



Universidad Nacional Autónoma de  
México  
Inferencia  
Prof. Jimmy Hernández Morales

1. Mostrar que cada una de las siguientes familias es miembro de la familia exponencial:

- La familia normal ya sea el parametro  $\mu$  o  $\sigma$  conocido
- La familia gamma con algun parametro  $\alpha$  o  $\beta$  conocido o ambos desconocidos.
- La familia beta con algun parametro  $\alpha$  o  $\beta$  conocido o ambos desconocidos.
- La familia Poisson
- La familia binomial negativa con  $r$  conocido  $0 < p < 1$

2. Si  $X$  es una variable aleatoria con *pdf* miembro de la familia exponencial entonces:

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i(\theta)}{\partial \theta_j} t_i(x) \right) = -\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log c(\theta) \quad (1)$$

$$Var \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial w_i(\theta)}{\partial \theta_j} t_i(x) \right) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \log c(\theta) - \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 w_i(\theta)}{\partial \theta_j^2} t_i(x) \right) \quad (2)$$

3. Sea la familia exponencial de la forma  $f(x; \theta) = h(x) \exp(\sum_{i=1}^s c_i(\theta) T_i(x) - B(\theta))$  Para  $s = 1$  pruebe que

$$\mathbb{E}[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{c'(\theta)} \quad (3)$$

$$Var[T(X)] = \frac{B''(\theta)}{[c'(\theta)]^2} - \frac{c''(\theta)B'(\theta)}{[c'(\theta)]^3} \quad (4)$$

4. 1. Sea  $X_1, \dots, X_n$  muestra aleatoria de de una población con distribución  $F_X(x)$  tal que  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  y  $Var(X_i) = \sigma^2$ . Pruebe que:

- a)  $S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  con  $\mu$  conocida es insesgado para  $\sigma^2$
- b)  $S_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  es sesgado para  $\sigma^2$
- c)  $S_3 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  es insesgado para  $\sigma^2$

5. Sea  $X_1 \dots X_n \sim Po(\lambda)$  y  $\hat{\lambda} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ . Encontrar sesgo, error estandar y MSE de este estimador. ¿Es un estimador consistente?

6. Sea  $X_1 \dots X_n \sim U(0, \theta)$  y  $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . Encontrar sesgo, error estandar y MSE de ese estimador. ¿Es un estimador consistente?

7. Sea  $X_1 \dots X_n \sim U(0, \theta)$  y  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ . Encontrar sesgo, error estandar y MSE de ese estimador. ¿Es un estimador consistente?
8. Sea  $X_1 \dots X_n$  m.a. de una distribución gamma con  $\alpha$  conocida y  $\beta = \theta$  mostrar que el UMVUE es  $\frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^n X_i$  y que su varianza alcanza la cota inferior de Cramer y Rao
9. Sea  $X_1 \dots X_n$  m.a. de una distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  asumiremos que  $\mu$  es conocida y  $\sigma^2 = \theta$ . Encuentra la  $CICR(\theta)$
10. Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a. de una población con  $p.d.f.$   $Po(\lambda)$ .
  - a) Calcule la  $CICR(\lambda)$
  - b) Sea  $\lambda = \bar{X}$  pruebe que es insesgado
  - c) Pruebe que es un UMVUE
11. Sean  $x, y$  son puntos diferentes. Encontrar la  $Cov(\hat{F}(x), \hat{F}(y))$
12. Sea  $X_1 \dots X_m$  y  $Y_1 \dots Y_n$  dos muestras aleatorias independientes con la misma media  $\theta$  y varianzas conocidas  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  respectivamente. Entonces mostrar que para todo  $c \in [0, 1]$ ,  $U = c\bar{X} + (1 - c)\bar{Y}$  es un estimador insesgado de  $\theta$ . Y también encontrar el valor de  $c$  para la cual la varianza es mínima.
13. Pruebe que  $\sum_{i=1}^n X_i$  o bien  $\bar{X}$  es una estadística suficiente para  $\theta$ . Si las  $X_i$ 's se distribuyen como una Poisson.
14. Mostrar que  $\sum_{i=1}^n X_i$  o bien  $\bar{X}$  es una estadística suficiente para  $\theta$ . Si las  $X_i$ 's se distribuyen como una Binomial negativa.
15. Sea  $X$  una observación de una población normal  $N(0, \sigma^2)$ . ¿Es  $|X|$  un estadístico suficiente?
16. Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a. con  $p.d.f.$ :

$$f(x; \theta) = \exp(-(x - \theta))I_{(\theta, \infty)}(x), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (5)$$

muestra que  $X_{(1)}$  es un estadístico suficiente para  $\theta$ .

17. Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a. de una población gamma( $\alpha, \beta$ ). Encontrar dos estadísticos suficientes minimales para  $(\alpha, \beta)$
18. Considere  $X_1, \dots, X_n$  m.a. con  $p.d.f.$   $Po(\lambda)$ 
  - a) Encuentre la función de Score
  - b) Encuentre un estimador insesgado para  $\lambda$  que sea UMVUE
19. Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a. con  $p.d.f.$  de una población normal  $N(\mu, \sigma)$  muestre que

$$T = \left( \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2 \right), \quad (6)$$

es una estadística suficiente 2-dimensional para  $\mu$  y  $\sigma$

20. Sea  $X_1, \dots, X_n$  m.a. de población con  $p.d.f.$  de localización  $f(x - \theta)$  Mostrar que los estadísticos de orden  $T(X_1, \dots, X_n) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  para estadísticos suficientes para  $\theta$ .