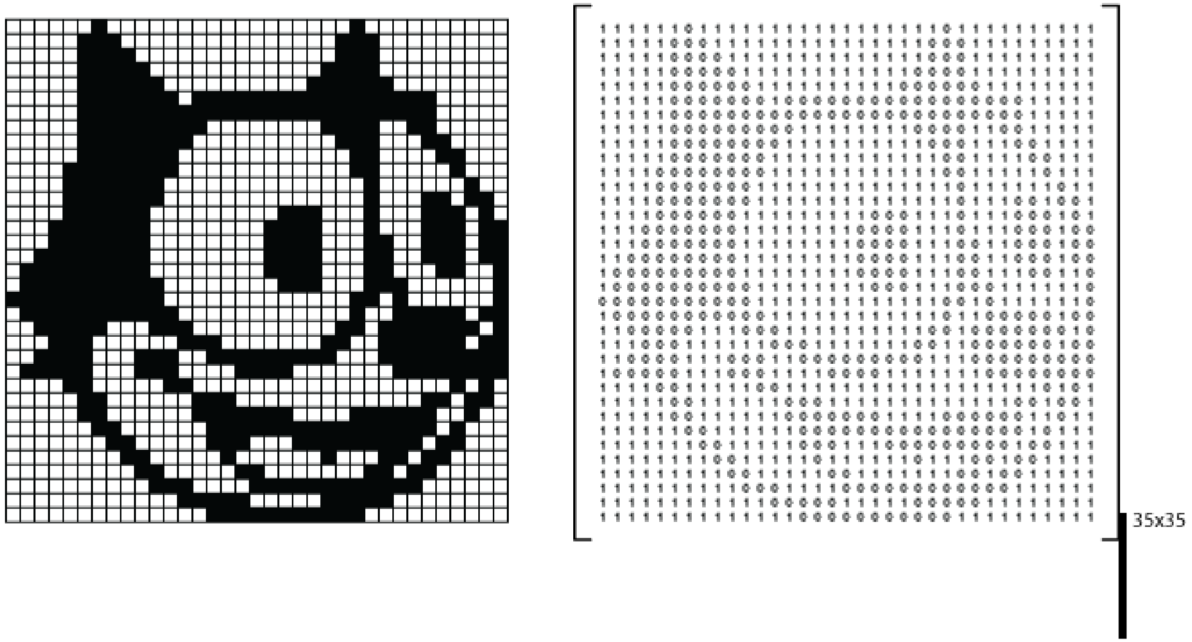
$a_{23} =$ ________ $b_{32} =$ ________ $c_{12} =$ ________ $c_{21} =$ ________

# Exercices

Construire la matrice B de format 2 x 2 dont les éléments sont : $b_{ij} = i + 3^j$

# Exemple utilité d’une matrice

- Résolution de système d’équations linéaires
- Déplacement, rotation, etc. en infographie
- Placer différentes données collectées sur une période de temps (ex : nombre d’heures d’ensoleillement selon le mois et la ville)
- Informations sur des prix de ventes
- Les pixels d’un ordinateur



## Matrice ligne

Matrice de format 1 x m

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

## Matrice colonne

Matrice de format n x 1

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

## Matrice carré

Matrice de format n x n

On dit qu'une matrice carré est d'ordre n

Diagonale principale

Trace d'une matrice carré : somme de la diagonale principale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

# Exercices

Donnez l'ordre de la matrice suivante,

les éléments de sa diagonale principale

et la trace de cette matrice

$$C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice nulle

$$0_{m\times n}$$

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice identité

$$I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de signes

$$S_{m\times n} = \left[(-1)^{i+j}\right]_{m\times n}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{bmatrix}; \qquad S_{2\times 3} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

# Pseudocode : matrice nulle

```
Fonction matnulle(O, m, n)
Pour i ← 1 à m
        Pour j ← 1 à n
                O[i, j] ← 0
        FinPour
FinPour
Retourner O
```

# Pseudocode : matrice Identitée

```
Fonction matid(I, n)
Pour i ← 1 à n
        Pour j ← 1 à n
                Si i = j alors
                        I[i, j] ← 1
                Sinon
                        I[i, j] ← 0
                FinSi
        FinPour
FinPour
Retourner I
```

# Exercices

Construire un algorithme, « pseudocode » nous permettant d’obtenir une matrice de signes

# Égalité de 2 matrices

Pour que deux matrices soient égales, elles doivent avoir le même format et on doit retrouver tous les éléments qui les composent à la même position.

Disons les matrices $A_{m\times n}$ et $B_{p\times q}$. $A = B$ si :

*1)* $m = p$ et $n = q$

*2)* $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} ; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} ; \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

# Addition de matrices (soustraction)

- Pour additionner (soutraire) deux matrices, elles doivent être de même format!!!
  - Si elles ne sont pas de même format, on dit qu’elles sont incompatibles

- $A \pm B = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \pm \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]_{m\times n}$
  - Bref, on additionne (soustrait) les éléments qui sont à la même position.
  - Chaque élément étant un nombre réel, on fait plusieurs additions (soustractions) de réels

# Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Faire les opérations suivantes :

*1)* $A + B =$

*2)* $A + C =$

# Propriétés d'addition de matrices

| | |
|---|---|
| $A + B = B + A$ | Commutativité |
| $A + (B + C) = (A + B) + C$ | Associativité |
| $A + 0 = A$ | Neutre additif |
| $A + (-A) = 0$ | Opposé |

# Pseudocode : addition de matrices

```
Fonction addmat(A, B, C, m, n)
Pour i ← 1 à m
        Pour j ← 1 à n
                C[i, j] ← A[i, j] + B[i, j]
        FinPour
FinPour
Retourner C
```

# Multiplication par un scalaire

Si k est un réel et $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, alors

$$k \cdot A = k \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

Le format de la matrice multipliée par un scalaire reste le même après la multiplication.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 3\ A =$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad -1\ B =$$

# Matrice opposée

Dans l'exemple précédent, $(-1)B = -B$ est la matrice opposée à B.

