

Numerische Bewertung von Finanzderivaten

Prof. Dr. J. Wolf

Hochschule Koblenz, Fachbereich Mathematik und Technik

Sommersemester 21



- ① Itô-Kalkül
- ② Derivate
- ③ Bewertung durch Simulation
- ④ Finite-Differenzen-Methoden
- ⑤ Amerikanische Optionen
- ⑥ Ausgewählte Finanzinstrumente im Risikomanagement

- Bingham, N., Kiesel, R., Risk-Neutral Valuation, 2004
- Fries, C., Mathematical Finance, Theory, Modeling, Implementation, 2007
- Gilli, M., Maringer, D., Schumann, E., Numerical Methods and Optimization in Finance, 2011
- Günther, M., Jüngel, A., Finanzderivate mit MATLAB, 2010
- Hilber, N., Reichman, O., Schwab, C., Winter, C., Computational Methods for Quantitative Finance, 2013
- Hull, J., Options, Futures and Other Derivatives, 2000
- Kloeden, P., Platen, E. Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations, 1999
- Seydel, R., Tools for Computational Finance, 2009
- Willmott, P., Howison, S., Dewynne, J., The Mathematics of Financial Derivatives, 1996

Brownsche Bewegung als Unsicherheitsquelle (1)

- Wir verwenden den Itô-Kalkül mit dem Ziel, die Dynamik der Preise von Finanzinstrumenten zu beschreiben.
- Die Unsicherheit wird durch eine Brownsche Bewegung modelliert.
 - ▶ Die **eindimensionale Brownsche Bewegung** ist ein stochastischer Prozess (W_t) , $t \geq 0$ mit den folgenden Eigenschaften.
 - $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für $0 \leq s \leq t$
 - Die Zuwächse über disjunkte Zeitintervalle sind unabhängig.
 - Die Pfade $t \mapsto W_t(\omega)$ sind f.s. stetig.
 - ▶ Ist W_t , $t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung, so ist der Vektor $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ für alle paarweise verschiedenen $t_i \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mehrdimensional normalverteilt.
 - ▶ Die **d-dimensionale Brownsche Bewegung** ist ein stochastischer Prozess (W_t^1, \dots, W_t^d) mit Werten in \mathbb{R}^d , deren Komponenten unabhängig sind. Die Komponenten modellieren die Unsicherheit aus mehreren Risikotreibern.

Brownsche Bewegung als Unsicherheitsquelle (2)

- **Zeitdiskretisierung**

$$\begin{aligned}W_{t+\Delta t} &= W_t + (W_{t+\Delta t} - W_t) = W_t + \sqrt{\Delta t} \cdot \frac{W_{t+\Delta t} - W_t}{\sqrt{\Delta t}} \\&=: W_t + \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

mit $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$

- **Praktikernotation**

- ▶ $dW = \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$
- ▶ $E(dW) = 0$
- ▶ $\text{Var}(dW) = dt$
- ▶ $E(dW^2) = dt$

- Hintergrund: Die Pfade der Brownschen Bewegung haben f.s. unendliche totale Variation. Für die **quadratische Variation** gilt

$$[W]_t := \lim_{|\Delta P| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in P} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = t \quad \text{in } L^2,$$

wobei P eine Zerlegung von $[0, t]$ und $|\Delta P|$ ihr Feinheitsgrad sind.

geometrische Brownsche Bewegung

Sei S_t , $t \geq 0$, der Preisprozess einer Aktie.

- Diskretisierungsansatz in der Praktikernotation
 - ▶ $S_{t+1} = S_t + \mu \cdot S_t + \delta_t \cdot S_t$ mit einer Konstanten μ und $\delta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
 - ▶ $\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu \cdot \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$ mit $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$
 - ▶ Die Drift $\mu \Delta t$ beschreibt den erwarteten Trend, die Diffusion $\sigma \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon$ die Schwankungen um den Trend.
- Die Lösung der zugehörigen stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t$$

heißt **geometrische Brownsche Bewegung** und ist nicht negativ.

- Im deterministischen Fall, d.h. für $\sigma = 0$ hat die DGL $dS_t = S_t \mu dt$ die Lösung $S_t = S_0 \cdot \exp(\mu t)$.
- Im allgemeinen Fall benötigen wir die Itô-Formel.

Itô-Formel (1)

Zunächst plausibilisieren wir die Itô-Formel mit einer Taylorentwicklung in der Gedankenwelt der Praktikernotation.

Sei $dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$.

Wir betrachten $F(t, X_t)$ mit einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion F .

$$\begin{aligned}
 dF(t, X_t) &= F(t + \Delta t, X_{t+\Delta t}) - F(t, X_t) \\
 &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) dX_t^2 + \text{höhere Terme} \\
 &\approx \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) (a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) b(t, X_t)^2 dW_t^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) a(t, X_t)^2 dt^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) a(t, X_t) b(t, X_t) dt dW_t \\
 &\approx \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) a(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) b(t, X_t)^2 \right) dt \\
 &\quad + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) b(t, X_t) dW_t
 \end{aligned}$$

Itô-Formel (2)

Satz

Der Prozess X_t , $t \geq 0$, erfülle die SDGL

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(X_t, t) dW_t.$$

Sei $F \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} dF(t, X_t) &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) a(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) b(t, X_t)^2 \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) b(t, X_t) dW_t. \end{aligned}$$

Itô-Formel (3)

Integralschreibweise:

$$\begin{aligned}
 F(t, X_t) &= F(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) b(s, X_s)^2 \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\
 &= F(0, X_0) \\
 &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) a(s, X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) b(s, X_s)^2 \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) b(s, X_s) dW_s.
 \end{aligned}$$

Mit der quadratischen Variation $[X]_t = \int_0^t b(s, X_s)^2 ds$ ergibt sich die folgende kompakte Schreibweise, die allgemeiner für stetige Semimartingale gilt.

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d[X]_s$$

(1)

Itô-Formel (4)

Verallgemeinerung. Sei $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in der ersten Variablen und zweimal stetig differenzierbar in den übrigen Variablen. Ferner seien

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s, X_s^{(i)}) ds + \int_0^t b_i(s, X_s^{(i)}) dW_s^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & F(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) \\ &= F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(n)}) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(n)}) dX_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(n)}) \cdot b_i(s, X_s^{(i)}) \cdot b_j(s, X_s^{(j)}) d[W^{(i)}, W^{(j)}]_s. \end{aligned}$$

klassische Black-Scholes stochastische DGL

S_t , $t \geq 0$, erfülle die Black-Scholes DGL

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t.$$

Mit der Itô-Formel berechnen wir

$$\begin{aligned} d \ln(S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (S_t^2 \sigma^2) dt \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$S_t = \exp(\ln(S_t)) = \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right). \quad (2)$$

Plausibilisierung der Black-Scholes partiellen DGL (1)

- Sei V_t der Preis einer Option. Wir nehmen an, dass V_t eine Funktion des Preises S_t der zugrunde liegenden Aktie ist und S_t , $t \geq 0$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung beschrieben wird.
- Wir betrachten das Portfolio $\pi_t := V_t - \Delta \cdot S_t$ mit einer unbekannten Anzahl Δ von Aktien, die wir kontinuierlich aktualisieren.
- Mit der Itô-Formel erhalten wir die Dynamik

$$\begin{aligned}
 d\pi_t &= dV_t - \Delta dS_t \\
 &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 dt - \Delta \sigma S_t dW_t - \Delta \mu S_t dt \\
 &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu \Delta S_t \right) dt \\
 &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S_t dW_t
 \end{aligned}$$

Plausibilisierung der Black-Scholes partiellen DGL (2)

- Für die Wahl $\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}$ verschwindet der zufällige Term („Delta-Hedging“), und wir erhalten die deterministische partielle DGL

$$d\pi_t = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt$$

- Unter dem risikoneutralen Maß hat jedes Portfolio die risikofreie Rendite. Daher gilt $d\pi_t = r\pi_t dt$.
- Insgesamt folgern wir

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = r\pi_t = r(V - \Delta S_t) = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S_t \right).$$

Black-Scholes partielle DGL

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0} \quad (3)$$

klassisches Black-Scholes Modell (1)

- Das klassische Black-Scholes Modell modelliert ein ausfallfreies Bankkonto B und eine Aktie S .

- ▶ $B_t = \exp(rt),$

- ▶ $S_t = S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right),$

wobei $r, \mu, \sigma > 0$ Konstanten sind. r bezeichnet den risikofreien Zins. μ wird Driftkoeffizient, σ Diffusionskoeffizient genannt.

- Der diskontierte Preisprozess

$$\hat{S}_t := \frac{S_t}{B_t} = S_0 \exp\left((\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right)$$

löst die stochastische DGL

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t ((\mu - r) dt + \sigma dW_t).$$

klassisches Black-Scholes Modell (2)

- Wir wenden die Itô- Formel mit der Funktion $f(t, x) = S_0 \exp\left(-(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\right)$ an.

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_t &= \hat{S}_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, W_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s) d[W]_s \\
 &= \hat{S}_0 + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) \int_0^t \hat{S}_s ds + \sigma \int_0^t \hat{S}_s dW_s + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^t \hat{S}_s ds \\
 &= \hat{S}_0 + (\mu - r) \int_0^t \hat{S}_s ds + \sigma \int_0^t \hat{S}_s dW_s
 \end{aligned}$$

- Mit dem Satz von Girsanov wird in der stetigen Finanzmathematik ein Maßwechsel auf das risikoneutrale Maß Q durchgeführt, so dass der diskontierte Preisprozess unter Q ein Martingal wird, also insbesondere einen konstanten Erwartungswert hat. Die Radon-Nikodym Dichte des Maßwechsels lautet $\frac{dQ}{dP} = \exp(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t)$ mit $\gamma := \frac{\mu-r}{\sigma}$. Unter Q ist $W_t^Q := W_t + \frac{\mu-r}{\sigma} t$ eine Brownsche Bewegung.

klassisches Black-Scholes Modell (3)

- Unter Q gilt:

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t \sigma dW_t^Q$$

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma dW_t)$$

$$S_t = \hat{S}_t B_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^Q\right)$$

- Diskontierte Preisprozesse sind Martingale unter Q . Daher ist der Preis eines Derivats der Form $X = f(S_T)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} V_0 &= B_0 \cdot \mathbb{E}_Q \left(\frac{f(S_T)}{B_T} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f \left(S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma x \right) \right) \exp(-rT) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left(-\frac{x^2}{2T} \right) dx. \end{aligned}$$

klassisches Black-Scholes Modell (4)

- Für gegebene Auszahlungsfunktion f des Derivates lässt sich das Integral analytisch oder numerisch berechnen.
- Spezialfall: Black Scholes Formeln
 - ▶ Call-Option: $f(x) = (x - K)^+$

$$V_t = S_t \cdot \Phi(d_1) - K \exp(-r(T - t)) \cdot \Phi(d_2)$$

- ▶ Put-Option: $f(x) = (K - x)^+$

$$V_t = K \cdot \exp(-r(T - t)) \cdot \Phi(-d_2) - S_t \cdot \Phi(-d_1)$$

mit

- ▶ $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$
- ▶ $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$

Partielle DGL im Black-Scholes Modell (1)

- **Ziel:** Derivatebewertung mittels PDE mit Endwertbedingung
- $\hat{V}_t = \hat{v}(t, S_t) = \frac{v(t, S_t)}{B_t} = v(t, S_t) \cdot \exp(-rt)$ sei der diskontierte Preisprozess des Derivats.
- Wir betrachten die Dynamik unter dem risikoneutralen Maß.

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW_t^Q$$

- Anwendung der Itô-Formel liefert

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(t, S_t) d[S]_t \\ &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, S_t) S_t r dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(t, S_t) S_t^2 \sigma^2 dt \\ &\quad + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, S_t) \sigma dW_t^Q. \end{aligned}$$

Partielle DGL im Black-Scholes Modell (2)

- Da unter dem risikoneutralen Maß alle diskontierten Preisprozesse Martingale sind, muss die Drift verschwinden. Dies bedeutet, dass die folgende PDE erfüllt sein muss.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{v}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \hat{v}(t, x) r x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{v}(t, x) \sigma^2 x^2 = 0$$

Diese PDE ist äquivalent zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{v}(t, x) = -r x \frac{\partial}{\partial x} \hat{v}(t, x) - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{v}(t, x).$$

- Mit $\hat{v}(t, x) \cdot \exp(rt) = v(t, x)$ folgt die **Black Scholes PDE**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) = r v(t, x) - r x \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, x)} \quad (4)$$

- Der Wert des Derivats ergibt sich als Lösung unter der Endwertbedingung $v(T, x) = f(x)$.

Modellgleichungen (1)

- Die Annahme einer konstanten Volatilität σ im Black-Scholes-Modell hat sich in der Praxis als problematisch herausgestellt, da viele Marktpreise von den Modellpreisen abweichen und auch die Volatilität im Zeitablauf nicht konstant ist. Außerdem fließt in die impliziten Volatilitäten die Markteinschätzung des Risikos ein, die Zufallseinflüssen unterliegt.

- Heston-Modell** unter dem risikoneutralen Maß Q

- ▶ $dB(t) = B(t)r dt$
 - ▶ $d\hat{S}_t = \hat{S}_t \sqrt{\gamma_t} dW_t^S$
 - ▶ $dS_t = S_t(r dt + \sqrt{\gamma_t} dW_t^S)$
 - ▶ $d\gamma_t = (\kappa - \lambda\gamma_t) dt + \sqrt{\gamma_t}\sigma dW_t^\gamma,$

wobei κ, λ, σ deterministische Parameter sind und W^S, W^γ Brownsche Bewegungen sind.

Modellgleichungen (2)

Bemerkung.

- $\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}$ kann als langfristiges Mittel der Volatilität aufgefasst werden.
- λ gibt die Intensität an, mit der die Volatilität zum langfristigen Mittel hin angezogen wird.
- Die treibenden Brownschen Bewegungen können korreliert sein.
 - ▶ $[W^S, W^\gamma]_t = \varrho t$
 - ▶ $\text{Cov}(W_t^S, W_t^\gamma) = \varrho t, \text{Corr}(W^S, W^\gamma) = \varrho$
 - ▶ $W^\gamma = \rho W^S + \sqrt{1 - \varrho^2} W$, wobei W^S und W unabhängig sind.

Partielle Differentialgleichung (1)

- **Ziel.** Bewertung eines Derivats, das $f(S_T)$ zum Zeitpunkt T auszahlt, im Heston-Modell
- **Annahme.** Der Preisprozess des Derivates habe die Gestalt

$$V(t) = v(t, S_t, \gamma_t)$$

mit einer deterministischen Funktion v . Wir setzen

$$\hat{v}(t, x, \gamma) := \exp(-rt)v(t, x, \gamma).$$

- Die Itô-Formel liefert

$$\begin{aligned} d\hat{v}(t, S_t, \gamma_t) &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(t, S_t, \gamma_t) dt + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, S_t, \gamma_t) dS_t + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \gamma}(t, S_t, \gamma_t) d\gamma_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(t, S_t, \gamma_t) d[S]_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \gamma^2}(t, S_t, \gamma_t) d[\gamma]_t \\ &\quad + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial \gamma}(t, S_t, \gamma_t) d[S, \gamma]_t \end{aligned}$$

$$\text{mit } d[S]_t = \gamma_t S_t^2 dt, \quad d[\gamma]_t = \gamma_t \sigma^2 dt, \quad d[S, \gamma]_t = S_t \gamma_t \sigma \varrho dt.$$

Partielle Differentialgleichung (2)

- Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 d\hat{v}(t, S_t, \gamma_t) &= \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(t, S_t, \gamma_t) + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, S_t, \gamma_t) S_t r + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \gamma}(t, S_t, \gamma_t) (\kappa - \lambda \gamma_t) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(t, S_t, \gamma_t) \gamma_t S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \gamma^2}(t, S_t, \gamma_t) \gamma_t \sigma^2 \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial \gamma}(t, S_t, \gamma_t) S_t \gamma_t \sigma \varrho \right) dt \\
 &\quad + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, S_t, \gamma_t) S_t \sqrt{\gamma} dW_t^S + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \gamma}(t, S_t, \gamma_t) \sigma \sqrt{\gamma_t} dW_t^\gamma
 \end{aligned}$$

- Da diskontierte Preisprozesse unter dem risikoneutralen Maß Martingale sind, verschwindet die Drift. Wir erhalten die PDE

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(t, x, \gamma) + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, x, \gamma) x r + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \gamma}(t, x, \gamma) (\kappa - \lambda \gamma) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2}(t, x, \gamma) \gamma x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \gamma^2}(t, x, \gamma) \gamma \sigma^2 + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial \gamma}(t, x, \gamma) x \gamma_t \sigma \varrho = 0
 \end{aligned}$$

Überblick

- Im Financial Engineering werden extrem viele und auch sehr komplexe Derivate designt und bewertet.
- Unter **Plain Vanilla Optionen** versteht man standardisierte Optionen wie etwa europäische und amerikanische Calls und Puts.
- Der Wert einer Option kann auch vom gesamten bisherigen Verlauf des Underlyings abhängen. Dann spricht man von **pfadabhängigen Optionen**.
- Derivate werden nicht nur zur Absicherung von oder Spekulation auf Marktrisiken eingesetzt, sondern können auch andere Risiken wie etwa Kredit- oder versicherungstechnische Risiken adressieren.
- Im Risikomanagement kommen sogenannte „maßgeschneiderte“ Optionen (tailor-made options) zum Einsatz. Sie können sich auf das Zusammenspiel mehrerer Risiken beziehen.

Kombinationen von Plain Vanilla Optionen (1)

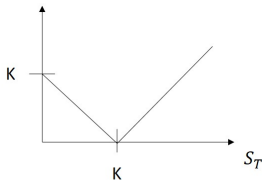
Aus Kombinationen von Plain Vanilla Optionen lassen sich Derivate bilden, die auf andere Kurserwartungen als Steigen oder Fallen abstellen.

Beispiele.

- 1 **Straddle.** Kaufe einen Put und einen Call mit Ausübungszeitpunkt T und Ausübungspreis K .

Auszahlung zum Zeitpunkt T :

$$(K - S_T)^+ + (S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ K - S_T, & S_T < K \end{cases}$$



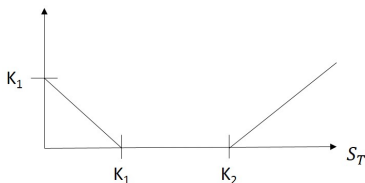
Die Motivation liegt in der Absicherung gegen bzw. Spekulation auf Abweichungen in beide Richtungen.

Kombinationen von Plain Vanilla Optionen (2)

- ② **Strangle.** Kombination von Long Call mit Ausübungszeitpunkt T und Strike K_2 und Long Put mit Ausübungszeitpunkt T und Strike $K_1 < K_2$.

Auszahlung zum Zeitpunkt T :

$$(K_1 - S_T)^+ + (S_T - K_2)^+ = \begin{cases} K_1 - S_T, & S_T < K_1 \\ 0, & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$



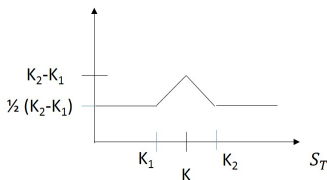
Die Motivation liegt in der Absicherung gegen bzw. Spekulation auf Abweichungen in beide Richtungen, wobei der Optionspreis geringer ausfällt als beim Straddle.

Kombinationen von Plain Vanilla Optionen (3)

- ③ **Butterfly Spread**. Kombination von 4 Optionen mit Ausübungszeitpunkt T , einem Long Call mit Strike K_1 , einem Long Put mit Strike K_2 , einem Short Call mit Strike K und einem Short Put mit Strike K , wobei $K_1 < K < K_2$

Auszahlung zum Zeitpunkt T :

$$(S_T - K_1)^+ + (K_2 - S_T)^+ - (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$$



Die Motivation liegt in der Erwartung nur geringer Kursschwankungen um K .

Kombinationen von Plain Vanilla Optionen (4)

- 4 **binäre Optionen.** Die Option wird wertlos, wenn der Kurs des Basiswertes eine festgelegte Schranke über- oder unterschreitet. Die Höhe der Auszahlung ist unabhängig vom Kurs des Basiswertes.

 - ▶ binärer Call: $C_T = B \cdot 1_{S_T > K}$
 - ▶ binärer Put: $P_T = B \cdot 1_{S_T \leq K}$
- 5 **Compound Optionen.** Eine Compound Option gewährt das Recht, zum Ausübungszeitpunkt T eine andere Option mit Ausübungszeitpunkt $T' > T$ zu kaufen bzw. zu verkaufen.

