Circuits logiques

1. Opérateurs et circuits
2. Les circuits logiques
    - Circuits fondamentaux

Algèbre de Boole

- Toute algèbre en mathématiques est composée de 2 éléments :
  - Les variables
  - Les opérateurs
- Les variables booléennes prennent soit la valeur « vraie », soit « faux
  - « vrai » est symbolisé par 1. Donc la variable est à un niveau logique haut. Elle existe et elle est bien présente. (laisse passer le courant, contact fermé)
  - « faux » est symbolisé par 0. Donc la variable est à un niveau logique bas. Elle est absente. (Ne laisse pas passer le courant ou tension de 0V)

Circuits logiques

- Les circuits logiques constituent une des applications importantes de l'algèbre de Boole.
- Le circuit constitue une situation physique dont la structure logique est analogue à celle des propositions.
- Les opérateurs booléens de base sont les mêmes qu'en algèbre des propositions, soit : non, et, ou. Cependant, dans la description des circuits, on utilise d'autres symboles.
- À l'aide de ces opérateurs, on peut relier les variables booléennes de différentes façons; ces regroupements constituent des fonctions logiques dont le résultat est également une variable booléenne.

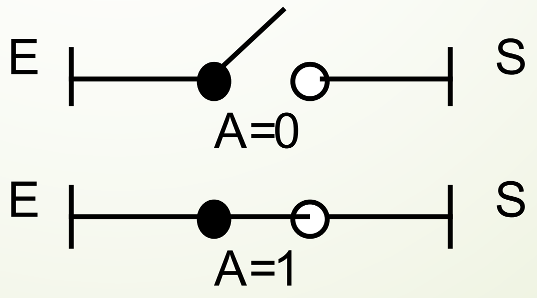
Variable Booléenne

- Puisqu'une variable de Boole ne peut prendre que deux valeurs, 0 ou 1, nous pouvons écrire :
  - Si A différente de 0 alors A = 1
  - Si A différente de 1 alors A = 0

- Une fonction logique est une combinaison de variables Booléennes reliées par des opérateurs.

Lien avec les interrupteurs

- On associe souvent la notation de variable Booléenne à un interrupteur ouvert ou fermé.
  - Supposons que la valeur 1 soit associée à l'interrupteur fermé
  - La valeur 0 est alors associé à l'interrupteur ouvert
- En admettant la présence d'une tension au point E, nous avons une tension au point S dans la mesure où A=1
- Si A = 0, il n'y a pas de tension en S.

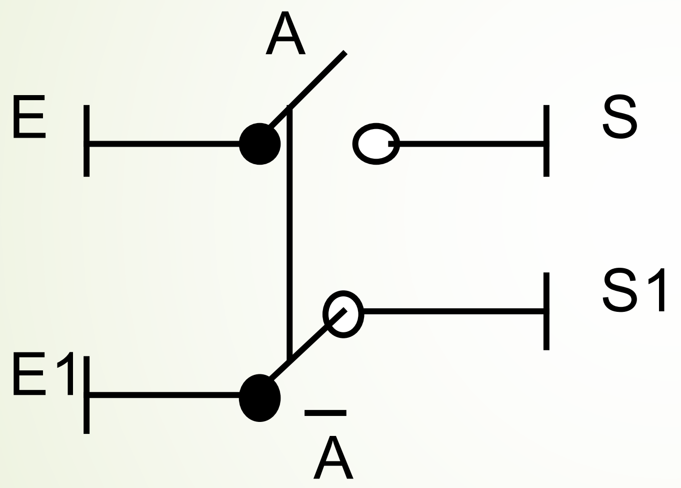


Opérateur 1: Complémentation

- Étant donnée la dualité inhérente à toute l'algèbre de Boole, la notion de complémentation d'une variable ou d'une expression est immédiate.
- Nous appelons complément d'une variable ou d'une expression, l'opposé en algèbre de Boole de cette variable ou de cette expression.
- L'opérateur de complément est représenté dans ce tableau

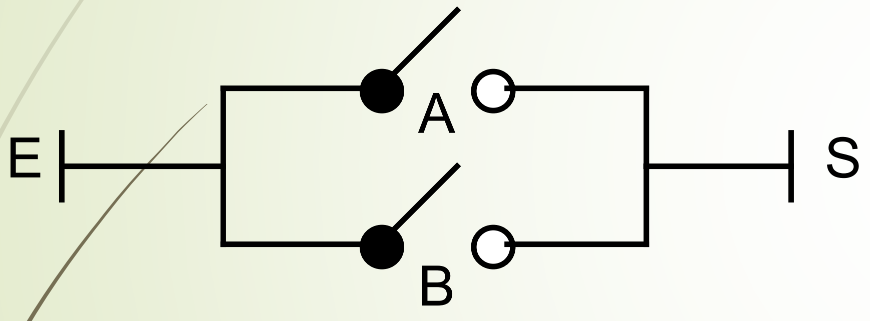
A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Opérateur 1: Complémentation



- Si la variable A est associé à un interrupteur ouvert pour la valeur 0 et fermé pour la valeur 1
- Alors la variable $\bar{A}$ est associée à un interrupteur mécaniquement lié au premier.
- Lorsque A est ouvert, $\bar{A}$ est fermé
- Lorsque A est fermé, $\bar{A}$ est ouvert

Opérateur 2:
La somme logique



- La notion de somme logique (à ne pas confondre avec la somme algébrique) peut être associée à des interrupteurs en parallèle
- En associant à la présence d'une tension la valeur 1 et à son absence la valeur 0 nous obtenons :

$$S = 0 \quad si\ A = 0\ \boldsymbol{et}\ B = 0\ (simultanément)$$

$$S = 1 \quad si\ A = 1\ \boldsymbol{ou}\ B = 1\ (ou\ les\ deux)$$

- Cette opération de somme logique est indiquée par le signe +.