Elle joue le rôle d'inverse dans l'addition

$$A + (-A) = A - A$$

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}]_{m\times n} + [-a_{ij}]_{m\times n} \\ &= [a_{ij} - a_{ij}]_{m\times n} \\ &= 0_{m\times n} \end{aligned}$$

# Propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire

$$(\mathrm{p}q)A = p(qA)$$

$$(\mathrm{p} \pm q)A \;= pA \pm qA$$

$$\mathrm{p}(A \pm B) = pA \pm pB$$

# Pseudocode : multiplication d’une matrice par un scalaire

```
Fonction multscal(A, B, x, m, n)
Pour i ← 1 à m
        Pour j ← 1 à n
                B[i, j] ← x * A[i, j]
        FinPour
FinPour
Retourner B
```

# Transposition d'une matrice

Si $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$, alors $A^T = \left[a_{ji}\right]_{n \times m}$

La transposée de la matrice A est obtenue lorsque les ligne de A deviennent les colonnes de $A^T$. Les colonnes de A deviennent aussi les lignes de $A^T$.

Le format de la matrice A peut changer après une transposition : le format « m x n » devient le format « n x m ».

Exemple : Obtenez la transposée de la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

# Propriétés de la transposition

$$(A^T)^T$$

$$(\mathrm{k}A)^T = kA^T$$

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

# Pseudocode : transposée d’une matrice

```
Fonction transmat(A, B, m, n)
Pour i ← 1 à m
        Pour j ← 1 à n
                B[j, i] ← A[i, j]
        FinPour
FinPour
Retourner B
```

# Exercices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Faire les opérations suivantes :

*a)* $2A - C =$

*b)* $A^t - C =$

*c)* $B^t - C =$

# Exercices

Trouvez les valeurs de a, b, c et d dans l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & 4 \\ -1 & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \boldsymbol{c} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{d} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# Multiplication de matrices

Deux matrices sont compatibles pour la multiplication si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième.

$$\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

La matrice résultante aura le nombre de lignes de la première matrice et le nombre de colonne de la deuxième.

La multiplication se fait de la façon suivante :

$$C = AB = \left[ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times p}$$

L'élément $c_{ij}$ est obtenu en faisant ligne i (de la matrice A) x colonne j (de la matrice B)

# Exemples

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$a)\ \ AC =$

$b)\ \ AB =$

# Exercices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$a)\ \ BC =$

$b)\ \ CB =$

$c)\ \ A^2$

# Propriétés de la multiplication de matrice

| | |
|---|---|
| $AB \neq BA$ | Pas commutative |
| $A(B+C) = AB + AC$ | Distributivité à gauche |
| $(A+B)C = AC + BC$ | Distributivité à droite |
| $A(BC) = (AB)C$ | Associativité |
| $(\mathrm{k}A)B = k(AB) = A(kB)$ | |
| $(kA)(lB) = (kl)AB$ | |
| $(AB)^T = B^T A^T$ | Sur la transposée |
| $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n} I_n = A_{m\times n}$ | Par la matrice identité (neutre) |
| $O_{m\times n} A_{n\times p} = O_{m\times p}$ | Par la matrice O (absorbant) |
| $A_{m\times n} O_{n\times p} = A_{m\times p}$ | |

# Pseudocode : Multiplication de matrices

```
Fonction AfoisB(A, B, C, m, p, n)
Pour i ← 1 à m
        Pour j ← 1 à n
                C[i, j] ← 0
                Pour k ← 1 à p
                        C[i, j] ← C[i, j] + A[i, k] * B[k, j]
                FinPour
        FinPour
FinPour
Retourner B
```

# Exemple utilisation des propriétés

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 12 & 6 \end{bmatrix},$$

À l'aide des propriétés, isoler la matrice D et calculer-la.

$$3A + 4D = C$$

# Exemple utilisation des propriétés (2)

À l’aide des propriétés de la multiplication, Factorisez

a) $AB + CB + DB$

b) $A^3B - 3AB^3$

# Exemple d’applications des matrices

Alain, Bastien et Claire vont au dépanneur quelque fois par semaine. Leurs achats sont représentés par le tableau suivant :

| | Bouteilles d’eau | Chips | Chocolat | Arachides |
|---|---|---|---|---|
| Alain | 4 | 3 | 1 | 0 |
| Bastien | 2 | 4 | 2 | 3 |
| Claire | 3 | 3 | 3 | 1 |

Les prix de chacun des articles varient de semaine en semaine. Les coûts sont donnés ici :

| | Semaine 1 ( $ ) | Semaine 2 ( $ ) |
|---|---|---|
| Bouteille d’eau | 1,50 | 1,40 |
| Chips | 2,00 | 2,25 |
| Chocolat | 0,75 | 0,80 |
| Arachides | 1,25 | 1,15 |

a) Construire les matrices représentant les informations fournies

b) Quelle opération matricielle nous permet de connaître le montant dépensé hebdomadairement par chaque acheteurs?

c) Effectuer l’opération matricielle mentionnées en b).

d) Si le dépanneur leur offre un rabais de 10% sur les achats des semaines 1 et 2, quelle opération matricielle nous donne le montant payé alors par Alais, astien et Claire?

# Exemple suite

# À faire

Document d’exercices sur les matrices

Devoir 4