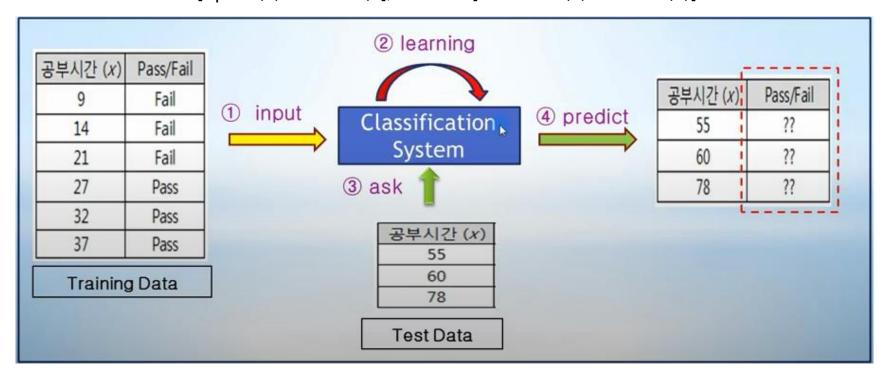
- 1. 로지스틱 회귀 (Logistic Regression)?
- 2. 로지스틱 회귀 손실 함수()
- 3. 로지스틱회귀 구현
- 4. 소프트맥스 회귀(Softmax Regression)

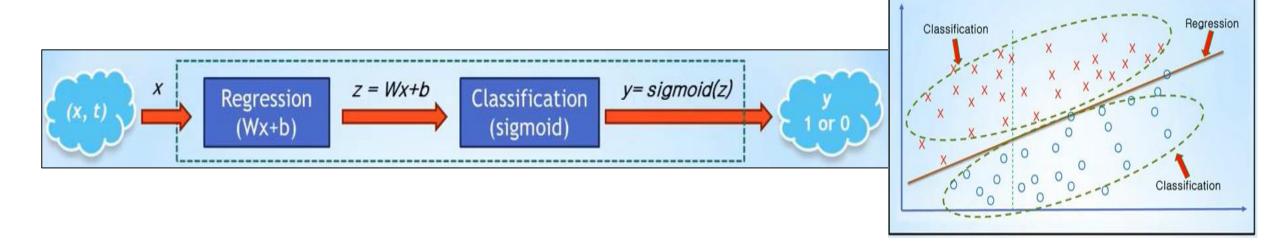
❖ 분류(Classification)

- Training Data 특성과 관계 등을 파악한 후에, 미지의 입력 데이터에 대해서 결과가 어떤 종류의 값으로 분류 될 수 있는지를 예측하는 것
- 예 : 스팸문자 분류[Spam(1) or Ham(0], 암 판별[악성종양(1) or 종양(0)]



Logistic Regression algorithm Flow

- Training Data 특성과 분포를 나타내는 최적의 직선을 찾고(Linear Regression)
- 그 직선을 기준으로 데이터를 위(1) 또는 아래(0) 등으로 분류(Classification) 해주는 알고리즘
- 이러한 Logistic Regression은 Classification 알고리즘 중에서도 정확도가 높은 알고리즘으로 알려져 있어서 Deep Learning에서 기본이 되는 Componet로 사용되고 있음



❖ 이진 분류(Binary Classification)

- 시험 점수가 합격(1)인지 불합격(0)인지?
- 어떤 메일을 받았을 때 이게 정상 메일(1)인지 스팸 메일(0)인지?
- 이렇게 둘 중 하나를 결정하는 문제

score(x)	result(y)
45	불합격
50	불합격
55	불합격
60	합격
65	합격
70	합격

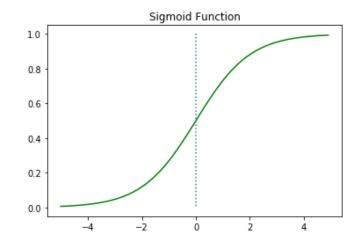


❖ 시그모이드 함수(Sigmoid function)

