

Approche logique de l'Intelligence Artificielle – Partie 3

INSA 4IF/4IFA
Sylvie Calabretto

Plan du cours

- ▶ *Logique Classique*
 - ▶ Systèmes Formels
 - ▶ Calcul des Propositions/ Logique ordre 0
 - ▶ Calcul des Prédicats/ Logique ordre 1
 - ▶ Calcul des Prédicats/ Logiques ordres supérieurs
- ▶ *Logiques Multivaluées*
 - ▶ Logique Floue

Logique Humaine



A Venn diagram illustrating the relationship between different types of logic. It consists of three nested shapes: an outermost irregular dotted line, a middle dashed rectangle, and an innermost solid rectangle. The text 'Logique Humaine' is positioned at the top right, overlapping the dotted line. The text 'Logique non-standard ?' is located inside the dashed rectangle. The text 'Logique classique' is located inside the solid rectangle.

Logique non-standard ?

Logique classique

Logiques multivaluées

- ▶ Approche logique du traitement de l'incertitude : introduction de valeurs discrètes entre le vrai et le faux
- ▶ Plusieurs interprétations :
 - ▶ Lukasiewicz L_3 (faux, possible, vrai)
 - ▶ Kleene K_3 (faux, indéterminé, vrai)
 - ▶ Bochvar (faux, absurde, vrai)

Logique trivalente de Lukasiewicz

Lukasiewicz L_3 (faux, possible, vrai) étendue à L_4, \dots, L_n

ou

a \ b	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

et

a \ b	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$$v(a \vee b) = \max(a, b)$$

$$v(a \wedge b) = \min(a, b)$$

Logique trivalente de Lukasiewicz

→

a \ b	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

↔

a \ b	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
1	0	1/2	1

implication : $v(a \rightarrow b) = \min(1, 1 - a + b)$

double implication : $v(a \leftrightarrow b) = a - |a - b|$

négation : $v(\neg a) = 1 - a$

Conséquences sur *tiers exclus* ($P \vee \neg P = 1$),
contradiction ($P \wedge \neg P = 0$), et le *modus ponens*

Illustration de la non vérification du Modus Ponens dans L_3

Soit $v(A) = 1/2$, et $v(B) = 0$

L_3 donne : $v(A \rightarrow B) = 1/2$
d'où $v(A \wedge (A \rightarrow B)) = 1/2 \neq v(B)$,

Il faudrait

$$v(B) = v(A \wedge (A \rightarrow B))$$

L'_3 corrige ces problèmes en durcissant \wedge avec :

- $v(x \wedge y) = \max(v(x) + v(y) - 1, 0)$
- $v(1/2 \text{ et } 1/2) = 0$ au lieu de $1/2$

L'_3 supporte le *modus ponens*

Logique trivalente de Kleene et Bochvar

- ▶ Kleene (faux, indéterminé, vrai) K_3

Implication : $v(a \rightarrow b) = \max(1-a, b)$

Négation : $v(\neg a) = 1 - a$

Principes du tiers exclus et de contradiction mis en défaut

- ▶ Bochvar (faux, absurde, vrai)

Principes du tiers exclus et de contradiction mis en défaut

Logiques trivalentes de Kleene et Bochvar

→

a \ b	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1
1	0	1/2	1

Kleene

→

a \ b	0	1/2	1
0	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
1	1	1/2	1

Bochvar

a \ b	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

Rappel → Lukasiewicz

Plan du cours

- ▶ *Logique Classique*
 - ▶ Systèmes Formels
 - ▶ Calcul des Propositions/ Logique ordre 0
 - ▶ Calcul des Prédicats/ Logique ordre 1
 - ▶ Calcul des Prédicats/ Logiques ordres supérieurs
- ▶ *Logiques Multivaluées*
 - ▶ Logique Floue

Logique Floue

- ▶ Introduction
- ▶ Sous-ensembles flous
- ▶ Modélisation par Logique Floue
- ▶ Raisonnement approximatif
- ▶ Commande Floue
- ▶ Raisonnement possibiliste

Logique floue : pourquoi ?

- ▶ Règle : Si la distance est courte Alors le freinage est puissant
- ▶ Faits :
 - ▶ la distance est courte : *Logique classique OK*
 - ▶ la distance est très courte : *pb*
 - ▶ la distance est de 100 m : *pb*
 - ▶ la distance est entre 50 et 80 m : *pb*
- ▶ Solution 1 : Découpage en sous-intervalles
- ▶ Solution 2 : Utilisation de la logique multivaluée

Découpage en sous-intervalles

- ▶ Règle : Si la surface est à peu près comprise entre 80 m^2 et 85 m^2 alors faire visiter l'appartement
- ▶ Intervalle = $[79,5 ; 85,5]$
- surface = $85,4 \text{ m}^2 \Rightarrow$ décision = faire visiter l'appartement
- surface = $85,6 \text{ m}^2 \Rightarrow$ décision contraire

Logique multivaluée

- ▶ Manipuler des valeurs de vérité intermédiaires entre le vrai et le faux absolus
- ▶ Logique ternaire de Lukasiewicz (1920) : 3 valeurs de vérité représentées par : 0 (le faux), 1 (le vrai) et $1/2$ (le doute)
- ▶ Ne suffit pas pour traiter des connaissances imprécises
- \Rightarrow Introduction de la **Logique floue** (Zadeh)

Logique floue

- ▶ Extension de la Logique Classique
- ▶ Les propositions sont des propositions floues définies à partir de variables linguistiques et d'un ensemble de modificateurs
- ▶ La valeur de vérité de toute proposition floue appartient à $[0, 1]$ et est fournie par la fonction d'appartenance

L'imprécis

□ **Concerne le contenu de l'information**

- ▶ La vitesse est rapide
- ▶ Le freinage est puissant
- ▶ La température est froide
- ▶ Le poids est important
- ▶ Le niveau est bas

L'incertain

- Doute sur la validité d'un évènement, d'une proposition ou d'une implication
 - ▶ "Il est possible qu'il pleuve"
 - ▶ "Pierre est sûrement plus grand que Paul"
 - ▶ « Le diagnostic est probablement la grippe »

Historique

- ▶ XVIIe siècle : Pascal/Fermat (Probabilités)
- ▶ 1965 : L.A. Zadeh (Sous-Ensemble flou)
- ▶ 1968 : E. Sanchez (Relations Floues)
- ▶ 1973 : A. Kaufman (Théorie des ss-ens flous)
- ▶ 1975 : Mamdani (Régulateur flou)
- ▶ 1978 : L.A. Zadeh (Théorie des Possibilités)
- ▶ 1980 : Début des 1ères applications industrielles

Logique Floue : 3 applications

- ▶ Systèmes Experts/Systèmes à Base de Connaissances
- ▶ Bases de données
- ▶ Commande

Le système expert MYCIN

- ▶ Pionnier des SE : 1974 (E. Shortliffe)
- ▶ Système d'Aide au diagnostic des maladies infectieuses du sang
- ▶ Version de base : 200 règles
Version en 1978 : 500 règles
- ▶ Incertitude dans les faits et règles
- ▶ Système explicatif

Représentation des connaissances

- ▶ Formes courantes des règles :
 - ▶ $A \wedge B \wedge C \rightarrow D \quad (F.C)$
 - ▶ $A \wedge (B \vee C) \rightarrow D \quad (F.C)$
 - ▶ $(A \vee B \vee C) \wedge (D \vee E) \rightarrow F \quad (F.C)$
 - ▶ $A \wedge B \rightarrow C \wedge D \quad (F.C)$
- ▶ Faits :
 - ▶ $A \quad (F.C)$

où F.C est un **facteur de certitude**

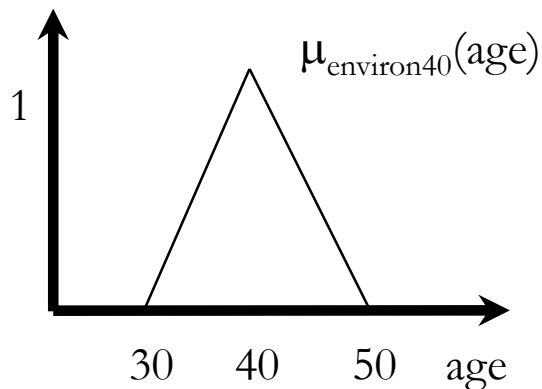
Bases de données floues

► Entité PERSONNE

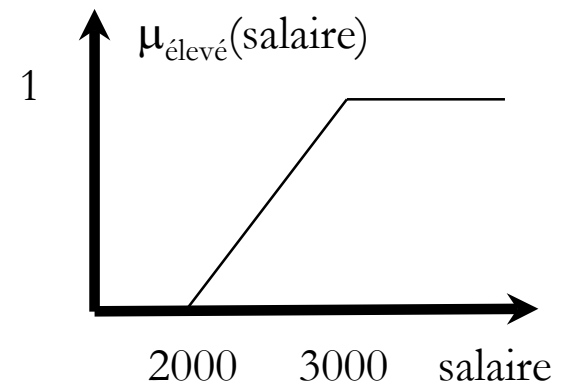
	NOM	AGE	Situation de famille	SALAIRE
	Paul	30	"inconnu"	environ-5000
	Jean	[30,35]	{1/C;0.7/D}	environ-5000
	Martine	jeune	M	[1000,3000]
	David	15	C	"inapplicable"
	Françoise	environ-40	{1/V;1/D}	[5000,6000]

Langage de requête flou

- Dans le contexte de SQLf :



1/BMW + 0.8/Mercedes
+ 0.6/Citroën + 0.4/Peugeot

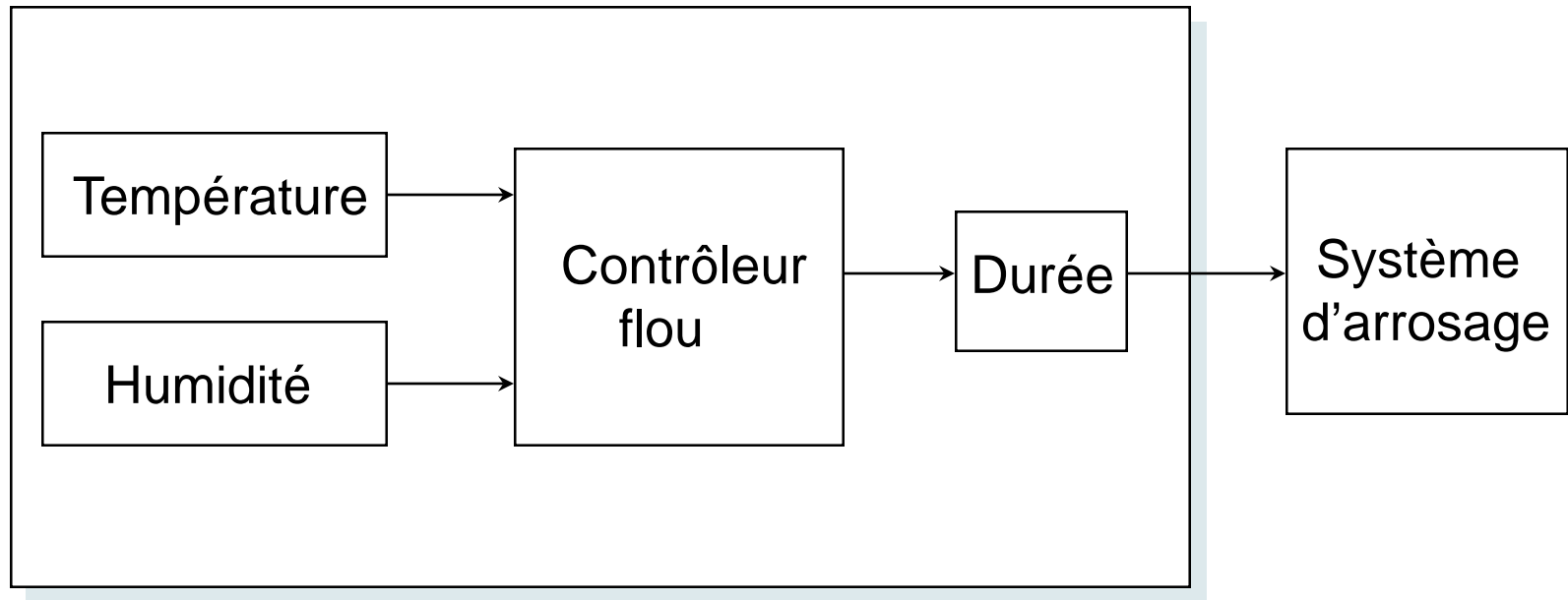


« les employés ayant *environ 40 ans* , de *salaire élevé* et possédant une voiture de *luxe* »

Commande Floue

- ▶ **But** : Traiter des problèmes de commande de processus, à partir des connaissances d'experts ou d'opérateurs qualifiés, lorsque :
 - ▶ Le processus à commander est mal connu, ou difficile à décrire précisément,
 - ▶ Les variables sont caractérisées de manière imprécise,
 - ▶ Les connaissances sont exprimées en langage naturel.