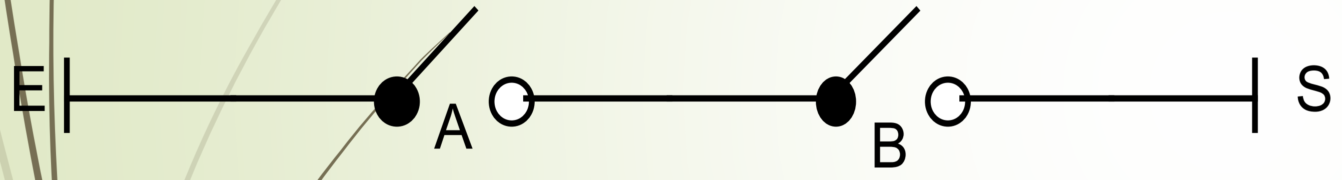
$$S = A + B$$

- Le + logique correspond assez bien à la dénomination OU
- Il y a une tension en S si les interrupteurs A ou B (ou les deux) sont fermés.
- On peut obtenir une table pour l'addition logique :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

A	B	A + B
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Opérateur 3:
Le produit logique



- La notion de produit logique peut être associée à des interrupteurs placés en série
- En associant à la présence d'une tension la valeur 1 et à son absence la valeur 0 nous obtenons :

$$S = 0 \quad si\ A = 0\ \boldsymbol{ou}\ B = 0$$

$$S = 1 \quad si\ A = 1\ \boldsymbol{et}\ B = 1\ (simultanément)$$

- Cette opération de produit logique est indiquée par le signe x.

$$S = A \times B \ (ou\ A \cdot B\ ou\ AB)$$

- Le x logique correspond assez bien à la dénomination ET
- Il y a une tension en S si les interrupteurs A et B sont fermés.
- On peut obtenir une table pour le produit logique :

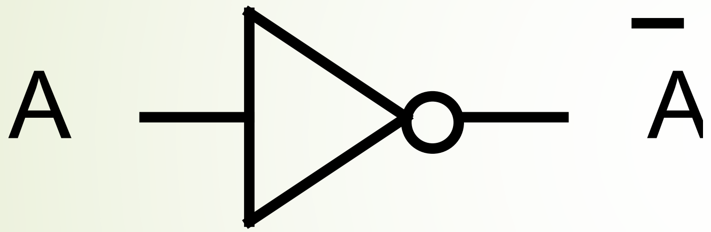
x	0	1
0	0	0
1	0	1

A	B	A x B
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Les circuits logiques

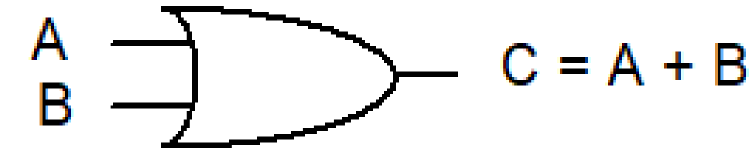
- La notion de circuits logiques a été introduite en vue de simplifier l'étude des circuits électroniques numériques.
- Grâce à la notion de circuits logiques, il est possible de travailler sur des systèmes extrêmement complexes sans pratiquement faire appel à aucune notion d'électronique.
- Les systèmes électroniques numériques les plus complexes, tels les ordinateurs, sont construits à partir de circuits logiques (ou portes logiques) fondamentaux.
- Il existe 3 portes logiques élémentaires, le circuit NON (circuit inverseur), le circuit OU et le circuit ET.

Le circuit NON (ou inverseur)



- Le circuit NON effectue l'opération de complémentation d'une variable booléenne.
- Il comporte une entrée et une sortie
- Si dans l'entrée nous introduisons la variable A, à la sortir nous obtenons la variable complémentée $\bar{A}$.

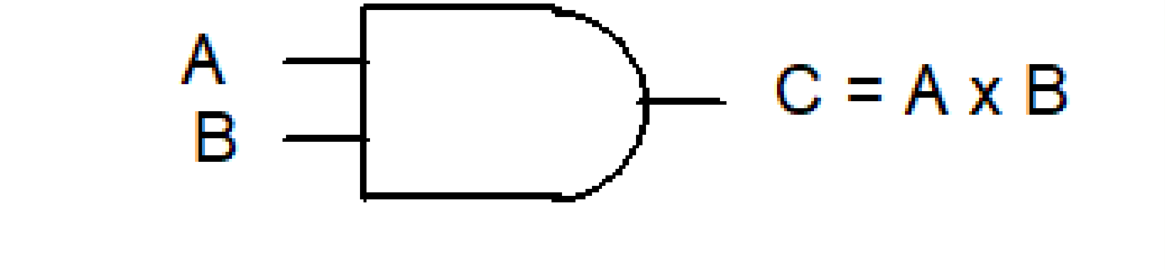
Le circuit OU



- Le circuit OU effectue l'opération de somme logique d'une variable booléenne.
- Il prend deux entrée et donne une sortie
- Si dans l'entrée nous introduisons la variable A et la variable B, à la sortie nous obtenons la variable

  C = A + B

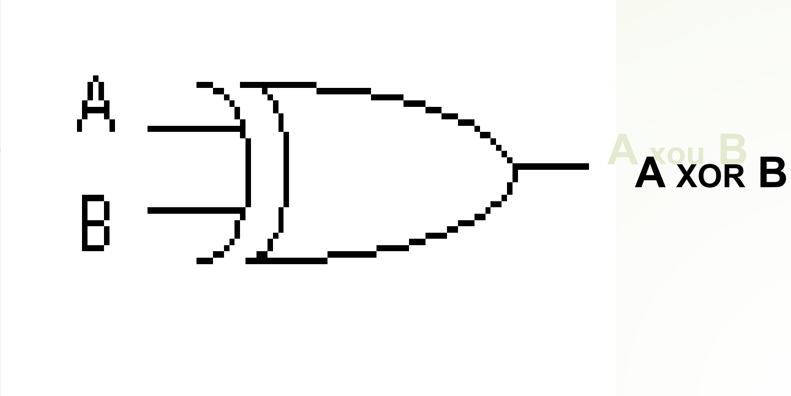
Le circuit ET



- Le circuit ET effectue l'opération de produit logique d'une variable booléenne.
- Il prend deux entrée et donne une sortie
- Si dans l'entrée nous introduisons la variable A et la variable B, à la sortie nous obtenons la variable