 - ▶ Put-on-Call: $V_T = (K - C_T)^+$
 - ▶ Call-on-Put: $V_T = (P_T - K)^+$
 - ▶ Put-on-Put: $V_T = (K - P_T)^+$
 - ▶ Call-on-Call: $V_T = (C_T - K)^+$
- 6 **Chooser Optionen.** Zum Ausübungszeitpunkt T kann der Käufer wählen, ob er einen europäischen Put oder einen europäischen Call mit Ausübungszeitpunkt $T' > T$ erhalten möchte.

$$V_T = \max(C_T, P_T)$$

pfadabhängige Optionen (1)

Während im klassischen Black-Scholes Modell auch für pfadabhängige Optionen explizite Preisformeln hergeleitet werden können, erfordern andere Modellrahmen etwa bei stochastischer Volatilität numerische Verfahren.

Beispiele.

- 7 **Barriere-Optionen.** Eine Barriere-Option wird wertlos oder wertvoll, wenn der Kurs des Basiswertes eine vorher festgelegte Schranke vor dem Ausübungszeitpunkt T unter- bzw. überschreitet.

Down-and-out-Call: $C_T = (S_T - K)^+ \cdot 1_{\min_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B}$

- 8 Bei **asiatischen Optionen** hängt die Auszahlung von einem Durchschnittswert des Kurses des Basiswertes ab. Asiatische Optionen schützen gegen Kursmanipulationen kurz vor dem Ausübungszeitpunkt.

$$C_T = \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau - K \right)^+$$

pfadabhängige Optionen (2)

Beispiele.

- 9 **Lookback-Optionen.** Die Auszahlungsfunktion hängt vom Minimum bzw. Maximum des Kurses im Zeitintervall $[0, T]$ bis zum Ausübungszeitpunkt T ab.

Lookback Strike Call: $C_T = (S_T - \min_{0 \leq t \leq T} S_t)^+$

- 10 **Multi-Asset-Optionen** hängen von endlich vielen Basiswerten ab.

- ▶ **Rainbow-Optionen:** $V_T = (\max(S_T^1, \dots, S_T^n) - K)^+$

- ▶ **Basket-Optionen:** $V_T = (\sum_{i=1}^n \alpha_i S_T^i - K)^+$

- 11 Temperaturen, Niederschlagsmengen, Indizes (Kreditrisiko, NatCat) können Underlyings für Derivate sein.

einführendes Beispiel (1)

Bewertung eines asiatischen Calls im Heston-Modell

- **Auszahlungsprofil:** $V(S_T, T) = \left(S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau \right)^+$
- **Dynamik:**

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1, \\ d\sigma_t^2 &= (\theta - \lambda \sigma_t^2) dt + \gamma \sigma_t dW_t^2, \end{aligned}$$

wobei θ , λ , γ Konstanten und W^1 und W^2 korrelierte Brownsche Bewegungen sind.

- **Grundidee:** Der Preis ist der diskontierte Erwartungswert

$$V(S_0, 0) = \exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \cdot E(V(S_T, T))$$

und wird als Mittelwert über M verschiedene Pfade der Werte des Auszahlungsprofils approximiert.

einführendes Beispiel (2)

notwendige Schritte

- ① Simulation von M unabhängigen Pfaden von (W^1, W^2)
- ② M Pfade der Dynamik der stochastischen Differentialgleichungen
- ③ approximative Berechnung der Auszahlung in diesen Pfaden
- ④ diskontierter Mittelwert über diese Pfade

Vorgehensweise

- Wegen $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t \sim \sqrt{\Delta t} \cdot Z$ mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ können zunächst M Pfade der treibenden Brownschen Bewegung mit Hilfe eines Generators für normalverteilte Zufallszahlen simuliert werden.
- Mit den Zuwächsen der Brownschen Bewegung ergeben sich die Zuwächse der Lösung der stochastischen DGL im Black-Scholes Modell.

$$\Delta S_t = rS_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t$$

- Im Ergebnis erhalten wir M Pfade von $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$.

Simulation eines Pfads der Brownschen Bewegung

Algorithmus

- Wähle eine Zerlegung $\{t_i \mid i = 1, \dots, N\}$ von $[0, T]$ mit $t_0 = 0$ und $t_N = T$.
- Setze $W_0 := 0$.
- Wiederhole für $i = 1, \dots, N$:
 - ▶ Ziehe z aus $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - ▶ Setze $W_{t_i} := W_{t_{i-1}} + \sqrt{t_i - t_{i-1}} \cdot z$.

Simulation eines Pfads der geometrischen Brownschen Bewegung

Euler-Maruyama-Algorithmus

- Wähle eine Zerlegung $\{t_i \mid i = 1, \dots, N\}$ von $[0, T]$ mit $t_0 = 0$ und $t_N = T$.
- Setze $S_0 := s_0$, wobei s_0 der Anfangspreis ist.
- Wiederhole für $i = 1, \dots, N$:
 - ▶ Ziehe z aus $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - ▶ Setze $S_{t_i} := S_{t_{i-1}} + S_{t_{i-1}} \cdot (r \cdot (t_i - t_{i-1}) + z \cdot \sqrt{t_i - t_{i-1}})$.

starke Konvergenz (1)

Definition

Sei X_t , $0 \leq t \leq T$, Lösung einer stochastischen DGL und X_t^h , $0 \leq t \leq T$, eine Approximation von $(X_t)_t$, die auf einer Zeitdiskretisierung der Schrittweite h fußt.

- a) $(X_t^h)_t$ **konvergiert stark mit Ordnung $\gamma > 0$** gegen $(X_t)_t$, wenn für alle hinreichend kleinen $h > 0$ der mittlere Fehler die Abschätzung

$$\varepsilon(h) := E(|X_T - X_T^h|) \leq C \cdot h^\gamma$$

für eine Konstante $C > 0$ erfüllt.

- b) $(X_t^h)_t$ heißt **stark konvergent** gegen $(X_t)_t$, wenn $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ gilt.

starke Konvergenz (2)

- Bei M Simulationsläufen mit fester Schrittweite h wird die mittlere Abweichung approximiert durch

$$\varepsilon(h) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |X_T^{(i)} - X_T^{h,(i)}|.$$

- Liegt die Konvergenzordnung γ vor, so liegen die Punkte $(\ln(h_j), \ln(\varepsilon(h_j)))$, $j = 1, \dots, m$, annähernd auf der Geraden

$$y(x) = \ln(C) + \gamma x.$$

Die Geradensteigung kann mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

- In MATLAB wird das quadratische Minimierungsproblem

$$z^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung gelöst. Befehl: $x = A \backslash b$

schwache Konvergenz (1)

Definition

Sei X_t , $0 \leq t \leq T$, Lösung einer stochastischen DGL und X_t^h , $0 \leq t \leq T$, eine Approximation von $(X_t)_t$, die auf einer Zeitdiskretisierung der Schrittweite h fußt.

- a) $(X_t^h)_t$ **konvergiert schwach bezüglich einer Funktion g mit Ordnung $\gamma > 0$** gegen $(X_t)_t$, wenn für alle hinreichend kleinen $h > 0$ die Abweichung

$$\tilde{\varepsilon}(h) := \left| E(g(X_T)) - E(g(X_T^h)) \right| \leq C \cdot h^\gamma$$

für eine Konstante $C > 0$ erfüllt.

- b) Im Fall $g(x) = x$ heißt $(X_t^h)_t$ **schwach konvergent** gegen $(X_t)_t$ mit Ordnung γ .

schwache Konvergenz (2)

- Bei Bewertungen ist man oft nicht an den Trajektorien interessiert, sondern nur an den Momenten von X_T . Für solche Anwendungen bietet sich der Begriff der schwachen Konvergenz an.
- Bei M Simulationsläufen mit fester Schrittweite h wird die Abweichung approximiert durch

$$\tilde{\varepsilon}(h) \approx \frac{1}{M} \left| \sum_{i=1}^M \left[g(X_T^{(i)}) - g(X_T^{h,(i)}) \right] \right|.$$

- Liegt die Konvergenzordnung γ vor, so liegen die Punkte $(\ln(h_j), \ln(\tilde{\varepsilon}(h_j)))$, $j = 1, \dots, m$, annähernd auf der Geraden

$$y(x) = \ln(C) + \gamma x.$$

Die Geradensteigung kann mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Konvergenzordnung des Euler-Maruyama-Verfahrens

Sei $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ mit Schrittweite h , d.h. $N = T/h$. Das Euler-Maruyama-Verfahren für die stochastische DGL

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$$

mit Schrittweite h erzeugt die Näherung X_t^h durch die Vorwärtsrekursion

$$X_{t_{i+1}}^h = X_{t_i}^h + a(t_i, X_{t_i}^h) \cdot h + b(t_i, X_{t_i}^h) \cdot \Delta W_{t_i}$$

mit $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$.

Satz

^a Das Euler-Maruyama-Verfahren konvergiert stark mit der Ordnung $\frac{1}{2}$ und schwach mit der Ordnung 1.

^aVgl. Kloeden/Platen, Theorem 10.2.2 und 14.1.5.

Taylorentwicklung mit der Itô-Formel (1)

- Um Verfahren mit höherer Konvergenzordnung zu entwickeln, betrachten wir im Folgenden die Taylorentwicklungen von Drift- und Diffusionsterm einer autonomen stochastischen DGL

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t, \quad t \geq t_0$$

gemäß der Itô-Formel.

$$a(X_t) = a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left[a'(X_s) a(X_s) + \frac{1}{2} a''(X_s) b^2(X_s) \right] ds + \int_{t_0}^t a'(X_s) b(X_s) dW_s$$

$$b(X_t) = b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left[b'(X_s) a(X_s) + \frac{1}{2} b''(X_s) b^2(X_s) \right] ds + \int_{t_0}^t b'(X_s) b(X_s) dW_s$$

- Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} X_t = & X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left[a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s (a' a + \frac{1}{2} a'' b^2)(X_z) dz + \int_{t_0}^s (a' b)(X_z) dW_z \right] ds \\ & + \int_{t_0}^t \left[b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s (b' a + \frac{1}{2} b'' b^2)(X_z) dz + \int_{t_0}^s (b' b)(X_z) dW_z \right] dW_s. \end{aligned}$$

Taylorentwicklung mit der Itô-Formel (2)

- Der Abbruch der stochastischen Taylorentwicklung orientiert sich daran, dass Integrale bzgl. ds Ordnung $O(h)$ und Integrale bzgl. dW_s Ordnung $O(h^{\frac{1}{2}})$ haben.
- Weglassen aller Doppelintegrale führt auf das Euler-Maruyama-Verfahren:

$$X_t \approx X_{t_0} + a(X_{t_0}) \cdot (t - t_0) + b(X_{t_0}) \cdot (W_t - W_{t_0})$$

- Nimmt man zusätzlich das Doppelintegral bzgl. $dW_z dW_s$ mit $O(h)$ auf, d.h. vernachlässigt man alle Terme mit $O(h^{\frac{3}{2}})$ und ersetzt den Integranden $(b'b)(X_z)$ durch $(b'b)(X_{t_0})$, so erhält man das Milstein-Verfahren:

$$\begin{aligned} X_t \approx & X_{t_0} + a(X_{t_0}) \cdot (t - t_0) + b(X_{t_0}) \cdot (W_t - W_{t_0}) \\ & + (b'b)(X_{t_0}) \int_{t_0}^s dW_z dW_s \end{aligned}$$

Milstein-Verfahren (1)

- Wir berechnen das Doppelintegral mit der Itô-Formel.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW_z dW_s &= \int_{t_0}^t (W_s - W_{t_0}) dW_s \\
 &= \int_{t_0}^t W_s dW_s - W_{t_0} \int_{t_0}^t dW_s \\
 &= \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{t - t_0}{2} - W_{t_0}(W_t - W_{t_0}) \\
 &= \frac{1}{2} (W_t - W_{t_0})^2 - (t - t_0)
 \end{aligned}$$

- Im Ergebnis erhalten wir das **Milstein-Verfahren** für die autonome stochastische DGL.

$$\begin{aligned}
 X_t \approx & X_{t_0} + a(X_{t_0}) \cdot (t - t_0) + b(X_{t_0}) \cdot (W_t - W_{t_0}) \\
 & + \frac{1}{2}(b'b)(X_{t_0}) ((W_t - W_{t_0})^2 - (t - t_0))
 \end{aligned}$$

Milstein-Verfahren (2)

- **Algorithmus** des Milstein-Verfahrens für die nicht-autonome stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$$

zur Simulation eines Pfades.

Sei h die Schrittweite der Zerlegung von $[0, T]$, $N = \frac{T}{h}$.

- ① Setze $y_0 := X_0$.
- ② Für $i = 1, \dots, N$ wiederhole
 - i) Ziehe z aus $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - ii) Setze

$$\begin{aligned} y_i &:= y_{i-1} + a(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot h + b(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot \sqrt{h} \cdot z \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x}(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot b(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot (z^2 \cdot h - h). \end{aligned}$$

- Das Milstein-Verfahren hat die starke Konvergenzordnung 2.¹

¹Vgl. Kloeden, Platen, Theorem 10.3.5.

Runge-Kutta-Verfahren (1)

- Das Runge-Kutta-Verfahren entsteht dadurch, dass im Milstein-Verfahren die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird.
- In der formalen Taylorentwicklung

$$\begin{aligned}b(X_t + \Delta X_t) - b(X_t) &= b'(X_t)\Delta X_t + O(|\Delta X_t|^2) \\&= b'(X_t)(a(X_t) \cdot h + b(X_t) \cdot \Delta W_t) + O(h) \\&= b'(X_t)b(X_t) \cdot \Delta W_t + O(h)\end{aligned}$$

ersetzen wir ΔW_t durch seinen „Mittelwert“ \sqrt{h} und erhalten

$$b'(X_t)b(X_t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left[b\left(X_t + a(X_t) \cdot h + b(x_t) \cdot \sqrt{h}\right) - b(X_t) \right] + O(h).$$

Runge-Kutta-Verfahren (2)

Algorithmus des Runge-Kutta-Verfahrens 1. Ordnung zur Simulation eines Pfades

Sei h die Schrittweite der Zerlegung von $[0, T]$, $N = \frac{T}{h}$.

- ① Setze $y_0 := X_0$.
- ② Für $i = 1, \dots, N$ wiederhole
 - i) Ziehe z aus $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - ii) Setze $\hat{y}_i := y_{i-1} + a(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot h + b(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot \sqrt{h}$.
 - iii) Setze

$$y_i := y_{i-1} + a(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot h + b(t_{i-1}, y_{i-1}) \cdot \sqrt{h} \cdot z + \frac{1}{2\sqrt{h}} (b(t_{i-1}, \hat{y}_i) - b(t_{i-1}, y_{i-1})) \cdot (z^2 \cdot h - h).$$

Milstein-Verfahren für Systeme (1)

- **Ziel:** Verallgemeinerung des Milstein-Verfahrens auf stochastische DGLn der Dimension n , die von einer m -dimensionalen Brownschen Bewegung getrieben werden.
- gegeben:
 - ▶ $a = (a^{(j)})_{j=1,\dots,n} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 - ▶ $b = (b^{(j,k)})_{j=1,\dots,n; k=1,\dots,m} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$
 - ▶ m -dimensionale Brownsche Bewegung

$$W = (W^{(1)}, \dots, W^{(m)})$$

- Wir betrachten die stochastische DGL

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t$$

und wählen eine Zerlegung von $[0, T]$ mit der Schrittweite h .

Milstein-Verfahren für Systeme (2)

- Im Spezialfall $m = 1$ ergibt sich das Milstein-Verfahren als direkte Verallgemeinerung des eindimensionalen Verfahrens.

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + a(t_i, y_i) \cdot h + b(t_i, y_i) \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n b^{(j)} \frac{\partial b}{\partial x_j}(t_i, y_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s dW_z dW_s \\
 &= y_i + a(t_i, y_i) \cdot h + b(t_i, y_i) \cdot (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} Db(t_i, y_i) b(t_i, y_i) \cdot ((\Delta W_{t_i})^2 - h)
 \end{aligned}$$

- Die Herleitung des Milstein-Verfahrens führt für allgemeines m auf

$$\begin{aligned}
 y_{i+1}^{(s)} &= y_i^{(s)} + a^{(s)}(t_i, y_i) \cdot h + \sum_{k=1}^m b^{(sk)}(t_i, y_i) \cdot (W_{t_{i+1}}^{(k)} - W_{t_i}^{(k)}) \\
 &\quad + \sum_{k,l=1}^m \sum_{j=1}^n b^{(jl)} \frac{\partial b^{(sk)}}{\partial x_j}(t_i, y_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{\tau} dW_z^{(l)} dW_{\tau}^{(k)}, \\
 &\quad s = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Milstein-Verfahren für Systeme (3)

- Die Doppelintegrale $I_{l,k} := \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{\tau} dW_z^{(l)} dW_{\tau}^{(k)}$ lassen sich nicht auf die eindimensionalen Zuwächse der Brownschen Bewegungen $W^{(k)}$, $W^{(l)}$ zurückführen. Ein Ausweg besteht darin, sie bis auf einen Fehler der Größenordnung $O(h)$ zu approximieren.
- Die Lösung $Z_t = (Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)})$ des zweidimensionalen Systems

$$dZ_t = \begin{pmatrix} Z_t^{(2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} W_t^{(k)} \\ W_t^{(l)} \end{pmatrix}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad Z_{t_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$Z_{t_{i+1}} = \begin{pmatrix} I_{lk} \\ \Delta W_{t_i}^l \end{pmatrix}$$

mit $\Delta W_{t_i}^l = W_{t_{i+1}}^{(l)} - W_{t_i}^{(l)}$.

Beweis. Die zweite Gleichung $dZ_t^{(2)} = dW_t^{(l)}$ hat die Lösung $Z_s^{(2)} = Z_{t_i}^{(2)} + \int_{t_i}^s dW_s^{(l)} = \int_{t_i}^s dW_s^{(l)}$. Folglich hat $Z_t^{(1)}$ den Endwert

$$Z_{t_{i+1}}^{(1)} = Z_{t_i}^{(1)} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_s^{(2)} dW_s^{(k)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s dW_s^{(l)} dW_s^{(k)} = I_{lk}.$$

Milstein-Verfahren für Systeme (4)

- Zur approximativen Berechnung des Doppelintegrals I_{lk} wenden wir das Euler-Maruyama Verfahren auf die zweidimensionale SDGL für Z_t an. Dazu zerlegen wir $[t_i, t_{i+1}]$ in N Teilintervalle der Länge $\delta := \frac{h}{N}$. Wir bezeichnen die Approximation von $Z_{t_i+\delta \cdot k}$ mit v_k .
- Algorithmus:
 - ▶ Setze $v_0 := (0, 0)$.
 - ▶ Für $k = 0, 1, \dots, N - 1$ wiederhole:
 - i) Ziehe w aus $\mathcal{N}((0, 0)^T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.
 - ii) $v_{k+1} := v_k + \begin{pmatrix} v_k^{(2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot \sqrt{\delta}$
 - ▶ $v_N^{(1)}$ approximiert I_{lk} .
- Die Wahl von $N := 1/h$ sichert die starke Konvergenzordnung $O(h)$; denn dann ist wegen $\delta = h/N = h^2$

$$\mathbb{E} \left(|v_N^{(1)} - I_{lk}| \right) \leq C\delta^{1/2} = Ch.$$

Runge-Kutta-Verfahren für Systeme (1)

- Die Differentiation der Spaltenvektoren $b^{(k)} = (b^{(sk)})_{s=1,\dots,n}$ kann durch Übergang zum Runge-Kutta-Verfahren vermieden werden.
- Lemma.** Es gilt

$$\sum_{j=1}^n b^{(jl)} \frac{\partial b^{(k)}}{\partial x_j}(t_i, y_i) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(b^{(k)}(t_i, \hat{y}_i^l) - b^{(k)}(t_i, y_i) \right) + O(\sqrt{h})$$

mit $\hat{y}_i^l = y_i + a(t_i, y_i)h + b^{(l)}(t_i, y_i)\sqrt{h}$.

Beweis. Taylorentwicklung der rechten Seite liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{h}} \left(b^{(k)}(t_i, \hat{y}_i^l) - b^{(k)}(t_i, y_i) \right) &= \frac{1}{\sqrt{h}} \left(Db^{(k)}(t_i, y_i) \cdot (\hat{y}_i^l - y_i) + O(h) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \left(Db^{(k)}(t_i, y_i) \cdot (a(t_i, y_i)h + b^{(l)}(t_i, y_i)\sqrt{h}) + O(h) \right) \\ &= Db^{(k)}(t_i, y_i) \cdot b^{(l)}(t_i, y_i) + O(\sqrt{h}). \end{aligned}$$

Dabei lautet die s -te Komponente

$$(Db^{(k)}(t_i, y_i)b^{(l)}(t_i, y_i))_s = \sum_{j=1}^n b^{(jl)} \frac{\partial b^{(k)}}{\partial x_j}(t_i, y_i).$$

Runge-Kutta-Verfahren für Systeme (2)

Iterationsvorschrift des Runge-Kutta-Verfahrens für Systeme:

$$y_{i+1} := y_i + a(t_i, y_i)h + b(t_i, y_i)\Delta W_{t_i} \\ + \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{k,l=1}^m \left(b^{(k)}(t_i, \hat{y}_i^l) - b^{(k)}(t_i, y_i) \right) \cdot I_{lk}$$

Monte-Carlo Bewertung einer asiatischen Option (1)

- **Ziel:** Bewertung der asiatischen Call Option

$$C_T = \left(S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau d\tau \right)^+$$

zum Zeitpunkt 0, wobei die Dynamik unter dem Heston-Modell

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\theta - \sigma_t^2) dt + \gamma \sigma_t dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

mit einer zweidimensionalen Brownschen Bewegung mit

$$[W^{(1)}, W^{(2)}]_t = \varrho t$$

unter Verwendung der deterministischen Zinsfunktion

$$r_t = \frac{1}{100} (\sin(2\pi t) + t + 1))$$

auf $[0, T]$ beschrieben wird.

