Universidad Nacional Autónoma de México
Estadística II
Prof. Jimmy Hernández

1. Considera el modelo lineal múltiple
$$Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon \tag{1}$$
en clase vimos que el estimador por mínimos cuadrados esta dado por:
$$\hat{\beta} = \mathbf{X}^{-}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{2}$$
Para el caso lineal simple en el que $\mathbf{X} = (1, X_1)$, demuestre que:
$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

2. Sea Y un vector aleatorio de $n \times 1$ y sea $\mathbb{E}[Y] = \mu$ y $Cov(Y) = \Sigma$, entonces,
$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}] = tr(A\Sigma) + \mu\mathbf{A}\mu \tag{4}$$

3. Para el caso del modelo lineal simple demostrar que los elementos de la matriz $\mathbf{K}$ son:
$$K_{ij} = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{S_{xx}} \qquad K_{ij} = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \tag{5}$$

4. Demuestre que en el modelo lineal múltiple, $\hat{\beta}$,$\hat{\sigma}^2$ son independientes

5. Demuestre que $Var(\mathbf{X}\hat{\beta}) = \sigma^2\mathbf{K}$ o matriz $\mathbf{H}$.

6. Demuestra que las matrices $\mathbf{K}$ y $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ son idempotentes.

7. Demuestre que la suma de cuadrados de la regresión $SCR = \sum_1^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2$ y la suma de cuadrados del error $SCE = \sum_1^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ son independientes.

8. Considere el modelo lineal múltiple:
$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon \tag{6}$$
   a) Demuestre que $\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{X}$
   b) Considere a $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_k)$ las X_i vectores columna de la matriz $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{H}X_i = X_i$ con $i \in \{1, ..., k\}$
   c) verifique que en el modelo lineal múltiple se cumple que:
$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i e_i = 0$$

d) Usando lo anterior verifique que:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{7}$$

9. Demostrar que si se tiene el modelo de regresión múltiple $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$. El estimador de mínimos cuadrados se puede escribir como

$$\hat{\beta} = \beta + \mathbf{R}\epsilon, \qquad \mathbf{R} = (\mathbf{X'X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X'} \tag{8}$$