  C = A x B

Le circuit OU EXCLUSIF (XOR)



A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- La porte OU EXCLUSIF est souvent appelée la porte « un mais pas tous ».
- On constate à partir du tableau booléen qu'il est semblable à celui de la fonction OU, à cela près que, quand les 2 entrées sont à 1, la porte XOR donne un 0.
- $A \oplus B = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$

Exemples

a) Construire la table de vérité de la fonction logique suivante:

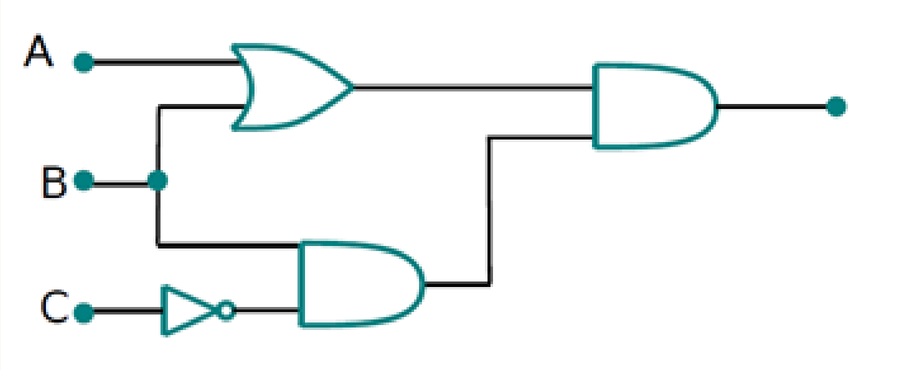
$$S = x \cdot (y + \bar{y} \cdot z)$$

b) Faire le circuit logique représentant cette fonction logique

$$S = x \cdot (y + \bar{y} \cdot z)$$

Exercices

a) Trouver l'expression logique calculée par ce circuit



b) Construire le circuit associé à la fonction $A \cdot B + \bar{A} \cdot C$

Les propriétés des opérations logiques

- Idempotence

$$x + x = x$$
$$x \cdot x = x$$

- Associativité

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

- Commutativité

$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

- Distributivité

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$
$$x \cdot (y + Z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

- Élément absorbant

$x + 1 = 1$ $\qquad$ $x \cdot 0 = 0$

- Élément neutre

$x + 0 = x$ $\qquad$ $x \cdot 1$ =x

- Complémentarité

$x + \bar{x} = 1$ $\qquad$ $x \cdot \bar{x} = 0$

- Involution

$$\bar{\bar{x}} = x$$

- Lois de De Morgan

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$
$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$$

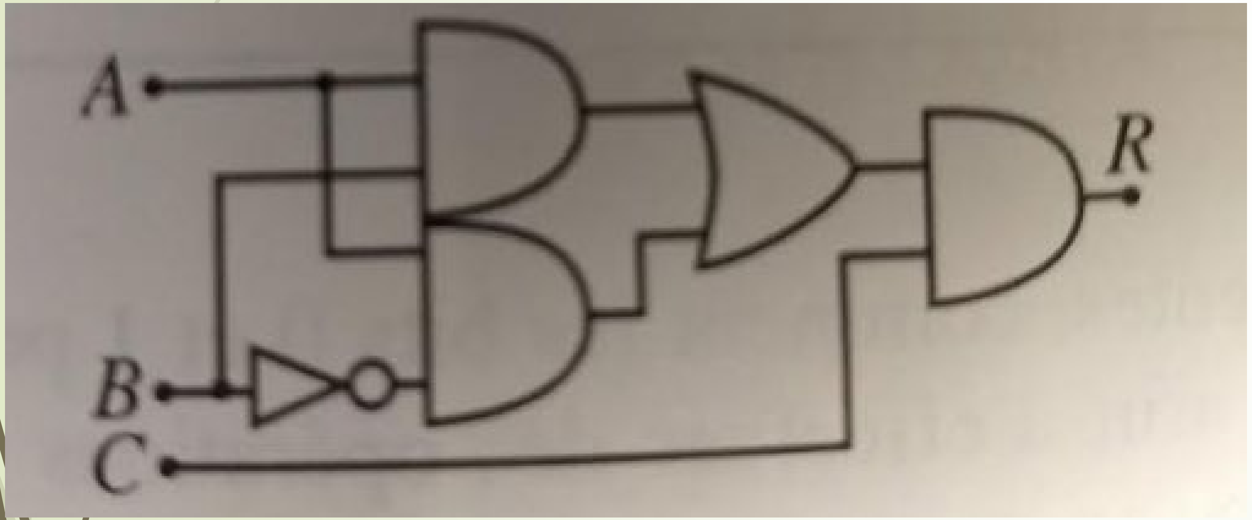
Exemples :
Simplifier les énoncés suivants et construire le circuit simplifié correspondant à chacun :

$S = x \cdot (y + \bar{y} \cdot z)$

$S = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

Exercices :

Simplifier le circuit suivant



Trouver le circuit à partir d'une table

x	y	z	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

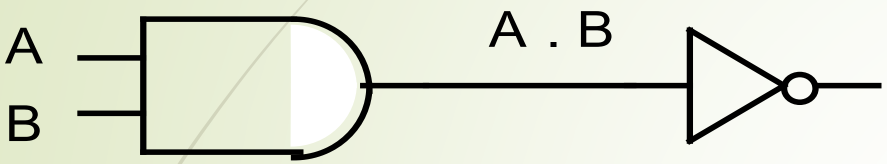
1. Identifier les lignes où le résultat est 1
2. Transformer cette ligne en produit des variables booléennes (opération « ET ») selon :
   - Si la variable X est 0, la noter $\bar{X}$
   - Sinon (X = 1), la noter X
3. Procéder à l'addition de toutes les expressions (opération « OU »)