- Parameter: $\kappa, \theta, \gamma, \varrho, T, S_0, \sigma_0$

Monte-Carlo Bewertung einer asiatischen Option (2)

Berechnungsschema.

- Simulation der zweidimensionalen korrelierten Brownschen Bewegung mit einem eindimensionalen Zufallszahlengenerator aus $\mathcal{N}(0, 1)$

- Für jedes Intervall der Länge $h := \frac{T}{N}$ ziehe Zufallszahlen $y^{(1)}, y^{(2)}$ aus $\mathcal{N}(0, 1)$ und setze

$$\Delta W_{t_i}^{(1)} = W_{t_{i+1}}^{(1)} - W_{t_i}^{(1)} := y^{(1)} \cdot \sqrt{h},$$

$$\Delta W_{t_i}^{(2)} = W_{t_{i+1}}^{(2)} - W_{t_i}^{(2)} := \varrho \cdot y^{(1)} \cdot \sqrt{h} + \sqrt{1 - \varrho^2} \cdot y^{(2)} \cdot \sqrt{h}.$$

- Simulation der Dynamik des stochastischen DGL-Systems mit dem Euler-Maruyama Verfahren
 - Für jedes Intervall der Länge h setze

$$S_{t_{i+1}} := S_{t_i} \cdot \left((1 + r_{t_i}) \cdot h + \sigma_{t_i} \cdot \Delta W_{t_i}^{(1)} \right),$$

$$\sigma_{t_{i+1}}^2 := \sigma_{t_i}^2 + \kappa(\theta - \sigma_{t_i}^2) \cdot h + \gamma \cdot \sigma_{t_i} \cdot \Delta W_{t_i}^{(2)}.$$

Monte-Carlo Bewertung einer asiatischen Option (3)

Berechnungsschema.

- Approximation der Auszahlung der Option in jedem Simulationslauf $k = 1, \dots, M$

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_\tau^{(k)} d\tau \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i}^{(k)} =: \bar{S}^{(k)}$$

- Approximation des Optionspreises

$$\begin{aligned} C_0 &= \exp\left(-\int_0^T r_t dt\right) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(S_{T_N}^{(k)} - \bar{S}^{(k)}\right)^+ \\ &= \exp\left(-\left[\frac{T^2 + 2}{200} + \frac{1 - \cos(2\pi T)}{200\pi}\right]\right) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(S_N^{(k)} - \bar{S}^{(k)}\right)^+ \end{aligned}$$

Monte-Carlo Bewertung einer asiatischen Option (4)

Berechnungsschema.

- Verbesserung der Konvergenzordnung mit Hilfe des Milstein-Verfahrens

$$\begin{aligned}
 S_{t_{i+1}} &:= S_{t_i} + S_{t_i} \cdot \left(r_{t_i} \cdot h + \sigma_{t_i} \cdot \Delta W_{t_i}^{(1)} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sigma_{t_i}^2 S_{t_i} \left((\Delta W_{t_i}^{(1)})^2 - h \right) + \frac{\gamma}{2} S_{t_i} \cdot l_{21}, \\
 \sigma_{t_{i+1}}^2 &:= \sigma_{t_i}^2 + \kappa(\theta - \sigma_{t_i}^2) \cdot h + \gamma \cdot \sigma_{t_i} \cdot \Delta W_{t_i}^{(2)} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \gamma^2 \left((\Delta W_{t_i}^{(2)})^2 - h \right),
 \end{aligned}$$

wobei $l_{21} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{\tau} dW_z^{(2)} dW_{\tau}^{(1)}$ mit Hilfe des Euler-Maruyama-Verfahrens auf einer Zerlegung von $[t_i, t_{i+1}]$ approximiert wird.

Überprüfung. Es ist $d \begin{pmatrix} S_t \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = a(S_t, \sigma_t^2) dt + b(S_t, \sigma_t^2) d \begin{pmatrix} W_t^{(1)} \\ W_t^{(2)} \end{pmatrix}$ mit

$$a(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} r_t y_1 \\ \kappa(\theta - y_2) \end{pmatrix} \text{ und } b(t, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \sqrt{y_2} & 0 \\ 0 & \gamma \sqrt{y_2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmung von Griechen per Simulation (1)

- Die Griechen dienen der Sensitivitätsanalyse und werden für Hedging-Strategien verwendet.
- Während es im klassischen Black-Scholes-Modell analytische Formeln zur Berechnung der Griechen gibt, können sie in lokalen oder stochastischen Volatilitätsmodellen nur numerisch bestimmt werden.
- Wir betrachten im Folgenden drei Methoden zur numerischen Bestimmung von Griechen: finite Differenzen, pfadweise Differentiation, Likelihood-Quotientenmethode.

Bestimmung von Griechen per Simulation (2)

Finite Differenzen

- Die Ableitung des Optionspreises $X(t) = X(t, S_t, r, \sigma)$ kann approximiert werden durch

- ▶ eine **Vorwärtsdifferenz**

$$\Delta = \frac{\partial X}{\partial t}(t) \approx \Delta_{fwd} := \frac{X(t, S_t + h, r, \sigma) - X(t, S_t, r, \sigma)}{h},$$

- ▶ eine **zentrale Differenz**

$$\Delta = \frac{\partial X}{\partial t}(t) \approx \Delta_{central} := \frac{X(t, S_t + h, r, \sigma) - X(t, S_t - h, r, \sigma)}{2h}.$$

- Aus den Taylorentwicklungen

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x)h^3 + O(h^4)$$

folgt, dass die zentrale Differenz eine höhere Ordnung der Approximation erzielt.

Bestimmung von Griechen per Simulation (3)

Finite Differenzen

- Ordnung des Bias

- ▶ $B_{fwd} = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| + O(h)$

- ▶ $B_{central} = \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x) \right| + O(h^2)$

- Ist der Optionspreis monoton in S_t , so kann die Varianz des Monte-Carlo-Schätzers durch Nutzung derselben Zufallszahlen im Subtrahenden und Minuenden verringert werden.
- Man kann zeigen, dass bei Verwendung zentraler Differenzen für eine Schrittweite $h_n = O(n^{-1/5})$ eine Konvergenzordnung von $O(n^{-1/5})$ erzielt wird.

Bestimmung von Griechen per Simulation (4)

Finite Differenzen

- Für zweite Ableitungen können ebenfalls zentrale Differenzen verwendet werden.

$$\frac{\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - \frac{f(t)-f(t-h)}{h}}{h} = \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2}$$

- Finite Differenzen sind immer einsetzbar, sofern die Preise der Derivate berechnet werden können. Zu den Fehlern der Zeitdiskretisierung und der Simulation kommt allerdings der Bias hinzu.

Bestimmung von Griechen per Simulation (5)

pfadweise Differentiation

- Bei der pfadweisen Differentiation wird die Auszahlungsfunktion nach dem Parameter differenziert und danach der Erwartungswert gebildet. Dürfen Erwartungswert und Differentiation vertauscht werden, ergibt sich die Ableitung des Optionspreises nach diesem Parameter.
- Sei $X(T) = f(S_T)$ die Auszahlung der Option. Ist f differenzierbar und sind f , $f'(S_T)$ und $\frac{\partial S_T}{\partial \theta}$ beschränkt, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E} \left(f'(S_T) \cdot \frac{\partial S_T}{\partial \theta} \right).$$

Die letzte Beschränktheitsbedingung ist häufig verletzt.

- Approximation:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}(X_T) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f'(S_T^{(i)}) \cdot \frac{\partial S_T^{(i)}}{\partial \theta}$$

Bestimmung von Griechen per Simulation (6)

pfadweise Differentiation im m -dimensionalen Fall

- $dS_t = a(S_t) dt + b(S_t) dW_t$, wobei a Werte in \mathbb{R}^m , b Werte in $\mathbb{R}^{m \times d}$ annimmt und W eine d -dimensionale Brownsche Bewegung ist.
- Euler-Maruyama Approximation auf $[0, T]$ mit $h = T/N$:

$$S_{n+1}^h = S_n^h + a(S_n^h)h + b(S_n^h)\sqrt{h} \cdot Z_{n+1}$$

mit $S_0^h = S_0$ und unabhängigen d -dimensional normalverteilten Zufallsvektoren Z_n .

- Ist $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Vertauschung von Erwartungswert und Differentiation erlaubt, so erhalten wir die folgende Approximation des Delta.

$$\frac{\partial}{\partial (S_j)_0} E(f(S_T)) = E \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f(S_T)}{\partial (S_i)_T} \cdot \frac{\partial (S_i)_T}{\partial (S_j)_0} \right) \approx \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(S_N^h)}{\partial (S_i^h)_N} \cdot (\Delta_{ij})_N,$$

$$\text{mit } (\Delta_{ij})_n = \frac{\partial (S_i^h)_n}{\partial (S_j^h)_0}.$$

Bestimmung von Griechen per Simulation (7)

pfadweise Differentiation im m -dimensionalen Fall

- $(\Delta_{ij})_n = \frac{\partial(S_i^h)_n}{\partial(S_j^h)_0}$ wird gemäß Euler-Maruyama approximiert durch

$$\Delta_0 := I_m$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{ij})_{n+1} &:= (\Delta_{ij})_n + \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_i}{\partial S_k^h}(S_n^h) \cdot (\Delta_{kj})_n \cdot h \\ &\quad + \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^m \frac{\partial b_{il}}{\partial S_k^h}(S_n^h) \cdot (\Delta_{kj})_n \cdot \sqrt{h} \cdot (Z_l)_{n+1}. \end{aligned}$$

- Mit der $m \times m$ -Matrix D_n , definiert durch

$$(D_n)_{ik} = 1_{k=i} + \frac{\partial a_i}{\partial S_k^h} \cdot h + \sum_{l=1}^d \frac{\partial b_{il}}{\partial S_k^h} \cdot \sqrt{h} \cdot (Z_l)_{n+1},$$

erhalten wir die Beziehung $\Delta_{n+1} = D_n \Delta_n = D_n \cdot \dots \cdot D_0 \Delta_0$ und damit die Darstellung des Vektors der pfadweisen Deltas

$$\frac{\partial f(S_N^h)}{\partial S_0^h} = \frac{\partial f(S_N^h)}{\partial S_N^h} D_{N-1} \cdot \dots \cdot D_0 \Delta_0. \quad (5)$$

Bestimmung von Griechen per Simulation (8)

pfadweise Differentiation im m -dimensionalen Fall

- Methoden zur Bestimmung des Vektors der Deltas
 - ▶ **Vorwärtsmethode:** Bestimme die rechte Seite von (5) mit N Matrixmultiplikationen. Dies erfordert $O(Nm^3)$ Operationen.
 - ▶ **adjungierte Methode:** Setze

$$V_N := \left(\frac{\partial f(S_N^h)}{\partial (S^h)_N} \right)^T, \quad V_n := D_n^T V_{n+1}$$

und erhalte

$$\frac{\partial f(S_N^h)}{\partial (S^h)_0} = V_0^T \Delta_0.$$

Die N Matrix-Vektor-Multiplikationen erfordern $O(Nm^2)$ Operationen.

- Für die Berechnung eines einzigen Deltas bietet sich die adjungierte Methode wegen der geringeren Anzahl an Operationen an. Werden die Deltas verschiedener Optionen auf dieselben Underlyings benötigt, ist die Vorwärtsmethode vorteilhafter, da sie explizit Δ_{N-1} bereitstellt, das für alle Optionen genutzt werden kann.

Bestimmung von Griechen per Simulation (9)

Likelihood-Quotientenmethode

- Hat S_T eine differenzierbare Dichte g und dürfen Integration und Differentiation vertauscht werden, so lässt sich die Ableitung des Erwartungswertes der Auszahlung nach dem Parameter durch den Erwartungswert einer modifizierten Auszahlung darstellen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} E(f(S_T)) &= \int f(s) \frac{\partial g}{\partial \theta}(s) ds = \int f(s) \frac{\partial \ln(g)}{\partial \theta}(s) \cdot g(s) ds \\ &= E(f(S_T) w(S_T))\end{aligned}$$

mit der Gewichtsfunktion $w(s, \theta) = \frac{\partial \ln(g)}{\partial \theta}$.

- Approximation durch den Likelihood-Quotienten-Schätzer:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} E(f(S_T)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(S_T^{(i)}) \cdot w(S_T^{(i)})$$

- Vorteil: Die Gewichtsfunktion hängt nicht von der Auszahlungsfunktion der speziellen Option ab und kann somit zur Bewertung von mehreren Optionen wiederverwendet werden.

Bestimmung von Griechen per Simulation (10)

Likelihood-Quotientenmethode

Beispiel. Im Black-Scholes-Modell hat S_T die Dichte

$$g(s) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{s}{S_0}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right).$$

Mit $S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)$ ergeben sich die Gewichte

- für Δ : $w(S_T; \Delta) = \frac{W_T}{\sigma S_0 T}$
- für ϱ : $w(S_T; \varrho) = \frac{W_T}{\sigma}$

Grundidee

- Die **Finite-Differenzen-Verfahren** können zur Bewertung von Optionen durch Lösung der partiellen DGL mit Endwertbedingung herangezogen werden.
- Dazu wird $[-a, a] \times [0, T]$ für ein hinreichend großes $a \in \mathbb{R}^+$ mit einem Gitter

$$\{(x_i, t_j) \mid -a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T\}$$

versehen, und die partiellen Ableitungen werden durch Differenzenquotienten, die sogenannten finiten Differenzen, ersetzt.

Wärmeleitungsgleichung

- Wir betrachten zunächst die [Wärmeleitungsgleichung](#), auf die die Black-Scholes partielle DGL später durch Variablentransformation zurückgeführt wird,

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T$$

auf $[-a, a]$ und setzen

$$u(-a, t) =: g_1(t), \quad u(a, t) =: g_2(t).$$

Die Randfunktionen g_1, g_2 hängen dann von der Gestalt der zu bewertenden Option ab.

- Wir verwenden ein äquidistantes Gitter mit den Gitterpunkten (x_i, t_j) , wobei

$$x_i = -a + h \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$t_j = s \cdot j, \quad j = 0, 1, \dots, M,$$

mit $h := \frac{2a}{N}$ und $s := \frac{T}{M}$.

- $u_i^j := u(x_i, t_j)$

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (1)

Lemma

Für $\theta \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left(u_i^{j+1} - u_i^j \right) &= \frac{1-\theta}{h^2} \left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right) \\ &\quad + \frac{\theta}{h^2} \left(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} + O(s + h^2) \right). \end{aligned}$$

Beweis. Die Taylorentwicklungen

$$u(x+h, t) = u(x, t) + u_x(x, t)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)h^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}h^3 + O(h^4)$$

$$u(x-h, t) = u(x, t) - u_x(x, t)h + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)h^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}h^3 + O(h^4)$$

führen auf eine Approximation von u_{xx} für kleine Schrittweiten h :

$$\frac{1}{h^2} (u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)) = u_{xx}(x, t) + O(h^2).$$

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (2)

Beweis. (Fortsetzung)

Die Zeitableitung u_t kann durch Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen approximiert werden.

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= \frac{1}{s} (u(x, t + s) - u(x, t)) + O(s) \\u_t(x, t) &= \frac{1}{s} (u(x, t) - u(x, t - s)) + O(s)\end{aligned}$$

Setzt man die Approximationen der Orts- und Zeitableitungen in die Wärmeleitungsgleichung ein, ergeben sich die beiden Möglichkeiten,

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} (u(x, t + s) - u(x, t)) &= \frac{1}{h^2} (u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)) + O(s + h^2), \\ \frac{1}{s} (u(x, t + s) - u(x, t)) &= \frac{1}{h^2} (u(x + h, t + s) - 2u(x, t + s) + u(x - h, t + s)) \\ &\quad + O(s + h^2),\end{aligned}$$

die in einer Konvexkombination miteinander kombiniert werden können.

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (3)

Darstellung mittels rekursiver Differenzengleichungen

- Für $u_i^j = u(x_i, t_j)$ führen wir Näherungen w_i^j ein, die die Gleichung

$$\frac{1}{s} \left(w_i^{j+1} - w_i^j \right) = \frac{1-\theta}{h^2} \left(w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j \right) + \frac{\theta}{h^2} \left(w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1} \right)$$

erfüllen.

- Mit $\alpha := \frac{s}{h^2}$ sind die folgenden rekursiven Differenzengleichungen dazu äquivalent.

$$\begin{aligned} & -\alpha\theta w_{i+1}^{j+1} + (2\alpha\theta + 1)w_i^{j+1} - \alpha\theta w_{i-1}^{j+1} \\ & = \alpha(1-\theta)w_{i+1}^j - (2\alpha(1-\theta) - 1)w_i^j + \alpha(1-\theta)w_{i-1}^j \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, N-1, j = 0, \dots, M-1$.

- Anfangs- und Randbedingungen:

$$w_0^j = g_1(t_j), \quad w_N^j = g_2(t_j), \quad w_i^0 = u_0(x_i), \quad 1 \leq j \leq M, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (4)

kompakte Darstellung als Folge linearer Gleichungssysteme

$$Aw^{j+1} = Bw^j + d^j, \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6)$$

in den Unbekannten $w^j = (w_1^j, \dots, w_{N-1}^j)^T$ mit den $(N-1) \times (N-1)$ -dimensionalen Tridiagonalmatrizen

$$\begin{aligned}
 A &= \text{diag}(-\alpha\theta, 2\alpha\theta + 1, -\alpha\theta) \\
 &= \begin{pmatrix} 2\alpha\theta + 1 & -\alpha\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha\theta & 2\alpha\theta + 1 & -\alpha\theta & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & -\alpha\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha\theta & 2\alpha\theta + 1 \end{pmatrix} \\
 B &= \text{diag}(\alpha(1-\theta), -2\alpha(1-\theta) + 1, \alpha(1-\theta))
 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen w^0 und

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (5)

kompakte Darstellung als Folge linearer Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
 d^j &= \text{diag}(-\alpha\theta, 2\alpha\theta + 1, -\alpha\theta) \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha(1-\theta)g_1(t_j) + \alpha\theta g_1(t_{j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(1-\theta)g_2(t_j) + \alpha\theta g_2(t_{j+1}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Für $\theta = 0$ ist A die Einheitsmatrix. Dann nennt man das Differenzenverfahren ein **explizites** Verfahren, da die w^{j+1} können direkt aus $w^{j+1} = Bw^j + d^j$ (6) berechnet werden können.
- Für $\theta > 0$ erhalten wir **implizite** Verfahren, bei denen w^{j+1} nur durch Lösen eines linearen Gleichungssystems berechnet werden kann. Für $\theta = 1$ spricht man von einem **(voll) impliziten** Verfahren.
- Das Verfahren für $\theta = \frac{1}{2}$ heißt **Crank-Nicolson-Verfahren**.

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (6)

kompakte Darstellung als Folge linearer Gleichungssysteme

- Zur Lösung des linearen Gleichungssystems bietet sich wegen der Tridiagonalmatrizen das LR-Verfahren für die symmetrische Matrix A an.

$$A = LR = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & l_{N-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & r_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & r_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & d_N \end{pmatrix}$$

Es ist $r_i = d_i l_i$. d_i und l_i sind rekursiv definiert durch

- ▶ $d_1 = 2\alpha\theta + 1$,
 - ▶ für $i = 1, \dots, N-1$: $l_i = -\frac{\alpha\theta}{d_i}$, $d_{i+1} = 2\alpha\theta + 1 + \frac{l_i}{\alpha\theta}$.
- Das lineare Gleichungssystem $Aw^{j+1} = Bw^j + d^j$ ist äquivalent zu

$$Ly = Bw^j + d^j, \quad Rw^{j+1} = y.$$

Beide Systeme können durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsrekursion aufgelöst werden.

Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung (7)

kompakte Darstellung als Folge linearer Gleichungssysteme

Bemerkung. Im Allgemeinen ist die Cholesky-Zerlegung um den Faktor 2 effizienter als die LR-Zerlegung. Für Tridiagonalmatrizen ist jedoch die LR-Zerlegung effizienter.