Illustration : Arroseur Flou



Les règles de commande

- ▶ R1 : *Si* la température est brûlante ET le sol sec, *Alors* la durée d'arrosage est longue.
- ▶ R2 : *Si* la température est chaude ET le sol humide, *Alors* la durée d'arrosage est moyenne.
- ▶ R3 : *Si* la température est chaude ET le sol sec, *Alors* la durée d'arrosage est longue.
- ▶ R4 : *Si* la température est brûlante ET le sol humide, *Alors* la durée d'arrosage est moyenne.
- ▶ R5 : *Si* la température est froide ET le sol humide, *Alors* la durée d'arrosage est courte.

Exemples d'applications

- ▶ Contrôle d'ascenseurs (HITACHI)
- ▶ Conduite de métro de Sendai (HITACHI)
- ▶ Stabilisation de la vitesse (NISSAN MOTOR)
- ▶ Robot mobile (HIROTA)
- ▶ Creusement des tunnels (TOKIO ELECTRIC)
- ▶ Reconnaissance vocale (HITACHI)
- ▶ Applications "grand public" : caméra, appareil photo, four, lave-linge, véhicule sans pilote (TESLA)

Conduite automobile sans pilote

- ▶ La voiture a pour consigne de suivre un chemin, par exemple matérialisé par des marqueurs de couleur.
- ▶ Exemple de règle :
 - ▶ Si la voiture s'écarte un peu du chemin, mais que la direction suivie est à peu près bonne, alors il faut braquer légèrement pour se rapprocher du chemin.
- ▶ L'ensemble des règles fait intervenir des descripteurs linguistiques (« s'écarte un peu », « à peu près bonne »).
- ▶ Pour les exploiter, on détermine les variables impliquées :
 - ▶ Variables d'entrée : déviation de position, déviation d'angle par rapport au chemin
 - ▶ Variable de sortie : angle de braquage
- ▶ On recherche ensuite toutes les caractéristiques des variables
- ▶ Puis les règles sont transcrites

Règles de conduite automobile

Exemple de règle floue

Règles de conduite automobile à l'approche d'un carrefour contrôlé par des feux tricolores.

si le feu est rouge...	si ma vitesse est élevée ...	et si le feu est proche ...	alors je freine fort.
si le feu est rouge...	si ma vitesse est faible ...	et si le feu est loin ...	alors je maintiens ma vitesse.
si le feu est orange...	si ma vitesse est moyenne ...	et si le feu est loin ...	alors je freine doucement.
si le feu est vert...	si ma vitesse est faible ...	et si le feu est proche ...	alors j'accélère.

V.S.

Si le feu est rouge, si ma vitesse dépasse 85.6 km/h et si le feu est à moins de 62.3m, alors j'appuie sur le frein avec une force de 33.2 Newtons

Domaines d'application

- ▶ L'automatisme (freins ABS),
- ▶ la robotique (reconnaissance de formes),
- ▶ la gestion de la circulation routière (feux rouges),
- ▶ le contrôle aérien,
- ▶ l'environnement (météorologie, climatologie, sismologie),
- ▶ La médecine (aide au diagnostic),
- ▶ L'assurance (sélection et prévention des risques)
- ▶ et bien d'autres

Eléments fondamentaux de l'approche floue

Sous-ensembles flous

Sous-ensembles Flous

- ▶ **Objectif** : Permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à une classe

- ▶ **Exemple** :

- ▶ Classe des grands G
- ▶ Classe des moyens M
- ▶ Classe des petits P

- ▶ X mesure 1m 50 $\Rightarrow X \notin G$

X mesure 1m 80 $\Rightarrow X \in G$

Entre les deux : notion d'appartenance

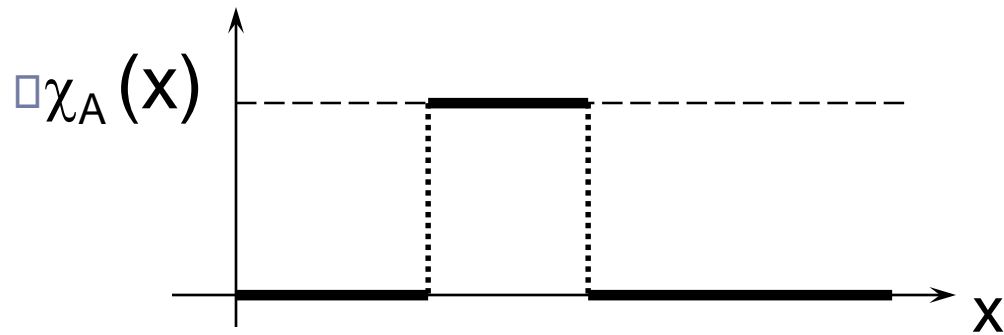
Sous-ensembles flous : Définitions

- ▶ Sous-ensemble classique A de X
définie par une fonction caractéristique $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$
$$\forall x \in X, \quad \begin{aligned} \chi_A(x) &= 0 & \text{si } x \notin A \\ \chi_A(x) &= 1 & \text{si } x \in A \end{aligned}$$
- ▶ Sous-ensemble flou A de X
définie par une fonction d'appartenance $f_A : X \rightarrow [0,1]$
$$\forall x \in X, \quad 0 \leq f_A(x) \leq 1$$

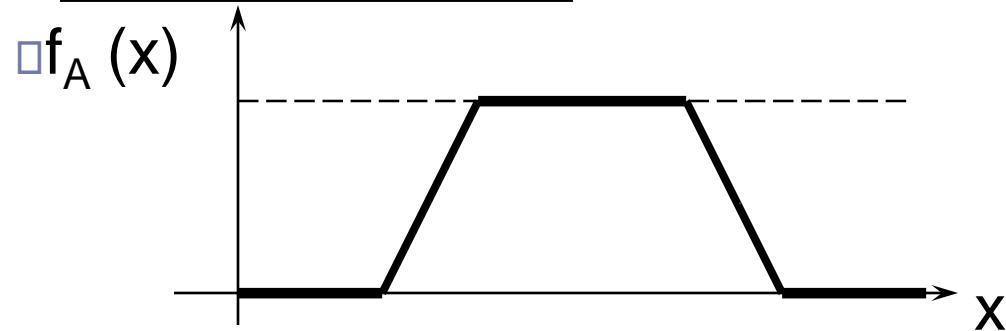
$f_A(x)$: degré d'appartenance de x au sous-ens A

Exemple

- ▶ Sous-ensemble classique

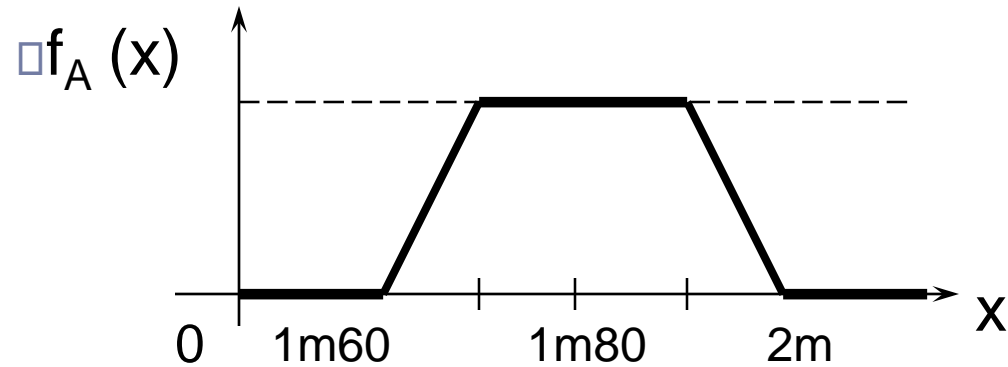


- ▶ Sous-ensemble flou



Exemple

- Sous-ensemble flou pour la taille d'un individu :



Caractéristiques des sous-ensembles flous

- Support d'un sous-ensemble flou : **Supp(A)**

$$\text{Supp}(A) = \{ x \in X / f_A(x) \neq 0 \}$$

- Hauteur d'un sous-ensemble flou : **h(A)**

$$h(A) = \sup_{x \in X} f_A(x)$$

Rq : A est un sous-ensemble flou normalisé $\Leftrightarrow h(A) = 1$

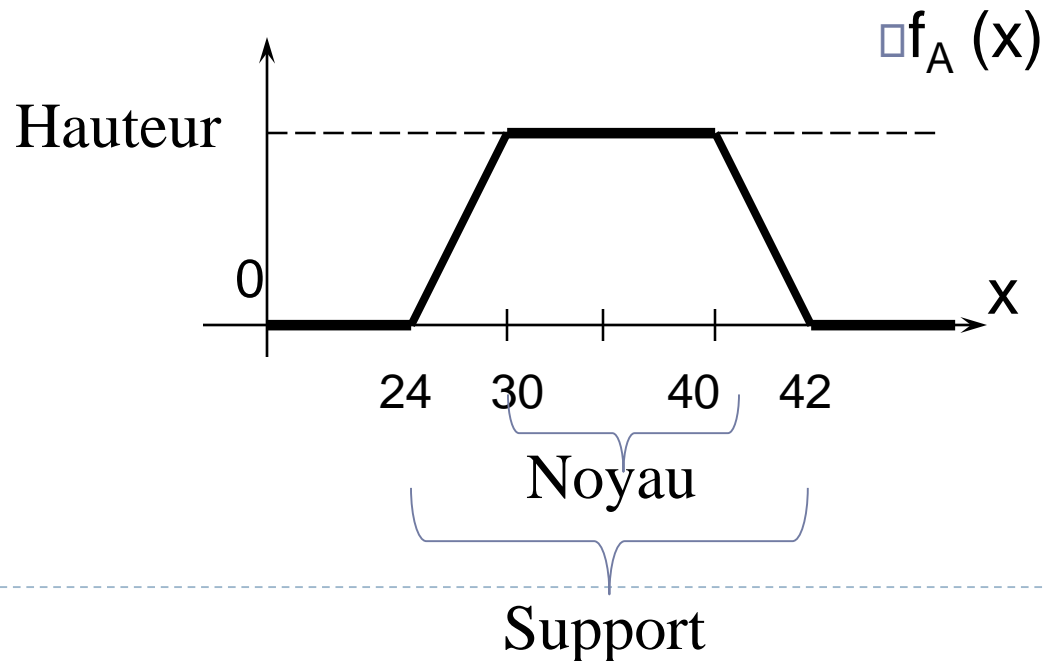
- Noyau d'un sous-ensemble flou A : **Noy(A)**

