Erreurs et propagation d'erreurs

Le matériel

- Synthèse du professeur (.ppt)
- Exercices supplémentaires (.pdf)

Remarque : Pour simplifier les calculs et la compréhension des concepts, on utilisera la base 10 codé en notation exponentielle et en mode virgule flottante.

Introduction

- Nous savons que l'ordinateur possède certaines limites.
- Si un nombre contient plus de chiffres que la mantisse ne peut contenir, on doit éliminer des chiffres dans la représentation en virgule flottante.
- Cette élimination de chiffres sera réalisée en procédant par troncature ou par arrondissement.
- Dans ce document, nous allons calculer ces erreurs de troncature et d'arrondissement et voir comment elles se propagent.

Troncature

- Ignorer les chiffres en trop à la droite de la mantisse.
- **Ex:**
  - 8456,372 avec r=5, s=2

+	8	4	5	6	3	+	0	4

  - 3,141592653589… avec r=8 et s=2

+	3	1	4	1	5	9	2	6	+	0	1

Arrondissement

- Si le (r+1)-ième chiffre après la virgule est plus petit que 5, alors la mantisse est tronqué à r chiffres.

Ex: 0.564772*10^2 avec r=5, s=2

+	5	6	4	7	7	+	0	2

- Si le (r+1)-ième chiffre après la virgule est 5 suivi de zéros uniquement, on additionne 1 au r-ième chiffre seulement s'il est <u>impair</u>.

Ex: 0.993555*10^1 avec r=5, s=2

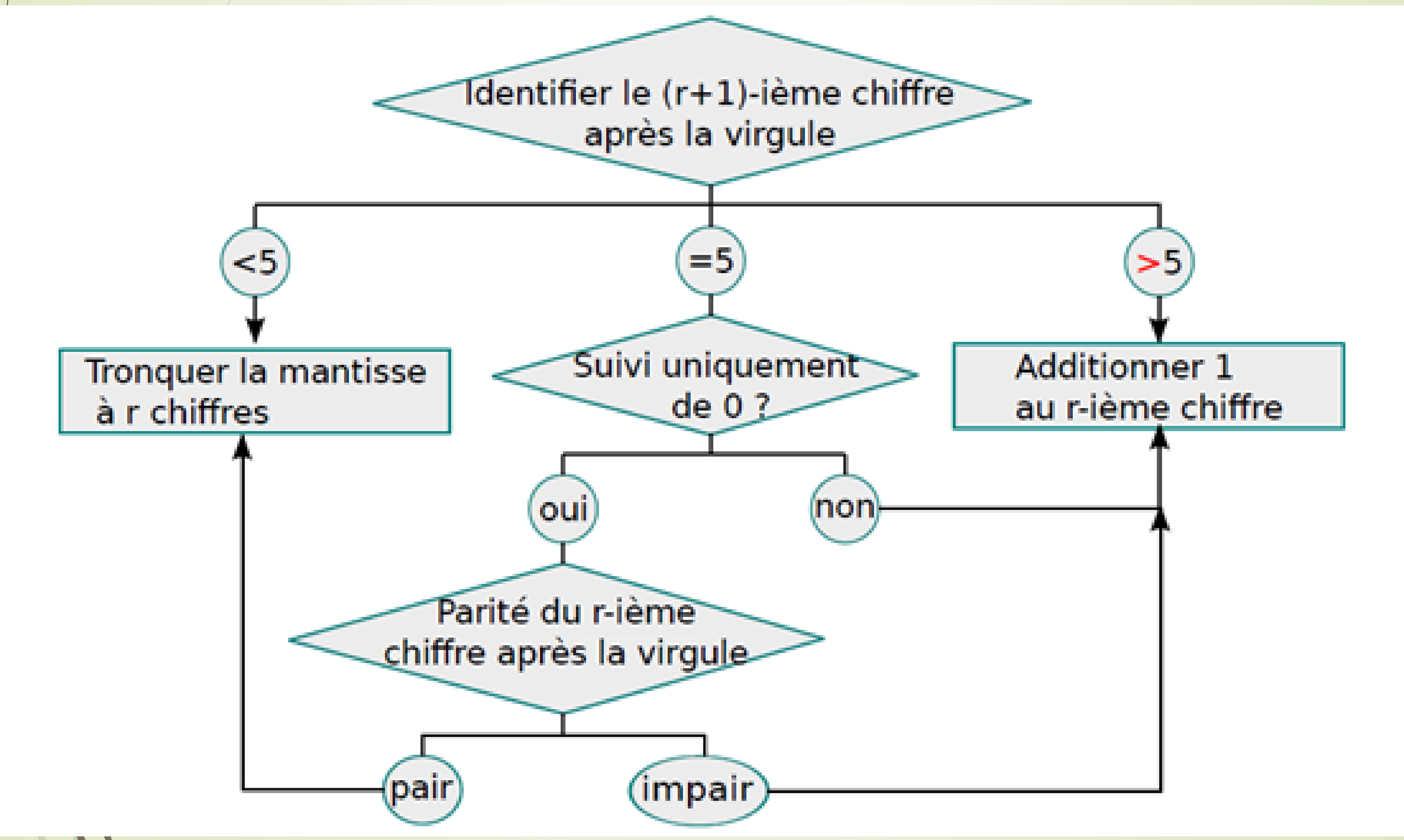
+	9	9	3	5	6	+	0	1

- Si le (r+1)-ième chiffre après la virgule est plus grand ou égal à 5, alors on additionne 1 au r-ième chiffre.

