Systems of Linear Equations with Matrix 行列で連立方程式

ryamada

2016年12月24日

Contents

http://d.hatena.ne.jp/ryamada22/20161224/1482546005

変数の数と等式の数 Number of variables and number of equations

変数の数と等式の数が等しいとき(一次独立なら)解が求まる。

それは、線形回帰において、Xが正方行列である、ということと、 Xに逆行列が存在するということに対応し、 解が求まるとは、$\sum_{i=1}^n(y_i-\hat{y}_i)2=0$になるということ。

$$y = X\mathbf{a}\mathbf{a} = X^{-1}y$$

```
d <- 10
n <- 10
X <- matrix(rnorm(d*n),ncol=d)
a <- rnorm(d)
a
```

```
##  [1]  1.5157127  1.3950139  0.4631479 -0.8041648 -0.9644102  1.3795473
##  [7] -1.1981736  0.9128359  0.9969033  1.0886620
```

```
y <- X %*% a
a.est <- solve(X) %*% y
a.est
```

```
##             [,1]
##  [1,]  1.5157127
##  [2,]  1.3950139
##  [3,]  0.4631479
##  [4,] -0.8041648
##  [5,] -0.9644102
##  [6,]  1.3795473
##  [7,] -1.1981736
##  [8,]  0.9128359
##  [9,]  0.9969033
## [10,]  1.0886620
```

線形回帰では以下の計算をした。

$$a = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

やってみる。

```
a.est2 <- solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%y
a.est
```

```
##             [,1]
##  [1,]  1.5157127
##  [2,]  1.3950139
##  [3,]  0.4631479
##  [4,] -0.8041648
##  [5,] -0.9644102
##  [6,]  1.3795473
##  [7,] -1.1981736
##  [8,]  0.9128359
##  [9,]  0.9969033
## [10,]  1.0886620
```

```
a
```

```
##  [1]  1.5157127  1.3950139  0.4631479 -0.8041648 -0.9644102  1.3795473
##  [7] -1.1981736  0.9128359  0.9969033  1.0886620
```

確かに結果は同じ。

残差も0になっている。

```
y.hat <- X %*% a.est
y-y.hat
```

```
##                [,1]
##  [1,] -2.220446e-15
##  [2,] -2.797762e-14
##  [3,] -1.731948e-14
##  [4,] -7.105427e-15
##  [5,] -5.773160e-15
##  [6,]  1.154632e-14
##  [7,] -3.552714e-14
##  [8,]  6.661338e-16
##  [9,]  9.325873e-15
## [10,]  4.440892e-16
```

```
sum((y-y.hat)^2)
```

```
## [1] 2.654566e-27
```