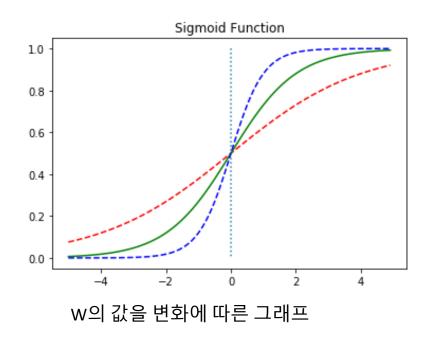
- 출력 값이 1 또는 0인 것만 가져야 하는 분류 시스템에서, 함수 값으로 0~1 값을 가지도록 하는 함수 방정식
- 시그모이드 함수 결과 값을 그래프로 표현하면 S자 형태로 나타남

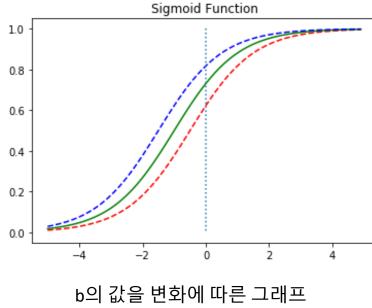
$$H(x) = sigmoid(Wx+b) = rac{1}{1+e^{-(Wx+b)}} = \sigma(Wx+b)$$

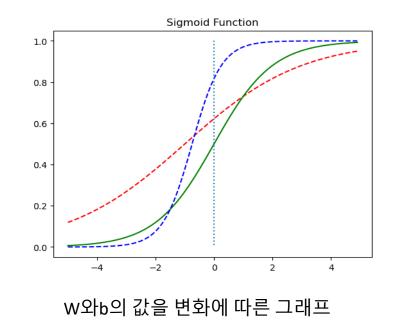
- 선형 회귀와 같이 로지스틱회귀 역시 최적의 W와 b를 찾는 것이 목표.
- 선형 회귀에서는 W가 직선의 기울기, b가 y절편을 의미.
- W와 b가 함수의 그래프에 어떤 영향을 주는지 직접 그래프를 그려서 확인



- ❖ W, b의 변화에 따른 그래프
 - W값의 변화에 따른 경사도의 변화
 - b값의 변화에 따른 좌, 우 이동

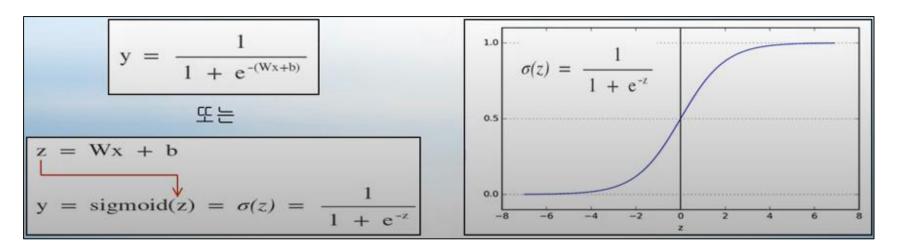






❖ 시그모이드 함수를 이용한 분류

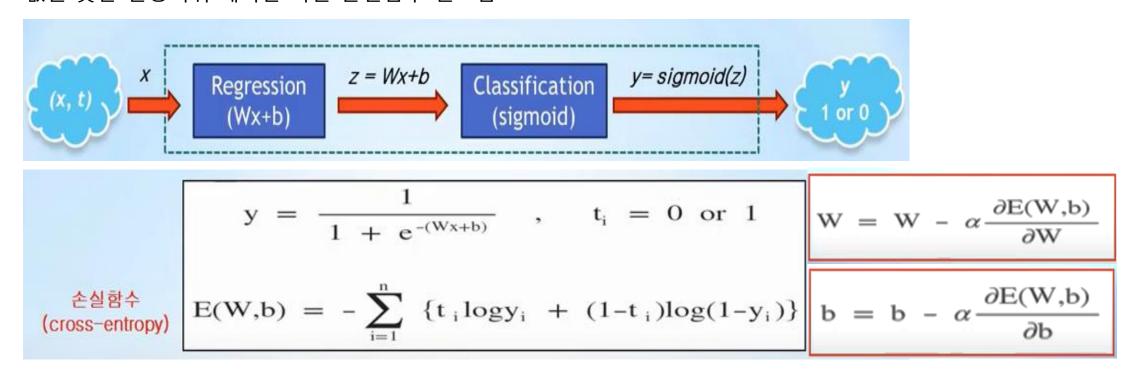
- 시그모이드 함수는 입력값이 한없이 커지면 1에 수렴하고,
- 입력값이 한없이 작아지면 0에 수렴
- **시그모이드 함수의 출력값은 0과 1 사이의 값을 가지는데** 이 특성을 이용하여 분류 작업에 사용
- 예를 들어 임계 값을 0.5라고 정하여 출력값이 0.5 이상이면 1(True), 0.5이하면 0(False)으로 판단
- 이를 확률이라고 생각하면 해당 레이블에 속할 확률이 50%가 넘으면 해당 레이블로 판단하고, 해당 레이블에 속할 확률이 50%보다 낮으면 아니라고 판단



