Exercices Séquence 3 partie A : les vecteurs

1. Grâce à la liste de points suivantes, calculer les composantes des vecteurs demandés (en 2D)

   A(-4 , 7) B(-6 , 9) C(14 , 3) D(20 , 0) E(-2 , 8)

   a) $\overrightarrow{AB} = [-6-(-4) \quad 9-7] = [-2 \quad 2]$

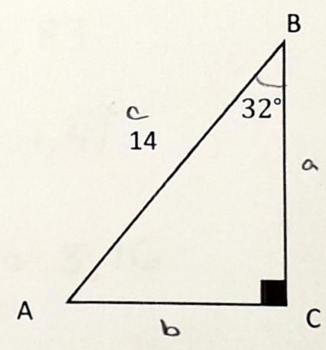
   b) $\overrightarrow{BE} = [-2-(-6) \quad 8-9] = [4 \quad -1]$

   c) $\overrightarrow{CD} = [20-14 \quad 0-3] = [6 \quad -3]$

   d) $\overrightarrow{EA} = [-4-(-2) \quad 7-8] = [-2 \quad -1]$

   e) $\overrightarrow{AD} = [20-(-4) \quad 0-7] = [24 \quad -7]$

2. Dans le triangle rectangle ABC, trouvez les informations manquantes (mesures des côtés et des angles)



$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \frac{b}{c}$$

$$\sin(32°) = \frac{b}{14}$$

$$b = 14 \cdot \sin(32°)$$

$$b \approx 7,42$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 14^2 - 7,42^2$$

$$a^2 = 140,94$$

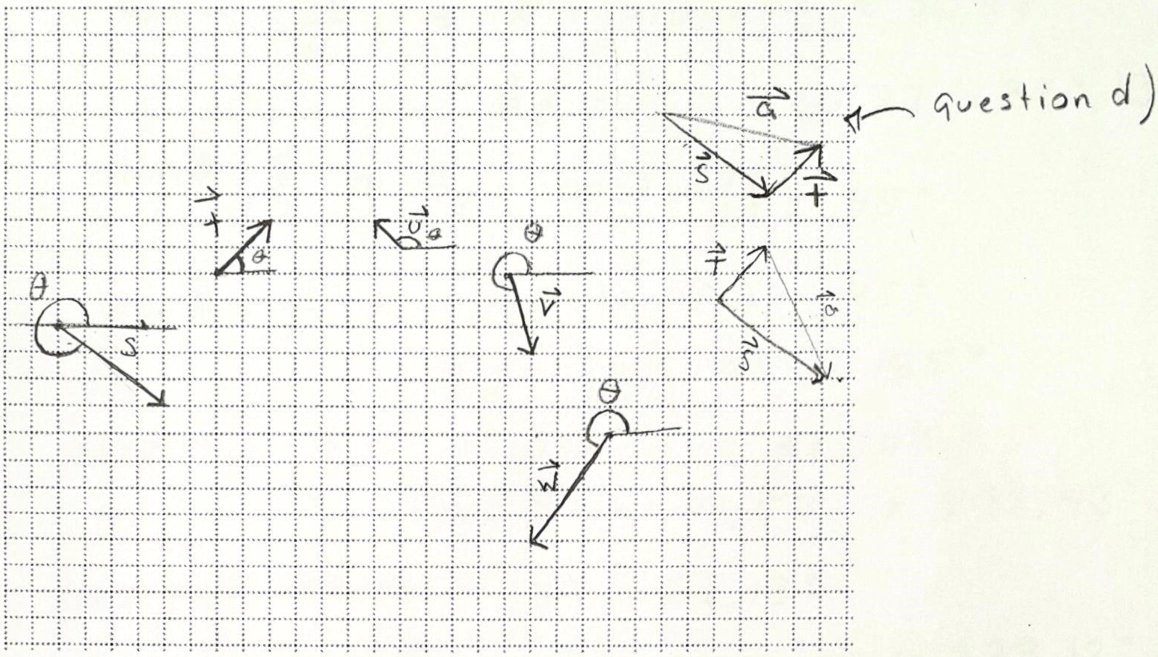
$$a = \sqrt{140,94} \approx 11,87$$

l'ange A $= 180 - 90 - 32$

$= 58°$

3. Soit les vecteurs $\vec{s} = [4 \quad -3]$, $\vec{t} = [2 \quad 2]$, $\vec{u} = [-1 \quad 1]$, $\vec{v} = [1 \quad -3]$ et $\vec{w} = [-3 \quad -4]$

a) Représentez ces vecteurs dans le plan cartésien



b) Calculez la norme de chaque vecteur

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

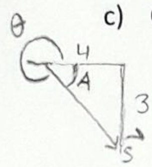
$$\|\vec{t}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \simeq 2,83$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \simeq 1,41$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \simeq 3,16$$