$$\text{Noy}(A) = \{ x \in X / f_A(x) = 1 \}$$

Exercice

- Trouvez le support, la hauteur et le noyau des sous-ensembles flous suivants

$A = \text{"la trentaine"}$ $X = \{\text{ages}\}$



Opérations sur les sous-ensembles flous

□ Soient A, B sous-ensembles flous de X

▶ **Egalité :**

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_A(x) = f_B(x)$$

▶ **Inclusion :**

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_A(x) \leq f_B(x)$$

▶ **Intersection :**

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x))$$

▶ **Union :**

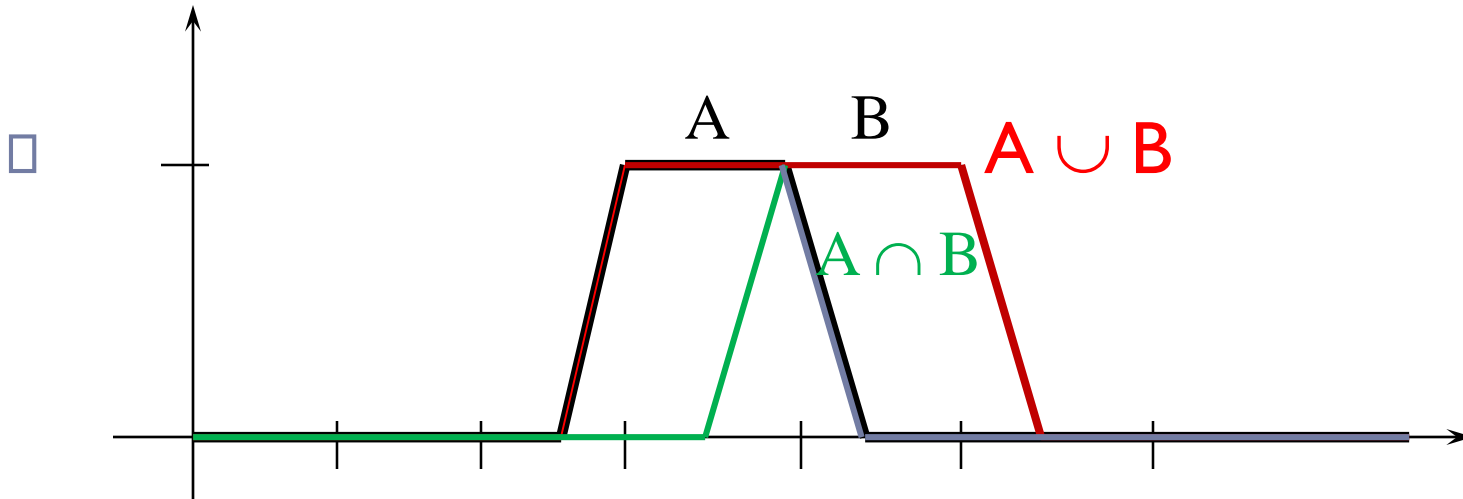
$$D = A \cup B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_D(x) = \max(f_A(x), f_B(x))$$

▶ **Complément :**

$$A^C \text{ complément de } A \Leftrightarrow \forall x \in X, f_{A^C}(x) = 1 - f_A(x)$$

Exercice

- Donner l'intersection et l'union des sous-ensembles flous suivants :
- $A = \text{"la trentaine"}$, $B = \text{"la quarantaine"}$



Généralisation des opérateurs d'intersection et d'union

► Norme triangulaire ou T-norme : T

$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ vérifie :

$$T(x,y) = T(y,x)$$

commutativité

$$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$$

associativité

$$T(x,y) \leq T(z,t) \text{ si } x \leq z \text{ et } y \leq t$$

monotonie

$$T(x,1) = x$$

1 : élément neutre

► Conorme triangulaire ou T-conorme : \perp

$\perp : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ vérifie :

$$\perp(x,y) = \perp(y,x)$$

commutativité

$$\perp(x, \perp(y,z)) = \perp(\perp(x,y), z)$$

associativité

$$\perp(x,y) \leq \perp(z,t) \text{ si } x \leq z \text{ et } y \leq t$$

monotonie

$$\perp(x,0) = x$$

0 : élément neutre

Logique Floue

Modélisation par Logique Floue

Variables linguistiques

- ▶ Une variable linguistique est représentée par un triplet (V, X, T_v) où :

V : une variable

X : un ensemble de référence

$T_v = \{A_1, A_2, \dots\}$ ensemble de sous-ensembles flous de X

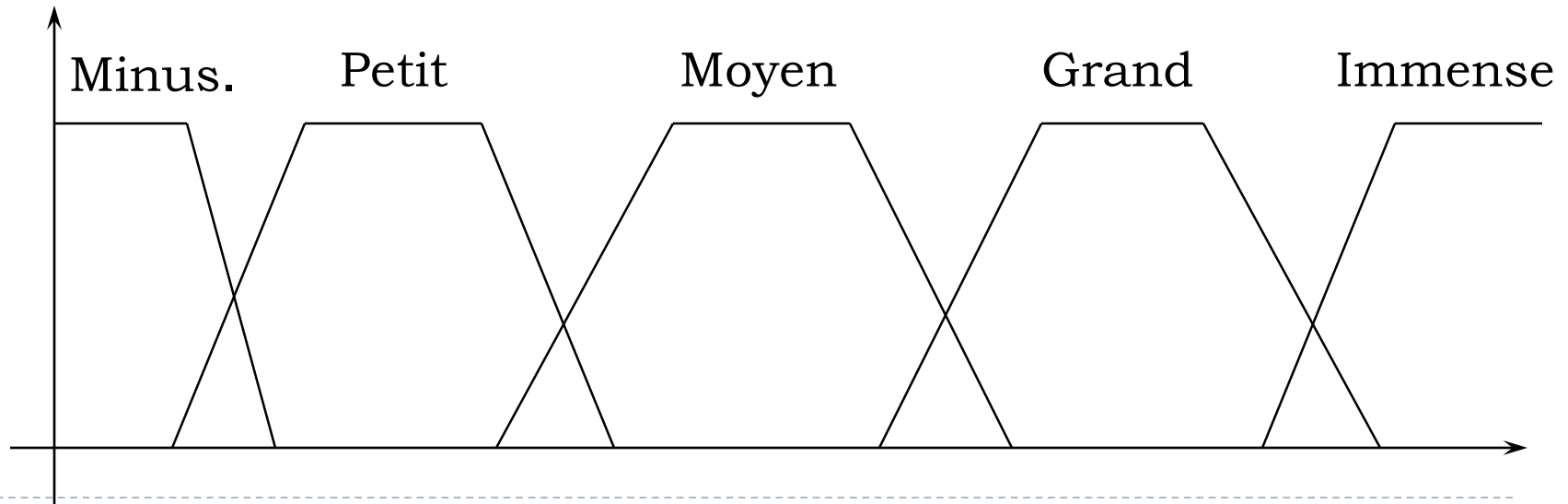
A_i : terme décrivant V ; caractérisation floue de V

Exemple

- ▶ Variable linguistique décrivant la taille d'un individu

$V = \text{taille}$ $X = \mathbb{R}^+$

$T_v = \{\text{Minuscule, Petit, Moyen, Grand, Immense}\}$



Modificateur linguistique

- ▶ Traduit l'effet d'un quantificateur linguistique tel que :
"très", "très peu", "plus ou moins",
"relativement", "pas", ...
- ▶ Cet opérateur :
 - ▶ modifie le degré d'appartenance dans le sens convenable
 - ▶ agit sur la zone de transition (partie floue)

Modificateur linguistique

- ▶ Un modificateur linguistique est un opérateur m qui permet, à partir de toute caractérisation floue A de V , de produire une nouvelle caractérisation floue $m(A)$.
 - ▶ A : caractérisation de V de fonction d'appartenance f_A
 - ▶ m : modificateur linguistique associé à la transcription t_m
 - ▶ $f_{m(A)}$: fonction d'appartenance de $m(A)$
- ▶ On a : $f_{m(A)} = t_m(f_A)$

Remarque

- ▶ Si $T_v = \{\text{petit, moyen, grand}\}$
et $M = \{\text{plutôt, non}\}$

Alors :

$M(T_v) = \{\text{plutôt petit, plutôt moyen, plutôt grand, non petit, ...}\}$
= nouvel ensemble de caractérisations floues engendré
par M à partir de T_v

- ▶ **Les variables linguistiques permettent de représenter les connaissances imprécises ou vagues sur une variable**

Modificateurs linguistiques : Classification

- ▶ 3 classes de modificateurs :
 - ▶ Modificateur de renforcement
 - ▶ Modificateur d'affaiblissement
 - ▶ Modificateur de négation

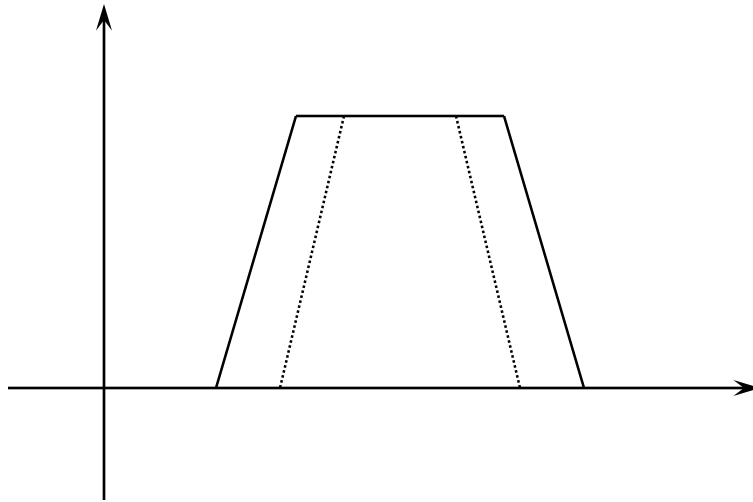
Modificateur de renforcement

- ▶ Modificateurs de renforcement (...)

tels que : "très", "fortement", ...

Associés à la transformation :

$$t_m(f_A(x)) = f_A(x)^2$$

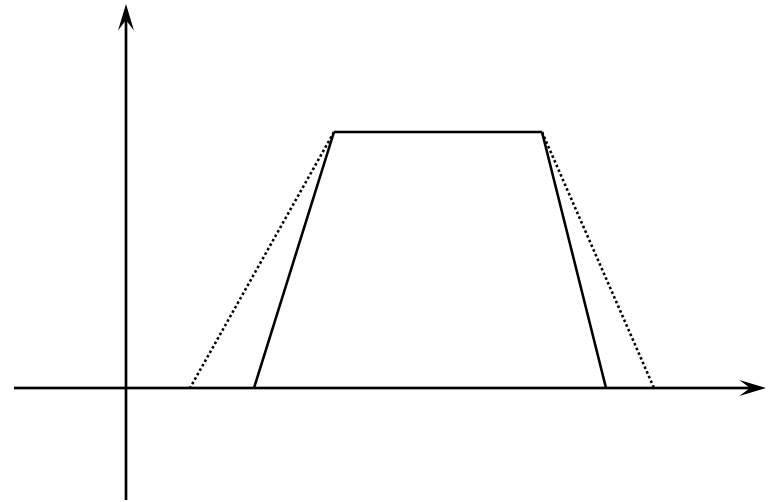
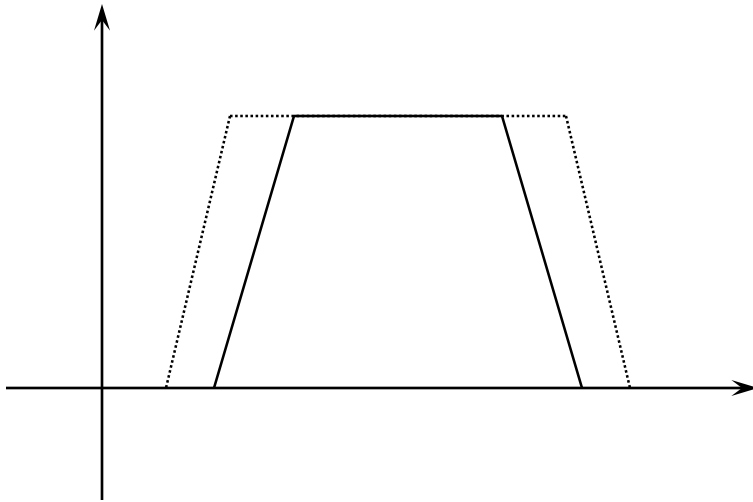


Modificateur d'affaiblissement

- Modificateurs d'affaiblissement (...)
tels que : "plus ou moins", "plutôt", ...