Exercices :

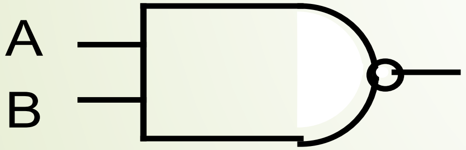
Construire un circuit permettant de calculer S comme une fonction de x, y et z définie par la table ci-dessous

x	y	z	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Le circuit NET (ou NAND)



$\overline{A\,.\,B} = \overline{A} + \overline{B}$

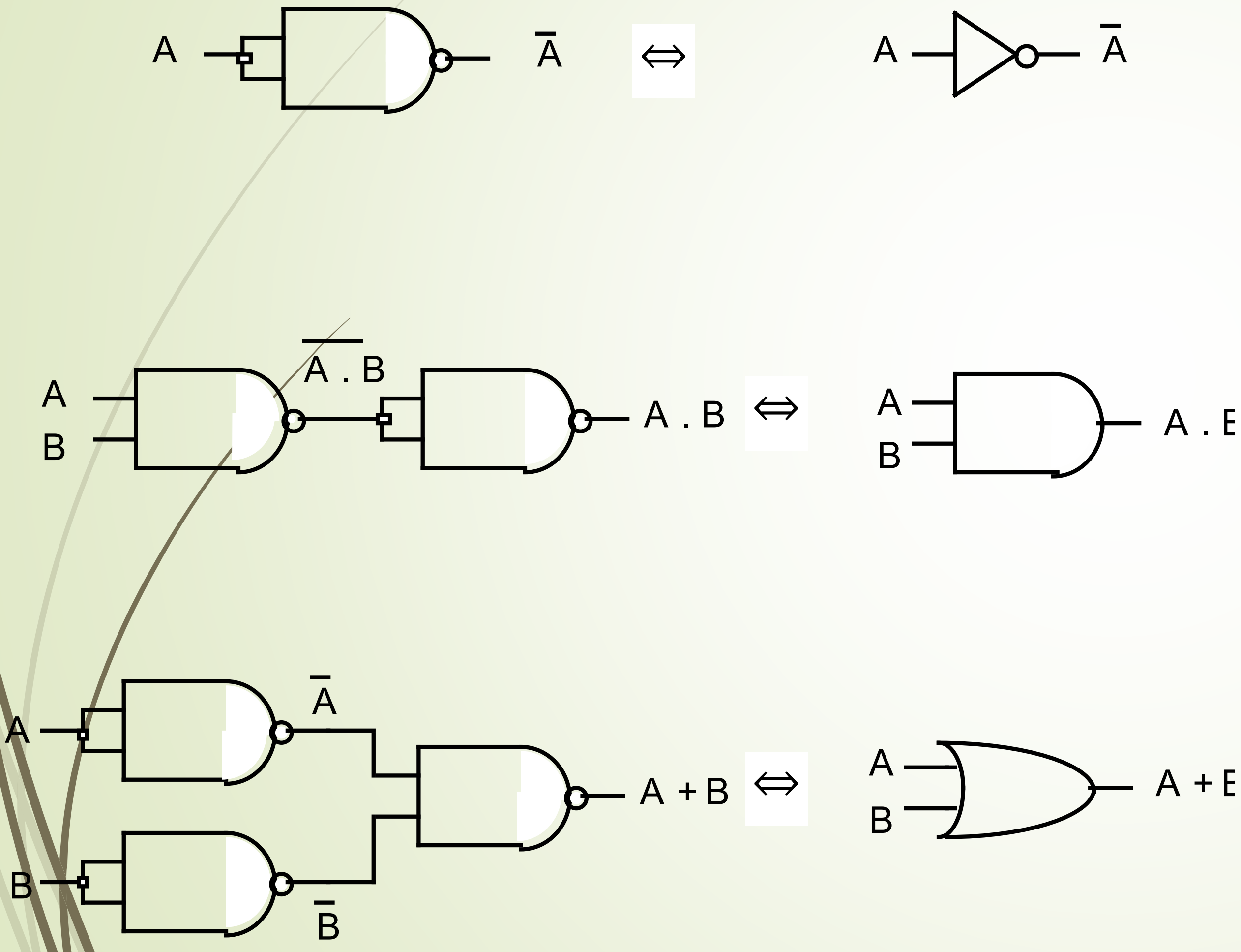


$\overline{A\,.\,B} = \overline{A} + \overline{B}$

- A / B
- Le circuit NET (contraction de NON-ET) résulte de la mise en série d'un circuit ET et d'un circuit NON.

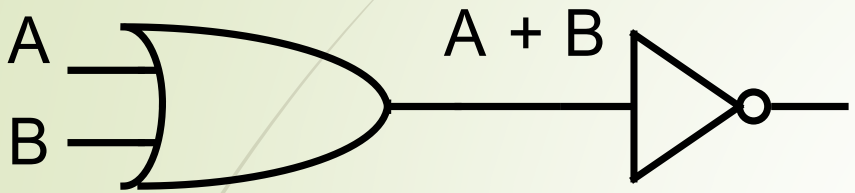
A	B	NET
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Opérateur complet

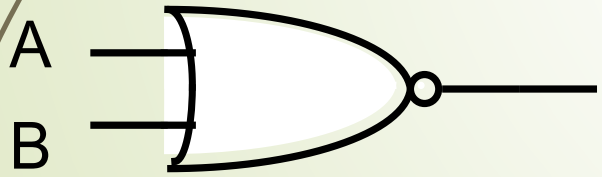


- Le circuit NET peut, par de judicieuses combinaisons, servir à réaliser les 3 portes logiques de base.
- Il est donc un opérateur complet