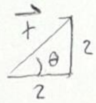
$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

c) Calculez la direction (angle d'orientation par rapport à 0°) pour chaque vecteur

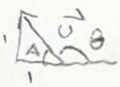


$\tan A = \frac{3}{4} \rightarrow A = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36,87$

$\theta_{\vec{s}} = 360 - 36,87 = 323,13°$

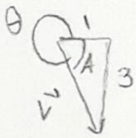


$\tan\theta = \frac{2}{2} \rightarrow \theta_{\vec{f}} = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = 45°$



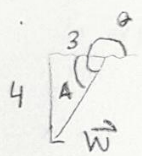
$\tan A = \frac{1}{1} \rightarrow A = \arctan(1) = 45°$

$\theta_{\vec{u}} = 180 - 45 = 135°$



$\tan A = \frac{3}{1} \rightarrow A = \arctan(3) \approx 71,57°$

$\theta_{\vec{v}} = 360 - 71,57 = 288,43°$



$\tan A = \frac{4}{3} \rightarrow A = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13°$

$\theta_{\vec{w}} = 180 + 53,13 \approx 233,13°$

d) Trouvez un vecteur $\vec{a}$ tel que les vecteurs $\vec{a}, \vec{s}$ et $\vec{t}$ forment un triangle. Vous devez exprimer ce vecteur à l'aide de ses composantes, comme les autres vecteurs de la question.

déplacement en x : 4 en $\vec{s}$ et 2 en $\vec{f}$
donc $\vec{a}$ devra se déplacer de 6 en x

déplacement en y : -3 en $\vec{s}$ et 2 en $\vec{f}$
donc $\vec{a}$ devra se déplacer de -1 en y

Rép : $\vec{a} = [6 \quad -1]$
ou $\vec{a} = [2 \quad -5]$

e) Donnez les composantes du vecteur $\vec{r} = -3\vec{u} + 2\vec{w} + \vec{t}$

$\vec{r} = -3[-1 \quad 1] + 2[-3 \quad -4] + [2 \quad 2]$

$= [3 \quad -3] + [-6 \quad -8] + [2 \quad 2]$

$= [3 - 6 + 2 \quad -3 - 8 + 2]$

$= [-1 \quad -9]$

f) Évaluez $\vec{u} \bullet \vec{v}$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = [-1 \quad 1] \bullet [1 \quad -3]$$
$$= -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)$$
$$= -1 - 3$$
$$= -4$$

g) Quel est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$ ← angle entre les 2

$$-4 = 1{,}41 \cdot 3{,}16 \cdot \cos\theta$$

$$\frac{-4}{1{,}41 \cdot 3{,}16} = -0{,}8977 = \cos\theta$$

$$\theta = \arccos(-0{,}8977)$$
$$\theta \approx 153{,}86°$$

ou

$\theta_{\vec{v}} = 288{,}43$

$\theta_{\vec{u}} = 135$

$288{,}43 - 135$
$= 153{,}43°$

h) Les vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux (forment-ils un angle droit)?

$$\vec{s} \bullet \vec{w} = [4 \quad -3] \bullet [-3 \quad -4]$$
$$= 4 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-4)$$
$$= -12 + 12$$
$$= 0$$

oui ils sont orthogonaux

i) Trouvez les composantes de 2 vecteurs de longueur 1 qui forment un angle droit avec le vecteur $\vec{v}$.

vecteurs formant un $\angle$ droit avec $\vec{v}$:

$[3 \quad 1]$

$[-3 \quad -1]$

vecteur unitaire

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot [3 \quad 1] = \left[\frac{3}{3{,}16} \quad \frac{1}{3{,}16}\right] = [0{,}95 \quad 0{,}32]$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot [-3 \quad -1] = \left[\frac{-3}{3{,}16} \quad \frac{-1}{3{,}16}\right] = [-0{,}95 \quad -0{,}32]$$

4. Soit les vecteurs $\vec{u} = [1 \quad 2]$, $\vec{v} = [4 \quad 3]$et $\vec{w} = [-2 \quad -3]$. Évaluez les expressions suivantes :

a) $\vec{u} \bullet \vec{v}$

$$\begin{aligned} &= [1 \quad 2] \bullet [4 \quad 3] \\ &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ &= 4 + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

b) $\vec{u} \bullet (2\vec{v} - 3\vec{w})$

$$\begin{aligned} 2\vec{v} - 3\vec{w} &= 2[4 \quad 3] - 3[-2 \quad -3] \\ &= [8 \quad 6] + [6 \quad 9] \\ &= [14 \quad 15] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet (2\vec{v} - 3\vec{w}) &= [1 \quad 2] \bullet [14 \quad 15] \\ &= 1 \cdot 14 + 2 \cdot 15 = 14 + 30 = 44 \end{aligned}$$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v})$

$$\vec{u} + \vec{v} = [1 \quad 2] + [4 \quad 3] = [5 \quad 5]$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [1 \quad 2] - [4 \quad 3] = [-3 \quad -1]$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) &= [5 \quad 5] \bullet [-3 \quad -1] \\ &= 5 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) \\ &= -15 - 5 \\ &= -20 \end{aligned}$$