2. 손실함수

❖ 로지스틱 회귀의 손실 함수(Cost Function), W,B

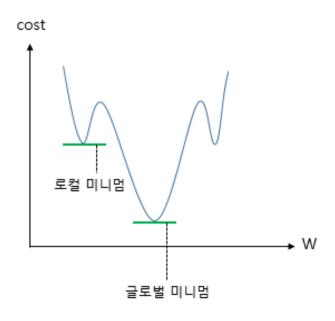
■ 분류 시스템(classification) 최종 출력 값 y는 sigmoid 함수에 의해 논리적으로 1 또는 0 값을 가지기 때문에, 연속 값을 갖는 선형회귀 때와는 다른 손실함수 필요함



2.비용 함수(Cost function)

❖ 로지스틱 회귀의 손실 함수

- 선형회귀의 손실 함수 평균 제곱 오차(MSE) : $cost(W,b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[y^{(i)} H(x^{(i)}) \right]^2$
- 로지스틱 회귀의 가설 : H(x) = sigmoid(Wx + b)
- 로지스틱 회귀의 비용함수에 MSE 사용 아래 그래프와 같은 결과가 나타남

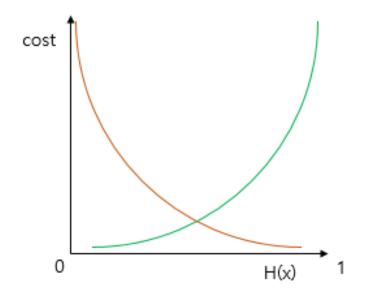


- 경사 하강법(Gradient Descent)을 사용할 경우의 로컬 미니멈(Local Minimum)에
 도달 문제가 발생
- 즉, 경사 하강법이 오차가 최소값이 되는 구간에 도착했다고 판단한 그 구간이 **글로벌 미니멈(Global Minimum)** 구간이 아닐 수 있음
- 실제 최소가 되는 구간을 잘못 판단하면 최적의 가중치 w가 아닌 값을 택해 모델의 성능이 더 오르지 않을 수 있음.

2.비용 함수(Cost function)

❖ 로지스틱 회귀의 손실 함수

- 시그모이드 함수의 특징은 함수의 출력값이 0과 1사이의 값이라는 점
- 즉, 실제 값이 1일 때 예측 값이 0에 가까워지면 오차가 커져야 하며,
- 실제 값이 0일 때, 예측 값이 1에 가까워지면 오차가 커져야 함.
- 이를 충족하는 로그 함수 사용.
 - y=0.5에 대칭하는 두 개의 로그 함수 그래프



- 실제 값이 1일 때의 그래프를 주황색 선으로 표현
- 실제 값이 0일 때의 그래프를 초록색 선으로 표현
- 실제 값= 1일 경우: 예측 값인 H(x)의 값이 1이면 오차가 0이므로 cost는 0, H(x)가 0으로 수렴하면 cost는 무한대로 발산함.
- 실제값= 0인 경우: 예측 값인 H(x)의 값이 0이면 오차가 0이므로 cost는 0,
 H(x)가 1으로 수렴하면 cost는 무한대로 발산함.