Operation	LR	Cholesky
Additionen / Subtraktionen	$3(N-1)$	$3(N-1)$
Multiplikationen	$3(N-1)$	$3(N-1)$
Divisionen	$2N-1$	$3N-1$
Wurzelauswertungen	0	N
Summe	$8N-7$	$10N-7$

Transformation der Black-Scholes DGL (1)

Satz

Sei $V(S, t)$ eine Lösung der Black-Scholes DGL, d.h.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Setze $x := \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $\tau := \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$, $v(x, \tau) = \frac{V(S, t)}{K}$, $k := \frac{2r}{\sigma^2}$, $T_0 := \frac{\sigma^2 T}{2}$. Dann ist

$$u(x, \tau) = \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) v(x, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq T_0$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_\tau - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T_0]$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) := \exp\left(\frac{(k-1)x}{2}\right) v(x, 0) = \exp\left(\frac{(k-1)x}{2}\right) \frac{V(x, T)}{K}.$$

Transformation der Black-Scholes DGL (2)

Beweis. Wegen $S > 0$, $0 \leq t \leq T$ und $V(S, t) \geq 0$ ist $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \tau \leq T_0 = \frac{\sigma^2 T}{2}$ und $v(x, \tau) \geq 0$. Einsetzen von

$$\begin{aligned} V_t &= K v_t = K v_\tau \frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{2} \sigma^2 K v_\tau \\ V_S &= K v_x \frac{dx}{dS} = \frac{K}{S} v_x \\ V_{SS} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{K}{S} v_x \right) = -\frac{K}{S^2} v_x + \frac{K}{S} v_{xx} \frac{1}{S} = \frac{K}{S^2} (-v_x + v_{xx}) \end{aligned}$$

in die Black Scholes Gleichung liefert

$$-\frac{\sigma^2}{2} K v_\tau + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{K}{S^2} (-v_x + v_{xx}) + rS \frac{K}{S} v_x - rKv = 0,$$

also

$$v_\tau - v_{xx} + (1 - k)v_x + kv = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T_0].$$

Die Anfangsbedingung ist $v(x, 0) = \frac{V(S, T)}{K}$. Zur Elimination der Terme in v_x und v machen wir den Ansatz

$$v(x, \tau) = \exp(\alpha x + \beta \tau) u(x, \tau)$$

mit zu bestimmenden freien Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Transformation der Black-Scholes DGL (3)

Beweis. (Fortsetzung) Nach Division durch $\exp(\alpha x + \beta \tau)$ erhalten wir

$$\beta u + u_\tau - \alpha^2 u - 2\alpha u_x - u_{xx} + (1 - k)(\alpha u + u_x) + ku = 0.$$

Die Terme in u und u_x verschwinden, wenn α und β das folgende Gleichungssystem lösen.

$$\begin{aligned}\beta - \alpha^2 + (1 - k)\alpha + k &= 0 \\ -2\alpha + (1 - k) &= 0\end{aligned}$$

Dies ist für $\alpha = -\frac{1}{2}(k - 1)$, $\beta = -\frac{1}{4}(k + 1)^2$ der Fall.

Lösung der Black-Scholes DGL (1)

Auszahlungsprofil einer Call-Option

- Für $V(S, T) = (S - K)^+ = K(\exp(x) - 1)^+$ ist $v(x, 0) = (\exp(x) - 1)^+$, so dass die Anfangswertbedingung der Wärmeleitungsgleichung durch

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) = \exp\left(\frac{(k-1)x}{2}\right) (\exp(x) - 1)^+ \\ &= \left[\exp\left(\frac{(k+1)x}{2}\right) - \exp\left(\frac{(k-1)x}{2}\right) \right]^+ \end{aligned}$$

gegeben ist.

- Für diese Anfangswertbedingung ist die analytische Lösung gegeben durch

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4\tau}\right) ds.$$

(Nachrechnen durch Vertauschung von Differentiation und Integration)

Lösung der Black-Scholes DGL (2)

Auszahlungsprofil einer Call-Option

- Mit der Transformation $y := \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$ folgt

$$\begin{aligned}
 u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\sqrt{2\tau}y + x) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{2\pi}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)(x + y\sqrt{2\tau})\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{2\pi}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)(x + y\sqrt{2\tau})\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) \Phi(d_1) \\
 &\quad - \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \Phi(d_2)
 \end{aligned}$$

mit

$$d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r \pm \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Lösung der Black-Scholes DGL (3)

Auszahlungsprofil einer Call-Option

- Rücktransformation auf die ursprünglichen Variablen liefert

$$\begin{aligned}V(S, T) &= Kv(x, \tau) = K \exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) u(x, \tau) \\&= K \exp(x)\Phi(d_1) \\&\quad - K \exp\left(-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \Phi(d_2) \\&= S\Phi(d_1) - K \exp(-r(T-t))\Phi(d_2).\end{aligned}$$

Lösung der Black-Scholes DGL (4)

Auszahlungsprofil eines europäischen symmetrischen Power-Calls

- Zu lösen ist die Black-Scholes-DGL mit der Endbedingung

$$C(S, T) = \min[L, ((S - K)^+)^p] \quad \text{mit } L > 0, p > 0$$

und geeigneten Randbedingungen für $S = 0$ und $S \rightarrow \infty$.

- Mit den Transformationen $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ und

$$u(x, \tau) = \exp\left(\frac{1}{2}(k - 1)x + \frac{1}{4}(k + 1)^2\tau\right) \frac{C(S, t)}{K},$$

wobei $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ ist, wird die Black-Scholes-DGL auf die Wärmeleitungsgleichung

$$u_\tau - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < \tau < T_0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{K} \exp\left(\frac{1}{2}(k - 1)x\right) \min[L, K^p((\exp(x) - 1)^+)^p]$$

mit $T_0 = \frac{\sigma^2 T}{2}$ transformiert.

Lösung der Black-Scholes DGL (5)

Auszahlungsprofil eines europäischen symmetrischen Power-Calls

- Zur numerischen Approximation diskretisieren wir auf einem beschränkten Intervall $[-a, a]$ mit $a > 0$. Wegen

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C(K \exp(-a), t) = 0 \text{ und } \lim_{a \rightarrow \infty} C(K \exp(a), t) = L$$

wählen wir die approximativen Randbedingungen

$$u_1(\tau) = u(-a, \tau) = 0,$$

$$u_2(\tau) = u(a, \tau) = \frac{L}{K} \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right).$$

Anforderungen

Damit das Gleichungssystem (6) eine sinnvolle Approximation der Lösung der Wärmeleitungsgleichung liefert, muss die approximative Lösung w_i^j , $i = 1, \dots, N - 1$, $j = 1, \dots, M$,

- für jeden Index j eindeutig bestimmt sein und
- konvergieren, wenn die Diskretisierungsparameter s und h gegen 0 gehen.

Die Eindeutigkeit wird durch die Existenz von A^{-1} gesichert, die Konvergenz durch die Eigenschaften der Konsistenz und der Stabilität.

Existenz und Eindeutigkeit (1)

Satz (Gerschgorin)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt für alle Eigenwerte λ von A :

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}$$

Beweis. Sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und sei x_i die betragsmäßig größte Komponente von x . Aus

$$\lambda x_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

folgt nach Division durch $x_i \neq 0$

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Existenz und Eindeutigkeit (2)

Satz

Die Matrix $A = \text{diag}(-\alpha\theta, 2\alpha\theta + 1, -\alpha\theta)$ ist für alle $\alpha > 0$ und $0 \leq \theta \leq 1$ invertierbar.

Beweis. A ist strikt diagonaldominant:

$$|a_{ii}| = 2\alpha\theta + 1 > 2\alpha\theta = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Nach dem Satz von Gerschgorin kann somit $\lambda = 0$ kein Eigenwert sein.

Konsistenz (1)

Definition

Das Finite-Differenzen-Verfahren (6) heißt **konsistent** der Ordnung $O(s^a + h^b)$ mit $a, b > 0$, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle hinreichend kleinen $h, s > 0$ gilt:

$$\max_{i,j} |L_{h,s}(u_i^j)| \leq C(s^a + h^b)$$

mit

$$\begin{aligned} L_{h,s}(u_i^j) = & \frac{1}{s} \left(u_i^{j+1} - u_i^j \right) - \frac{1-\theta}{h^2} \left(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j \right) \\ & - \frac{\theta}{h^2} \left(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} \right). \end{aligned}$$

Bemerkung. $L_{h,s}$ bezeichnet das Residuum, das sich beim Einsetzen der exakten Lösung in die Differenzengleichung (6) ergibt.

Konsistenz (2)

Satz

Die Lösung u der Wärmeleitungsgleichung erfülle $u_{tt} \in C^0$. Dann ist das Finite-Differenzen-Verfahren konsistent der Ordnung $O(s + h^2)$ für alle $\alpha > 0$ und $0 \leq \theta \leq 1$.

Für $\theta = \frac{1}{2}$ und $u_{ttt} \in C^0$ ist die Konsistenzordnung sogar $O(s^2 + h^2)$.

Beweis. Aus

$$\frac{1}{s}(u_i^{j+1} - u_i^j) = u_t(x_i, t_j) + \frac{s}{2}u_{tt}(x_i, t_j) + O(s^2),$$

$$\frac{1}{s}(u_{xx}(x_i, t_{j+1}) - u_{xx}(x_i, t_j)) = u_{xxt}(x_i, t_j) + O(s)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1-\theta}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \frac{\theta}{h^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) \\ &= (1-\theta)u_{xx}(x_i, t_j) + \theta u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2) \\ &= (1-\theta)u_{xx}(x_i, t_j) + \theta s u_{xxt}(x_i, t_j) + O(s^2 + h^2) \end{aligned}$$

Konsistenz (3)

folgt

$$\begin{aligned}L_{h,s}(u_i^j) &= u_t(x_i, t_j) + \frac{s}{2}u_{tt}(x_i, t_j) - u_{xx}(x_i, t_j) - \theta su_{xxt}(x_i, t_j) + O(s^2 + h^2) \\&= \frac{s}{2}(u_{tt}(x_i, t_j) - 2\theta u_{xxt}(x_i, t_j)) + O(s^2 + h^2).\end{aligned}$$

Für $\theta = \frac{1}{2}$ verschwindet der erste Summand wegen

$$u_{tt} - u_{xxt} = (u_t - u_{xx})_t = 0, \text{ und es folgt } L_{h,s}(u_i^j) = O(s^2 + h^2).$$

Bemerkung. Die Voraussetzung $u_{tt} \in C^0$ ist etwa für $g_1, g_2 \in C^2$ und $u_0 \in C^4$ erfüllt.

Stabilität (1)

Definition

Das Finite-Differenzen-Verfahren (6) heißt **stabil**, wenn alle Eigenwerte von $A^{-1}B$ betragsmäßig kleiner als 1 sind.

Bemerkung. Stabilität sorgt für eine Fehlerdämpfung. Entsteht bei der Lösung des linearen Gleichungssystems $Aw^{j+1} = Bw^j + d^j$ ein Rundungsfehler r^j , d.h. gilt für die gestörte Lösung

$$A\hat{w}^{j+1} = B\hat{w}^j + d^j + r^j,$$

so folgt für den Fehlervektor $e^j = \hat{w}^j - w^j$ die Rekursion

$$Ae^{j+1} = Be^j + r^j.$$

Bei Vernachlässigung aller übrigen Fehler pflanzt sich allein der Anfangsfehler e^0 gemäß $e^j = (A^{-1}B)^{j+1}e^0$ fort. Für ein stabiles Verhalten ist eine Dämpfung vorangegangener Fehler erforderlich.

Stabilität (2)

Lemma

Sei $\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$ der Spektralradius von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Äquivalent sind:

- a) $\rho(A) < 1$
- b) $\lim_{j \rightarrow \infty} A^j z = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$
- c) $\lim_{j \rightarrow \infty} (A^j)_{km} = 0$ für alle $1 \leq k, m \leq n$

Lemma

Die Tridiagonalmatrix $\text{diag}(b, a, b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Stabilität (3)

Satz

Das Finite-Differenzen-Verfahren (6) ist stabil für alle

$$0 < \alpha \leq \frac{1}{2-4\theta}, \text{ falls } 0 \leq \theta < \frac{1}{2}, \\ \alpha > 0, \text{ falls } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1.$$

Beweis. Es ist $A = I + \alpha\theta T$ und $B = I - \alpha(1-\theta)T$ mit $T := \text{diag}(-1, 2, -1)$, und T hat die Eigenwerte

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right), \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Wegen $B = \frac{1}{\theta}I - \frac{1-\theta}{\theta}A$ gilt

$$A^{-1}B = \frac{1}{\theta}A^{-1} - \frac{1-\theta}{\theta}I.$$

Die Stabilitätsbedingung besagt, dass die Eigenwerte von $A^{-1}B$ kleiner 1 sind:

$$\left| \frac{1}{\theta} \frac{1}{1 + 4\alpha\theta \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)} - \frac{1-\theta}{\theta} \right| < 1.$$

Stabilität (4)

Beweis. (Fortsetzung) Dies ist äquivalent zu

$$\left| 1 - \frac{4\alpha \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}{1 + 4\alpha\theta \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)} \right| < 1$$

und wegen $\alpha > 0$ zu

$$\left| \frac{4\alpha \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}{1 + 4\alpha\theta \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)} \right| < 2.$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist diese Bedingung stets erfüllt. Im Falle $\theta < \frac{1}{2}$ betrachten wir die äquivalente Umformung

$$(2 - 4\theta)\alpha \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) < 1$$

und stellen fest, dass diese Ungleichung für $\alpha \leq \frac{1}{2-4\theta}$ erfüllt ist.

Konvergenzkriterium (1)

Satz

Seien $w^j = (w_1^j, \dots, w_{N-1}^j)^T$ die Lösung von (6) und $u_i^j = u(x_i, t_j)$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $w_i^0 = u_0(x_i)$. Setze $u^j = (u_1^j, \dots, u_{N-1}^j)^T$. Ist das Finite-Differenzen-Verfahren konsistent mit Ordnung $O(s^a + h^b)$ und stabil, so existiert eine Konstante $C_0 > 0$, so dass für alle hinreichend kleinen $s, h > 0$ gilt:

$$\max_{j=1, \dots, M} \|w^j - u^j\|_{L^2} := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |w_i^j - u_i^j|^2 \leq C_0(s^a + h^b)$$

Beweis. Da die Matrix $A^{-1}B$ symmetrisch ist, gilt $\|A^{-1}B\|_2 = \rho(A^{-1}B)$. Da das Finite-Differenzen-Verfahren stabil ist, gilt somit $\|A^{-1}B\|_2 < 1$.

Die w^j und u^j erfüllen die Rekursionsformeln

$$Aw^j = Bw^{j-1} + d^{j-1}, \quad Au^j = Bu^{j-1} + d^{j-1} + e^{j-1},$$

wobei aufgrund der Konsistenz

$$\|e^{j-1}\|_{L^2} \leq \max_{i=1, \dots, N-1} |e^{j-1}| \leq C_1(s^a + h^b) \quad \forall j = 1, \dots, M$$

mit einer Konstanten $C_1 > 0$ erfüllt.

Konvergenzkriterium (2)

Beweis. (Fortsetzung)

Wir schließen unter Beachtung von $w^0 = u^0$ und $\|A^{-1}B\|_2 < 1$

$$\begin{aligned}
 \|w^j - u^j\|_2 &= \|A^{-1}(Aw^j - Au^j)\|_2 \\
 &= \|A^{-1}(Bw^{j-1} - Bu^{j-1} - e^{j-1})\|_2 \\
 &\leq \|A^{-1}B\|_2 \cdot \|w^{j-1} - u^{j-1}\|_2 + \|A^{-1}\|_2 \cdot \|e^{j-1}\|_2 \\
 &\leq \|A^{-1}B\|_2^j \cdot \|w^0 - u^0\|_2 + \sum_{k=0}^{j-1} \|A^{-1}B\|_2^{j-k-1} \cdot \|A^{-1}\|_2 \cdot \|e^k\|_2 \\
 &\leq \frac{1 - \|A^{-1}B\|_2^j}{1 - \|A^{-1}B\|_2} \cdot \|A^{-1}\|_2 \cdot \max_{k=0, \dots, j-1} \|e^k\|_2.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\max_{j=1, \dots, M} \|w^j - u^j\|_{L^2} \leq \frac{\|A^{-1}\|_2}{1 - \|A^{-1}B\|_2} \cdot \max_{k=0, \dots, M-1} \|e^k\|_{L^2} \leq C_0 \cdot (s^a + h^b)$$

$$\text{mit } C_0 := C_1 \cdot \frac{\|A^{-1}\|_2}{1 - \|A^{-1}B\|_2}.$$

Konvergenzkriterium (3)

Bemerkung.

- a) Hat $A^{-1}B$ Eigenwerte in der Nähe von 1, kann C_0 beliebig groß werden, so dass die Abschätzung stark an Nutzen verliert.
- b) Das explizite Verfahren für $\theta = 0$ ist effizient, da keine linearen Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Andererseits ist die Stabilitätsbedingung $\alpha = \frac{s}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ sehr restriktiv. Wird die Schrittweite h um den Faktor 10 verringert, muss die Zeitschrittweite um den Faktor 100 verkleinert werden, um die Stabilitätseigenschaft zu erhalten.
- c) Verfahren mit $0 < \theta < \frac{1}{2}$ sind in der Praxis ungeeignet, da die Lösung linearer Gleichungssysteme und eine Stabilitätsbedingung notwendig sind.
- d) Das Crank-Nicolson-Verfahren ($\theta = \frac{1}{2}$) ist dem voll impliziten Verfahren wegen der besseren Konsistenzordnung vorzuziehen.

Finite Differenzen-Schema für allgemeine parabolische DGL (1)

- Die Diskretisierung der allgemeinen parabolischen DGL

$$u_t - au_{xx} + bu_x + cu = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

mit $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$ mittels zentraler finiter Differenzen führt auf das Schema

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{s} = a \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h^2} - b \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2h} - cw_i^j.$$

- Mit $\alpha = \frac{s}{h^2}$ ergeben sich die Gleichungen

$$w_i^{j+1} = \alpha \left(a - \frac{bh}{2} \right) w_{i+1}^j + (1 - 2\alpha - cs) w_i^j + \alpha \left(a + \frac{bh}{2} \right) w_{i-1}^j.$$

- Man kann zeigen, dass das Schema stabil ist, wenn $\alpha \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{|b|h}{2a} < 1$ gelten. Die zweite Bedingung erzwingt sehr kleine Schrittweiten, wenn $|b|$ groß ist.

Finite Differenzen-Schema für allgemeine parabolische DGL (2)

- Eine Alternative besteht in der Verwendung des einseitigen Differenzenquotienten

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} + O(h), \quad \text{falls } b > 0,$$

$$u_x(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + O(h), \quad \text{falls } b < 0.$$

Dies führt auf das sogenannte Upwind-Schema

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{s} = \left(a + \frac{bh}{2} \right) \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h^2} - b \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2h} - c w_i^j.$$

- Der vergrößerte Diffusionsterm $D = a + \frac{bh}{2}$ sichert die Stabilität, führt jedoch dazu, dass die Konvergenzordnung nur noch der Ordnung $O(h)$ ist.
- Zur Verbesserung der Konvergenzordnung wird das Iljin-Schema mit dem Diffusionsterm $D = \frac{hb}{2} \coth(\frac{hb}{2})$ eingesetzt.²

²Vgl. Großmann, Roos, Numerik partieller DGL.

Zusammenhang mit der Binomial-Methode (1)

- Das explizite Finite-Differenzen-Verfahren ($\theta = 0$) kann als Binomialbaum-Methode interpretiert werden.
- Aus der Black-Scholes-DGL

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

erhalten wir mit den Transformationen $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$ und $v(x, t) = V(S, t)$ und den sich daraus ergebenden Beziehungen

$$\begin{aligned} SV_S &= S \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = v_x \\ S^2 V_{SS} &= S(SV_S)_S - SV_S = v_{xx} - v_x \end{aligned}$$

die partielle DGL

$$v_t + \frac{\sigma^2}{2} v_{xx} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) v_x - rv = 0, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < T.$$

Zusammenhang mit der Binomial-Methode (2)

- Eine Variante des expliziten Finite-Differenzen-Verfahrens mit Ordnung $O(s + h^2)$ ist gegeben durch

$$\frac{v_i^j - v_i^{j-1}}{s} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{v_{i+1}^j - v_{i-1}^j}{2h} - r v_i^{j-1} = 0.$$

- Auflösen nach v_i^{j-1} ergibt die Rückwärtsrekursionsformel ($j \rightarrow j-1$)

$$\begin{aligned} v_i^{j-1} = & \frac{1}{1 + rs} \left[\left(\frac{\sigma^2 s}{2h^2} - \frac{\sigma^2 s}{4h} + \frac{rs}{2h} \right) v_{i+1}^j + \left(1 - \frac{\sigma^2 s}{h^2} \right) v_i^j \right. \\ & \left. + \left(\frac{\sigma^2 s}{2h^2} + \frac{\sigma^2 s}{4h} - \frac{rs}{2h} \right) v_{i-1}^j \right]. \end{aligned}$$

- Die Identifikation mit der Binomialmethode gelingt mit der Setzung

$$\frac{\sigma^2 s}{2h^2} = \frac{1}{2}.$$

Damit wird die Stabilitätsbedingung $\alpha \leq \frac{1}{2}$ erfüllt, da hier wegen des Diffusionskoeffizienten $\frac{\sigma^2}{2}$ der Koeffizient $\alpha = \frac{\sigma^2}{2} \frac{s}{h^2}$ ist.

