Universidad Nacional Autónoma de México
Modelos no paramétricos y de Regresión
Prof. Jimmy Hernández Morales

1. Supongamos que $z_1, ..., z_n$ es una serie de tiempo. Es muy común aproximar una serie de tiempo como K funciones sinusoidales:

$$z_t \approx \hat{z}_t = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(\omega_k t - \phi_k), \qquad t = 1, 2, ... \tag{1}$$

El $K - esimo$ termino de esta suma se llama señal sinusoidal. El coeficiente $a_k \geq 0$ es la amplitud, $\omega > 0$ es la frecuencia y ϕ_k es la fase del $K - esimo$ sinusoide.(La fase se elige generalmente en el rango de $-\pi$ a π). En muchas aplicaciones las frecuencias son múltiplos de una frecuencia fundamental ω_1, es decir $\omega_k = k\omega_1$, para $k = 2, .., K$ en cuyo caso la aproximación se llama la aproximación de Fourier .

Vamos a suponer que nosotros tenemos valores observados $z_1 ..., z_T$ y deseamos escoger las amplitudes $a_1, ...a_K$ y fases $\phi_1, ...\phi_K$ tal que minimicen el error de aproximación $(\hat{z}_1 - \hat{z}), ..(\hat{z}_T - z_T)$(Asumiremos que las frecuencias son dadas) Explique como resolver esto usando un ajuste de mínimos cuadrados.

hint : Una señal sinusoidal con amplitud a frecuencia ω y fase ϕ puede ser descrito por senos y cosenos y coeficientes α y β:

$$a \cos(\omega t - \phi) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \tag{2}$$

donde usando la $\alpha = a \cos \phi$ y $\beta = a \sin \phi$. Podemos recuperar la amplitud y la fase de los coeficientes coseno y seno como:

$$a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \qquad \phi = \arctan(\beta/\alpha) \tag{3}$$

Exprese el problema en terminos de coeficientes de senos y cosenos.

2. Sean Y una variable aleatoria de esperanza y varianza finita, X cualquier variable aleatoria y $h(X) = \mathbb{E}[Y|X]$. Demuestre que $\mathbb{E}[(Y - h(X))^2] \leq \mathbb{E}[(Y - g(X))^2]$, para cualquier función g tal que $g(X)$ tenga esperanza y varianza finita. Demuestre primero que

$$\mathbb{E}[(Y - h(X))^2] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[h^2(X)] \tag{4}$$

Notesé que cuando se conoce X, $\mathbb{E}[Y|X]$ es un buen estimador de Y en el sentido de que entre todas las funciones $g(X)$ que tienen esperanza y varianza finita $\mathbb{E}(Y|X)$ minimiza el valor $\mathbb{E}[(Y - h(X))^2]$. Es por eso que para seleccionar la función regresora se opta por utilizar la esperanza condicional ya que es el mejor estimador de Y es el sentido de media cuadratica.

3. Prueba las siguientes igualdades:

   a) $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$

b) $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 1$

c) $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1/\sum(x_1 - \bar{x})$

4. Demuestra que:

   a) $\mathbb{E}(\hat{\beta}_0) = \beta_0$

   b) $Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}}{S_{xx}}\right)$

5. Demuestra lo siguiente:

   a) La suma de los residuales, ponderados por el valor correspondiente de la variable regresora, siempre es igual a cero:

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0 \tag{5}$$

   b) La suma de los residuales, ponderados por el valor ajustado correspondiente, siempre es igual a cero:

   $$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i e_i = 0 \tag{6}$$

   c) La suma de los valores observados y_i es igual a la suma de los valores ajustados $\hat{y}_i$

   $$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i \tag{7}$$