Associés à la transformation :

$$t_m(f_A(x)) = f_A(x)^{1/2}$$



Modificateur de négation

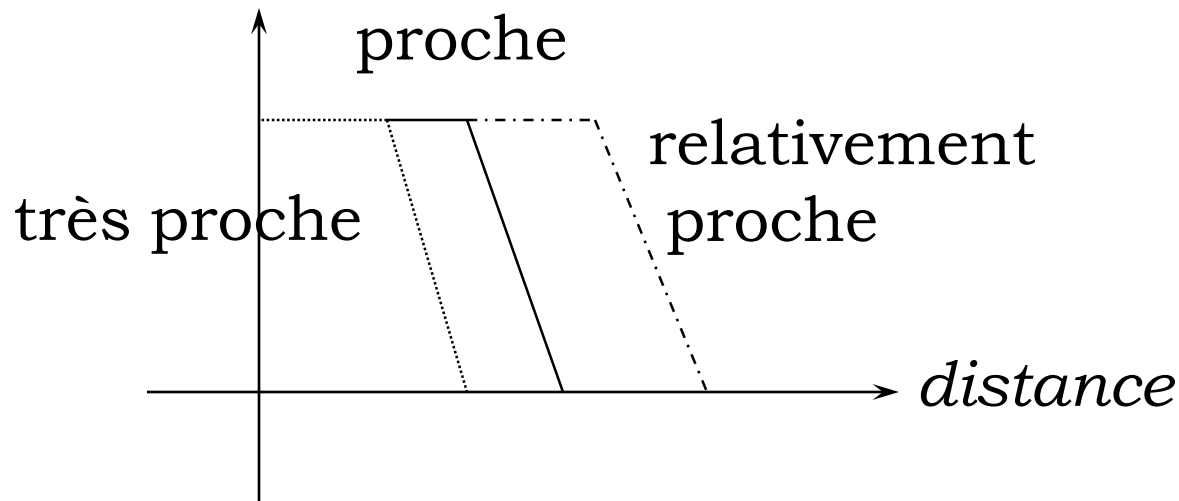
- ▶ Modificateur "non"

Associé à la transformation :

$$t_m(f_A(\mathbf{x})) = 1 - f_A(\mathbf{x})$$

Modificateur : exemple

- ▶ Ensemble flou A de fonction d'appartenance f_A , traduisant "proche" pour la variable "distance"
- ▶ Modificateurs linguistiques : "très" ou "relativement"
- ▶



Propositions floues élémentaires

- ▶ Soit L un ensemble de variables linguistiques et M un ensemble de modificateurs
- ▶ Une **proposition floue élémentaire** est définie à partir d'une variable linguistique (V, X, T_v) de L par la qualification "**V est A**" pour une caractérisation floue A (normalisée), appartenant à T_v ou à $M(T_v)$.

Propositions floues élémentaires

- ▶ Exemples :
 - ▶ "la taille est grande"
 - ▶ "la vitesse est plutôt rapide"
 - ▶ "la consommation est élevée"
- ▶ Valeur de vérité d'une proposition floue élémentaire
= f_A

Propositions floues générales

- ▶ **Composition** de propositions floues élémentaires
 (V, X, T_v) et $A \in T_v$
 (W, Y, T_w) et $B \in T_w$
- ▶ Conjonction floue :
"V est A et W est B"
- ▶ Disjonction floue :
"V est A ou W est B"
- ▶ Implication floue :
"SI V est A ALORS W est B"

Valeurs de vérité

- ▶ Conjonction : "V est A et W est B"
Valeur de vérité : **$\min(\mathbf{f_A(x)}, \mathbf{f_B(y)})$**
en tout point (x,y) de $X \times Y$
- ▶ Disjonction : "V est A ou W est B"
Valeur de vérité : **$\max(\mathbf{f_A(x)}, \mathbf{f_B(y)})$**
en tout point (x,y) de $X \times Y$

Règle floue

- ▶ Une **règle floue** est une implication entre 2 propositions floues quelconques:

"Si V est A et W est B *prémisse*
Alors U est C" *conclusion*

- ▶ Valeur de vérité :
 $f_R(x,y) = F(f_A(x), f_B(y))$

Logique Floue

Raisonnement approximatif

Règles Floues

- ▶ Rappel :
Si V est A Alors W est B
Prémisse Conclusion
- ▶ Exemple : règle floue concernant un diamant
"Si le poids est important alors le prix est élevé"
- ▶ Valeur de vérité :
 $f_R(x,y) = F(f_A(x), f_B(y))$

Principales implications floues

- ▶ Reisenbach (R) :

$$f_R(x,y) = 1 - f_A(x) + f_A(x) \cdot f_B(y)$$

- ▶ Willmot (W) :

$$f_R(x,y) = \max(1 - f_A(x), \min(f_A(x), f_B(y)))$$

- ▶ Rescher-Gaines (RG) :

$$f_R(x,y) = 1 \text{ si } f_A(x) \leq f_B(y) \\ = 0 \text{ sinon}$$

- ▶ Kleene-Dienes (KD) :

$$f_R(x,y) = \max(1 - f_A(x), f_B(y))$$

Principales implications floues

- ▶ Brouwer-Gödel (BG) :

$$\begin{aligned} f_R(x,y) &= 1 \quad \text{si } f_A(x) \leq f_B(y) \\ &= f_B(y) \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

- ▶ Goguen (G) :

$$\begin{aligned} f_R(x,y) &= \min(f_B(y)/f_A(x), 1) \quad \text{si } f_B(y) \neq 0 \\ &= 1 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

- ▶ Lukasiewicz (L) :

$$f_R(x,y) = \min(1 - f_A(x) + f_B(y), 1)$$

Principales implications floues

- ▶ Implications pour la commande floue

- ▶ Mamdani (M) :

$$f_R(x,y) = \min(f_A(x), f_B(y))$$

- ▶ Larsen (P) :

$$f_R(x,y) = f_A(x) \cdot f_B(y)$$

Modus Ponens Généralisé

- ▶ **Règle floue** : "Si V est A alors W est B"
Fct d'ap. f_A f_B
- ▶ **Fait observé** : V est A'
Fct d'ap. $f_{A'}$
- ▶ **Conclusion** : W est B'
Fct d'ap. $f_{B'}$

$$f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T(f_{A'}(x), f_R(x, y))$$

T : T-norme appelée opérateur de MPG

Intérêt du MPG

- ▶ Règle floue : Si le poids d'un diamant est important
Alors le prix est élevé
- ▶ Faits permettant d'appliquer la règle :
 - ▶ le poids est important : *Logique classique OK*
 - ▶ le poids est très important
 - ▶ le poids est relativement important
 - ▶ le poids est de 1,4 carat

Cas particulier : le fait observé est précis

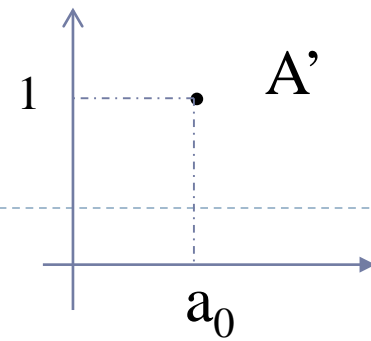
- ▶ Règle floue R :
"Si V est A alors W est B "
 f_A f_B

- ▶ Fait observé : $V = a_0$

- ▶ Conclusion : W est B'
 $f_{B'}$

où : $\mathbf{f}_{B'}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}_R(\mathbf{a}_0, \mathbf{y})$

Preuve



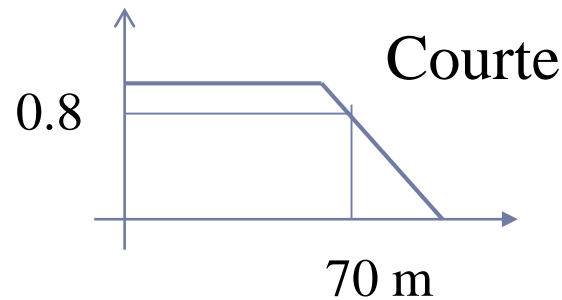
- ▶ $f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} T(f_{A'}(x), f_R(x, y))$
- ▶ Comme $V = a_0$, $f_{A'}(a_0) = 1$
- ▶ Alors : $f_{B'}(y) = T(f_{A'}(a_0), f_R(a_0, y)) = T(1, f_R(a_0, y))$
- ▶ Comme T est une T-norme, $T(x, 1) = x$
- ▶ D'où : $f_{B'}(y) = f_R(a_0, y)$
- ▶ Si on utilise Mamdani, $f_{B'}(y) = \min(f_A(a_0), f_B(y))$

Exemple

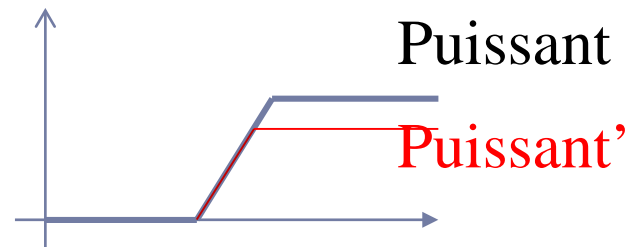
- ▶ Règle : Si la Distance est courte
Alors le Freinage est puissant
- ▶ Or la Distance est de 70 m
- ▶ Donc le Freinage est ?

