Universidad Nacional Autónoma de
México
Inferencia
Prof. Jimmy Hernández Morales

1. Si $L(X)$ y $U(X)$ satisface que $P_\theta(L(X) \leq \theta) = 1 - \alpha_1$ y $P_\theta(U(X) \leq \theta) = 1 - \alpha_2$, mostrar que $P_\theta(L(x) \leq \theta \leq U(X)) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$

2. Sea X_1 una única observación de un modelo $beta(\theta, 1)$

   - Sea $Y = -(\log X)^{-1}$. Evalúa el coeficiente de confianza del conjunto $[y/2, y]$
   - Encontrar una cantidad pivotal y usarlo para construir un intervalo de confianza que tenga el mismo coeficiente de confianza con en el inciso anterior.
   - Compare los dos intervalos

3. Suponga que T es un estadístico de valor real. Suponga que $Q(t, \theta)$ es una función monotona de t para cada valor de θ. Mostrar que si la p.d.f de T, $f(t;\theta)$ puede ser expresada como:

$$f(t;\theta) = g((Q(t,\theta))) \left| \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\theta) \right| \tag{1}$$

   para alguna función g entonces $Q(T, \theta)$ es un pivote

4. Sea $X_1, ..., X_n$ m.a. de una la distribución gamma con parámetros β y α un entero positivo conocido, sabemos que $\sum_{i=1}^n X_i$ es un estadístico suficiente para β, $T_n(\beta) = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{2\beta}$ se distribuye χ^2_{kn}. Halle lo siguiente

   - un intervalo de confianza para β
   - la longitud del intervalo l y $\mathbb{E}_\beta l$.

5. Sea $X_1, ..., X_n$ una m.a. con densidad:

$$f(x;\theta) = \exp(-(x-\theta)) \quad \theta < x < \infty \quad -\infty < \theta < \infty$$

   y $Y_1 = X_{(1)}$. Mostrar que

   - La p.d.f de Y_1 esta dado por $f(y) = n \exp(-n(y-\theta)) I_{(\theta,\infty)}(y)$
   - Que la v.a. $T_n = 2n(Y_1 - \theta)$ se distribuye como χ^2_2
   - Un intervalo de confianza para θ basado en $T_n(\theta)$ con coeficiente de confianza $1 - \alpha$ es $[Y_1 - (b/2n), Y_1 - (a/2n)]$

6. Sea $X_1, ..., X_n \sim F$ y $\hat{F}$ la función de distribución empírica . Sea $a < b$ números fijos y definimos $\theta = T(F) = F(a) - F(b)$. Sea $\hat{\theta} = T(\hat{F}_n) = \hat{F}_n(b) - \hat{F}_n(a)$. Encontrar el error estándar estimado de $\hat{\theta}$. Encontrar una expresión para un intervalo de confianza $1-\alpha$ aproximado para θ

7. Sea $X_1, ..., X_n \sim$ Bernulli(p) y sea $Y_1, ..., Y_m \sim$ Bernulli(q). Encontrar el estimador plug-in y el error estándar estimado para p. Encontrar un intervalo de confianza al 90 % para p. Hallar el estimador plug-in para $p - q$. Encontrar un intervalo de confianza al 90 % para $p - q$.

8. Sea $\theta = T(F)$, $\hat{\theta}_n = T(\hat{F}_n)$ y definamos la cantidad pivotal $R_n = \hat{\theta}_n - \theta$. Denotemos $\hat{\theta}^*_{n,1}, ..., \hat{\theta}^*_{n,B}$ las muestras bootstrap de $\hat{\theta}_n$, y $H(r) = \mathbb{P}_F(R_n \leq r)$ la función de distribución acumulada. Definamos $C^*_n = (a, b)$ donde

$$a = \hat{\theta}_n - H^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \quad b = \hat{\theta}_n - H^{-1}(\frac{\alpha}{2}). \tag{2}$$

Demuestra que $C^*_n = (a, b)$ es un intervalo de confianza exacto $1 - \alpha$ para θ.

9. Sea $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, 1)$. Sea $\theta = e^\mu$ y $th\hat{e}ta = e^{\bar{X}}$. Crear un conjunto de datos usando $\mu = 5$ con $n = 100$ observaciones.

   - Use bootstrap para obtener el error estándar y un intervalo de confianza al 95 % para θ
   - Genere un histograma con las muestras bootstrap. Esto es un estimado de la distribución de $\hat{\theta}$. Compare esto con la verdadera distribución muestral de $\hat{\theta}$