Le circuit NI (ou NOR)



$\overline{A + B} = \bar{A} \,.\, \bar{B}$

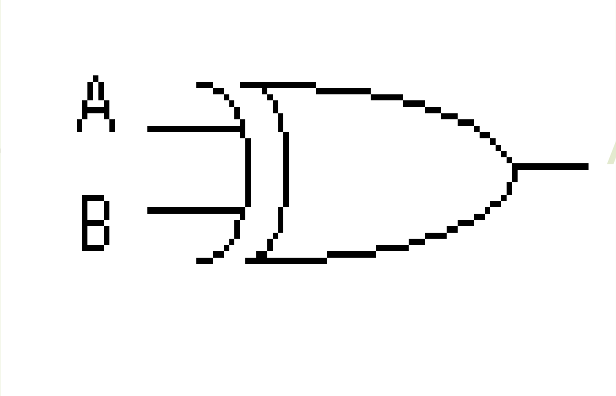


$\overline{A + B} = \bar{A} \,.\, \bar{B}$

- $A \downarrow B$
- Le circuit NI résulte de la mise en série d'un circuit OU et d'un circuit NON.
- C'est un opérateur complet

A	B	NI
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Le circuit OU EXCLUSIF (XOR)



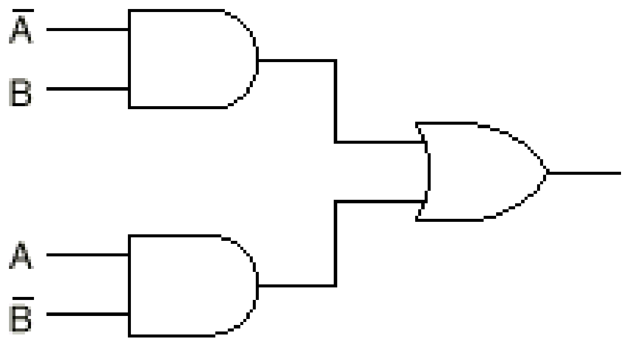
A XOR B

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

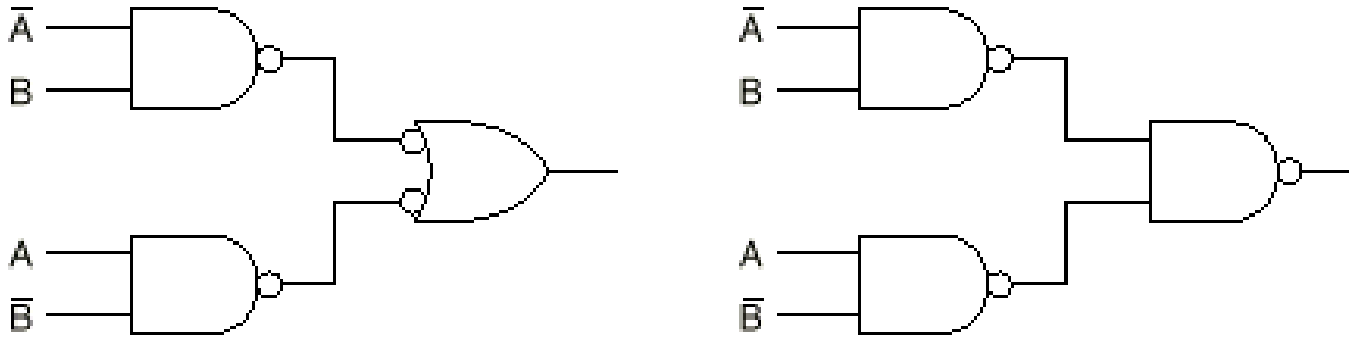
- En fait, la porte XOR n’est validée (donne une sortie 1) que si ses entrées comporte un nombre impair de 1.
- La porte XOR peut donc être considérée comme un circuit de contrôle des bits impairs.

A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(a)



(b)



(c) (d)

Figure 3-8. (a) The truth table for the XOR function. (b)-(d) Three circuits for computing it.

Circuit comparateur ou égalité

$$A \circ B = \overline{A \oplus B} = \overline{\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}}$$

A	B	A ∘ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Il est l'inverse du circuit XOR.
- Il donne 1 lorsque les 2 variables sont identiques
- Il donne 0 lorsque les 2 variables sont différentes

Exercice

- Vous devez automatiser le résultat R du vote de trois personnes (A,B,C) afin qu'une lumière s'allume lorsque la proposition est adoptée à la majorité (au moins deux personnes ont voté pour).

- a) Faire la table de vérité de cette situation

- b) Construire le circuit associé à cette situation

Les circuits d’intérêts particuliers

- Nous allons voir, dans cette section que des circuits logiques combinatoires (combinaison de circuits logiques) relativement simple (connexion de quelques portes) peuvent effectuer des additions.
- Si nous pouvons faire des additions, alors on a la possibilité de réaliser également des soustractions, des multiplications et des divisions.

  Comme nous l’avons vu avec les nombres binaires!