Exemple

Distance :



Freinage :



Soit $D = 70$ m

$$\begin{aligned} f_{\text{Puissant}'}(y) &= f_R(70, y) = \min(f_{\text{Courte}}(70), f_{\text{Puissant}}(y)) \\ &= \min(0.8, f_{\text{Puissant}}(y)) \end{aligned}$$

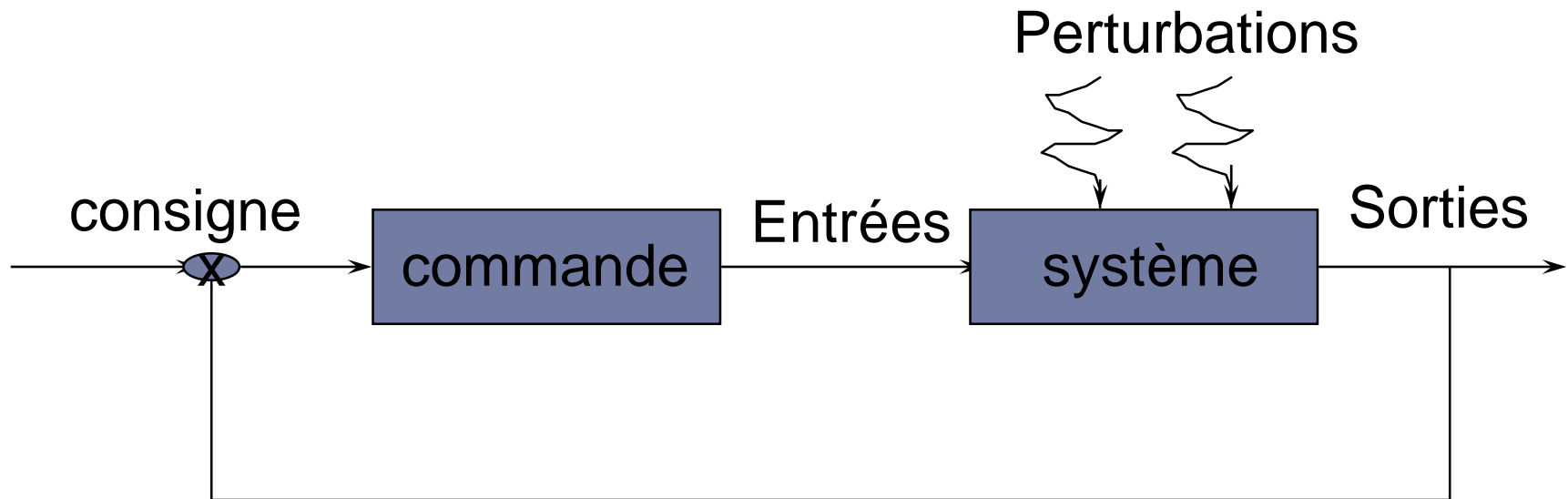


Logique Floue



Commande Floue

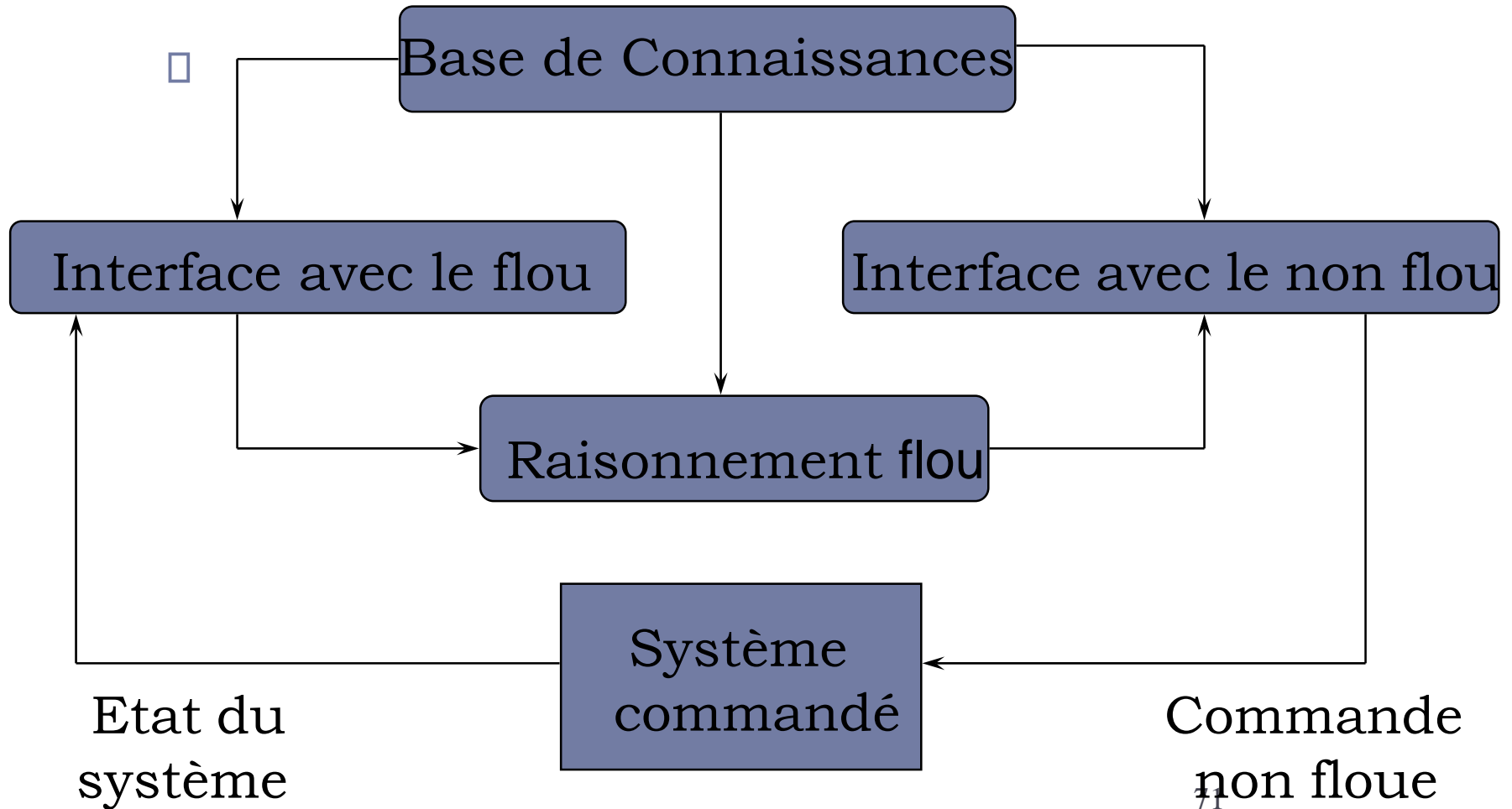
Commande de procédés



Intérêts de la commande floue

- ▶ Manipulation de connaissances imprécises et qualitatives
- ▶ Il n'est pas nécessaire de disposer d'un modèle mathématique du système à contrôler
- ▶ Travail à base de règles expertes
- ▶ Facilité de mise en oeuvre et de maintenance

Principe d'un contrôleur flou



Les étapes du contrôle

- ▶ Fuzzification
 - ▶ passage du non-flou au flou
- ▶ Pour chaque règle :
 - ▶ Evaluation de la prémisse
 - ▶ Implication floue
 - ▶ Inférence floue
- ▶ Agrégation des règles
- ▶ Défuzzification
 - ▶ passage du flou au non-flou

Fuzzification

- ▶ Passage du domaine numérique au domaine symbolique
- ▶ Principe :
 - ▶ L'espace de variation d'une variable est partagé en qualificatifs linguistiques, traduisant les différents états possibles de la variable
 - ▶ Pour chaque qualificatif, on définit une fonction d'appartenance.

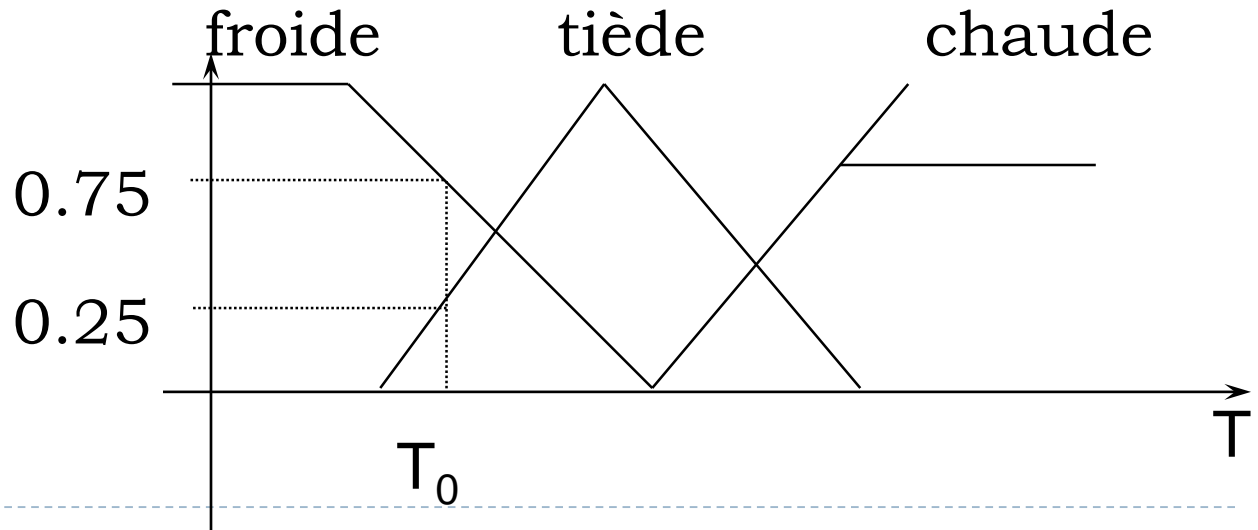
Fuzzification : exemple

- Pour une observation T_0 de la variable Température, on définit la représentation floue de T_0 par :

$$F_{\text{froide}}(T_0) = 0.75$$

$$F_{\text{tiède}}(T_0) = 0.25$$

$$F_{\text{chaude}}(T_0) = 0$$



Evaluation des règles

- ▶ R : Si V est A alors W est B
- ▶ Selon Mamdani :
 - ▶ Conjonction : \min
 - ▶ Disjonction : \max
 - ▶ Implication floue : $\min(f_A(x), f_B(y))$

Evaluation de règles

- ▶ R : Si V est A alors W est B
- ▶ Selon Larsen :
 - ▶ Conjonction : \min
 - ▶ Disjonction : \max
 - ▶ Implication floue : $f_A(x).f_B(y)$

Agrégation

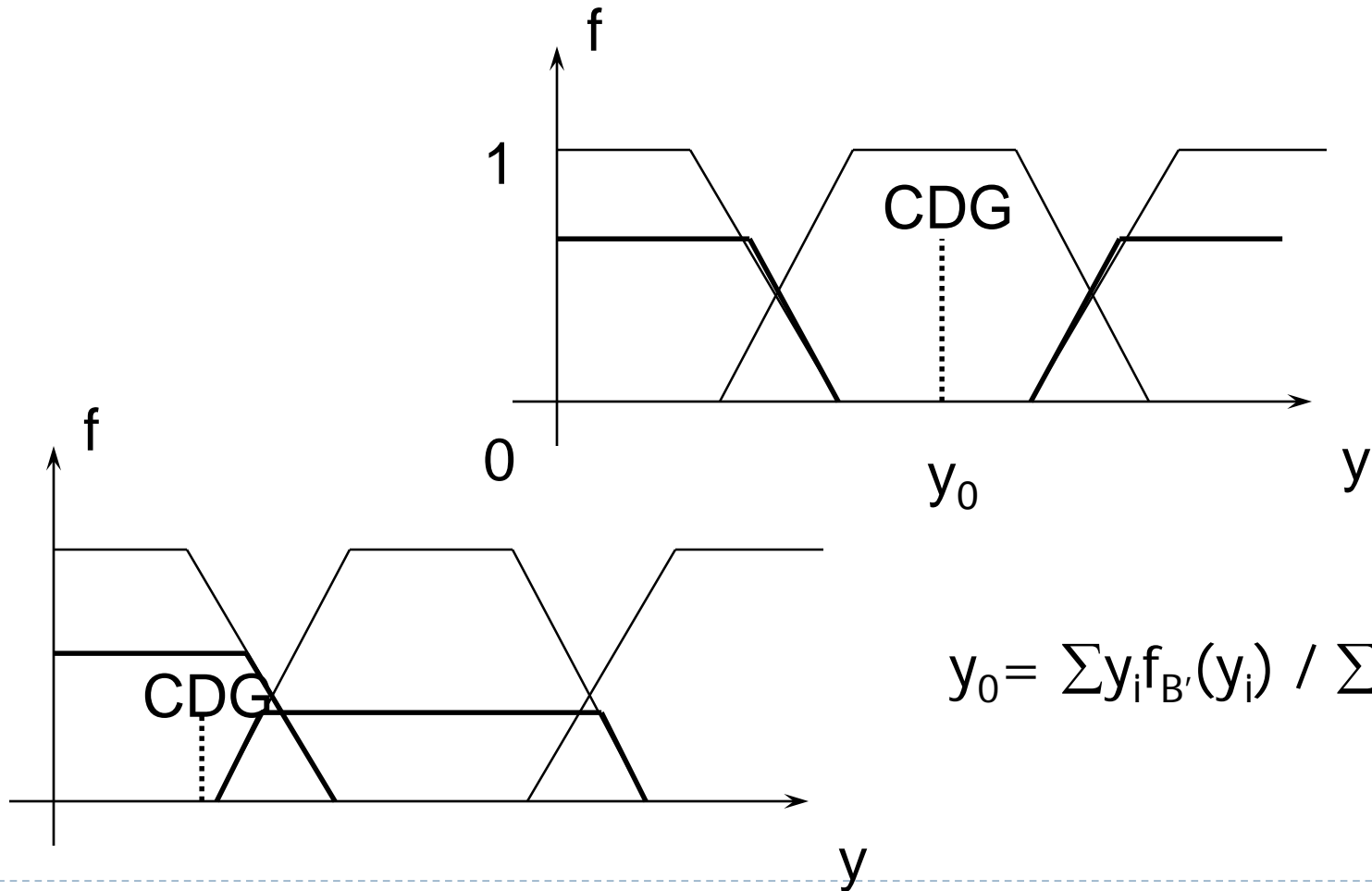
- ▶ Chacune des règles donnent une caractérisation de la variable de commande W : $B'_1, B'_2 \dots$
- ⇒ Agrégation = déterminer une caractérisation floue B à partir des résultats intermédiaires $B'_1, B'_2 \dots$
- ⇒ $\forall y \in Y, f_B(y) = \max_{i=1,2,\dots} f_{B'_i}(y)$