Zusammenhang mit der Binomial-Methode (3)

- Mit dieser Setzung erhalten wir das Schema

$$v_i^{j-1} = \frac{1}{1+rs} \left[a_1 v_{i+1}^j + a_2 v_{i-1}^j \right]$$

mit $a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{r^2 - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma} \sqrt{s}$.

- Der Ein-Perioden-Schritt im Binomialbaum-Modell ergibt die folgende Preisrekursion:

$$V_i^{j-1} = \exp(-rs)(p \cdot V_{i+1}^j + (1-p)V_{i-1}^j)$$

mit $p = \frac{\exp(rs)-d}{u-d}$. Wir setzen $u = \exp(\sigma\sqrt{s})$ und $d = \frac{1}{u}$.

- Mit

$$\exp(\sqrt{x}) = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + O(x^{\frac{3}{2}})$$

erhalten wir

Zusammenhang mit der Binomial-Methode (4)



$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\exp(rs) - \exp(\sigma\sqrt{s})}{\exp(\sigma\sqrt{s}) - \exp(-\sigma\sqrt{s})} \\
 &= \frac{(1 + rs) - (1 - \sigma\sqrt{s} + \frac{\sigma^2 s}{2}) + O(s^{\frac{3}{2}})}{(1 + \sigma\sqrt{s} + \frac{\sigma^2 s}{2}) - (1 - \sigma\sqrt{s} + \frac{\sigma^2 s}{2}) + O(s^{\frac{3}{2}})} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{s} + O(s)}{2\sigma + O(s)} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{s}}{2\sigma} + O(s).
 \end{aligned}$$

- Nun gilt $p = a_1 + O(s)$, $1 - p = a_2 + O(s)$. Mit $\exp(-rs) = \frac{1}{1+rs} + O(s^2)$ folgt

$$V_i^{j-1} = \frac{1}{1 + rs} \left[a_1 V_{i+1}^j + a_2 V_{i-1}^j \right] + O(s).$$

Konzeption

- Bei der **vertikalen Linienmethode** werden nur die Ableitungen nach dem Ort approximiert. Dazu wird das Gebiet $[-a, a] \times [0, T]$ mit den vertikalen Linien

$$\{(x_i, t) \mid -a = x_0 < x_1 < \dots, x_N = a, 0 \leq t \leq T\}$$

überzogen und die Lösungsfunktion $H(x_i, t)$ durch eine Funktion $w_i(t)$ approximiert. Wir erhalten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für $w_i(t)$.

- Die Motivation liegt darin begründet, dass die Zeitschrittweite groß gewählt werden sollte, wenn sich die Lösung nur wenig verändert, und klein, wenn die Lösung große zeitliche Änderungen aufweist.

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung (1)

- Approximiert man in der Wärmeleitungsgleichung nur u_{xx} durch Differenzenquotienten auf einem Gitter der Schrittweite $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \dots, N - 1$, so erhält man ausgehend von der Darstellung

$$u_t(x_i, t) = \frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)) + O(h^2)$$

die Approximationen $w_i(t)$ als Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$w_i'(t) = \frac{1}{h^2} (w_{i+1}(t) - 2w_i(t) + w_{i-1}(t)), \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung (2)

- Darstellung als **Anfangswertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen** in den Unbekannten

$$w(t) = (w_1(t), \dots, w_{N-1}(t))^T$$

$$w'(t) = -\frac{1}{h^2} Gw(t) + d(t), \quad 0 < t < T, \quad w(0) = w_0 \quad (7)$$

$$w_0 = (u_0(-a+h), u_0(-a+2h), \dots, u_0(a-h))^T$$

$$d(t) = \left(\frac{g_1(t)}{h^2}, 0, \dots, 0, \frac{g_2(t)}{h^2} \right)^T$$

mit der Tridiagonalmatrix $G = \text{diag}(-1, 2, -1)$

- Da G symmetrisch ist, können wir (7) mittels Hauptachsentransformation **entkoppeln**. Es gibt eine orthogonale Matrix V mit $G = V^T D V$, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$ ist.

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung (3)

- Die Transformierte $z := Vw$ löst die DGL

$$\begin{aligned} z'(t) &= Vw'(t) = V \left(-\frac{1}{h^2} V^T D V w(t) + d(t) \right) \\ &= -\frac{1}{h^2} D z(t) + V d(t), \end{aligned}$$

d.h. komponentenweise

$$z'_i(t) = -\frac{\gamma_i}{h^2} z_i(t) + (Vd(t))_i, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

- Es genügt daher, die Testgleichung

$$y'(t) = \lambda y(t) + f(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0 \quad (8)$$

zu betrachten.

- Wegen $\gamma_i > 0$ und $h \ll 1$ ist $\lambda = -\frac{\gamma_i}{h^2} \ll -1$.

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung (4)

- Die analytische Lösung von (8) ist in Abhängigkeit vom Anfangswert y_0 gegeben durch

$$y(t; y_0) = \exp(\lambda t) \left(\int_0^t \exp(-\lambda \tau) f(\tau) d\tau + y_0 \right).$$

- Wegen $\frac{\partial y(t; y_0)}{\partial y_0} = \exp(\lambda t) \ll 1$ ist die Abbildung $y_0 \mapsto y(t; y_0)$ gut konditioniert und für späte Endzeitpunkte sogar extrem gut konditioniert. Dies bedeutet, dass ein Anfangsfehler über die Zeit mit dem Faktor $\exp(\lambda t)$ schnell gedämpft wird. Man spricht von einem *steifen* System.

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (1)

- Für eine genügend glatte Funktion g führt die Wahl von $f(t) := -\lambda g(t) + g'(t)$ in (8) auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0. \quad (9)$$

- Ein Beispiel für Gleichung (9) entsteht durch Diskretisierung der um eine Inhomogenität $f(x, t)$ erweiterten Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (-a, a), \quad 0 < t < T,$$

mit den Randbedingungen

$$u(-a, t) = g_1(t), \quad u(a, t) = g_2(t), \quad 0 < t < T$$

und dem Anfangswert

$$u(x, 0) = \frac{a+x}{2a} g_2(0) + \frac{a-x}{2a} g_1(0), \quad x \in [-a, a],$$

mit Funktionen $g_1, g_2 \in C^1([0, \infty))$ und der Inhomogenität

$$f(x, t) = \frac{a+x}{2a} g_2'(t) + \frac{a-x}{2a} g_1'(t).$$

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (2)

- Die analytische Lösung der obigen inhomogenen Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{a+x}{2a}g_2(t) + \frac{a-x}{2a}g_1(t).$$

- Die vertikale Linienmethode mittels zentraler Differenzen führt auf

$$w'(t) = -\frac{1}{h^2}Gw(t) + b'(t) + d(t),$$

wobei w, b, d Werte in \mathbb{R}^{N-1} annehmen, $w_i(t)$ die Funktion $u(x_i, t)$ approximiert und

$$b_i(t) = \frac{a+x_i}{2a}g_2(t) + \frac{a-x_i}{2a}g_1(t), \quad d(t) = \frac{1}{h^2}(g_1(t), 0, \dots, 0, g_2(t))^T.$$

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (3)

- Für hinreichend feine Diskretisierung ist $b_1 \approx h^2 d_1$ und $b_{N-1} \approx h^2 d_{N-1}$, so dass

$$-\frac{1}{h^2} Gw + d \approx -\frac{1}{h^2} \left(Gw - I(b_1, 0, \dots, 0, b_{N-1})^T \right)$$

gilt.

- Ersetzen wir $(b_1, 0, \dots, 0, b_{N-1})^T$ durch den Vektor b sowie I durch G , erhalten wir als Approximation das erweiterte System

$$w'(t) = -\frac{1}{h^2} G(w - b) + b'(t).$$

- Diagonalisierung von G ergibt nun komponentenweise die skalare Testgleichung (9).
- Die analytische Lösung von (9) lautet

$$y(t; y_0) = g(t) + \exp(\lambda t)(y_0 - g(0))$$

und strebt für $t \rightarrow \infty$ mit exponentieller Geschwindigkeit gegen $g(t)$.

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (4)

Stabilität im homogenen Fall, d.h. für $y' = \lambda y$.

- Das explizite Eulerverfahren $y_{j+1} = y_j + s\lambda y_j$ mit den Approximationen y_j für $y(t_j)$ und der Schrittweite $s > 0$ führt auf $y_j = (1 + \lambda s)^j y_0$. Für die Stabilitätsbedingung $|1 + \lambda s| < 1$ muss die Schrittweite durch $s < \frac{2}{\lambda} \ll 1$ beschränkt sein. Daher ist das explizite Verfahren nicht geeignet.
- Das implizite Eulerverfahren $y_{j+1} = y_j + s\lambda y_{j+1}$ führt auf $y_j = (1 - \lambda s)^{-j} y_0$ und ist somit wegen $\frac{1}{1-s\lambda} < 1$ für alle Schrittweiten $s > 0$ stabil.
- Ebenfalls stabil ist die Trapezregel (Analogon zu Crank-Nicolson) $y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}s\lambda(y_j + y_{j+1})$. Sie führt auf die Rekursion $y_{j+1} = \frac{1+s\lambda/2}{1-s\lambda/2}y_j$, und es gilt $\frac{1+s\lambda/2}{1-s\lambda/2} < 1$. Es liegt jedoch keine Fehlerdämpfung für $\lambda \rightarrow -\infty$ vor.

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (5)

Fehlerbetrachtung im inhomogenen Fall, d.h. für

$$y' = \lambda(y - g) + g'.$$

- Das implizite Euler-Verfahren lautet

$$y_{j+1} = y_j + z(y_{j+1} - g(t_{j+1})) + sg'(t_{j+1}),$$

wobei $z = s\lambda$ und $t_j = js$.

- Für den globalen Fehler $E_j := y_j - g(t_j)$ erhalten wir durch Taylorentwicklung von $g(t_{j+1})$ und $g'(t_{j+1})$ die Fehlerrekursion

$$E_{j+1} = R(z)E_j + e_{j+1}$$

mit der Stabilitätsfunktion $R(z) = \frac{1}{1-z}$ und dem lokalen Fehler

$$e_{j+1} = R(z)\frac{s^2}{2}g''(t_j) + O(s^3).$$

- Der globale Fehler liegt in der Größenordnung des lokalen Fehler, $O(s^2/z)$, also besser als die klassische Ordnung 1.

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (6)

ROW-Verfahren (Rosenbrock, Wanner) als Beispiel linear-impliziter Verfahren

- ROW-Verfahren stellen ein stabile Verfahren zur Lösung von

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0$$

dar, die die Konvergenzordnung 2 erreichen können.

- Ausgangspunkt bilden Runge-Kutta-Verfahren der Gestalt

$$y_{j+1} = y_j + s \sum_{l=1}^n b_l f(\eta_l)$$

mit Gewichten b_l und Stufen η_l dar, die

$$\sum_{l=1}^n b_l = 1 \text{ und } \eta_l = y_j + s \sum_{m=1}^l a_{lm} f(\eta_m)$$

erfüllen.

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (7)

ROW-Verfahren

- Mit den Hilfsvariablen $k_l := f(\eta_l)$ erhalten wir das Verfahren

$$k_l = f \left(y_j + s \sum_{m=1}^{l-1} a_{lm} k_m + s a_{ll} k_l \right), \quad l = 1, \dots, n,$$

$$y_{j+1} = y_j + s \sum_{l=1}^n b_l k_l.$$

- Wir lösen die Gleichung, indem wir für gegebene k_1, \dots, k_{l-1} die nichtlineare Gleichung $k_l = \Phi(k_l)$, wobei $\Phi(k_l)$ die rechte Seite bezeichnet, mit dem Newton-Verfahren lösen.

$$\left(I - \frac{d\Phi}{dy}(k_l^{(i)}) \right) (k_l^{(i+1)} - k_l^{(i)}) = \Phi(k_l^{(i)}) - k_l^{(i)}.$$

Mit der Approximation $\frac{d\Phi}{dy}(k_l) \approx s a_{ll} \frac{df}{dy}(y_j)$ und $\gamma := a_{ll}$ erhalten wir

$$\left(I - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) \right) k_l^{(i+1)} = f \left(y_j + s \sum_{m=1}^{l-1} a_{lm} k_m + s\gamma k_l^{(i)} \right) - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) k_l^{(i)}.$$

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (8)

ROW-Verfahren

- Oft genügt ein einziger Iterationsschritt. Wählt man den Startwert $k_l^{(0)} = \sum_{m=1}^{l-1} l - 1 c_{lm} k_l / \gamma$ und setzt $\alpha = a_{lm} + c_{lm}$, $\beta_{lm} = -c_{lm}$, so führt dies auf das Verfahren

$$\begin{aligned} \left(I - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) \right) k_l &= f \left(y_j + s \sum_{m=1}^{l-1} \alpha_{lm} k_m \right) - s \frac{df}{dy}(y_j) \sum_{m=1}^{l-1} \beta_{lm} k_m, \\ y_{j+1} &= y_j + \sum_{l=1}^n b_l k_l \end{aligned} \quad (10)$$

mit zu spezifizierenden Konstanten γ , α_{lm} , β_{lm} und b_l .

- Je Integrationsschritt ist nur eine LR-Zerlegung der Matrix $I - s\gamma \frac{df}{dy}$ nötig.

Modellproblem für eine semidiskretisierte DGL (9)

ROW-Verfahren

- Die optimale Fehlerordnung 2 ergibt sich für das **linear-implizite Euler-Verfahren**, d.h. $n = 1$, $b_1 = 1$, $\gamma = 1$ und

$$y_{j+1} = y_j + sk, \quad \left(I - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) \right) k = f(y_j)$$

mit der Stabilitätsfunktion $R(z) = \frac{1}{1-z}$ und dem lokalen Fehler $e_{j+1} = -\frac{1}{2}s^2 g''(t_j) + O(s^2/z)$.

- Matlab stellt das ROW-Verfahren ode23s als Spezialfall von (10) mit $n = 2$, $\gamma = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$, $\alpha_{21} = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = -\gamma$, $b_1 = 0$ und $b_2 = 1$ bereit.

$$\begin{aligned} \left(I - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) \right) k_1 &= f(y_j) - s \frac{df}{dy}(y_j), \\ \left(I - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) \right) k_2 &= f\left(y_j + s \frac{k_1}{2}\right) - s\gamma \frac{df}{dy}(y_j) k_1, \\ y_{j+1} &= y_j + sk_2 \end{aligned}$$

ode23s hat die Ordnung 2 und weist eine gute Fehlerdämpfung auf.

Beispiel: asiatische Option (1)

- Auszahlung eines arithmetic-average-strike call:

$$C(T) = \left(S(T) - \frac{1}{T} \int_0^T S(\tau) d\tau \right)^+$$

- parabolische Differentialgleichung für den Optionspreis:

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S + SV_I - rV = 0, \quad S, I > 0, 0 < t < T,$$

wobei $I(t) = \int_0^t S(\tau) d\tau$ ist.

- Setze $H := \frac{V}{S}$ und $R := \frac{I}{S}$. Dann erfüllt H die DGL

$$H_t + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 H_{RR} + (1 - rR) H_R = 0, \quad R > 0, 0 < t < T,$$

- ▶ mit der Endbedingung $H(R, T) = (1 - \frac{R}{T})^+, R > 0$,
- ▶ und den Randbedingungen $H(R, t) \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$ und $H_t + H_R = 0$ für $R = 0, 0 < t < T$.

Beispiel: asiatische Option (2)

- Wert des arithmetic-average-strike call: $V(S, I, t) = S \cdot H(\frac{I}{S}, t)$
- Da wir die DGL nur auf einem beschränkten Gebiet $[0, a] \times [0, T]$ mit $a \gg 1$ betrachten, modifizieren wir die Randbedingung für $R \rightarrow \infty$ zu $H(a, t) = 0$, $0 < t < T$.
- Diskretisierung im Ort: Setze $R_i := ih$ mit $hN = a$ und $H_i(t) = H(x_i, t)$.
- diskretisierte DGL:

$$H'_i = -\frac{\sigma^2 R_i^2}{2h^2}(H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}) - \frac{1 - rR_i}{2h}(H_{i+1} - H_{i-1}) + O(h^2)$$

- ▶ mit den Endwerten $H_i(T) = (1 - \frac{R_i}{T})^+$,
- ▶ den Randbedingungen $H_N = 0$ und

$$H'_0 + \frac{1}{2h}(4H_1 - H_2 - 3H_0) + O(h^2).$$

- ▶ *Anmerkung.* Die Randbedingung an $R = 0$ ist damit in der gleichen Ordnung $O(h^2)$ diskretisiert wie die DGL.

$$4H_1 = 4H_0 + 4hH_R(0, \cdot) + 2h^2H_{RR}(0, \cdot) + O(h^3)$$

$$H_2 = H_0 + 2hH_R(0, \cdot) + 2h^2H_{RR}(0, \cdot) + O(h^3)$$

Beispiel: asiatische Option (3)

Mit $y := (H_0, H_1, \dots, H_{N-1})^T$ lässt sich das Endwertproblem darstellen als

$$y' = My, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$M_{11} = \frac{3}{2h} \quad M_{12} = \frac{1}{2h}(-4, 1, 0, \dots, 0)$$

$$M_{21} = \left(-\frac{\sigma^2}{2h^2} R_1^2 + \frac{1}{2h}(1 - rR_1) \right) (1, 0, \dots, 0)^T$$

$$M_{22} = \frac{\sigma^2}{2h^2} \begin{pmatrix} R_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{N-1}^2 \end{pmatrix} \cdot \text{diag}(-1, 2, -1) \\ - \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} 1 - rR_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 - rR_{N-1}^2 \end{pmatrix} \cdot \text{diag}(-1, 0, -1)$$

und den Endwerten $H_i(T) = (1 - \frac{R_i}{T})^+$.