Additionneur simple (Demi-additionneurs (DA))

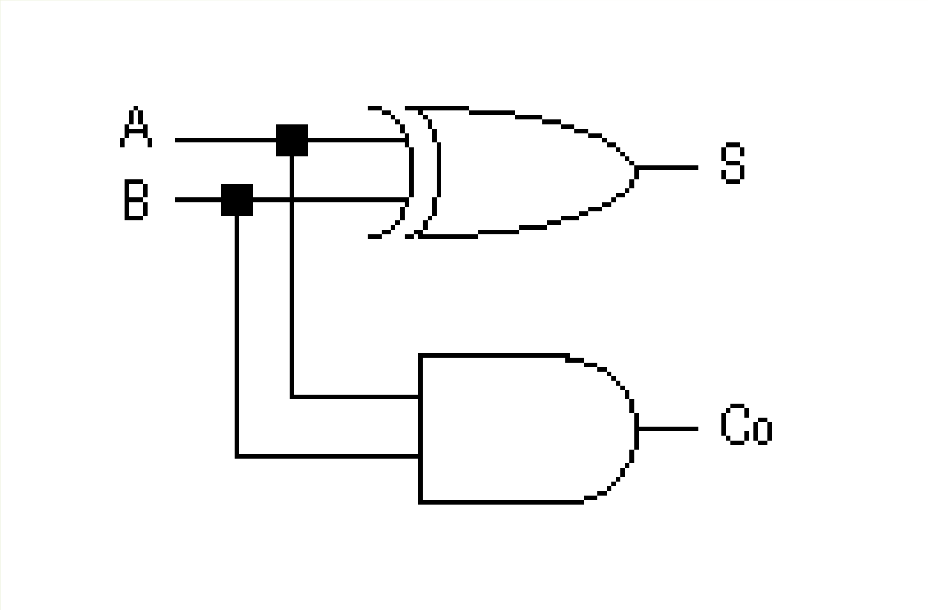
Entrées		Sorties	
A	B	Somme	Retenue
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1
A + B		S	Co

- L'addition de nombres binaires est une opération simple que l'on représente par une table de vérité à 2 variables.
- Les entrées à additionner sont A et B, la sortie somme est désignée par S et la colonne de retenue par Co (de l'anglais *Carry output*)
- On trouve que

$$S = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$$

$$Co = A \cdot B$$

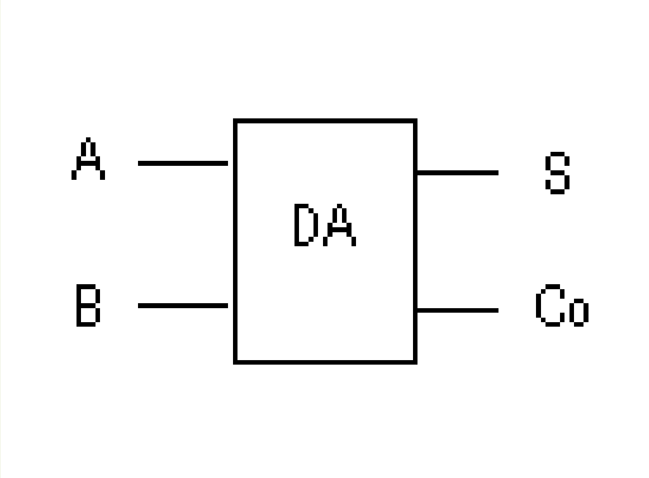
Schématisation du circuit demi-additionneur (DA)



- Comprend 2 sorties
  - Une pour S
  - Une pour Co

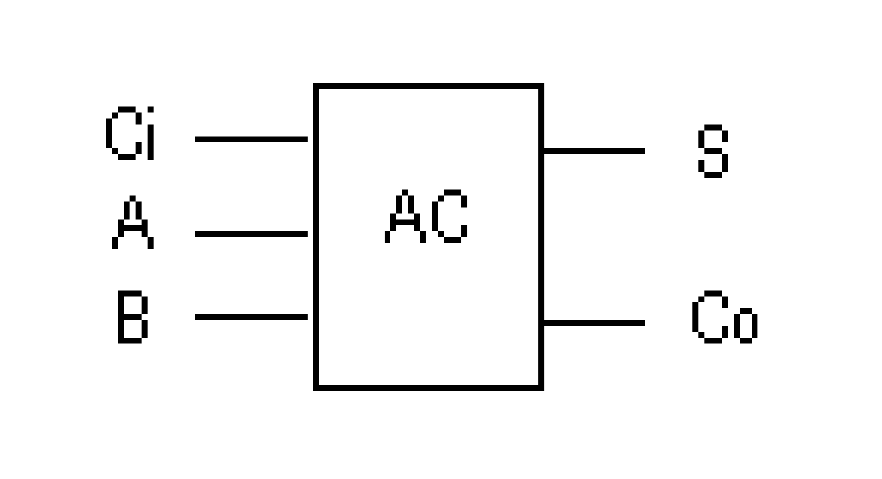
$$S = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \oplus B$$
$$Co = A \cdot B$$

Simplification du circuit DA

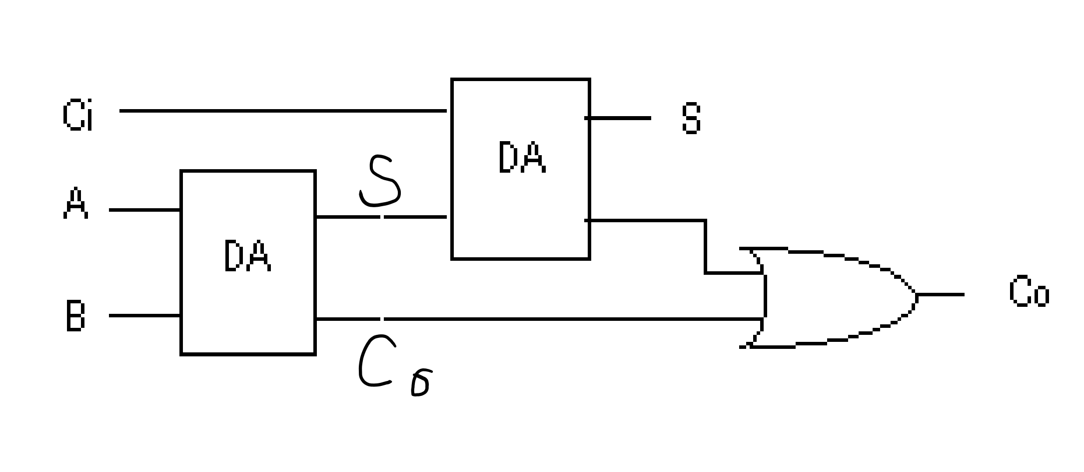


- Si on additionne 2 nombres binaires qui contiennent plus d'un chiffre binaire, le DA ne nous permet pas de tenir compte des retenues produites.
- En effet, si la première colonne de chiffre est 1+1, il nous faut transmettre la retenue au DA de la deuxième colonne pour qu'il puisse en tenir compte.