Défuzzification

- ▶ Plusieurs méthodes :
 - ▶ Le centre de gravité
 - ▶ le centre des maximum pondérés
 - ▶ le maximum

Centre de gravité

► Exemples :

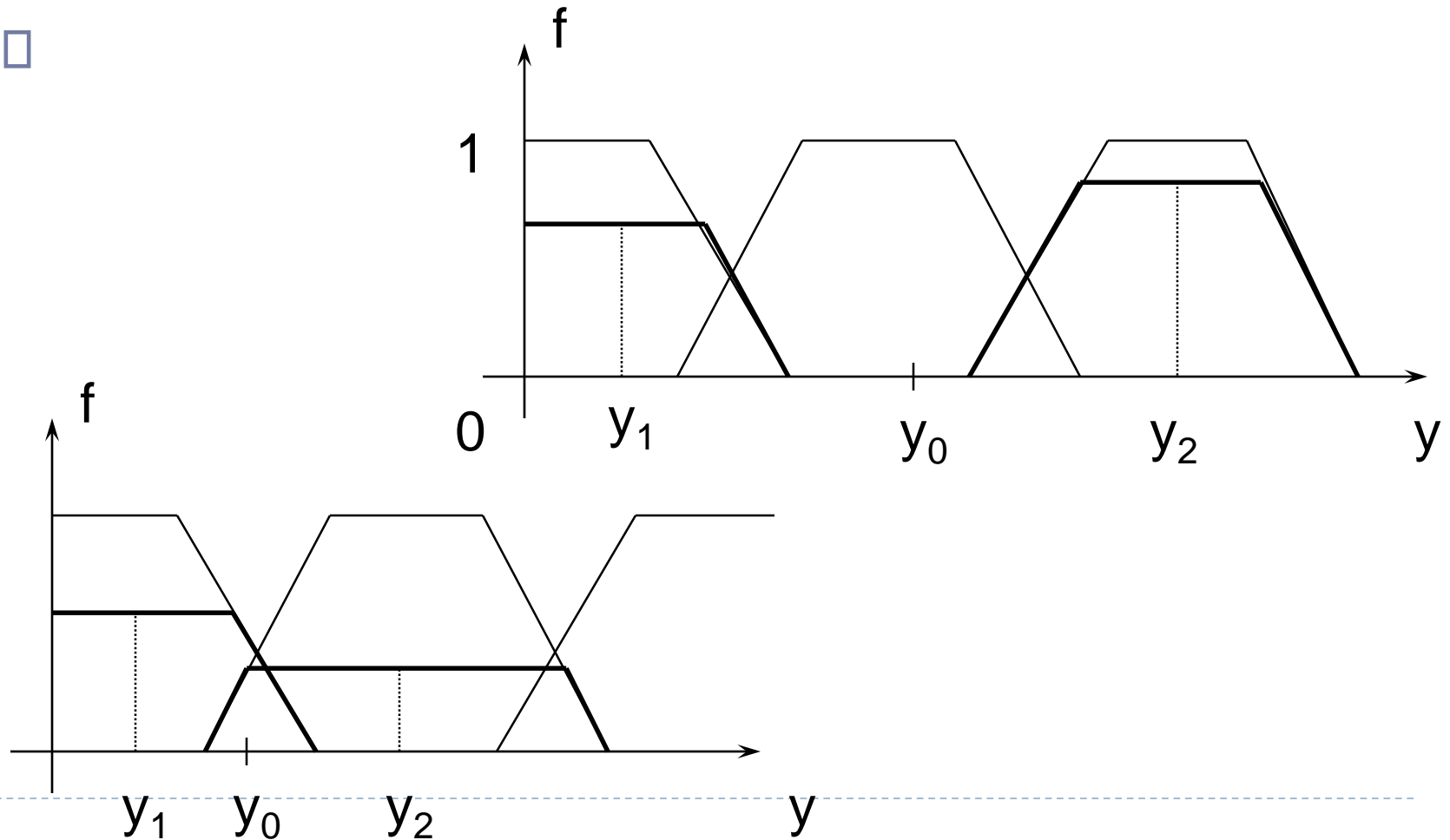


$$y_0 = \frac{\sum y_i f_{B'}(y_i)}{\sum f_{B'}(y_i)}$$

Centre des maximums pondérés

► Exemples :

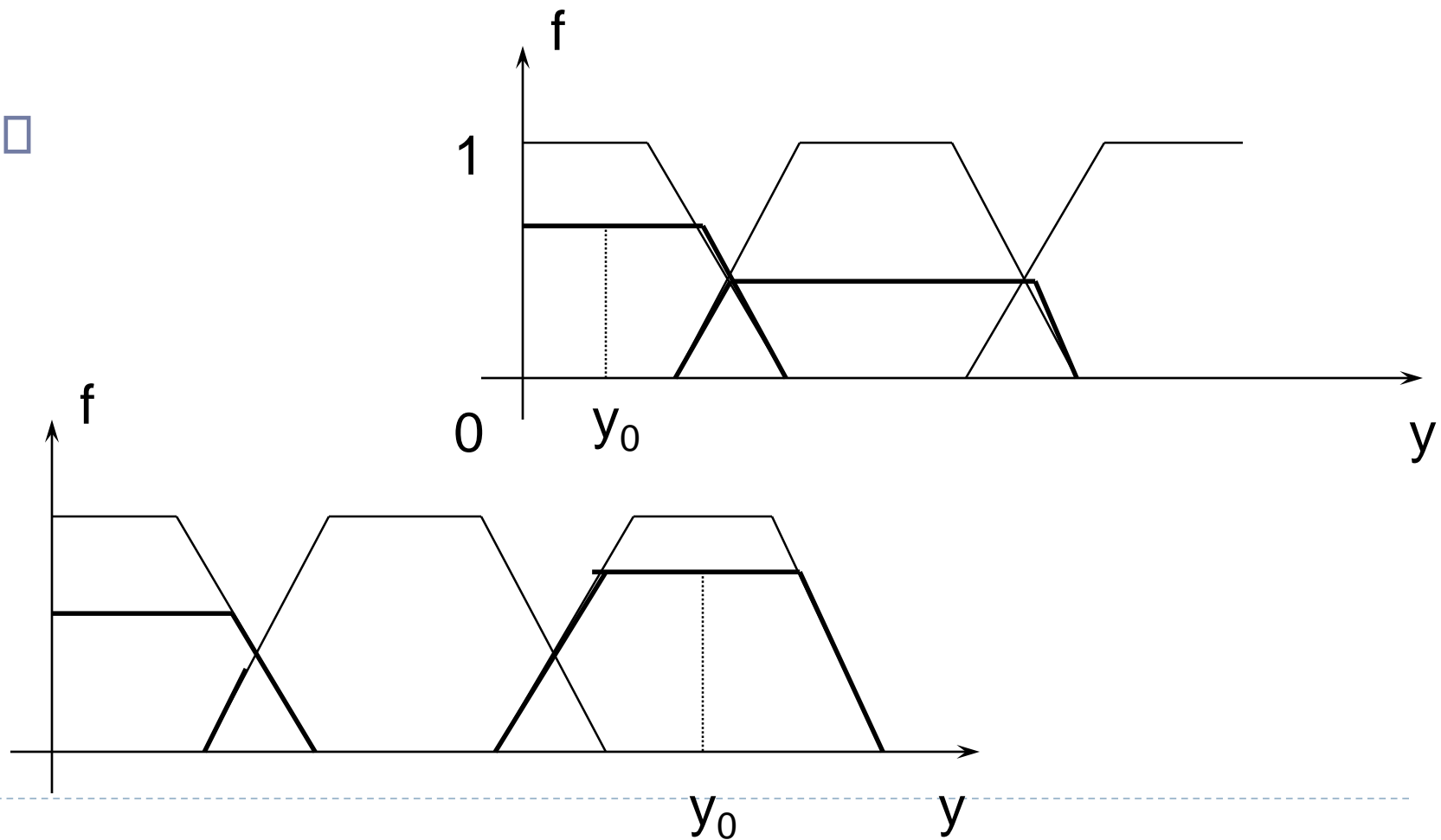
□



Le maximum

□

□



Mise en place d'un contrôleur flou

▶ **Etude :**

- ▶ Identification des variables
- ▶ Définition des variables linguistiques
- ▶ Définition des règles
- ▶ Choix des méthodes d'inférence et de défuzzification


▶ **Contrôle :**

- ▶ Fuzzification
- ▶ Evaluation des règles
- ▶ Agrégation
- ▶ Défuzzification

Identification des variables

- ▶ Entrées
- ▶ Sorties
- ⇒ Unité
- ⇒ Plage de variations
- ⇒ Capteurs ou actionneurs associés

Définition des variables linguistiques

- ▶ Allure des fonctions d'appartenance
- ▶ Nombre de termes
  finesse
- ▶ Recouvrement

Définition des règles

▶ **Expertise**

- Savoir-faire d'opérateurs humains
 - ▶ observation
 - ▶ questionnaire
- Savoir d'experts dans le domaine
- Apprentissage de règles à partir d'expériences

