Universidad Nacional Autónoma de México
Inferencia
Prof. Jimmy Hernández Morales

1. Para cada una de las siguientes distribuciones. Sea $X_1, .., X_n$ m.a. Encontrar un estadístico suficiente para θ.

   - $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\theta)^2}{2}\right)$ $-\infty < x < \infty$, y $-\infty < \theta < \infty$
   - $\exp(-(x-\theta))$ $\theta < x < \infty$, y $-\infty < \theta < \infty$
   - $\frac{exp(-(x-\theta))}{(1+exp(-(x-\theta)))^2}$ $-\infty < x < \infty$, y $-\infty < \theta < \infty$

2. Sea $X_1, .., X_n$ m.a. con distribución geométrica

$$\mathbb{P}_\theta(X = x) = \theta(1-\theta)^{x-1} \quad x = 1, 2..., \quad 0 < \theta < 1 \tag{1}$$

   Mostrar que $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para θ y encontrar la familia de distribuciones de $\sum_{i=1}^n X_i$. ¿Es una familia completa?

3. Sea $X_1, ..., X_n$ m.a. Poisson(λ). Mostrar que la familia de distribuciones de $\sum_{i=1}^n X_i$ es completa.

4. Sea $X_1, ..., X_n$, m.a. $\sim U(0, \theta)$, $0 < \theta$ y $T(X) = X_{(n)}$ suficiente para θ. Demuestre que T es completa. Use Lehmann Scheffé para encontrar un UMVUE para θ

5. Sea $X_1, ..., X_n$ m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Si σ es conocida y $\mu = \theta$ mostrar que la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) : \theta \in \mathbb{R} \right\} \tag{2}$$

   es completa . Ahora asumiremos que μ es conocida y $\sigma^2 = \theta$, entonces la familia,

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\theta}\right) : \theta \in (0, \infty) \right\} \tag{3}$$

   no es completa.

6. Considere la familia $\mathcal{F}$ de toda las funciones de densidad $U(-\theta, \theta)$, $\theta \in (0, \infty)$, muestre que $\mathcal{F}$ no es completa.

7. Sea X una observación con $p.d.f.$

$$f(x; \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \quad x = -1, 0, 1 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \tag{4}$$

   a) ¿Es X un estadístico suficiente completo?
   b) ¿Es $|X|$ un estadístico suficiente completo?

c) $f(x;\theta)$ pertenece a la familia exponencial?

8. $X_1, ..., X_n$ m.a. de una población con $p.d.f.$

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0 \tag{5}$$

a) ¿Es $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suficiente para θ?

b) Encontrar un estadístico suficiente completo para θ

9. Sea $X_1...X_n, m.a. \sim U(\theta, 0)$ con $\theta < 0$.

$$f_X(x) = -\frac{1}{\theta} I_{(\theta,0)}(x) \tag{6}$$

- Encuntre la función de distribución del modelo uniforme $U(\theta, 0)$ y pruebe que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \theta. \\ (1 - \frac{x}{\theta}), & x \in (\theta, 0). \\ 1, & \text{si } x \geq \theta. \end{cases} \tag{7}$$

- Muestre que la densidad de $X_{(1)}$ es

$$f_{X_{(1)}} = \frac{-nX^{n-1}}{\theta^n} I_{(\theta,0)}(x) \tag{8}$$

- Muestre que $X_{(1)}$ es una estadística suficiente para θ
- Muestre que $X_{(1)}$ es una estadística completa para θ
- Muestre que la $\mathbb{E}(X_{(1)}) = \dfrac{n}{n+1}\theta$
- Concluya $\hat{\theta} = \dfrac{n+1}{n} X_{(1)}$ es UMVUE.

10. Sea $X_1, ..., X_n, m.a. \sim$ m.a. de una población con pdf $f(x;\theta)$ mostrar que maximizar la verosimilitud $L(\theta;x)$ es equivalente a maximizar la log $L(\theta;x)$.