2.비용 함수(Cost function)

❖ 로지스틱 회귀의 손실 함수

• 오차 값에 대한 로그 식 $\text{if } y=1 \to \cot{(H(x),y)} = -\log(H(x))$ $\text{if } y=0 \to \cot{(H(x),y)} = -\log(1-H(x))$

- 위의 두식을 결합 : $\cot{(H(x),y)} = -[ylogH(x) + (1-y)log(1-H(x))]$
- 모든 오차의 평균식 : $cost(W) = -rac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y^{(i)} log H(x^{(i)}) + (1-y^{(i)}) log (1-H(x^{(i)}))]$
- 최적의 가중치 W 업데이트 식 : $W := W lpha rac{\partial}{\partial W} cost(W)$

3. 로지스틱 회귀 구현-1

```
import torch
import torch.nn as nn
import torch.nn.functional as F
import torch.optim as optim
torch.manual seed(1)
x_data = [[1, 2], [2, 3], [3, 1], [4, 3], [5, 3], [6, 2]]
y_data = [[0], [0], [0], [1], [1], [1]]
x train = torch.FloatTensor(x data)
y train = torch.FloatTensor(y data)
print(x train.shape)
print(y train.shape)
W = torch.zeros((2, 1), requires_grad=True) # 크기는 2 x 1
b = torch.zeros(1, requires grad=True)
```

```
# optimizer 설정
optimizer = optim.SGD([W, b], lr=1)
nb = pochs = 1000
costs=[]
for epoch in range(nb epochs + 1):
  # Cost 계산
  hypothesis = torch.sigmoid(x train.matmul(W) + b)
  cost = -(y train * torch.log(hypothesis) +
      (1 - y train) * torch.log(1 - hypothesis)).mean()
  # cost로 H(x) 개선
  optimizer.zero grad()
  cost.backward()
  optimizer.step()
  # 100번마다 로그 출력
  costs.append(cost.item())
  if epoch % 100 == 0:
    print('Epoch {:4d}/{} Cost: {:.6f}'.format(
      epoch, nb epochs, cost.item()
```

3. 로지스틱 회귀 구현-2. nn.Modual 사용

```
import torch
import torch.nn as nn
import torch.nn.functional as F
import torch.optim as optim
torch.manual seed(1)
x data = [[1, 2], [2, 3], [3, 1], [4, 3], [5, 3], [6, 2]]
y data = [[0], [0], [0], [1], [1], [1]]
x train = torch.FloatTensor(x data)
y train = torch.FloatTensor(y data)
model = nn.Sequential(
 nn.Linear(2, 1), # input dim = 2, output dim = 1
 nn.Sigmoid() # 출력은 시그모이드 함수를 거침
model(x train)
# optimizer 설정
optimizer = optim.SGD(model.parameters(), lr=1)
nb = pochs = 1000
```

```
for epoch in range(nb epochs + 1):
 # H(x) 계산
  hypothesis = model(x train)
 # cost 계산
 cost = F.binary cross entropy(hypothesis, y train)
 # cost로 H(x) 개선
 optimizer.zero grad()
 cost.backward()
  optimizer.step()
 # 20번마다 로그 출력
 if epoch % 10 == 0:
    prediction = hypothesis >= torch.FloatTensor([0.5]) # 예측값이 0.5를 넘으면 True로 간주
   correct prediction = prediction.float() == y train # 실제값과 일치하는 경우만 True로 간주
   accuracy = correct prediction.sum().item() / len(correct prediction) # 정확도를 계산
    print('Epoch {:4d}/{} Cost: {:.6f} Accuracy {:2.2f}%'.format(# 각 에포크마다 정확도를 출력
     epoch, nb epochs, cost.item(), accuracy * 100,
```