Beispiel: Basket-Optionen (1)

Wir betrachten eine Call-Option auf ein Portfolio aus zwei Aktien S_1 und S_2 mit Korrelation ρ . Der Optionspreis genügt der parabolischen DGL

$$V_t + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 S_1^2 V_{S_1 S_1} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 V_{S_1 S_2} + \sigma_2^2 S_2^2 V_{S_2 S_2}) + r(S_1 V_{S_1} + S_2 V_{S_2}) - rV = 0, \quad S_1, S_2 > 0, 0 < t < T,$$

mit der **Endbedingung** $V(S_1, S_2, T) = (\alpha_1 S_1(T) + \alpha_2 S_2(T) - K)^+$, wobei α_i , $i = 1, 2$ die Portfoliogewichte sind, und den **Randbedingungen**

- $S_1 = 0, S_2 \in (0, \infty)$: Das Auszahlungsprofil $\alpha_2(S_2 - \frac{K}{\alpha_2})^+$ hat den Wert $V(0, S_2, t) = \alpha_2 \left(S_2 \Phi(d_1) - \frac{K}{\alpha_2} e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \right)$ mit
$$d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_2 S_2}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_2 \sqrt{T-t}}.$$
- $S_2 = 0, S_1 \in (0, \infty)$: $V(S_1, 0, t) = \alpha_1 \left(S_1 \Phi(\tilde{d}_1) - \frac{K}{\alpha_1} e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_2) \right)$ mit
$$\tilde{d}_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_1 S_1}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1 \sqrt{T-t}}$$
- $S_1 \rightarrow \infty, S_2 \in (0, \infty)$: $\lim_{S_1 \rightarrow \infty} (V(S_1, S_2, t) - \alpha_1 S_1) = e^{-r(T-t)}(\alpha_2 S_2 - K)$
- $S_2 \rightarrow \infty, S_1 \in (0, \infty)$: $\lim_{S_2 \rightarrow \infty} (V(S_1, S_2, t) - \alpha_2 S_2) = e^{-r(T-t)}(\alpha_1 S_1 - K)$

Beispiel: Basket-Optionen (2)

- Mit den Transformationen $v := \frac{V}{K}$, $x_i := \frac{1}{\sigma_i} \ln\left(\frac{S_i}{K}\right)$, $i = 1, 2$ erhalten wir unter Beachtung von

$$V_t = K v_t, \quad V_{S_i} = \frac{K}{\sigma_i S_i} v_{x_i},$$

$$V_{S_i S_i} = \frac{K}{\sigma_i^2 S_i^2} (v_{x_i x_i} - \sigma_i v_{x_i}), \quad V_{S_1 S_2} = \frac{K}{\sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2} v_{x_1 x_2}$$

die Advektions-Diffusions-Reaktionsgleichung

$$v_t + \underbrace{\operatorname{div}(R \nabla v)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{k \cdot \nabla v}_{\text{Advektion}} - \underbrace{rv}_{\text{Reaktion}} = 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, 0 < t < T,$$

$$\text{mit } R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{pmatrix} \text{ und } k = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{2} \\ \frac{r}{\sigma_2} - \frac{\sigma_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Basket-Optionen (3)

- End- und Randbedingungen

$$v(x_1, x_2, T) = (\alpha_1 e^{\sigma_1 x_1} + \alpha_2 e^{\sigma_2 x_2} - 1)^+$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} v(x_1, x_2, t) = \alpha_2 e^{\sigma_2 x_2} \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} v(x_1, x_2, t) = \alpha_1 e^{\sigma_1 x_1} \Phi(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)} \Phi(\tilde{d}_2)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} (v(x_1, x_2, t) - \alpha_1 e^{\sigma_1 x_1}) = e^{-r(T-t)} (\alpha_2 e^{\sigma_2 x_2} - 1)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} (v(x_1, x_2, t) - \alpha_2 e^{\sigma_2 x_2}) = e^{-r(T-t)} (\alpha_1 e^{\sigma_1 x_1} - 1)$$

$$\text{mit } d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_2 S_2}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma_2^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_2 \sqrt{T-t}} \text{ und } \tilde{d}_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{\alpha_1 S_1}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma_1^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_1 \sqrt{T-t}}.$$

- Wir beschränken uns auf das Gebiet $(-a_1, a_1) \times (-a_2, a_2)$ und ersetzen in den Randbedingungen $x_i \rightarrow \pm\infty$ durch $x_i = \pm a_i$.
- Zur Vereinfachung nehmen wir ferner $a_1 = a_2 = a$ und $\varrho = 0$ an und erhalten damit die DGL

$$\boxed{v_t + \frac{1}{2} \Delta v + k \cdot \nabla v - rv = 0, \quad x_1, x_2 \in (-a, a), 0 < t < T.}$$

Beispiel: Basket-Optionen (4)

- Zur Diskretisierung verwenden wir ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite $h = \frac{2a}{N}$ für ein $N \in \mathbb{N}$:

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} -a + ih \\ -a + jh \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, \dots, N$$

- Der Gradient wird mittels zentraler Differenzen diskretisiert.

$$\nabla_h v(p_{ij}) := \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} v(p_{i+1,j}) - v(p_{i-1,j}) \\ v(p_{i,j+1}) - v(p_{i,j-1}) \end{pmatrix} = \nabla v(p_{ij}) + O(h^2)$$

$$\begin{aligned} k \cdot \nabla v(p_{ij}) &= \frac{k_1}{2h} (v(p_{i+1,j}) - v(p_{i-1,j})) \\ &\quad + \frac{k_2}{2h} (v(p_{i,j+1}) - v(p_{i,j-1})) + O(h^2) \end{aligned}$$

- Diskretisierung des Laplace-Operators

$$\begin{aligned} \Delta_h v(p_{ij}) &= \frac{1}{h^2} (v(p_{i+1,j}) + v(p_{i-1,j}) + v(p_{i,j+1}) + v(p_{i,j-1}) - 4v(p_{ij})) \\ &= \Delta v(p_{ij}) + O(h^2) \end{aligned}$$

Beispiel: Basket-Optionen (5)

Die Berechnung der Approximationen $w_{ij} = w_{ij}(t)$ von $v(p_{ij}) = v(p_{ij}, t)$ durch

$$w'_{ij} + \frac{1}{2} \Delta_h w_{ij} + k \cdot \nabla_h w_{ij} - r w_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N-1$$

zusammen mit den Randbedingungen führt auf ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Dimension $(N-1)^2 \times (N-1)^2$:

$$w' = Aw + d(t), \quad 0 < t < T, \quad w(T) = w_0,$$

in den Unbekannten $w = (w_{ij})$, wobei der Vektor $d(t) \in \mathbb{R}^{(N-1)^2}$ die Randbedingungen und $A \in \mathbb{R}^{(N-1)^2 \times (N-1)^2}$ die Diskretisierungen von Δ_h und ∇_h sowie den Reaktionsterm $-rv$ enthält.

Beispiel: Basket-Optionen (6)

- Der Anteil von A , der die Diskretisierung von Δ_h enthält, ist eine Blocktridiagonalmatrix

$$A_{\Delta_h} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & -I & & 0 \\ -I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & & -I & B \end{pmatrix}$$

mit der Einheitsmatrix I und

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}.$$

- Die Dimension wächst bei feinerer Diskretisierung stark an: Bei 100×100 Gitterpunkten hat die Koeffizientenmatrix die Dimension $10^4 \times 10^4$. Daher sollte man nur die von Null verschiedenen Elemente speichern (in Matlab `sparse`).

Bewertung als freies Randwertproblem (1)

- Es bezeichne $P_A(t, S_t)$ den Preis einer amerikanischen Put-Option und $P_E(t, S_t)$ den Preis einer europäischen Put-Option.
- Da die amerikanische Option mit der Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung mehr Rechte gewährt, gilt $P_A(t, S_t) \geq P_E(t, S_t)$.
- Da $P_E(\cdot, t)$ stetig ist und $P_E(0, t) = Ke^{-r(T-t)}$ gilt, haben wir für $r > 0$ und hinreichend kleines $S > 0$ die Abschätzung

$$P_E(S, t) < K - S = (K - S)^+ \leq P_A(S, t).$$

- Es gibt einen sogenannten **Aufsprungpunkt** S_f , so dass sich die vorzeitige Ausübung für $S < S_f$ lohnt, nicht aber für $S \geq S_f$. Es gilt $0 \leq S_f < K$ und

$$P_A(S, t) = (K - S)^+ = K - S \text{ für } S \leq S_f(t)$$

$$P_A(S, t) > (K - S)^+ \text{ für } S > S_f(t)$$

- S_f hängt von der Zeit ab und wird daher **freier Randwert** genannt.

Bewertung als freies Randwertproblem (2)

- **freies Randwertproblem für die amerikanische Put-Option** mit zum Basiswert proportionalen Dividendenzahlungen D_0

$$S \leq S_f(t) : P(S, t) = K - S$$

$$S > S_f(t) : P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + (r - D_0)P_S - rP = 0$$

mit der Endbedingung $P(S, T) = (K - S)^+$ und den Randbedingungen

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0, \quad P(S_f(t), t) = K - S_f(t), \quad P_S(S_f(t), t) = -1.$$

Die letzte Randbedingung sichert die Stetigkeit in $S_f(t)$ und damit die Arbitragefreiheit.

- **freies Randwertproblem für die amerikanische Call-Option** mit zum Basiswert proportionalen Dividendenzahlungen D_0

$$S \geq S_f(t) : C(S, t) = S - K$$

$$S < S_f(t) : C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + (r - D_0)C_S - rC = 0$$

Formulierung als lineares Komplementaritätsproblem (1)

- Der Preis einer amerikanischen Put-Option erfüllt die **Black-Scholes-Ungleichung**.

$$P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + (r - D_0)SP_S - rP \leq 0.$$

- Das Gleichheitszeichen gilt für $S > S_f(t)$, wenn die Option nicht ausgeübt wird.
- Für $S < S_f(t)$ liefert Einsetzen von $P = K - S$

$$P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS} + (r - D_0)SP_S - rP = -(r - D_0)S - r(K - S) < 0.$$

Für $D_0 = 0$ erhalten wir dabei $-rK < 0$. Für $D_0 > 0$ ergibt sich $D_0 S - rK < D_0 S_f(t) - rK \leq 0$ aus $S_f(t) \leq \min(K, rK/D_0)$.

Formulierung als lineares Komplementaritätsproblem (2)

- Der Wert einer amerikanischen Option ergibt sich als Lösung des **linearen Komplementaritätsproblems**:

$$\begin{aligned}
 (V - \Lambda(S)) \cdot \left(V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - D_0) S V_S - rV \right) &= 0 \\
 - \left(V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + (r - D_0) S V_S - rV \right) &\geq 0 \\
 V - \Lambda(S) &\geq 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$

mit $\Lambda(S) = (K - S)^+$ im Falle eines Puts und $\Lambda(S) = (S - K)^+$ im Falle eines Calls.

- Endwertbedingung: $V(S, T) = \Lambda(S)$
- Randbedingungen

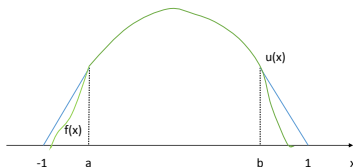
$$\text{Put : } V(0, t) = K, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0$$

$$\text{Call : } V(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} (V(S, t) - S) = 0, \quad 0 < t < T$$

Hindernisproblem (1)

Wir betrachten das Modellproblem, ein Seil, das an den beiden Enden $x = \pm 1$ fixiert ist, so über ein Hindernis zu führen, dass eine minimale Seillänge angenommen wird.

- Gegeben sei ein Hindernis $f \in C^2(-1, 1)$ mit
 - ▶ $f > 0$ in (a, b) ,
 - ▶ $f'' < 0$ in (a, b) ,
 - ▶ $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$.
- Gesucht ist $u \in C^1(-1, 1)$ mit
 - ▶ $u(-1) = 0 = u(1)$,
 - ▶ $u \geq f$ in $(-1, 1)$,
 - ▶ $u = f$ in (a, b) und
 - ▶ $u'' = 0$ in $(-1, a) \cup (b, 1)$.



Hindernisproblem (2)

- Abschnittsweise lassen sich die gewünschten Eigenschaften wie folgt darstellen.
 - ▶ $u > f$ und $u'' = 0$ auf $(-1, a)$
 - ▶ $u'' = f'' < 0$ auf (a, b)
 - ▶ $u > f$ und $u'' = 0$ auf $(b, 1)$
- In der Formulierung als **lineares Komplementaritätsproblem** treten die freien Randbedingungen nicht mehr auf.

Suche $u \in C^1(-1, 1)$ mit

- ▶ $u(-1) = u(1) = 0$,
 - ▶ $-u'' \geq 0$,
 - ▶ $u - f > 0$ und
 - ▶ $u'' \cdot (u - f) = 0$ in $(-1, 1)$.
- Die Formulierung als Lösung der **Variationsungleichung** vermeidet die Verwendung von u'' . Sei $\mathcal{T} := \{v \in C^0(-1, 1) \mid v(-1) = v(1) = 0, v \geq f, v \text{ stückweise } C^1\}$.

Suche $u \in \mathcal{T}$ mit $\int_{-1}^1 u'(v - u)' dx \geq 0$ für alle $v \in \mathcal{T}$.

Hindernisproblem (3)

Lemma

Die Funktion $u \in C^2(-1, 1)$ löst genau dann die Variationsungleichung, wenn sie das lineare Komplementaritätsproblem löst.

Beweis. Sei u eine Lösung des linearen Komplementaritätsproblems. Mittels partieller Integration folgt

$$-\int_{-1}^1 u''(v - f) dx \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{T} \quad \text{und} \quad -\int_{-1}^1 u''(u - f) dx = 0.$$

Subtraktion ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int_{-1}^1 u''(v - u) dx = \int_{-1}^1 u'(v - u)' dx - [u'(v - u)]_{-1}^1 \\ &= \int_{-1}^1 u'(v - u)' dx. \end{aligned}$$

Hindernisproblem (4)

Beweis. (Fortsetzung) Sei u eine Lösung der Variationsungleichung. Dann gilt $u - f \geq 0$ in $(-1, 1)$ nach Voraussetzung. Für $\phi \in C^1(-1, 1)$ mit $\phi(-1) = \phi(1) = 0$ und $\phi \geq 0$ ist $v := \phi + u \in \mathcal{T}$. Partielle Integration liefert

$$0 \leq \int_{-1}^1 u'(v - u)' dx = \int_{-1}^1 u' \phi' dx = - \int_{-1}^1 u'' \phi dx$$

und damit $-u'' \geq 0$. Die Wahl $v := f \in \mathcal{T}$ führt auf

$$0 \leq \int_{-1}^1 u'(f - u)' dx = - \int_{-1}^1 u''(f - u) dx \leq 0$$

und damit auf $u''(u - f) = 0$.

Hindernisproblem (5)

Lemma

Die Funktion $u \in \mathcal{T}$ löst genau dann die Variationsungleichung, wenn sie das Funktional

$$J : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{mit} \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (v')^2 dx$$

minimiert.

Beweis. Seien $u \in \mathcal{T}$ eine Lösung der Variationsungleichung und $v \in \mathcal{T}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (u')^2 dx \\ &= - \int_{-1}^1 u' (v - u)' dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ((u - v)')^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (v')^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (v')^2 dx = J(v). \end{aligned}$$

Hindernisproblem (6)

Beweis. (Fortsetzung)

$u \in \mathcal{T}$ minimiere das Funktional J . Seien $v \in \mathcal{T}$ und $\theta \in (0, 1)$. Dann ist $\phi := u + \theta(v - u) = (1 - \theta)u + \theta v \geq (1 - \theta)f + \theta f = f$ und daher $\phi \in \mathcal{T}$. Wir erhalten

$$0 \leq J(\phi) - J(u) = \theta \int_{-1}^1 u'(v - u)' dx + \frac{\theta^2}{2} \int_{-1}^1 ((v - u)')^2 dx,$$

also

$$\int_{-1}^1 u'(v - u)' dx + \frac{\theta}{2} \int_{-1}^1 ((v - u)')^2 dx \geq 0.$$

Der Grenzübergang $\theta \rightarrow 0$ liefert die Variationsungleichung für alle $v \in \mathcal{T}$.

Hindernisproblem (7)

- Auf dem Gitter $x_i = -1 + ih$, $i = 0, \dots, N$, mit der Schrittweite $h = \frac{2}{N}$ approximieren wir die zweite Ableitung u'' der Lösung des linearen Komplementaritätsproblems durch symmetrische Differenzenquotienten und erhalten mit der Abkürzung $f_i := f(x_i)$ das folgende System für die Näherungen w_i von $u(x_i)$.

$$\begin{aligned}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1})(w_i - f_i) &= 0, \\ -(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) &\geq 0, & 1 \leq i \leq N-1, \\ w_i - f_i &\geq 0, \\ w_0 = w_N &= 0.\end{aligned}$$

- Mit $w := (w_1, \dots, w_{N-1})^T$, $f := (f_1, \dots, f_{N-1})^T$ und $G := \text{diag}(-1, 2, -1)$ erhalten wir das **diskretisierte Komplementaritätsproblem**:

Suche $w \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit

$$(w - f)^T G w = 0. \quad G w \geq 0, \quad w - f \geq 0.$$

Transformation des Komplementaritätsproblems (1)

- Mit den Transformationen $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$ und $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ ergibt sich der transformierte Optionspreis

$$u(x, \tau) = \frac{1}{K} \exp\left(\frac{1}{2}(k_0 - 1)x + \frac{1}{4}(k_0 - 1)^2\tau + k\tau\right) V(S, t),$$

wobei $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ und $k_0 = \frac{2(r-D_0)}{\sigma^2}$ sind.

- Das transformierte Komplementaritätsproblem (11) lautet

$$(u_\tau - u_{xx})(u - f) = 0, \quad u_\tau - u_{xx} \geq 0, \quad u - f \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \tau < T.$$

Dabei bezeichnet f die transformierte Nebenbedingung

$$\text{für Put : } f(x, \tau) = \exp\left(\frac{1}{2}(k_0 - 1)x + \frac{1}{4}(k_0 - 1)^2\tau + k\tau\right) (1 - \exp(x))^+,$$

$$\text{für Call : } f(x, \tau) = \exp\left(\frac{1}{2}(k_0 - 1)x + \frac{1}{4}(k_0 - 1)^2\tau + k\tau\right) (\exp(x) - 1)^+.$$

Transformation des Komplementaritätsproblems (2)

- Endbedingung: $u(x, 0) = f(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$
- Randbedingungen:

$$\text{für Put : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (u(x, \tau) - f(x, \tau)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, \tau) = 0,$$

$$\text{für Call : } \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, \tau) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (u(x, \tau) - f(x, \tau)) = 0,$$

Approximation mittels finiter Differenzen (1)

- Für die Implementierung schränken wir das Lösungsgebiet auf $[-a, a] \times [0, T]$ ein und definieren die äquidistanten Gitterpunkte

$$x_i = -a + ih \quad (i = 0, \dots, N), \quad \tau_j = js \quad (j = 0, \dots, M)$$

mit den konstanten Schrittweiten $h = \frac{2a}{N}$ und $s = \frac{T}{M}$.

- Die Approximation von u_{xx} mit den Differenzen 2. Ordnung und von u_τ mit einer Mischung von Vorwärts- und Rückwärtsrekursion führt auf das Differenzenschema für die Näherungen w_i^j von $u(x_i, t_j)$.

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{s} - (1-\theta) \frac{w_{i-1}^j - 2w_i^j + w_{i+1}^j}{h^2} - \theta \frac{w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}}{h^2} \geq 0,$$

wobei $0 \leq \theta \leq 1$ das Gewicht der Rückwärtsdifferenzen ist.

Approximation mittels finiter Differenzen (2)

- Wir setzen $\alpha := \frac{s}{h^2}$, $w^j := (w_1^j, \dots, w_{N-1}^j)^T$ sowie

$$A = \text{diag}(-\alpha\theta, 2\alpha\theta+1, -\alpha\theta), \quad B = \text{diag}(\alpha(1-\theta), -2\alpha(1-\theta)+1, \alpha(1-\theta))$$

und erhalten damit die Ungleichung

$$Aw^{j+1} \geq Bw^j + d^j,$$

wobei d^j die Randbedingungen enthält.

$$d^j = \begin{pmatrix} \alpha(1-\theta)u(-a, \tau_j) + \alpha\theta u(-a, \tau_{j+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha(1-\theta)u(a, \tau_j) + \alpha\theta u(a, \tau_{j+1}) \end{pmatrix}$$

- Die Ungleichung $u - f \geq 0$ hat die Diskretisierung $w^{j+1} - f^{j+1} \geq 0$ mit $f^{j+1} = (f(x_1, \tau_{j+1}), \dots, f(x_{N-1}, \tau_{j+1}))^T$.

Approximation mittels finiter Differenzen (3)

Mit $b^j := Bw^j + d^j$ hat das diskrete Komplementaritätsproblem die Darstellung:

Suche $w^{j+1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit

- $(Aw^{j+1} - b^j)^T (w^{j+1} - f^{j+1}) = 0,$
- $Aw^{j+1} - b^j \geq 0,$
- $w^{j+1} - f^{j+1} \geq 0.$

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (1)

- Das lineare Komplementaritätsproblem

$$(Aw - b)^T(w - f) = 0, \quad Aw - b \geq 0, \quad w - f \geq 0$$

ist äquivalent zu

$$\min [Aw - b, w - f] = 0. \quad (12)$$

- Lösungsansätze zur iterativen Berechnung von $Aw = b$: Sei $A = D - L - U$ die Zerlegung der positiv definiten Matrix $A = (a_{ij})$ in die Diagonalmatrix D mit den Elementen $a_{ii} > 0$, die untere Dreiecksmatrix $-L$ und die obere Dreiecksmatrix $-U$.

► Jacobi-Verfahren

$$w^{(k+1)} = D^{-1} \left((L + U)w^{(k)} + b \right), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Konvergiert $w^{(k)}$ gegen w , so ist $w = D^{-1}((L + U)w + b)$
bzw. äquivalent $w = (D - L - U)w = b$.

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (2)

- Lösungsansätze zur iterativen Berechnung von $Aw = b$:
 - ▶ **Jacobi-Verfahren** (Fortsetzung). In der Iterationsvorschrift

$$w_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j \neq i} a_{ij} w_j^{(k)} + b_i \right)$$

besteht die Summe nur aus zwei Summanden, falls A Tridiagonalgestalt hat.

- ▶ **Gauß-Seidel-Verfahren**. Wenn wir annehmen, dass $w^{(k+1)}$ eine bessere Approximation als $w^{(k)}$ ist, ist es sinnvoll, $Lw^{(k)}$ durch $Lw^{(k+1)}$ zu ersetzen.

$$w^{(k+1)} = D^{-1} \left(Lw^{(k+1)} + Uw^{(k)} + b \right), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

also

$$w_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} w_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N-1} a_{ij} w_j^{(k)} + b_i \right)$$

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (3)

- Lösungsansätze zur iterativen Berechnung von $Aw = b$:

- ▶ **SOR-Verfahren** (successive overrelaxation).

Für $i = 1, \dots, N - 1$:

- $z_i^{(k)} := a_{ii}^{-1}(Lw^{(k+1)} + Uw^{(k)} + b)_i$,
- $w_i^{(k+1)} := w_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k)} - w_i^{(k)})$.

Für $\omega = 1$ ergibt sich das Gauß-Seidel-Verfahren. Man kann zeigen, dass das SOR-Verfahren für $\omega \in (1, 2)$ gegen die Lösung des linearen Gleichungssystems konvergiert und bei optimaler Wahl von ω weniger Iterationsschritte benötigt, um eine vorgegebene Fehlerschranke zu unterschreiten.

