Universidad Nacional Autónoma de
México
Inferencia
Prof. Jimmy Hernández Morales

1. Mostrar que cada una de las siguientes familias es miembro de la familia exponencial:
   - La familia normal ya sea el parametro $\mu$ o $\sigma$ conocido
   - La familia gamma con algun parametro $\alpha$ o $\beta$ conocido o ambos desconocidos.
   - La familia beta con algun parametro $\alpha$ o $\beta$ conocido o ambos desconocidos.
   - La familia Poisson
   - La familia binomial negativa con $r$ conocido $0 < p < 1$

2. Si $X$ es una variable aleatoria con *pdf* miembro de la familia exponencial entonces:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial w_i(\theta)}{\partial \theta_j} t_i(x)\right) = -\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log c(\theta) \tag{1}$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial w_i(\theta)}{\partial \theta_j} t_i(x)\right) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \log c(\theta) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 w_i(\theta)}{\partial \theta_j^2} t_i(x)\right) \tag{2}$$

3. Sea la familia exponencial de la forma $f_\theta(x) = h(x)\exp(\sum_{i=1}^{s} c_i(\theta) t_i(x) - B(\theta))$ Para $s = 1$ pruebe que

$$\mathbb{E}[T(x)] = \frac{B'(\theta)}{c'(\theta)} \tag{3}$$

$$Var[T(X)] = \frac{B''(\theta)}{[c(\theta)]^2} - \frac{c''(\theta)B(\theta)}{c'(\theta)^3} \tag{4}$$

4. 1. Sea $X_1, ..., X_n$ muestra aleatoria de de una poblacion con distribucion $F_X(x)$ tal que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma^2$. Pruebe que:

   *a)* $S_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \mu)^2$ con $\mu$ conocida es insesgado para $\sigma^2$

   *b)* $S_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \bar{X})^2$ es sesgado para $\sigma^2$

   *c)* $S_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X} - \bar{X})^2$ es insesgado para $\sigma^2$

5. Sea $X_1...X_n \sim Po(\lambda)$ y $\hat{\lambda} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Encontrar sesgo, error estandar y MSE de este estimador.

6. Sea $X_1...X_n \sim U(0, \theta)$ y $\hat{\theta} = max\{X_1, ..., X_n\}$. Encontrar sesgo, error estandar y MSE de ese estimador.

7. Sea $X_1...X_n \sim U(0,\theta)$ y $\hat{\theta} = 2\bar{X}$. Encontrar sesgo, error estandar y MSE de ese estimador.

8. Sea $X_1...X_n$ m.a. de una distribución gamma con $\alpha$ conocida y $\beta = \theta$ mostrar que el UMVUE es $\dfrac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y que su varianza alcanza alcanza la cota inferior la cota inferior de Cramer y Rao

9. Sea $X_1...X_n$ m.a. de una distribución $N(\mu,\sigma^2)$ asumiremos que $\mu$ es conocida y $\sigma^2 = \theta$. Encuentra la $CICR(\theta)$

10. Sea $X_1,...,X_n$ m.a. de una población con $p.d.f.$ $Po(\lambda)$.

    *a*) Calcule la $CICR(\lambda)$
    *b*) Sea $\lambda = \bar{X}$ pruebe que es insesgado
    *c*) Pruebe que es un UMVUE

11. Sean $x$, $y$ son puntos diferentes. Encontrar la $Cov(\hat{F}(x),\hat{F}(y))$

12. Sea $X_1...X_m$ y $Y_1...Y_n$ dos muestras aleatorias independientes con la misma media $\theta$ y varianzas conocidas $\sigma_1^2$, $\sigma_2^2$ respectivamente. Entonces mostrar que para todo $c \in [0,1]$, $U = c\bar{X} + (1-c)\bar{Y}$ es un estimador insesgado de $\theta$. Y también encontrar el valor de $c$ para la cual la varianza es mínima.

13. Prueba que $\sum_{n=1} nX_i$ o bien $\bar{X}$ es una estadística suficiente para $\theta$. Si las $X's$ se distribuyen como una Poisson.

14. Mostrar que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ o bien $\bar{X}$ es una estadística suficiente para $\theta$. Si las $X's$ se distribuyen como una Binomial negativa.

15. Sea $X$ una observación de un población normal $N(0,\sigma^2)$. ¿Es $|X|$ un estadístico suficiente?

16. Sea $X_1,...X_n$ m.a. con $p.d.f.$:

$$f(x;\theta) = \exp(-(x-\theta))I_{(\theta,\infty)}(x), \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{5}$$

    muestra que $X_{(1)}$ es un estadístico suficiente para $\theta$.

17. Sea $X_1,...X_n$ m.a. de una población gamma$(\alpha,\beta)$. Encontrar dos estadísticos suficientes minimales para $(\alpha,\beta)$

18. Considere $X_1,...,X_n$ m.a. con $p.d.f.$ $Po(\lambda)$

    *a*) Encuentre la función de Score
    *b*) Encuentre un estimador insesgado para $\lambda$ que sea UMVUE

19. Sea $X_1,...X_n$ m.a. con $p.d.f.$ de una población normal $N(\mu,\sigma)$ muestre que

$$T = (\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2), \tag{6}$$

    es una estadística suficiente 2−dimensional para $\mu$ y $\sigma$

20. Sea $X_1,...X_n$ m.a. de población con $p.d.f.$ de localización $f(x-\theta)$ Mostrar que los estadísticos de orden $T(X_1,...T_n) = (X_{(1)},...,X_{(n)})$ para estadísticos suficientes para $\theta$.