3. 로지스틱 회귀 구현-3. 클래로 파이토치 모델 구현

```
import torch
import torch.nn as nn
import torch.nn.functional as F
import torch.optim as optim
torch.manual seed(1)
x_data = [[1, 2], [2, 3], [3, 1], [4, 3], [5, 3], [6, 2]]
y data = [[0], [0], [0], [1], [1], [1]]
x train = torch.FloatTensor(x data)
y train = torch.FloatTensor(y data)
class BinaryClassifier(nn.Module):
  def init (self):
    super(). init ()
    self.linear = nn.Linear(2, 1)
    self.sigmoid = nn.Sigmoid()
  def forward(self, x):
    return self.sigmoid(self.linear(x))
model = BinaryClassifier()
```

```
# optimizer 설정
optimizer = optim.SGD(model.parameters(), lr=1)
nb = pochs = 1000
for epoch in range(nb epochs + 1):
 # H(x) 계산
 hypothesis = model(x train)
 # cost 계산
  cost = F.binary cross entropy(hypothesis, y train)
 # cost로 H(x) 개선
  optimizer.zero grad()
  cost.backward()
  optimizer.step()
 # 20번마다 로그 출력
 if epoch \% 10 == 0:
    prediction = hypothesis >= torch.FloatTensor([0.5]) # 예측값이 0.5를 넘으면 True로 간주
    correct prediction = prediction.float() == y train # 실제값과 일치하는 경우만 True로 간주
    accuracy = correct_prediction.sum().item() / len(correct_prediction) # 정확도를 계산
    print('Epoch {:4d}/{} Cost: {:.6f} Accuracy {:2.2f}%'.format(# 각 에포크마다 정확도를 출력
     epoch, nb epochs, cost.item(), accuracy * 100,
```

❖ 소프트맥스 회귀(Softmax Regression)

• 3개 이상의 선택지로부터 1개를 선택하는 문제인 다중 클래스 분류(Multi-Class classification)를 풀기 위한 방법

❖ 원-핫 인코딩(One-hot encoding)

- 범주형 데이터를 처리할 때 레이블을 표현하는 방법
- 선택해야 하는 선택지의 개수만큼의 차원을 가지면서, 각 선택지의 인덱스에 해당하는 원소에는 1, 나머지 원소는 0
 의 값을 가지도록 하는 표현 방법
- 예 : 강아지는 0번 인덱스, 고양이는 1번 인덱스, 냉장고는 2번 인덱스를 부여

원-핫 인코딩으로 표현된 벡터를 원-핫 벡터(one-hot vector)

❖ 원-핫 벡터의 무작위성

- 다중 클래스 분류 문제가 각 클래스 간의 관계가 균등하다는 점에서 원-핫 벡터는 이러한 점을 적절한 표현
- Banana(1), Tomato(2), Apple(3)라는 3개의 클래스가 존재하는 문제에 숫자 레이블을 사용할 경우

$$Loss\ function = rac{1}{n} \sum_{i}^{n} ig(y_i - \hat{y_i}ig)^2$$

원-핫 벡터 사용인 경우

$$((1,0,0)-(0,1,0))^2=(1-0)^2+(0-1)^2+(0-0)^2=2$$
 $((1,0,0)-(0,0,1))^2=(1-0)^2+(0-0)^2+(0-1)^2=2$



원-핫 벡터는 각 클래스 차이 균등함 => 원-핫 벡터의 무작위성

❖ 다중 클래스 분류(Multi-class Classification)

- 로지스틱 회귀 : 2개의 선택지 중에서 1개를 고르는 이진 분류(Binary Classification)에 사용
- 소프트맥스 회귀: 3개 이상의 선택지 중에서 1개를 고르는 다중 클래스 분류(Multi-Class Classification)에 사용
- 예: 꽃받침 길이, 꽃받침 넓이, 꽃잎 길이, 꽃잎 넓이라는 4개의 특성(feature)로부터 setosa, versicolor, virginica라는 3개의 붓꽃 품종 중 어떤 품종인지를 예측하는 문제로 전형적인 다중 클래스 분류 문제

${\sf SepalLengthCm}(x_1)$	SepalWidthCm(x_2)	PetalLengthCm(x_3)	${\sf PetalWidthCm}(x_4)$	Species(y)
5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
5.8	2.6	4.0	1.2	versicolor
6.7	3.0	5.2	2.3	virginica
5.6	2.8	4.9	2.0	virginica