- Das **Projektions-SOR-Verfahren** löst das zu (12) äquivalente Problem $\min [w - D^{-1}(Lw + Uw + b), w - f] = 0$ bzw.

$$w = \max [D^{-1}(Lw + Uw + b), f] .$$

Für $i = 1, \dots, N - 1$:

- ▶ $z_i^{(k)} := a_{ii}^{-1}(Lw^{(k+1)} + Uw^{(k)} + b)_i$,
- ▶ $w_i^{(k+1)} := \max [w_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k)} - w_i^{(k)}), f_i] .$

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (4)

Satz (Cryer)

Seien $A \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, $b, f, \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ und $1 < \omega < 2$. Dann hat das lineare Komplementaritätsproblem (12) eine eindeutig bestimmte Lösung w , und die Folge der Näherungen $w^{(k)}$ des Projektions-SOR-Verfahrens konvergieren gegen w .

Lemma

Das lineare Komplementaritätsproblem (12) ist äquivalent zu dem folgenden Minimierungsproblem:

Suche $w \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $w \geq f$ und $J(w) = \min_{v \geq f} J(v)$, wobei $J(v) = \frac{1}{2} v^T A v - b^T v$ ist.

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (5)

Beweis des Lemmas. Sei w eine Lösung von (12) und $v \geq f$. Da A positiv definit ist, folgt

$$\begin{aligned} J(v) - J(w) &= \frac{1}{2}(v - w)^T A(v - w) - (Aw - b)^T(w - f) + (v - f)^T(Aw - b) \\ &\geq -(Aw - b)^T(w - f) + (v - f)^T(Aw - b) \geq 0. \end{aligned}$$

Also löst w das Minimierungsproblem.

Sei umgekehrt w eine Lösung des Minimierungsproblems. Dann gilt $w - f \geq 0$ nach Voraussetzung.

Wir zeigen $Aw - b \geq 0$. Setze $v := w + \varepsilon e_k$, wobei $\varepsilon > 0$ und e_k der k -te Einheitsvektor ist. Dann ist $v \geq w \geq f$ und

$$0 \leq J(v) - J(w) = \varepsilon e_k^T Aw + \frac{1}{2}\varepsilon^2 e_k^T A e_k - \varepsilon b^T e_k = \varepsilon(Aw - b)_k + \frac{\varepsilon^2}{2} a_{kk}.$$

Division durch ε und Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefern $0 \leq (Aw - b)_k$.

Wir zeigen $(Aw - b)^T(w - f) = 0$. Angenommen, es gelte $(Aw - b)_k > 0$ und $w_k > f_k$ für ein k . Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $v := w - \varepsilon e_k \geq f$ gilt. Dann ist

$$0 \leq J(v) - J(w) = -\varepsilon(Aw - b)_k + \frac{\varepsilon^2}{2} a_{kk},$$

und die rechte Seite ist für hinreichend kleines ε negativ. Widerspruch.

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (6)

Beweis des Satzes von Cryer.

Eindeutigkeit. Seien w_1 und w_2 zwei Lösungen von (12). Mit der positiven Definitheit von A folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= J(w_1) - J(w_2) \\
 &= \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^T A(w_1 - w_2) - (Aw_2 - b)^T(w_2 - f) + (w_1 - f)^T(Aw_2 - b) \\
 &= \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^T A(w_1 - w_2) + (w_1 - f)^T(Aw_2 - b) \\
 &\geq \frac{1}{2}(w_1 - w_2)^T A(w_1 - w_2) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Also gilt $(w_1 - w_2)^T A(w_1 - w_2) = 0$. Da A positiv definit ist, muss $w_1 = w_2$ sein.

Existenz.

1) Für alle i, k existiert ein $\omega_{ik} \in [0, \omega]$, so dass $w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)} + \omega_{ik}(z_i^{(k)} - w_i^{(k)})$ gilt.

- Ist $f_i \leq w_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k)} - w_i^{(k)})$, so ergibt die Iterationsvorschrift des Projektions-SOR-Verfahrens $w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k)} - w_i^{(k)})$, und wir können $\omega_{ik} = \omega$ wählen.
- Ist $f_i > w_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k)} - w_i^{(k)})$, so ist gemäß der Iterationsvorschrift $w_i^{(k+1)} = f_i$.
Wegen $w_i^{(k)} \geq f_i$ muss also $z_i^{(k)} - w_i^{(k)} < 0$ gelten. Daher ist $\omega_{ik} := \frac{w_i^{(k)} - f_i}{w_i^{(k)} - z_i^{(k)}}$ wohldefiniert und erfüllt $0 \leq \omega_{ik} \leq \omega$ sowie $w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)} + \omega_{ik}(z_i^{(k)} - w_i^{(k)})$.

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (7)

Beweis des Satzes von Cryer.

Existenz (Fortsetzung).

2) Sei $w^{(k,i)}$ der nach dem i -ten Teilschritt des Projektions-SOR-Verfahrens erhaltene Vektor, d.h.

$$w^{(k,i)} = (w_1^{(k+1)}, \dots, w_{i-1}^{(k+1)}, w_i^{(k)}, \dots, w_{N-1}^{(k)})^T.$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $(J_j)_j$ konvergiert, wobei $J_j = J(w^{(k,i)})$ und $j = (N-1)(k-1) + i$, $K \geq 1$, $0 \leq i \leq N-1$ gilt. Dazu bemerken wir

- $w^{(k+1,0)} := (w_1^{(k)}, \dots, w_{N-1}^{(k)})^T = w^{(k,N)}$,
- $w^{(k,i)} - w^{(k,i-1)} = (0, \dots, 0, w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)}, 0, \dots, 0)^T = (w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)})e_i$,
wobei e_i den i -ten Einheitsvektor bezeichnet,
- $a_{ii}(z_i^{(k)} - w_i^{(k)}) = -(Aw^{(k,i)} - b)_i$ (nach der Iterationsvorschrift).

Im Fall $\omega_{ik} > 0$ gilt für $\omega < 2$

$$\begin{aligned} J_j - J_{j-1} &= J(w^{(k,i)}) - J(w^{(k,i-1)}) \\ &= \frac{1}{2}(w^{(k,i)} - w^{(k,i-1)})^T A(w^{(k,i)} - w^{(k,i-1)}) \\ &\quad + (w^{(k,i)} - w^{(k,i-1)})^T A(w^{(k,i)} - b) \\ &= \frac{1}{2}a_{ii}(w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)})^2 - (w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)})a_{ii}(z_i^{(k)} - w_i^{(k)}) \\ &= -\frac{a_{ii}}{2} \left(\frac{2}{\omega_{ik}} - 1 \right) (w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)})^2 \leq -\frac{a_{ii}}{2} \left(\frac{2}{\omega} - 1 \right) (w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (8)

Beweis des Satzes von Cryer.

Existenz .

2) (Fortsetzung). Im Fall $\omega_{ik} = 0$ folgt $w_i^{(k+1)} = w_i^{(k)}$ und damit $w^{(k,i)} = w^{(k,i-1)}$ sowie $J_j - J_{j-1} = 0$. Da A symmetrisch und positiv definit ist, ist $(J_j)_j$ nach unten beschränkt. Wir schließen, dass die monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(J_j)_j$ konvergiert.

3) Wir zeigen, dass $(w_i^{(k)})_k$ konvergiert. Aus Schritt 2 wissen wir für $\omega_{ik} > 0$

$$\begin{aligned} |w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)}| &= \left(\frac{2}{a_{ii}(2/\omega_{ik} - 1)} (J_{j-1} - J_j) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{2}{\min_i a_{ii}(2/\omega_{ik} - 1)} (J_{j-1} - J_j) \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$ bzw. $j = j(k) \rightarrow \infty$. Folglich ist $(w_i^{(k)})_k$ für alle i eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und damit konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert mit w_i .

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (9)

Beweis des Satzes von Cryer.

Existenz .

4) Wir zeigen, dass der Vektor $w = (w_1, \dots, w_{N-1})^T$ das lineare Komplementaritätsproblem (12) löst. Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in der Iterationsvorschrift liefert

$$z_i := \lim_{k \rightarrow \infty} z_i^{(k)} = a_{ii}^{-1}(Lw + Uw + b)_i = w_i - a_{ii}^{-1}(Aw - b)_i$$

und

$$w_i = \max(w_i + \omega(z_i - w_i, f_i) = \max(w_i - \omega a_{ii}^{-1}(Aw - b)_i, f_i).$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\min(\omega a_{ii}^{-1}(Aw - b)_i, w_i - f_i) = 0,$$

die äquivalent zu (12) ist.

Lösungsverfahren für das lineare Komplementaritätsproblem (10)

Implementierung des Projektions-SOR-Verfahrens

- $w_i^0 := f(x_i, 0)$, $i = 0, 1, \dots, N$
- Für alle Zeitschritte $j = 1, \dots, M$:
 - ▶ $f_i^j := f(x_i, \tau_j)$, $i = 0, 1, \dots, N$
 - ▶ Definiere die Randwerte $w_0^j := f_0^j$, $w_N^j := f_N^j$.
 - ▶ Übernehme die Werte $w_i^j := w_i^{j-1}$, $i = 1, \dots, N - 1$ aus dem letzten Zeitschritt.
 - ▶ Für $i = 1, \dots, N - 1$ wiederhole:
 - Definiere $b_i = (Bw^j + d^j)_i$.
 - Wiederhole die Iteration, bis Konvergenz erreicht ist:

$$z_i^j := \frac{1}{2\alpha\theta + 1} \left(\alpha\theta(w_{i-1}^j + w_{i+1}^j) + b_i \right)$$

$$w_i^j := \max \left[w_i^j + \omega(z_i^j - w_i^j), f_i^j \right]$$

- Transformiere zurück in die Originalvariablen.

Prinzip der gewichteten Residuen (1)

- Die äquidistanten Gitter bei finiten Differenzen-Verfahren sind einfach zu implementieren, aber im Falle von unterschiedlich steilen Lösungsgradienten nicht flexibel genug.
- Bei finiten Elemente-Verfahren erfolgt die Diskretisierung durch eine Menge von Teilintervallen und zugehörigen Funktionensegmenten, die dann abschnittsweise zusammengesetzt werden.
- Die Bestimmung der Lösungsapproximation erfolgt bei finiten Elemente-Verfahren oft über Integrale, so dass die Anforderungen an die Differenzierbarkeit geringer sind.

Prinzip der gewichteten Residuen (2)

- Sei L ein Differentialoperator. Der Ansatz für eine Näherung w der Lösung u der Differentialgleichung $Lu = f$ besteht in einer Linearkombination

$$w = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i,$$

wobei die φ_i vorgegebene Basisfunktionen sind und die Koeffizienten so bestimmt werden, dass für das **Residuum** $R := Lw - f$

$$\int_{\Omega} R \psi_j dx = 0$$

für vorgegebene Gewichtsfunktionen $\psi_j, j = 1, \dots, N$, gilt.

- Ist L ein linearer Differentialoperator, so führt dies auf das lineare Gleichungssystem

$$r_j := \int f \psi_j = \sum_{i=1}^N c_i \int (L\phi_i) \psi_j =: \sum_{i=1}^N c_i a_{ji},$$

d.h. $Ac = r$ mit $A = (a_{ij})$.

Gewichtsfunktionen und Basisfunktionen

Beispiele für Gewichtsfunktionen

- **Galerkin-Methode:** Wähle $\psi_j := \varphi_j$. Dann gilt $a_{ij} = \int (L\varphi_j)\varphi_i$
- **Kollokation:** Wähle $\psi_j := \delta_{x_j}$ (Dirac-Funktional). Dann resultiert das Gleichungssystem $Lw(x_j) = f(x_j)$.
- **least squares:** Wähle $\psi_j := \frac{\partial R}{\partial c_j}$. Zur Minimierung von $\int (R(c_1, \dots, c_n))^2$ ist das notwendige Kriterium $\int R \frac{\partial R}{\partial c_j} = 0$ für alle j zu erfüllen.
- **Partition:** Wähle $\psi_j := 1_{\Omega_j}$ für eine gegebene Partition $\bigcup_{j=1}^N \Omega_j$ des Grundgebiets.

Beispiele für Basisfunktionen

- Hut-Funktionen
- Splines

Galerkin-Ansatz für das Hindernisproblem (1)

- Die Idee besteht darin, die Variationsungleichung nicht im Raum \mathcal{T} , sondern in dem kleineren Raum

$$\mathcal{K} := \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} u_i \varphi_i(x) \mid u_i \in \mathbb{R}, u_i \geq f_i, 1 \leq i \leq N-1 \right\}$$

der bezüglich des Gitters $x_i = -1 + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, stückweise affinen Funktionen zu lösen:

Suche $u \in \mathcal{K}$ mit $\int_{-1}^1 u'(v - u)' dx \geq 0$ für alle $v \in \mathcal{K}$.

- \mathcal{K} hat die Dimension $N - 1$. Eine Basis bilden die Hutfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ mit

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & ; \quad x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}; & x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Galerkin-Ansatz für das Hindernisproblem (2)

- Für $u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \varphi_i(x)$ und $v(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i(x)$ lautet die Variationsungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{N-1} u_i \varphi_i'(x) \sum_{j=1}^{N-1} (v_j - u_j) \varphi_j'(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} u_i (v_j - u_j) \int_{-1}^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx. \end{aligned}$$

- Es gilt $\int_{-1}^1 \varphi_i'(x) \varphi_{i\pm 1}'(x) dx = -\frac{1}{h}$, $\int_{-1}^1 (\varphi_i'(x))^2 dx = \frac{2}{h}$ und $\int_{-1}^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx = 0$ für $|i - j| \geq 2$, also

$$\int_{-1}^1 \varphi_i' \varphi_j' dx = \frac{1}{h} G_{ij}$$

mit $G = \text{diag}(-1, 2, -1)$.

Galerkin-Ansatz für das Hindernisproblem (3)

- Damit erhalten wir die **diskrete Variationsungleichung**:
Suche $u \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $u \geq f$ und $u^T G(v - u) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $v \geq f$, wobei $f = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$ ist.
- Eine Verbesserung der Approximation kann nicht nur durch eine verkleinerte Schrittweite, sondern auch durch eine geeignete Wahl von \mathcal{K} erfolgen.

Satz

Das diskrete Komplementaritätsproblem und die diskrete Variationsungleichung sind äquivalente Probleme.

Beweis. Sei u eine Lösung des diskreten Komplementaritätsproblems. Dann gilt für alle $v \geq f$

$$\begin{aligned} u^T G(v - u) &= u^T G(v - f) - u^T G(u - f) \\ &= (Gu)^T(v - f) - (u - f)^T Gu \\ &= (Gu)^T(v - f) \geq 0. \end{aligned}$$

Galerkin-Ansatz für das Hindernisproblem (4)

Beweis. (Fortsetzung)

Sei umgekehrt u eine Lösung der diskreten Variationsungleichung.

Wir zeigen zunächst $G u \geq 0$. Angenommen, es gäbe ein k mit $(G u)_k < 0$.

Setze $v_k := u_k + 1$ und $v_i := u_i$ für alle $i \neq k$. Dann ist $v \geq u \geq f$, und wegen der Symmetrie von G erhalten wir den Widerspruch

$$0 \leq u^T G(v - u) = \sum_{i,j=1}^{N-1} G_{ij} u_i (v_j - u_j) = \sum_{i=1}^{N-1} G_{ik} u_i = (G u)_k < 0.$$

Wir zeigen $(u - f)^T G u = 0$. Zum einen ergibt $G u \geq 0$ und $u \geq f$ sofort $(u - f)^T G u \geq 0$. Zum anderen führt die Wahl von $v = f$ in der Variationsungleichung auf

$$u^T G(f - u) \geq 0$$

.

Amerikanische und Bermuda-Optionen (1)

- Während amerikanische Optionen zu jedem Zeitpunkt ausgeübt werden können, besteht bei Bermuda-Optionen nur an endlich vielen Zeitpunkten die Möglichkeit der vorzeitigen Ausübung.
- In einer Simulation können daher die Preise von amerikanischen Optionen durch die Preise von Bermuda-Optionen approximiert werden.
- Der Zeitpunkt der vorzeitigen Ausübung wird durch eine Stoppzeit τ beschrieben. Bezeichnet P_τ das Auszahlungsprofil für die fest gewählte Ausübungsstrategie τ , etwa $P_\tau = (K - S_\tau)^+$ für den amerikanischen Put, so ist der Optionspreis für diese Auszahlungsstrategie gegeben durch $\mathbb{E}(\exp(-r\tau)P_\tau)$.
- Der Verkäufer sollte beim Pricing berücksichtigen, dass der Käufer die Option optimal ausübt. Somit ist der Preis der amerikanischen Option gleich dem Supremum über alle Stoppzeiten τ mit $\tau \leq T$:

$$\sup_{\tau \in S[0, T]} \mathbb{E}(\exp(-r\tau)P_\tau)$$

Amerikanische und Bermuda-Optionen (2)

- Es gibt keine Hedging-Strategie, die zu allen Zeiten den Wert der Auszahlung der amerikanischen Option im Falle der vorzeitigen Ausübung hat.³
- Man kann zeigen, dass es eine zulässige Handelsstrategie mit Anfangswert $\mathbb{E}(\exp(-r\tau)P_\tau)$ gibt, so dass zu allen Zeitpunkten $t \in [0, T]$ das Vermögen größer gleich P_t ist.⁴

Definition

Eine **amerikanische Option** besteht aus einem progressiv messbaren Prozess $(P_t)_{t \in [0, T]}$ mit $P_t \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$ und der finalen Auszahlung P_τ zum zufälligen Auszahlungszeitpunkt τ gemäß der Ausübungsstrategie des Halters. Wir nehmen an, dass τ eine Stoppzeit ist und $\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} (P_s)^q) < \infty$ für ein $q > 1$ gilt.

³Wenn im Falle eines Puts der Wert des Underlyings unter den Strike sinkt, wäre der Wert eines solchen Hedging-Portfolios gleich 0, der Wert der amerikanischen Option jedoch nicht.

⁴Vgl. Karatzas, Shreve, Methods of Mathematical Finance.

Pricing amerikanischer Optionen (1)

Definition

- a) Ein Portfolioprozess π mit zugehörigem Wertprozess $X_t^\pi \geq P_t$ für alle $t \in [0, T]$ wird **Hedging-Strategie** mit Preis $x := X_0^\pi > 0$ für die amerikanische Option P genannt. Es bezeichne $\mathcal{H}(x)$ die Menge aller Hedging-Strategien für P mit Preis $x > 0$.
- b) $\hat{p} := \inf\{x > 0 \mid \mathcal{H}(x) \neq \emptyset\}$ heißt der **faire Preis** einer amerikanischen Option.

Satz

Der faire Preis \hat{p} einer amerikanischen Option P ist gegeben durch

$$\hat{p} = \sup_{\tau \in S[0, T]} \mathbb{E}(\exp(-r\tau)P_\tau),$$

und es gibt eine Stoppzeit τ^ und eine zugehörige Hedging-Strategie π^* , für die das obige Supremum angenommen wird.*

Pricing amerikanischer Optionen (2)

- Für einen Existenzbeweis von τ^* und π^* vgl. Karatzas / Shreve. Jeder Preis unterhalb und oberhalb von π^* ermöglicht eine Arbitragegelegenheit, vgl. Korn / Korn.
- Die optimale Strategie besteht darin, zum ersten Zeitpunkt τ^* auszuüben, an dem $P_{\tau^*} = X_t^{\pi^*}$ gilt. Weder X^{π^*} noch τ^* haben explizite Darstellungen.

Pricing von Bermuda-Optionen (1)

Bermuda-Optionen stellen diskrete Varianten amerikanischer Optionen dar.

Definition

Seien $0 \leq t_1 < \dots < t_m = T$. Eine **Bermuda-Option** besteht aus einem adaptierten Prozess $(P_{t_i})_{i \in \{0,1,\dots,m\}}$ mit $P_{t_i} \geq 0$ für alle i und der finalen Auszahlung P_τ zum zufälligen Auszahlungszeitpunkt τ mit Werten in $\{t_1, \dots, t_m\}$ gemäß der Ausübungsstrategie des Halters. Wir nehmen an, dass τ eine Stoppzeit ist und $\mathbb{E} \left(\sup_{s \in \{t_1, \dots, t_m\}} (P_s)^q \right) < \infty$ für ein $q > 1$ gilt.

Satz

Der faire Preis \hat{p} einer Bermuda-Option P ist gegeben durch

$$\hat{p} = \sup_{\tau \in S\{t_1, \dots, t_m\}} \mathbb{E}(\exp(-r\tau)P_\tau),$$

und es gibt eine Stoppzeit τ^* und eine zugehörige Hedging-Strategie π^* , für die das obige Supremum angenommen wird.

