



Universidad Nacional Autónoma de
México
Inferencia
Prof. Jimmy Hernández Morales

1. Para cada una de las siguientes distribuciones. Sea X_1, \dots, X_n m.a. Encontrar un estadístico suficiente para θ .

- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right) \quad -\infty < x < \infty, \text{ y } -\infty < \theta < \infty$
- $\exp(-(x-\theta)) \quad \theta < x < \infty, \text{ y } -\infty < \theta < \infty$
- $\frac{\exp(-(x-\theta))}{(1 + \exp(-(x-\theta)))^2} \quad -\infty < x < \infty, \text{ y } -\infty < \theta < \infty$

2. Sea X_1, \dots, X_n m.a. con distribución geométrica

$$\mathbb{P}_\theta(X = x) = \theta(1 - \theta)^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots, \quad 0 < \theta < 1 \quad (1)$$

Mostrar que $\sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente para θ y encontrar la familia de distribuciones de $\sum_{i=1}^n X_i$.
¿Es una familia completa?

3. Sea X_1, \dots, X_n m.a. Poisson(λ). Mostrar que la familia de distribuciones de $\sum_{i=1}^n X_i$ es completa.
4. Sea X_1, \dots, X_n , m.a. $\sim U(0, \theta)$, $0 < \theta$ y $T(X) = X_{(n)}$ suficiente para θ . Demuestre que T es completa. Use Lehmann Scheffé para encontrar un UMVUE para θ
5. Sea X_1, \dots, X_n m.a. de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Si σ es conocida y $\mu = \theta$ mostrar que la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) : \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad (2)$$

es completa. Ahora asumiremos que μ es conocida y $\sigma^2 = \theta$, entonces la familia,

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta}\right) : \theta \in (0, \infty) \right\} \quad (3)$$

no es completa.

6. Considere la familia \mathcal{F} de toda las funciones de densidad $U(-\theta, \theta)$, $\theta \in (0, \infty)$, muestre que \mathcal{F} no es completa.
7. Sea X una observación con p.d.f.

$$f(x; \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1 - \theta)^{1-|x|} \quad x = -1, 0, 1 \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (4)$$

- a) ¿Es X un estadístico suficiente completo?
- b) ¿Es $|X|$ un estadístico suficiente completo?

c) $f(x; \theta)$ pertenece a la familia exponencial?

8. X_1, \dots, X_n m.a. de una población con p.d.f.

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0 \quad (5)$$

a) ¿Es $\sum_{i=1}^n X_i$ suficiente para θ ?

b) Encontrar un estadístico suficiente completo para θ

9. Sea $X_1 \dots X_n, m.a. \sim U(\theta, 0)$ con $\theta < 0$.

$$f_X(x) = -\frac{1}{\theta} I_{(\theta, 0)}(x) \quad (6)$$

■ Encuentre la función de distribución del modelo uniforme $U(\theta, 0)$ y pruebe que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \theta. \\ (1 - \frac{x}{\theta}), & x \in (\theta, 0). \\ 1, & \text{si } x \geq \theta. \end{cases} \quad (7)$$

■ Muestre que la densidad de $X_{(1)}$ es

$$f_{X_{(1)}} = \frac{-nX^{n-1}}{\theta^n} I_{(\theta, 0)}(x) \quad (8)$$

■ Muestre que $X_{(1)}$ es una estadística suficiente para θ

■ Muestre que $X_{(1)}$ es una estadística completa para θ

■ Muestre que $E(X_{(1)}) = \frac{n}{n+1} \theta$

■ Concluya $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(1)}$ es UMVUE.

10. Sea X_1, \dots, X_n , m.a. de una población con pdf $f(x; \theta)$ mostrar que maximizar la verosimilitud $L(\theta; x)$ es equivalente a maximizar la $\log L(\theta; x)$.