- ❖ 다중 클래스 분류(Multi-class Classification)
 - 로지스틱 회귀

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \rightarrow WX + B \rightarrow \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.5 \end{bmatrix} \rightarrow 0.5$$
NO \rightarrow Class 2

가설 : H(X) = sigmoid(WX + B)

■ 소프트맥스 회귀

가설 : H(X) = softmax(WX + B)

❖ 소프트맥스 함수(Softmax function)

- 소프트맥스 함수의 이해
 - k차원의 벡터에서 i번째 원소를 P_i , i번째 클래스가 정답일 확률을 P_i 로 일 때 소프트맥스 함수는 P_i 를 다음과 같이 정의

$$p_i = rac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^k e^{z_j}} \; \; for \, i=1,2,\dots k$$

• k=3이므로 3차원 벡터 $z=[z_{1,}z_{2,},z_{3,}]$ 의 입력을 받으면 소프트맥스 함수는 아래와 같은 출력을 리턴

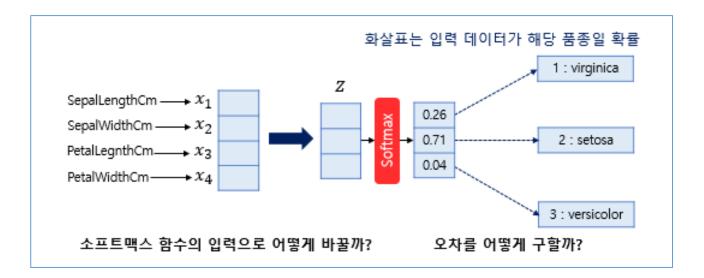
$$softmax(z) = [rac{e^{z_1}}{\sum_{j=1}^3 e^{z_j}} \, rac{e^{z_2}}{\sum_{j=1}^3 e^{z_j}} \, rac{e^{z_3}}{\sum_{j=1}^3 e^{z_j}}] = [p_1, p_2, p_3] = \hat{y} =$$
예측값

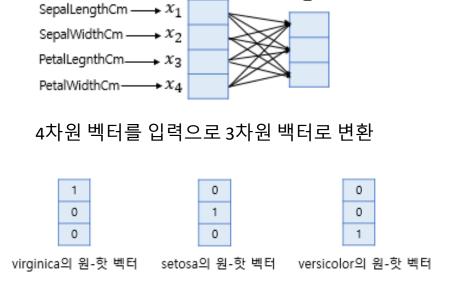
• p_1 , p_2 , p_3 각각은 1번 클래스가 정답일 확률, 2번 클래스가 정답일 확률, 3번 클래스가 정답일 확률을 나타내며, 각각 0과 1사이의 값으로 총 합은 1이 됨

$$softmax(z) = [rac{e^{z_1}}{\sum_{j=1}^3 e^{z_j}} \; rac{e^{z_2}}{\sum_{j=1}^3 e^{z_j}} \; rac{e^{z_3}}{\sum_{j=1}^3 e^{z_j}}] = [p_1, p_2, p_3] = [p_{virginica}, p_{setosa}, p_{versicolor}]$$

❖ 소프트맥스 함수(Softmax function)

■ 그림을 통한 이해

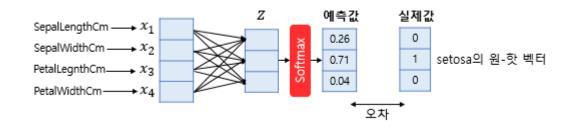


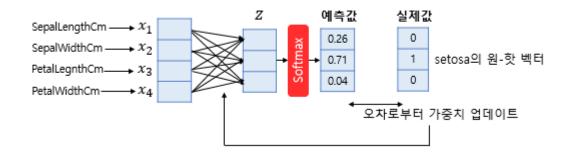


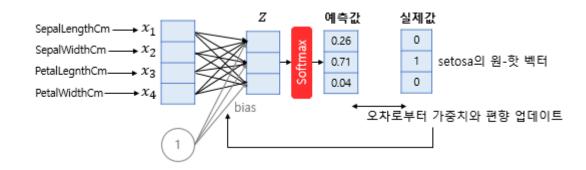
실제값의 정수 인코딩은 1, 2, 3을 원-핫 인코딩 수행결과

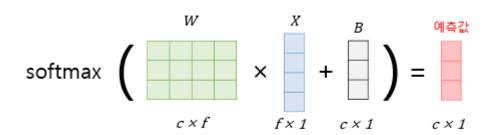
❖ 소프트맥스 함수(Softmax function)

■ 그림을 통한 이해









여기서 f는 특성의 수이며 c는 클래스의 개수에 해당됩니다.