つまり、

$$X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T$$

なわけである。

計算してみる。

```
X1 <- solve(X)
X2 <- solve(t(X)%*%X) %*% t(X)
round(X1,8)
```

```
##              [,1]      [,2]       [,3]        [,4]      [,5]       [,6]
##  [1,]  1.25711388 1.4729389 -2.4854191 -1.04960150 1.3052830 -3.1421680
##  [2,]  0.35731653 0.7588672 -0.5721932 -0.17228352 0.5114511 -0.8523965
```

```
##  [3,]  1.32816817  1.3815917 -2.3204170 -1.13011672  1.8228259 -3.1980897
##  [4,] -0.45554154  0.1961231 -0.3973905  0.09512529  0.1705937 -0.1300707
##  [5,]  3.31358542  3.8738190 -6.3128030 -3.39840673  4.4398523 -8.5617538
##  [6,]  0.06345804  0.1999803  0.2226936  0.02814396 -0.4002470  0.2412618
##  [7,] -0.82263357 -0.9514714  1.3036924  0.63404841 -0.8200132  1.8948091
##  [8,] -3.43392215 -3.7479465  6.3240955  2.84267443 -4.3530971  8.7667857
##  [9,]  1.04734055  1.3765290 -1.9655539 -0.75403521  1.4680779 -3.1470260
## [10,] -1.00593962 -1.3413538  2.7263134  1.34744196 -2.1667697  3.2071989
##              [,7]       [,8]       [,9]      [,10]
##  [1,] -1.09205354  2.4805370 -0.7326338  2.2130149
##  [2,] -0.49377134  0.8687522 -0.2721432  1.0219062
##  [3,] -0.87088571  2.7840346 -0.5137707  2.4797574
##  [4,] -0.20142238  0.3991801 -0.1863527  0.2249062
##  [5,] -2.80746486  7.0202341 -1.6737354  6.7140595
##  [6,] -0.05951634 -0.5308354  0.2919568 -0.5828283
##  [7,]  0.85190927 -1.8604093  0.2522106 -1.6551444
##  [8,]  3.21086856 -7.4089125  1.5970043 -8.1305691
##  [9,] -1.31699578  2.7294605 -0.5969808  3.1024172
## [10,]  1.10174896 -2.9454240  0.9232069 -2.0704163
```

```r
round(X2,8)
```

```
##              [,1]       [,2]       [,3]        [,4]       [,5]       [,6]
##  [1,]  1.25711388  1.4729389 -2.4854191 -1.04960150  1.3052830 -3.1421680
##  [2,]  0.35731653  0.7588672 -0.5721932 -0.17228352  0.5114511 -0.8523965
##  [3,]  1.32816817  1.3815917 -2.3204170 -1.13011672  1.8228259 -3.1980897
##  [4,] -0.45554154  0.1961231 -0.3973905  0.09512529  0.1705937 -0.1300707
##  [5,]  3.31358542  3.8738190 -6.3128030 -3.39840673  4.4398523 -8.5617538
##  [6,]  0.06345804  0.1999803  0.2226936  0.02814396 -0.4002470  0.2412618
##  [7,] -0.82263357 -0.9514714  1.3036924  0.63404841 -0.8200132  1.8948091
##  [8,] -3.43392215 -3.7479465  6.3240955  2.84267443 -4.3530971  8.7667857
##  [9,]  1.04734055  1.3765290 -1.9655539 -0.75403521  1.4680779 -3.1470260
## [10,] -1.00593962 -1.3413538  2.7263134  1.34744196 -2.1667697  3.2071989
##              [,7]       [,8]       [,9]      [,10]
##  [1,] -1.09205354  2.4805370 -0.7326338  2.2130149
##  [2,] -0.49377134  0.8687522 -0.2721432  1.0219062
##  [3,] -0.87088571  2.7840346 -0.5137707  2.4797574
##  [4,] -0.20142238  0.3991801 -0.1863527  0.2249062
##  [5,] -2.80746486  7.0202341 -1.6737354  6.7140595
##  [6,] -0.05951634 -0.5308354  0.2919568 -0.5828283
##  [7,]  0.85190927 -1.8604093  0.2522106 -1.6551444
##  [8,]  3.21086856 -7.4089125  1.5970043 -8.1305691
##  [9,] -1.31699578  2.7294605 -0.5969808  3.1024172
## [10,]  1.10174896 -2.9454240  0.9232069 -2.0704163
```

```r
round(X1-X2,8)
```

```
##       [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
##  [1,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [2,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [3,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [4,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [5,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [6,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
##  [7,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
```

```
## [8,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
## [9,]    0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
## [10,]   0    0    0    0    0    0    0    0    0     0
```

確かにそうなっている。

もう一度式を見てみる。

$$X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T$$

両辺に右から$(X^T)^{-1}$を掛けて

$$X^{-1}(X^T)^{-1} = (X^T X)^{-1}$$

となる。

これは逆行列の一般的な性質

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

について、$A = X^T$,$B = X$と置いたものである。

ちなみに、ABの逆行列$(AB)^{-1}$が$B^{-1}A^{-1}$であることは

$$ABB^{-1}A^{-1}$$

を二通りでかっこで区切ることで解る。

$$ABB^{-1}A^{-1} = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

右辺は、

$$A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

これから中辺が

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

となるから、この式の意味することは ABの逆行列が$B^{-1}A^{-1}$であることである。

Exercise 1

Excercise 1-1

連立方程式

$$3a_1 + 2a_2 - 4a_3 = 42a_1 - 6a_2 + 3a_3 = -15a_1 + a_2 + 4a_3 = 3$$

は

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 2, -4 \\ 2, -6, 3 \\ 5, 1, 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3, 2, -4 \\ 2, -6, 3 \\ 5, 1, 4 \end{pmatrix}$$

と置けば

$$y = X\mathbf{a}$$

となり、線形回帰の形である。

これを利用して、上の連立方程式を解け。

Exercise 1-2

変数の数と等式の数が等しい連立方程式を作って、連立方程式として書き、それを行列を使って解け。