Écriture des règles

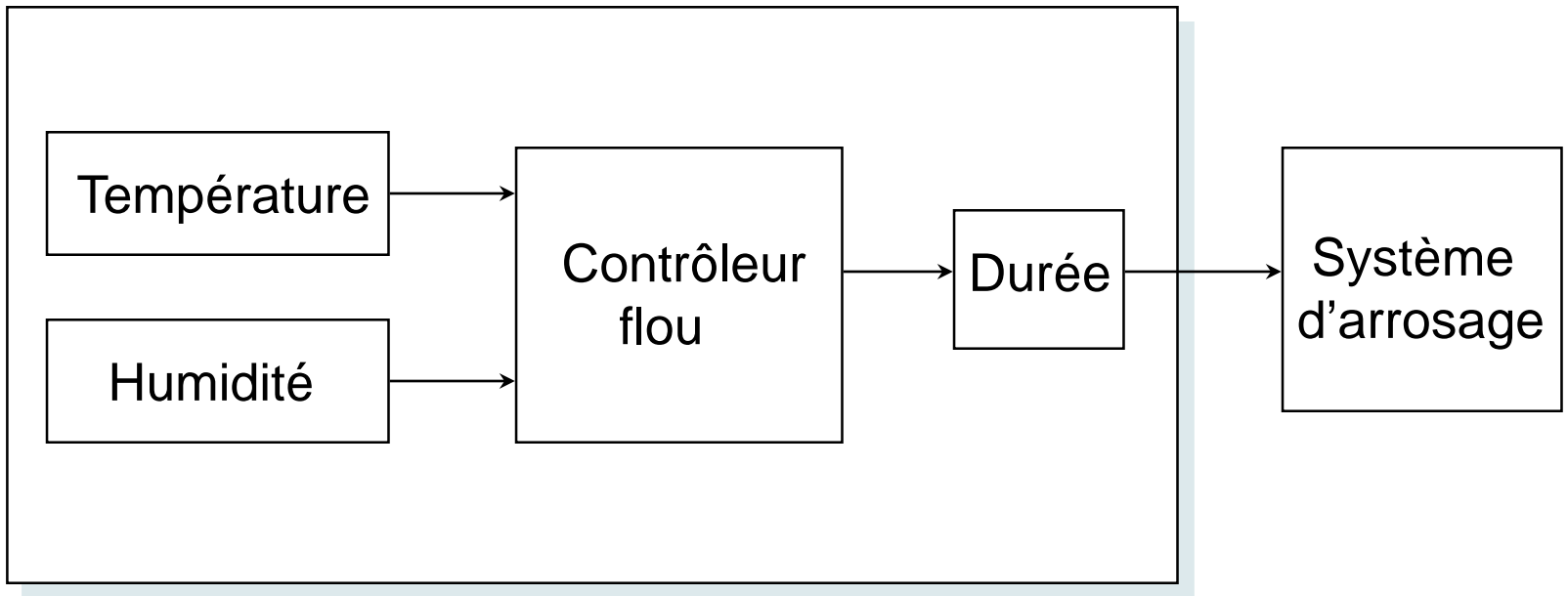
- ▶ Règles de production
 - ▶ Si la température est chaude ET le sol sec, Alors la durée d'arrosage est longue.
 - ▶ Si X_1 est A_1 et X_2 est A_2 alors Y est B
- ▶ Tableau

	<i>Froide</i>	<i>Douce</i>	<i>Normale</i>	<i>Chaude</i>	<i>Caniculaire</i>
<i>Sec</i>	<i>Courte</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Longue</i>	<i>Longue</i>
<i>Humide</i>	–	<i>Courte</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Longue</i>
<i>Trempé</i>	–	–	–	–	<i>Courte</i>

Choix des méthodes d'inférence et de défuzzification

- ▶ Opérateurs flous
- ▶ Implication floue
- ▶ Agrégation
- ▶ Défuzzification

Application 1 : Arroseur Flou



Contrôleur flou

- ▶ 2 entrées :
 - ▶ Température
 - ▶ Degré d'humidité du sol
- ▶ 1 sortie :
 - ▶ Durée d'arrosage

Définition des variables floues

- La gamme des températures traitées est 0° à 45° et les termes linguistiques caractérisant la température sont : *Froide*, *Douce*, *Normale*, *Chaude*, *Caniculaire*. Chacun de ces termes correspond à un ensemble flou dont le noyau et le support sont définis par :

Noyau(*Froide*) : $[0, 5]^{\circ}$

Support(*Froide*) : $[0, 13]^{\circ}$

Noyau(*Douce*) : 13°

Support(*Douce*) : $[5, 18]^{\circ}$

Noyau(*Normale*) : $[18, 22]^{\circ}$

Support(*Normale*) : $[13, 26]^{\circ}$

Noyau(*Chaude*) : $[26, 30]^{\circ}$

Support(*Chaude*) : $[22, 38]^{\circ}$

Noyau(*Caniculaire*) : $[38, 45]^{\circ}$

Support(*Caniculaire*) : $[30, 45]^{\circ}$

- Le degré d'humidité du sol s'étend de 0% à 100%. Les termes linguistiques associés *Sec*, *Humide*, *Trempé* sont caractérisés par :

Noyau(*Sec*) : $[0, 40] \%$

Support(*Sec*) : $[0, 60] \%$

Noyau(*Humide*) : $[60, 70] \%$

Support(*Humide*) : $[40, 80] \%$

Noyau(*Trempé*) : $[80, 100] \%$

Support(*Trempé*) : $[70, 100] \%$

Définition des variables floues

- ▶ La durée d'arrosage va de 0 à 30 minutes et les termes linguistiques caractérisant la durée d'arrosage sont : *Courte*, *Moyenne* et *Longue*. Chacun de ces termes correspond à un ensemble flou dont le noyau est défini par :

Noyau(*Courte*) : $[0, 5]$ min Support(*Courte*) : $[0, 10]$ min

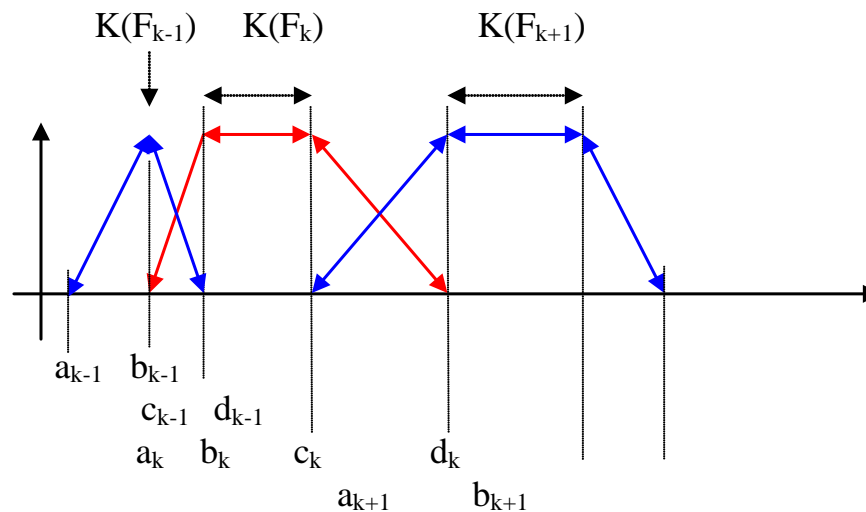
Noyau(*Moyenne*) : 10 min Support(*Moyenne*) : $[5, 30]$ min

Noyau(*Longue*) : 30 min Support(*Longue*) : $[10, 30]$ min



Représentation trapézoïdale

- On utilisera la représentation trapézoïdale « quadruplet de valeurs » (a_k, b_k, c_k, d_k) pour les sous-ensembles flous F_k



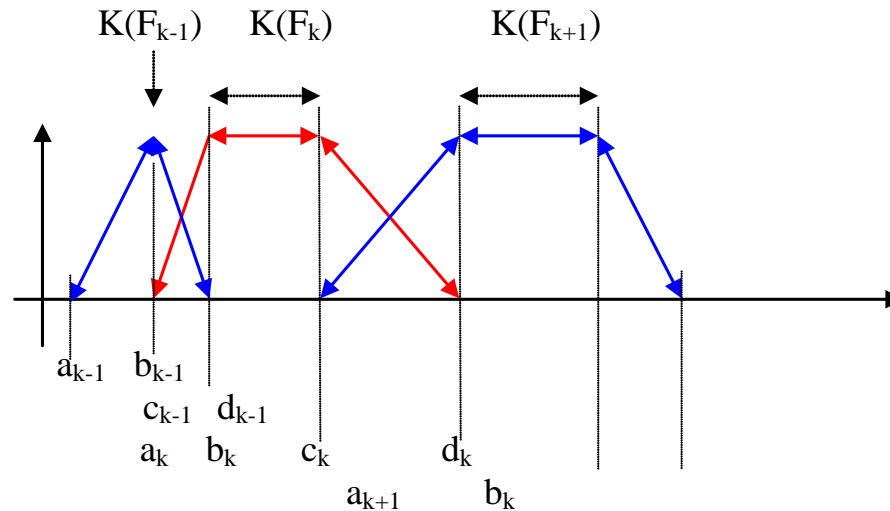
Froide : $[0,0,5,13]$ Douce : $[5,13,13,18]$

Définition des règles

	<i>Froide</i>	<i>Douce</i>	<i>Normale</i>	<i>Chaude</i>	<i>Caniculaire</i>
<i>Sec</i>	<i>Courte</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Longue</i>	<i>Longue</i>
<i>Humide</i>	–	<i>Courte</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Longue</i>
<i>Trempé</i>	–	–	–	–	<i>Courte</i>



Fuzzification : méthode manuelle



Si $T_0 < a_k$ alors $d^\circ\text{appartenance} = 0$

Si $a_k < T_0 < b_k$ alors $d^\circ\text{appartenance} = (T_0 - a_k) / (b_k - a_k)$

Si $b_k < T_0 < c_k$ alors $d^\circ\text{appartenance} = 1$

Si $c_k < T_0 < d_k$ alors $d^\circ\text{appartenance} = (d_k - T_0) / (d_k - c_k)$