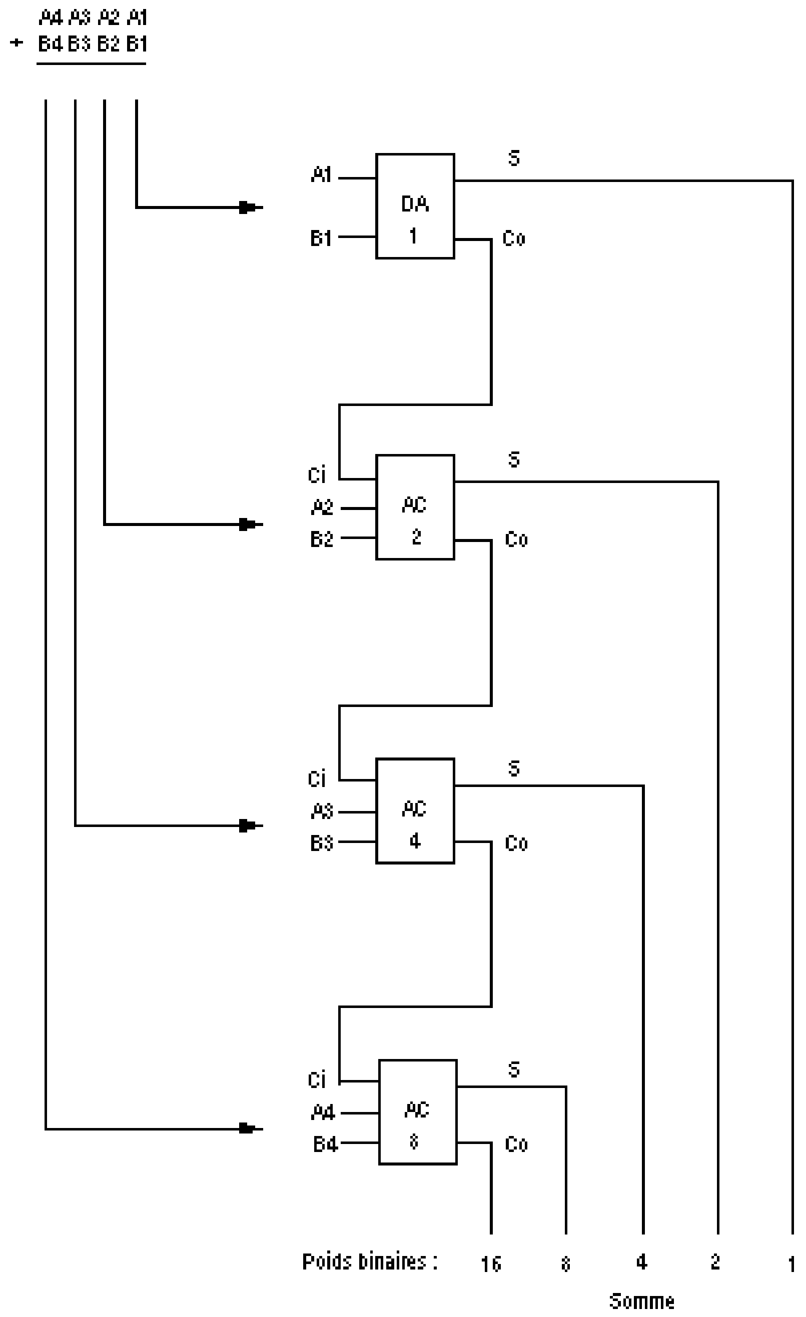
Additionneur complet (AC) ou additionneur élémentaire



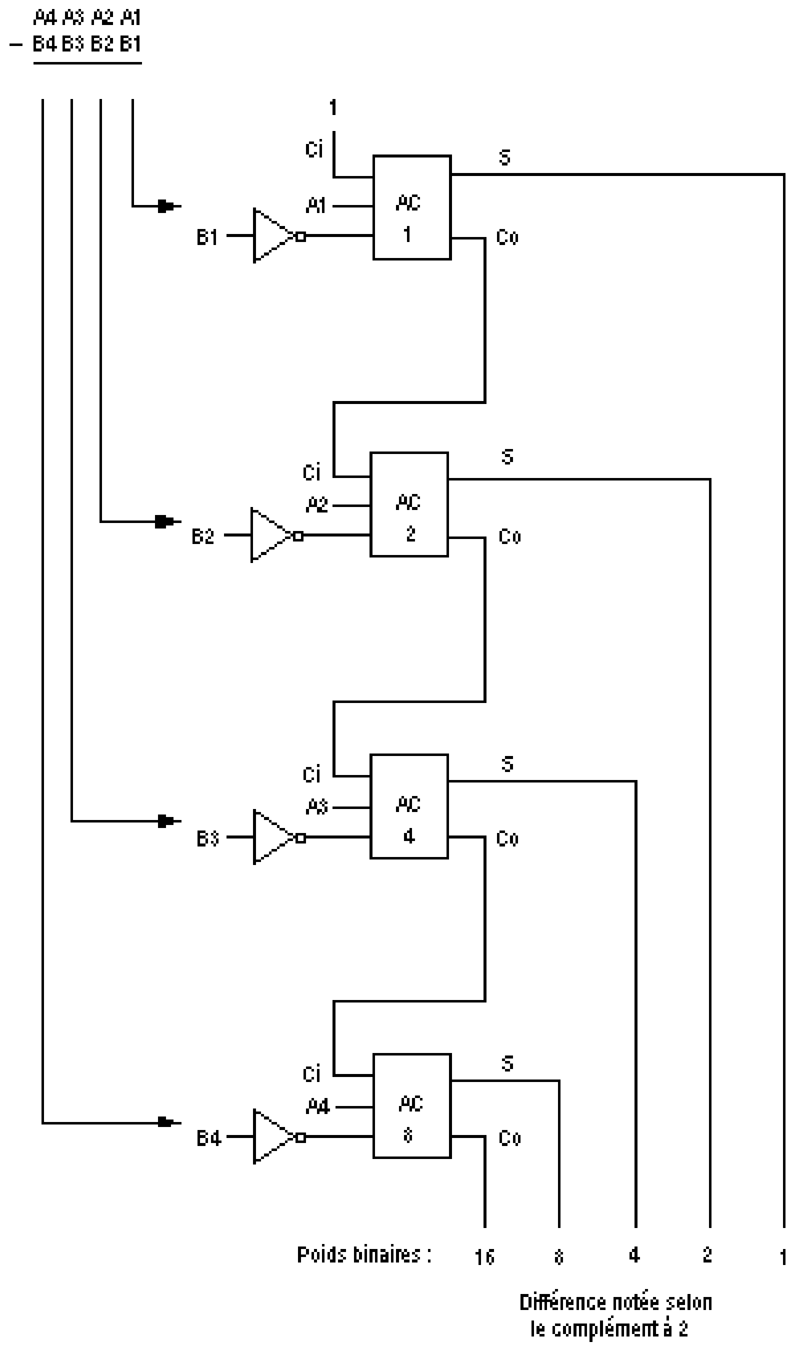
- Il nous faut donc une troisième entrée à notre circuit additionneur, afin de permettre l'addition d'une retenue générée par les chiffres de la colonne précédente.
- La troisième entrée est identifiée Ci (de l'anglais Carry input).
- Ce circuit porte le nom d'additionneur complet (AC)