Ex: 0.139996*10^3 avec r=5, s=2

+	1	4	0	0	0	+	0	3

Arrondissement



La distance entre 2 nombres consécutifs

- La distance entre 2 nombres consécutifs est donnée par b^{-r+p}, où b est la base, r la mantisse et p l'exposant.
- Ex:
  - Avec r=4 et s=2, +6588+05, +6589+05

    $b^{-r+p} = 10^{-4+5} = 10 = 65890-65880$
  - Avec r=4 et s=2, +6588+01, +6589+01

    $b^{-r+p} = 10^{-4+1} = 0{,}001 = 6{,}589-6{,}588$

Limite supérieure et inférieure

- Il existe une limite supérieure et inférieure aux nombres représentables en mode virgule flottante pour une taille de mantisse et d'exposant donnée.
- Ex: Avec r=6 et s=2,

  - le plus grand nombre est +999999+99

  - le plus petit nombre est -999999+99

  - le plus petit nombre supérieur à zéro est

    +<u>1</u>00000-99

L'erreur absolue

- L'erreur absolue correspond à la différence, en valeur absolue, entre le nombre exact et sa représentation :

$$E_a = |N - N^{\sim}|$$

- Où N est le nombre exact et $N^{\sim}$ sa représentation.
- Ex : 63,3645562 avec r= 3 et s=2
  - Troncature :

+	6	3	3	+	0	2

$E_a = |63{,}3645562 - 63{,}3| = 0{,}0645562$

  - Arrondie :

+	6	3	4	+	0	2

$E_a = |63{,}3645562 - 63{,}4| = 0{,}0354438$

L'erreur relative

- L'erreur relative compare l'erreur absolue avec la valeur exacte et permet de l'exprimer en pourcentage:

$$E_r = \frac{E_a}{N} \times 100$$

- Où N est le nombre exact et E_a est l'erreur absolue.

- Ex : 63,3645562 avec r= 3 et s=2
  - Troncature :

+	6	3	3	+	0	2

$$E_r = \frac{0{,}0645562}{63{,}3645562} \times 100 = 0{,}10188062\ \%$$

  - Arrondie :

+	6	3	4	+	0	2

$$E_r = \frac{0{,}0354438}{63{,}3645562} \times 100 = 0{,}05593632\ \%$$

Propagation des erreurs

- Prenons l'équation suivante :

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x}$$

- Si x possède déjà une erreur lors de sa transcription en virgule flottante, il est évident que y aussi aura une erreur. Pire encore, l'erreur sur y sera plus grande que celle sur x. C'est ce qu'on appelle une propagation d'erreurs.

- Les erreurs se propagent, et leur importance peut évoluer.
- Ex: $y = x^2$, avec r=4 et s=2 sachant que x=7/3

	Troncature	Arrondissement
x~	+2333+01	+2333+01
Erreur abs sur x~	0.000333…	0.000333…
Erreur rel sur x~	0.014%	0.014%
y~	+5442+01	+5443+01
Erreur abs sur y~	0.0024444…	0.0014444…
Erreur rel sur y~	0,045%	0,027%

- Exemple :

On désire calculer $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$ à l'aide d'un ordinateur fonctionnant en mode virgule flottante avec r = 4 et s = 2, et on sait que x = 2,0175. La valeur exacte de y est de 28,323597… Le tableau qui suit présente les erreurs obtenues sur y lorsqu'on procède par troncature ou arrondissement.

	Troncature	Arrondissement
$x^{\sim}$	+2017+01	+2018+01
E_a sur $x^{\sim}$	0,0005	0,0005
E_r sur $x^{\sim}$	0,025 %	0,025 %
$(x^{\sim})^2$	+4068+01	+4072+01
$2x^{\sim}$	+4034+01	+4036+01
$(x^{\sim})^2 - 2x^{\sim}$	+3400 – 01	+3600 – 01
$y^{\sim}$	+2941+02	+2778+02
E_a sur $y^{\sim}$	1,086	0,5436
E_r sur $y^{\sim}$	3,8 %	1,9 %

Cas extrême

La valeur exacte de z est 112 469

Ex: $z = \frac{x+y}{x-y}$, avec r=4 et s=2 sachant que x=5,6235 et y=5,6234.

Division par un très petit nombre!

	Troncature	Arrondissement
x~	+5623+01	+5624+01
Erreur abs sur x~	0.0005	0.0005
Erreur rel sur x~	0.0089%	0.0089%
y~	+5623+01	+5623+01
Erreur abs sur y~	0.0004	0.0004
Erreur rel sur y~	0,0071%	0,0071%
X~+y~	+1124+02	+1125+02
X~-y~	+0000+00	+1000-02
Z~	Division par zéro!	+1125+05
Erreur abs sur z~		101219
Erreur rel sur z~		90%

Erreurs marquantes de propagation

- En 1996, la fusée Ariane 5 s'auto-détruit 37 secondes après son décollage.
- En 1997, un croiseur Aegis de l'US Navy a une panne.
- En 1995, échec de l'interception d'un missile balistique irakien lancé contre une base de l'US Army en Arabie Saoudite. Le missile prévu pour l'intercepter l'a manqué de 500 m. Il y eut 28 morts et une centaine de blessés.

- http://www.tangentex.com/VirguleFlottante.htm

Devoir

- Faire les exercices du fichier (sur Omnivox):

Exercices Erreurs et propagation