5. Grâce à la liste de points suivantes, calculer les composantes des vecteurs demandés (en 3D)

A(2 , 15 , 7) B(-3 , 0 , 6) C(-1 , -4 , -3) D(12, -6 , 0) E(-2 , 9 , -4)

a) $\overrightarrow{AB} = [-3-2 \quad 0-15 \quad 6-7] = [-5 \quad -15 \quad -1]$

b) $\overrightarrow{BE} = [-2-(-3) \quad 9-0 \quad -4-6] = [1 \quad 9 \quad -10]$

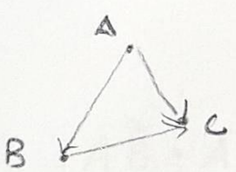
c) $\overrightarrow{CD} = [12-(-1) \quad -6-(-4) \quad 0-(-3)] = [13 \quad -2 \quad 3]$

d) $\overrightarrow{EA} = [2-(-2) \quad 15-9 \quad 7-(-4)] = [4 \quad 6 \quad 11]$

e) $\overrightarrow{AD} = [12-2 \quad -6-15 \quad 0-7] = [10 \quad -21 \quad -7]$

6. Soit le triangle dans l'espace dont les sommets sont les points $A(2,2,-1)$, $B(3,0,4)$ et $C(4,5,6)$.
   a) Quel est le périmètre du triangle ABC?

Calculons les normes des vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB} = [3-2 \quad 0-2 \quad 4-(-1)]$$
$$= [1 \quad -2 \quad 5]$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{30}$$
$$\simeq 5,48$$

$$\overrightarrow{AC} = [4-2 \quad 5-2 \quad 6-(-1)]$$
$$= [2 \quad 3 \quad 7]$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{62}$$
$$\simeq 7,87$$

$$\overrightarrow{BC} = [4-3 \quad 5-0 \quad 6-4]$$
$$= [1 \quad 5 \quad 2]$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{30}$$
$$\simeq 5,48$$

Donc périmètre =
$5,48 + 7,87 + 5,48$
$= 18,83$

b) Trouvez les angles α, β et γ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{AB_x}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\right) \simeq 79{,}49°$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{AB_y}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{30}}\right) \simeq 111{,}42°$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{AB_z}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right) \simeq 24{,}09°$$

c) Quelle est la mesure de l'angle issu du point A dans ce triangle?

C'est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

utilisons le produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [1 \ \ -2 \ \ 5] \cdot [2 \ \ 3 \ \ 7]$$

$$= 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 7$$

$$= 31$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos\theta$$

$$31 = 5{,}48 \cdot 7{,}87 \cdot \cos\theta$$

$$31 = 43{,}1276 \cos\theta$$

$$\frac{31}{43{,}1276} = \cos\theta$$

$$0{,}7188 = \cos\theta$$

$$\arccos(0{,}7188) = \theta$$

donc $\theta \simeq 44{,}04°$

7. Soit les vecteurs $\vec{s} = [4 \quad 1 \quad 2]$, $\vec{t} = [3 \quad -1 \quad 2]$, $\vec{u} = [1 \quad -2 \quad 4]$,

$\vec{v} = [-2 \quad 1 \quad 1]$ et $\vec{w} = [-3 \quad 6 \quad -12]$.

a) Que vaut $3\vec{u} + 2\vec{s} - 4\vec{t}$?

$= 3[1 \quad -2 \quad 4] + 2[4 \quad 1 \quad 2] - 4[3 \quad -1 \quad 2]$

$= [3 \quad -6 \quad 12] + [8 \quad 2 \quad 4] + [-12 \quad 4 \quad -8]$

$= [3+8-12 \quad -6+2+4 \quad 12+4-8]$

$= [-1 \quad 0 \quad 8]$

b) Que vaut $\|3\vec{u} + 2\vec{s} - 4\vec{t}\|$?

$\|3\vec{u} + 2\vec{s} - 4\vec{t}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 8^2}$

$= \sqrt{65}$

$\simeq 8,06$

c) Quels sont les angles directeurs de $\vec{v}$?

$\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{65}}\right) \simeq 97,13°$

$\beta = \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{65}}\right) \simeq 90°$

$\gamma = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \simeq 7,13°$

d) Quel est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

$\vec{u} \bullet \vec{v} = [1 \quad -2 \quad 4] \bullet [-2 \quad 1 \quad 1] = 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 + 4\cdot 1$

$= 0$

donc l'angle entre les 2 est de 90°.

Ils sont orthogonaux