- Le circuit additionneur complet peut être conçu avec 2 demi-additionneurs et une porte OU



A4 A3 A2 A1
+ B4 B3 B2 B1
A1
B1
DA
1
S
Co
Ci
A2
B2
AC
2
S
Co
Ci
A3
B3
AC
4
S
Co
Ci
A4
B4
AC
8
S
Co
Poids binaires : 16 8 4 2 1
Somme


A4 A3 A2 A1
− B4 B3 B2 B1
1
Ci
A1
B1
AC 1
S
Co
Ci
A2
B2
AC 2
S
Co
Ci
A3
B3
AC 4
S
Co
Ci
A4
B4
AC 8
S
Co
Poids binaires :
16
8
4
2
1
Différence notée selon le complément à 2

Circuit comparateur à 4 bits

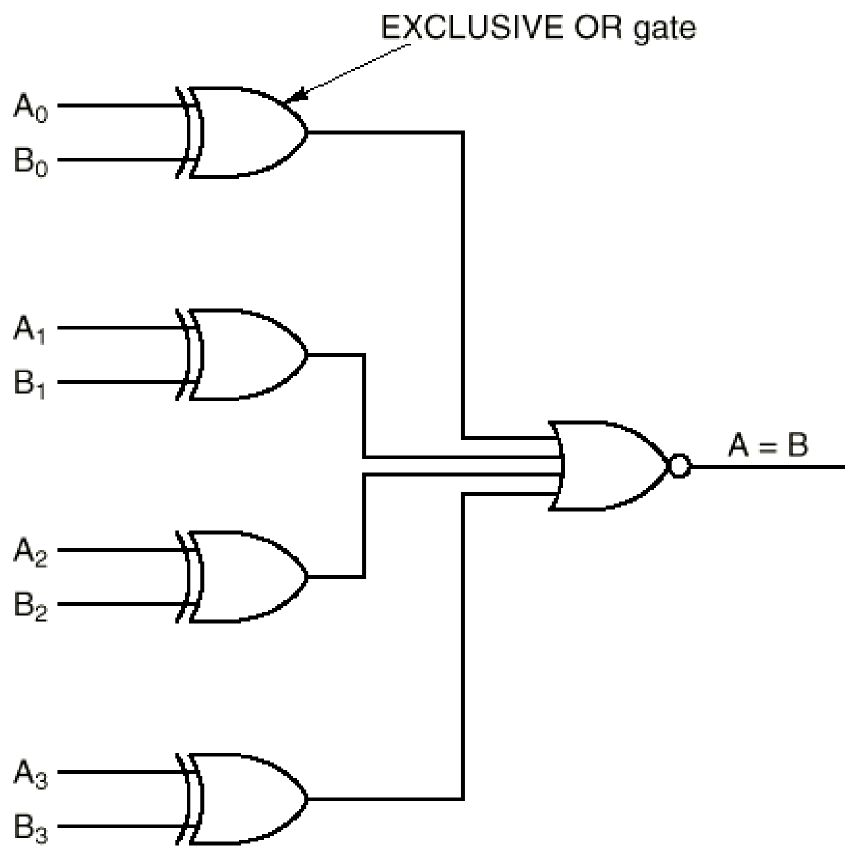


Figure 3-14. A simple 4-bit comparator.

- Ce circuit sert à vérifier si deux nombres de 4 bits sont identiques.
- Pour ce faire, il faut comparer bit à bit chacun des nombres.
- Est-ce que A = B ?

Exercices

- Construire un circuit comparateur à deux bits permettant de détecter si $A = (A_1, A_2)$ **est égale** à B= (B_1, B_2) .

- Construire un circuit comparateur à deux bits permettant de détecter si $A = (A_1, A_2)$ **est plus grand** que B= (B_1, B_2)

Devoir

- Faire les exercices du fichier (sur Omnivox) :

  Exercices circuits logiques

- Si nécessaire, écouter les capsules vidéo suivantes (sur prodafor.com)
- Circuits03
- Circuits04
- Circuits05
- Circuits07
- Circuits08
- Circuits09