Si $T_0 > d_k$ alors $d^\circ\text{appartenance} = 0$



Fuzzification pour la température

► Soit $T_0 = 6^\circ$ pour la variable Température

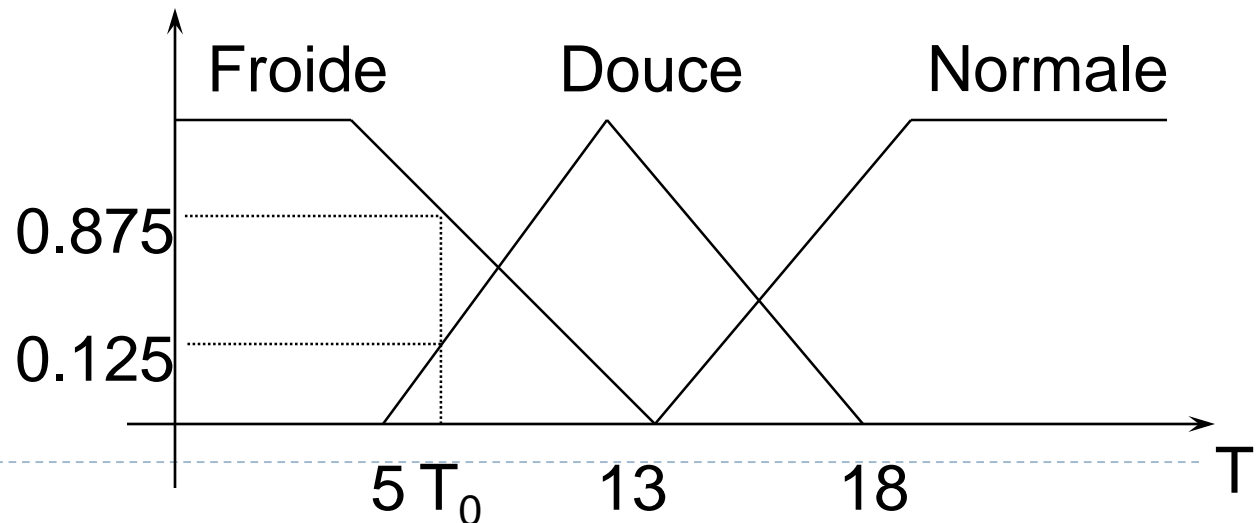
► $F_{\text{Froide}}(T_0) = 0.875$

$F_{\text{Douce}}(T_0) = 0.125$

$F_{\text{Normale}}(T_0) = 0$

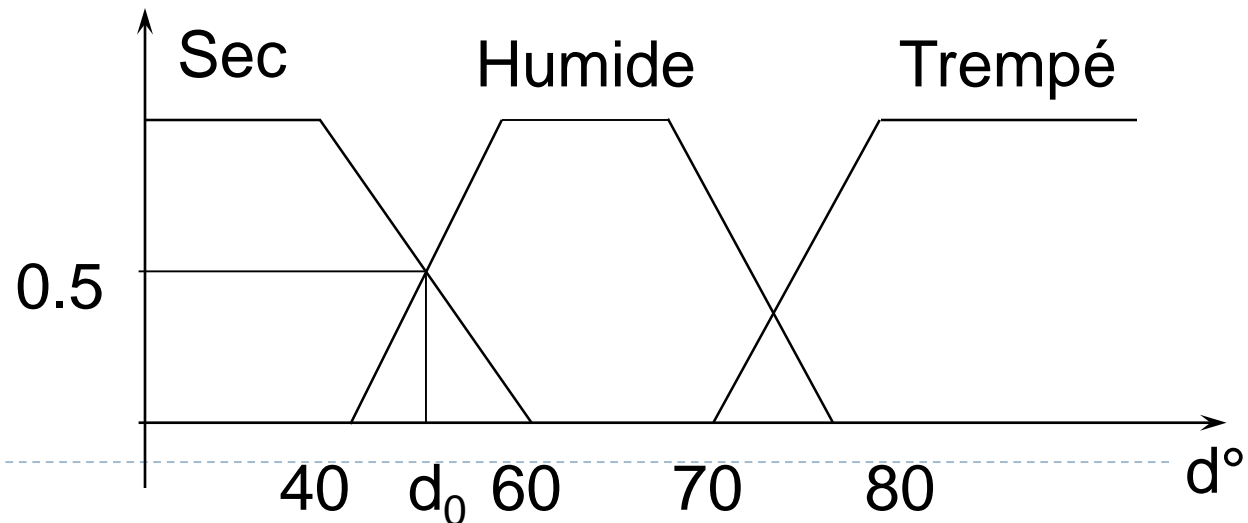
$F_{\text{Chaude}}(T_0) = 0$

$F_{\text{Caniculaire}}(T_0) = 0$



Fuzzification pour l'humidité

- ▶ Soit $d_0 = 50\%$ pour la variable Humidité
- ▶ $F_{\text{Sec}}(d_0) = 0.5$
 $F_{\text{Humide}}(d_0) = 0.5$
 $F_{\text{Trempé}}(d_0) = 0$



Evaluation des règles :

Modus Ponens Généralisé

- ▶ Règle floue : Si V est A Alors W est B
- ▶ Fait précis : $A' = a_0$
- ▶ Conclusion : W est B'
où $f_{B'}(y) = f_R(a_0, y)$
- ▶ Selon Mamdani, $f_R(a_0, y) = \min(f_A(a_0), f_B(y))$
- ▶ Si la condition de la règle contient une conjonction de 2 propositions (U est C et V est D) et si on a 2 faits précis ($C' = c_0$ et $D' = d_0$), $f_A(a_0) = \min(f_C(c_0), f_D(d_0))$



Application des règles

- ▶ R : Si la Température est Froide et l'Humidité Sec Alors la Durée d'arrosage est Courte
- ▶ Selon Mamdani :
 - ▶ Conjonction : \min
 - ▶ Implication floue : $\text{Courte} = \min(\text{Froide}, \text{Sec})$
 - ▶ Soit : $f_{\text{Courte}}(y) = \min(\min(\text{Froide}, \text{Sec}), f_{\text{Courte}}(y))$



Application des règles

	<i>Froide</i> 0.875	<i>Douce</i> 0.125	<i>Normale</i>	<i>Chaude</i>	<i>Canniculaire</i>
<i>Sec</i> 0.5	<i>Courte</i> 0.5	<i>Moyenne</i> 0.125	<i>Moyenne</i>	<i>Longue</i>	<i>Longue</i>
<i>Humide</i> 0.5	<i>Nul</i>	<i>Courte</i> 0.125	<i>Moyenne</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Longue</i>
<i>Trempé</i>	<i>Nul</i>	<i>Nul</i>	<i>Nul</i>	<i>Nul</i>	<i>Courte</i>



Application des règles et agrégation

- ▶ **Inférence (Mamdani)**

- ▶ $\min(\text{Froide}, \text{Sec}) = \min(0.875, 0.5) = 0.5$ (Courte)
- ▶ $\min(\text{Douce}, \text{Sec}) = \min(0.125, 0.5) = 0.125$ (Moyenne)
- ▶ $\min(\text{Douce}, \text{Humide}) = \min(0.125, 0.5) = 0.125$ (Courte)

- ▶ **Agrégation**

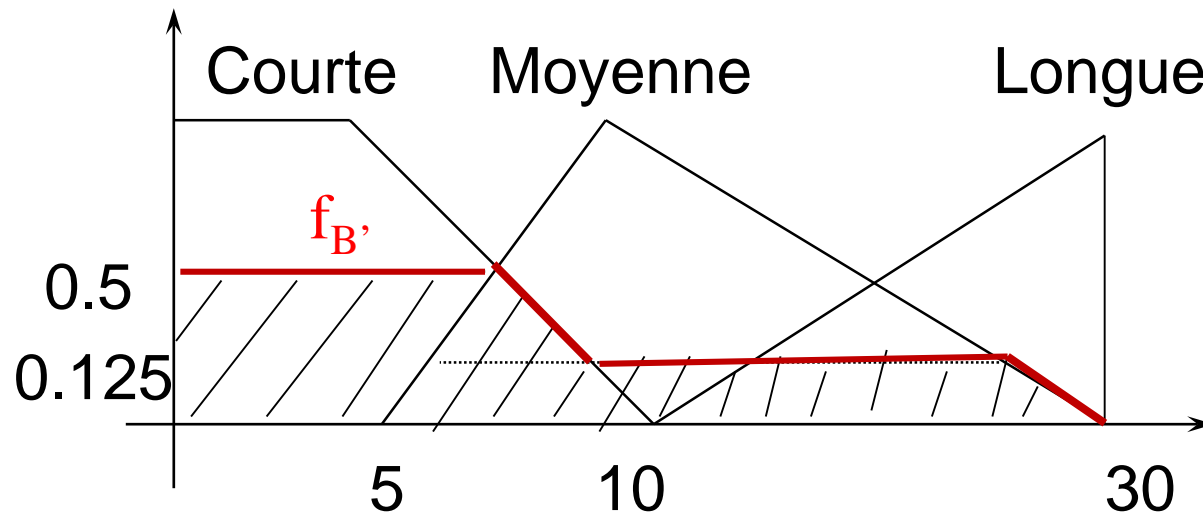
- ▶ $\max(0.5, 0.125) = 0.5$ (Courte)

- ▶ **Sortie Floue pour la durée d'arrosage**

Courte : 0.5 ; Moyenne : 0.125 ; Longue : 0



Défuzzification pour la durée théorique



Défuzzification pour la durée théorique

$$\text{Durée d'arrosage} = \sum y_i f_{B'}(y_i) / \sum f_{B'}(y_i)$$

Durée d'arrosage = Numérateur / Dénominateur

$$\begin{aligned}\text{Numérateur} &= (0+1+2+\dots+7) \times 0.5 + 8 \times 0.4 + 9 \times 0.2 + (10+\dots+27) \times 0.125 + \\ &\quad 28 \times 0.1 + 29 \times 0.05 + 30 \times 0 \\ &= 64.875\end{aligned}$$

$$\text{Dénominateur} = 8 \times 0.5 + 0.4 + 0.2 + 18 \times 0.125 + 0.1 + 0.05 + 0 = 7$$

D'où :

$$\text{Durée d'arrosage} = 64.875 / 7 = 9,26 \text{ minutes}$$

Logique Floue

Raisonnement possibiliste

Raisonnement possibiliste

- ▶ Concerne des connaissances précises et incertaines
- ▶ Représentation des connaissances à l'aide de propositions logiques classiques

Possibilité et nécessité de propositions logiques (Zadeh)

- $\forall p, q$ propositions logiques
- ▶ $\Pi(p)$: coefficient que l'on attribue au fait que p soit susceptible d'être vraie
- ▶ $\Pi(p \vee q) = \max(\Pi(p), \Pi(q))$
- ▶ $N(p)$: mesure le degré de certitude que l'on possède sur cette vérité
- ▶ $N(p \wedge q) = \min(N(p), N(q))$

Propriétés

- ▶ $\Pi(p \vee q) \geq \Pi(p)$
- ▶ $N(p \wedge q) \leq N(p)$
- ▶ $\max(\Pi(p), \Pi(\neg p)) = 1$
- ▶ $\min(N(p), N(\neg p)) = 1$
- ▶ $\Pi(p) = 1 - N(\neg p)$

Propriétés

- ▶ Si $\Pi(p)=N(p)=1$ Alors p est vraie
- ▶ Si $\Pi(p)=N(p)=0$ Alors p est fausse
- ▶ Si $\Pi(p)=1$ et $N(p)=0$ (donc $\Pi(\neg p) = 1$)
Alors incertitude complète sur p

Modus ponens possibiliste

- ▶ $a, b \in]0, 1]$

Si $N(p \rightarrow q) \geq a$

Et $N(p) \geq b$

Alors $N(q) \geq \min(a, b)$

Exemple

- ▶ Règle : «Si la hauteur de l'arbre dépasse 9m, alors l'élaguer» (0.8)
- ▶ Fait : Un arbre particulier caractérisé par «la hauteur dépasse 9m» (0.7)
- ▶ Conclusion : Décision d'élaguer avec une certitude au moins égale à $\min(0.8; 0.7) = 0.7$

Modus tollens possibiliste

- ▶ Si $N(p \rightarrow q) \geq a$
Et $\Pi(q) \leq b$
-

Alors $\Pi(p) \leq \max(1-a, b)$

- ▶ Si $N(p \rightarrow q) = 1$
Et $N(q) \leq b'$
-

Alors $N(p) \leq b'$

Exemple

- ▶ Règle : « Si la hauteur de l'arbre dépasse 9m, alors l'élaguer » (0.8)
- ▶ Fait : « Il est possible que l'arbre ait été élagué » avec un degré de possibilité au plus égal à 0.1.
- ▶ Conclusion : « il est possible que sa hauteur dépasse 9m » avec un coefficient au plus égal à $\max(0.2, 0.1) = 0.2$.

Connaissances incertaines et imprécises

- ▶ Exemples :

- ▶ Si le poids est important alors le prix est élevé
- ▶ Il est probable (0.5) que la vitesse soit élevée.

→ Utilisation de la logique floue (raisonnement approximatif ou raisonnement possibiliste)

Systemes Experts Flous : 2 cas possibles

- ▶ Connaissances imprécises ou vagues dans règles et faits
 - ⇒ Représentation des K. par des Règles Floues :
Le moteur d'inférence utilise un Raisonnement Approximatif
- ▶ Connaissances précises, mais règles et faits incertains
 - ⇒ Utilisation de coefficients de certitude : Le moteur d'inférence utilise un Raisonnement Possibiliste

Bibliographie

- ▶ D. Kayser, La représentation des connaissances, Hermès (Paris), 1997.
- ▶ J.L. Laurière, Intelligence Artificielle (résolution de problèmes par l'homme et la machine), Eyrolles, Paris, 1987.
- ▶ M. Stefik, Introduction to Knowledge Systems, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco (CA), 1995.
- ▶ A. Thayse et al., Approche logique de l'Intelligence Artificielle (5 tomes), Dunod Informatique (Paris), 1988.
- ▶ B. Bouchon-Meunier : « La logique floue ». PUF « Que Sais-Je ? »
- ▶ L. Gacogne : « Éléments de logique floue ». Hermès, 1997.