[소프트맥스 회귀에서 예측값을 구하는 과정을 벡터와 행렬 연산으로 표현]

❖ 붓꽃 품종 분류하기 행렬 연산으로 이해하기

■ 전체 샘플의 개수가 5개, 특성이 4개, 선택지(정답) 3개

$$\hat{Y} = softmax(XW + B)$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \ y_{12} \ y_{23} \\ y_{21} \ y_{22} \ y_{23} \\ y_{31} \ y_{32} \ y_{33} \\ y_{41} \ y_{42} \ y_{43} \\ y_{51} \ y_{52} \ y_{53} \end{pmatrix} = softmax \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \\ x_{21} \ x_{22} \ x_{23} \ x_{24} \\ x_{31} \ x_{32} \ x_{33} \ x_{34} \\ x_{41} \ x_{42} \ x_{43} \ x_{44} \\ x_{51} \ x_{52} \ x_{53} \ x_{54} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} \ w_{12} \ w_{13} \\ w_{21} \ w_{22} \ w_{23} \\ w_{31} \ w_{32} \ w_{33} \\ w_{41} \ w_{42} \ w_{43} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \ b_2 \ b_3 \\ b_1 \ b_2 \ b_3 \end{pmatrix}$$

❖ 비용함수(Cost function)

■ 크로스 엔트로피 함수

$$cost(W) = -\sum_{i=1}^k y_j \ log(p_j)$$

$$cost(W) = -rac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} y_{j}^{(i)} \ log(p_{j}^{(i)})$$

n개 전체 데이터에 대한 평균을 구한 최종 비용함수

이진 분류에서의 크로스 엔트로피 함수

$$cost(W) = -(y \ log H(X) + (1-y) \ log (1-H(X)))$$

$$cost(W) = -rac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_{j}^{(i)}\ log(p_{j}^{(i)}) = -rac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y^{(i)}log(p^{(i)}) + (1-y^{(i)})log(1-p^{(i)})]$$

❖ 비용함수 구현-로우-레벨

```
import torch
import torch.nn.functional as F
torch.manual_seed(1)
z = torch.FloatTensor([1, 2, 3])
hypothesis = F.softmax(z, dim=0)
print(hypothesis)
hypothesis.sum()
z = torch.rand(3, 5, requires_grad=True)
hypothesis = F.softmax(z, dim=1)
print(hypothesis)
y = torch.randint(5, (3,)).long()
print(y)
```

```
# 모든 원소가 0의 값을 가진 3 × 5 텐서 생성
y_one_hot = torch.zeros_like(hypothesis)
y_one_hot.scatter_(1, y.unsqueeze(1), 1)

print(y.unsqueeze(1))

print(y_one_hot)

cost = (y_one_hot * -torch.log(hypothesis)).sum(dim=1).mean()
print(cost)
```

❖ 비용함수 구현-(하이_레벨)

```
# Low level
torch.log(F.softmax(z, dim=1))

# High level
F.log_softmax(z, dim=1)

# Low level
# 첫 번째 수식
(y_one_hot * -torch.log(F.softmax(z, dim=1))).sum(dim=1).mean()

# 두 번째 수식
(y_one_hot * - F.log_softmax(z, dim=1)).sum(dim=1).mean()
```

```
# High level
# 세번째 수식
F.nll_loss(F.log_softmax(z, dim=1), y)
# 네번째 수식
F.cross_entropy(z, y)
```

소프트맥스 회귀 구현하기 MNIST 데이터 분류하기 실습