Pricing von Bermuda-Optionen (2)

- Bewertungen von amerikanischen Optionen auf ein Underlying werden aus Effizienzgründen meist in Baum-Modellen durchgeführt. Wir betrachten im Folgenden Bermuda-Optionen auf mehrere Underlyings.
- Wir bewerten Bermuda-Optionen in 2 Schritten.
 - ▶ Bestimmung der optimalen Ausübungszeit τ^*
 - ▶ Bestimmung des Preises $\mathbb{E}(\exp(-r\tau^*)P_{\tau^*})$ per Simulation
- Wir verwenden den Algorithmus von Longstaff / Schwartz (2001), der auf dem Prinzip der dynamischen Programmierung (Rückwärtsinduktion) beruht, und verwenden folgende Notation.
 - ▶ $S(i)$: Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\{i, \dots, m\}$
 - ▶ $V(i) := \exp(-rt_i)P_{t_i}$

Pricing von Bermuda-Optionen (3)

Algorithmus

- 1 Setze $i := m$, $\tau(m) := m$.
- 2 Für $i = m - 1, \dots, 0$ bestimme die optimale Ausübungsstrategie $\tau(i) \in S(i)$:

$$\tau(i) := \begin{cases} i & ; \quad V(i) \geq \mathbb{E}(V(\tau(i+1)) \mid S(t_i)) \\ \tau(i+1) & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

- 3 Zur Zeit $t = 0$ ist die Stoppzeit $t_{\tau(0)}$ die optimale Ausübungsstrategie, und der faire Preis der Bermuda-Option ist gleich $\mathbb{E}(V(\tau(0)))$.

Pricing von Bermuda-Optionen (4)

- Zu bestimmen bleiben die bedingten Erwartungswerte im obigen Algorithmus.
- Ist $P_t = f(S_t)$ für eine geeignete Funktion f , so haben wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} V(i) &= g(i, S_{t_i}) := \exp(-rt_i) f(S_{t_i}), \\ \mathbb{E}(V(j) \mid S(t_i)) &= u(S_{t_i}) \text{ für } i < j \end{aligned}$$

für eine messbare Funktion u_{ij} .

- In einer parametrischen Funktionenfamilie U betrachten wir ein Regressionsmodell und bestimmen eine Approximation, indem wir die quadratische Abweichung minimieren.

$$\min_{u \in U} \mathbb{E} (\mathbb{E} [g(i+1, S_{t_{i+1}}) \mid S(t_i)] - u(S_{t_i}))^2$$

- häufig verwendete Möglichkeiten für U :
 - ▶ $U = \{u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid u(x) = \sum_{i=1}^k a_i x^i, k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$
 - ▶ $U = \{u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid u(x) = \sum_{i=1}^k a_i H_i(x), a_i \in \mathbb{R}\}$, wobei $H_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Basisfunktionen und $k \in \mathbb{N}$

Pricing von Bermuda-Optionen (5)

- Werden N Pfade des Underlyings $S_{t_i}^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, m$, simuliert, so erhalten wir das lineare Regressionsproblem

$$\min_{a \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(g(i+1, S^{(n)}(t_{i+1})) - \sum_{l=1}^k a_l H_l(S^{(n)}(t_i)) \right)^2.$$

- Der optimale Koeffizientenvektor $a^*(i) = (a_1^*(i), \dots, a_k^*(i))^T$ ist gegeben durch

$$a^*(i) = [H(i)^T H(i)]^{-1} H(i)^T g(i+1),$$

wobei

$$H(i) = \begin{pmatrix} H_1(S^{(1)}(t_i)) & \dots & H_k(S^{(1)}(t_i)) \\ \vdots & & \vdots \\ H_1(S^{(N)}(t_i)) & \dots & H_k(S^{(N)}(t_i)) \end{pmatrix},$$

$$g(i+1) = \left(g(i+1, S^{(1)}(t_{i+1})), \dots, g(i+1, S^{(N)}(t_{i+1})) \right)^T.$$

Pricing von Bermuda-Optionen (6)

Longstaff-Schwartz Algorithmus

- ① Wähle eine Menge von Basisfunktionen H_1, \dots, H_k .
- ② Erzeuge N unabhängige Pfade $S^{(n)}(t_1), \dots, S^{(n)}(t_m)$, $n = 1, \dots, N$, des Underlyings zu den möglichen Ausübungszeiten t_i .
- ③ Endbedingungen: $\hat{V}(m, n) := e^{-rT} \cdot f(S^{(n)}(T))$, $n = 1, \dots, N$
- ④ Für $i = m - 1, \dots, 1$ wiederhole:
 - ▶ Löse das Regressionsproblem zur Zeit t_i .

$$a^*(i) = [H(i)^T H(i)]^{-1} H(i)^T \hat{V}(i + 1)$$

- ▶ Fortsetzungswert: $\hat{C}(S^{(n)}(t_i); i) = \sum_{l=1}^k a_l^*(i) H_l(S^{(n)}(t_i))$, $n = 1, \dots, N$.
- ▶ Für $n = 1, \dots, N$ setze

$$\hat{V}(i, n) := \begin{cases} e^{-rt_i} \cdot f(S^{(n)}(t_i)); & e^{-rt_i} \cdot f(S^{(n)}(t_i)) \geq \hat{C}(S^{(n)}(t_i); i) \\ \hat{V}(i + 1, n) & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

- ⑤ Setze $\hat{V}(0) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{V}(1, n)$.

Pricing von Bermuda-Optionen (7)

Longstaff-Schwartz Algorithmus

- Longstaff/Schwartz nutzen als Basisfunktionen die Laguerreschen Polynome $H_l(x) = \exp(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^l \exp(-x))$.
- Die Approximation $\hat{V}(0)$ des Preises unterliegt zwei Fehlereinflüssen, dem Diskretisierungsfehler aufgrund der Projektion auf das Erzeugnis der H_1, \dots, H_k und dem Simulationsfehler.
- Konvergenzresultate:⁵ Seien $V^k(0) := \sup_{\tau \in S(H_1, \dots, H_k)} \mathbb{E}(\exp(-r\tau)P_\tau)$, wobei $S(H_1, \dots, H_k)$ aus den Ausübungsstrategien auf Basis des Regressionsproblems mit den Basisfunktion H_1, \dots, H_k besteht, und $V^{k,N}(0)$ das Ergebnis des Longstaff-Schwartz Algorithmus mit k Basisfunktionen und N Simulationsläufen. Dann gilt:
 - ▶ $\lim_{k \rightarrow \infty} V^k(0) = V(0)$
 - ▶ $\lim_{N \rightarrow \infty} V^{k,N}(0) = V^k(0)$ f.s., Konvergenzrate $O(N^{-\frac{1}{2}})$

⁵Vgl. Clément, Lamberton, Protter: An analysis of a least squares regression method for American option pricing, 2002.

Pricing von Bermuda-Optionen (8)

- Für großes N liefert der Longstaff-Schwartz Algorithmus eine untere Schranke für den Preis der Bermuda-Option.⁶
- Ist der Wert der europäischen Option höher als der Fortsetzungswert im Algorithmus, liegt die Modifikation nahe, den höheren Wert der europäischen Option zu verwenden.
- Wird der Preis einer amerikanischen Option durch den Preis der entsprechenden Bermuda-Option mit m möglichen Ausübungszeitpunkten approximiert, hat der Approximationsfehler die Ordnung $O(m^{-\frac{1}{2}})$.⁷

⁶Vgl. Clément, Lamberton, Protter: An analysis of a least squares regression method for American option pricing, 2002.

⁷Die Konvergenz wird gezeigt in Bally, Pagès, Printemps: A quantization tree method for pricing and hedging multidimensional American options, 2005.

Pricing von Bermuda-Optionen (9)

- Da es zum Zeitpunkt t_i möglicherweise nicht optimal ist, die Bermuda-Option nicht auszuüben, erfüllt der auf den Zeitpunkt 0 diskontierte Wert die Ungleichung

$$\hat{V}(i) \geq \mathbb{E} \left(\hat{V}(i+1) \mid S_{t_i} \right),$$

bildet also ein Supermartingal.

- Man kann zeigen, dass das minimale Supermartingal, das den Auszahlungsprozess $g(i, S_{t_i})$ dominiert, gleich dem Preisprozess ist. Dieses minimale Supermartingal (Snell envelope) ist aber gewöhnlich schwer zu bestimmen.⁸
- Ist M_i , $i = 0, 1, \dots, m$ ein Martingal mit $M(0) = 0$, so erhalten wir mit dem Optional Sampling Theorem die Abschätzung

$$\mathbb{E}(g(\tau, S_{t_\tau})) = \mathbb{E}(g(\tau, S_{t_\tau}) - M(\tau)) \leq \max_{k=1, \dots, m} \mathbb{E}(g(k, S_{t_k}) - M(k)).$$

⁸Vgl. Myneni: The pricing of the American option, 1992.

Pricing von Bermuda-Optionen (10)

- Folglich gilt

$$V(0) = \sup_{\tau} \mathbb{E}(V(\tau)) \leq \inf_M \mathbb{E} \left(\max_{k=1, \dots, m} [g(k, S_{t_k}) - M(k)] \right).$$

- Ein Ansatz, das Infimum zu approximieren, besteht darin, M als Preisprozess der europäischen Option zu wählen.
- Wir verwenden im Folgenden das Martingal $\hat{M}(k)$, $k = 0, 1, \dots, m$, aus der Doob-Meyer-Zerlegung des Supermartingals \hat{V} :

$$\hat{M}(k) := \sum_{i=1}^k \Delta(i) := \sum_{i=1}^k \left(\hat{V}(i) - \mathbb{E} \left(\hat{V}(i) \mid S_{t_{i-1}} \right) \right).$$

Dabei misst $\Delta(i)$ die Qualität der unteren Schranke für den Preis.

Pricing von Bermuda-Optionen (11)

Andersen-Broadie Algorithmus

- Zur Bestimmung einer oberen Schranke für den Options-Preis nutzen wir die Stoppzeiten $\hat{\tau}(i)$ und die optimalen Gewichte $a_i^*(i)$ des Longstaff-Schwartz Algorithmus. Damit erhalten wir die approximativen Fortsetzungswerte $\hat{C}(S; i) = \sum_{l=1}^k a_l^*(i) H_l(S)$.
- Wir bemerken

$$\begin{aligned}
 \hat{V}(i) &= \mathbb{E} \left(g(\hat{\tau}(i)), S_{t_{\tau(i)}} \mid S_{t_i} \right) \\
 &= \begin{cases} g(i, S_{t_i}) & ; \quad g(i, S_{t_i}) \geq \hat{C}(S_{t_i}; i) \\ \mathbb{E} \left(g(\tau(i+1), S_{t_{\tau(i+1)}}) \mid S_{t_i} \right); & g(i, S_{t_i}) < \hat{C}(S_{t_i}; i) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} g(i, S_{t_i}) & ; \quad g(i, S_{t_i}) \geq \hat{C}(S_{t_i}; i) \\ \mathbb{E} \left(\hat{V}(i+1) \mid S_{t_i} \right); & g(i, S_{t_i}) < \hat{C}(S_{t_i}; i) \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

- Der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E} \left(\hat{V}(i+1) \mid S_{t_i} \right)$ wird in einer inneren Simulationsschleife bestimmt.

Pricing von Bermuda-Optionen (12)

Andersen-Broadie Algorithmus. Für $j = 1, \dots, N_1$ wiederhole:

- ① Setze $S_{t_0}^j := S(0)$ und $M^j(0) = 0$. Simuliere einen Pfad $S_{t_i}^j$, $i = 1, \dots, m$ entlang der möglichen Ausübungszeitpunkte.
- ② Für $i = 0, 1, \dots, m - 1$ wiederhole:
 - ▶ Simuliere Teilpfade $\hat{S}_{t_i}^k, \dots, \hat{S}_{t_{\tau^j(i+1)}}^k$, $k = 1, \dots, N_2$, die in $\hat{S}_{t_i}^k := S_{t_i}^j$ starten.
 - ▶ $\mathbb{E} \left(\hat{V}(i+1, j) \mid S_{t_i}^j \right) := \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} g \left(\tau^j(i+1), \hat{S}^k(t_{\tau^j(i+1)}) \right)$
 - ▶ Für $i > 0$ berechne $\hat{V}(i, j)$ gemäß (13) und setze

$$\Delta^j(i) := \hat{V}(i, j) - \mathbb{E} \left(\hat{V}(i, j) \mid S_{t_{i-1}}^j \right), \quad M^j(i) := M^j(i-1) + \Delta^j(i).$$
- ③ Setze $\hat{V}(m, j) := g(m, S_T^j)$ und

$$\Delta^j(m) := \hat{V}(m, j) - \mathbb{E} \left(\hat{V}(m, j) \mid S_{t_{m-1}}^j \right), \quad M^j(m) := M^j(m-1) + \Delta^j(m).$$
- ④ Berechne $V^{up}(j) := \max_{i=1, \dots, m} [g(i, S_{t_i}^j) - M^j(i)]$.

Setze $V^{up} := \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} V^{up}(j)$.

Pricing von Bermuda-Optionen (13)

- Der Monte-Carlo Fehler führt zu einem Schätzer $M(i) + \varepsilon(i)$ mit $\mathbb{E}(\varepsilon(i)) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\max_{i=1, \dots, m} [g(i, S_{t_i}) - M(i) - \varepsilon(i)] \right) \\ & \geq \mathbb{E} (g(i^*, S_{t_{i^*}}) - M(i^*) - \varepsilon(i^*)) = \mathbb{E} (g(i^*, S_{t_{i^*}}) - M(i^*)) \\ & = \mathbb{E} \left(\max_{i=1, \dots, m} [g(i, S_{t_i}) - M(i)] \right), \end{aligned}$$

wobei i^* den Index bezeichnet, für den das Maximum angenommen wird. Also führt der Monte-Carlo Fehler zu einer Verzerrung nach oben. Damit bleibt die Eigenschaft der oberen Schranke unangetastet.

- Belomestny et al. haben ein Simulationsverfahren entwickelt, das ohne geschachtelte Simulationsschleifen auskommt.⁹

⁹Vgl. Belomestny, Bender, Schoenmakers: True upper bounds for Bermudan products via non-nested Monte Carlo, 2009.

Exkurs: duales Optimierungsproblem (1)

- Seien P_t die Auszahlungsfunktion einer amerikanischen Option und $Z_t = \exp(-rt)P_t$ der diskontierte Ausübungswert.
- Preis der amerikanischen Option: $V(0) = \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(Z_t)$
- Unter der Voraussetzung $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(|Z_t|) \in L^p$ für ein $p > 1$ ist die Snell Einhüllende

$$Y_t^* = \operatorname{esssup}_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}(Z_\tau \mid \mathcal{F}_t)$$

ein Supermartingal der Klasse (D) , d.h. mit der Eigenschaft, dass $\{Y_\tau^* \mid \tau \text{ endliche Stoppzeit}\}$ gleichgradig integrierbar ist. Es gilt $Y_0^* = V(0)$.

- Doob-Meyer-Zerlegung:

$$Y_t^* = Y_0^* + M_t^* - A_t^*,$$

wobei M^* ein Martingal mit $M_0^* = 0$ und A^* ein vorhersagbarer, wachsender Prozess mit $A_0^* = 0$ ist.

Exkurs: duales Optimierungsproblem (2)

Satz

Es gilt $V(0) = Y_0^ = \inf_{M \in H_0^1} [\sup_{0 \leq t \leq T} (Z_t - M_t)]$, wobei H_0^1 der Raum der Martingale mit $\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|) < \infty$ ist. Das Infimum wird für $M = M^*$ angenommen.*

Beweis. Für $M \in H_0^1$ erhalten wir mit dem Optional Sampling Theorem

$$Y_0^* = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}(Z_\tau) = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}(Z_\tau - M_\tau) \leq \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (Z_t - M_t)).$$

Folglich gilt $Y_0^* \leq \inf_{M \in H_0^1} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (Z_t - M_t))$.

Umgekehrt folgern wir mit $Z_t \leq Y_t^* = Y_0^* + M_t^* - A_t^*$

$$\begin{aligned} \inf_{M \in H_0^1} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (Z_t - M_t)) &\leq \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (Z_t - M_t^*)) \leq \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (Y_t^* - M_t^*)) \\ &= \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} (Y_0^* - A_t^*)) = Y_0^*. \end{aligned}$$

Schließlich ist $M^* \in H_0^1$, da Y^* von dem L^p -beschränkten Martingal

$z_t := \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |Z_s| \mid \mathcal{F}_t)$ dominiert wird und daher

$\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t^*| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} z_t + |Y_0^*| + A_T$ gilt.

implizite und lokale Volatilitäten (1)

- Die Annahme einer konstanten Volatilität im Black-Scholes-Modell führt zu Modellpreisen für Optionen, die von den beobachteten Marktpreisen teilweise deutlich abweichen.
- Insbesondere, wenn der Ausübungspreis vom Aktienkurs zum Bewertungszeitpunkt stark abweicht, erhält man die Marktpreise im Modell nur bei Ansatz einer höheren Volatilität (volatility smile).
- Die Volatilität, mit der das Black-Scholes Modell den Marktpreis ergibt, nennt man **implizite** Volatilität σ_{impl} .

Lemma

Sie C_0 der Marktpreis einer europäischen Call-Option zum Zeitpunkt t mit zugehörigem Aktienkurs S . Die Lösung $\sigma_{\text{impl}} = \sigma_{\text{impl}}(K, T; S, t)$ von

$$C_0 = S^* \Phi(d_1(\sigma)) - Ke^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\sigma)), \quad S \geq 0, 0 \leq t < T$$

ist eindeutig bestimmt.

implizite und lokale Volatilitäten (2)

Beweis. Liegt C_0 zwischen den Arbitrageschranken $(S - Ke^{-r(T-t)})^+$ und S , so wechselt die stetige Funktion

$$C_0 - S\Phi(d_1(\sigma)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(\sigma))$$

das Vorzeichen zwischen $\sigma = 0$ (nicht negativ) und $\sigma \rightarrow \infty$ (nicht positiv).

- Ziel ist es, das Black-Scholes-Modell durch den Ansatz einer von S und t abhängigen **lokalen Volatilität** so zu erweitern, dass die Modellpreise mit den Marktpreisen übereinstimmen. Dazu betrachten wir den Drift-Diffusionsprozess

$$dS_t = S_t[r dt + \sigma(t, S_t)] dW_t.$$

- Im Folgenden zeigen wir, dass diese Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung hat, wenn wir zum festen Bewertungszeitpunkt t und dem zugehörigen Aktienkurs S die impliziten Volatilitäten $\sigma_{\text{impl}}(T, K; t, S)$ für alle $K \geq 0$ und alle Laufzeiten $T \in [t^*, \tau]$ kennen.

implizite und lokale Volatilitäten (3)

- Der verallgemeinerte Drift-Diffusionsprozess erfüllt weiterhin die Black-Scholes partielle Differentialgleichung, wenn die konstante Volatilität durch die lokale Volatilität ersetzt wird.
- Der Optionspreis des europäischen Calls mit Strike K und Laufzeit T ergibt sich als diskontierter Erwartungswert

$$C(K, T; S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} (x - K)^+ \cdot f(x; S, t, T) dx$$

mit der Dichte f der lognormal verteilten Größe $S_T \mid S_t = S$.

- ▶ Diese Dichte erfüllt die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial f(x; S, t, T)}{\partial T} + r \frac{\partial (x \cdot f(x; S, t, T))}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2(x, T) \cdot x^2 \cdot f(x; S, t, T)]}{\partial x^2} = 0$$

für feste t, S und $T \geq t$.

- ▶ Zweimaliges Differenzieren nach K ergibt eine Darstellung der Dichte in Abhängigkeit vom Optionspreis.

$$f(K; S, t, T) = e^{r(T-t)} \cdot \frac{\partial^2 C(K, T; S, t)}{\partial K^2}$$

implizite und lokale Volatilitäten (4)

- Mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
 C_T &= -rC + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x - K) \cdot \frac{\partial}{\partial T} f(x; S, t, T) dx \\
 &= -rC + e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (x - K) \\
 &\quad \cdot \left[-r \frac{\partial [x \cdot f(x; S, t, T)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2(x, T) \cdot x^2 \cdot f(x; S, t, T)]}{\partial x^2} \right] dx \\
 &= -rC + e^{-r(T-t)} \\
 &\quad \cdot \int_K^\infty \left[r([x - K] + K) \cdot f(x; S, t, T) - \frac{1}{2} \frac{\partial [\sigma^2(x, T) x^2 \cdot f(x; S, t, T)]}{\partial x} \right] dx \\
 &= -rC + rC + rKC_K + \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) \cdot K^2 C_{KK},
 \end{aligned}$$

also $C_T + rKC_K - \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 C_{KK} = 0$.

- Wir erhalten die **Dupire-Gleichung** für die lokalen Volatilitäten

$$\sigma(T, K) = \sqrt{2 \frac{C_T + rKC_K}{K^2 C_{KK}}},$$

wobei die Funktionen auf der rechten Seite an der Stelle $(T, K; S, t)$ auszuwerten sind.

implizite und lokale Volatilitäten (5)

- Unter Beachtung der Abhängigkeit $C = C(\sigma_{\text{impl}})$ können wir die lokalen Volatilitäten als Funktion der impliziten Volatilitäten $\Theta(K, T) := \sigma_{\text{impl}}(K, T; t, S)$ darstellen:

$$\sigma(K, T) = \sqrt{\frac{2\Theta_T + \frac{\Theta}{T-t} + 2rK\Theta_K}{K^2 \left[\Theta_{KK} - d_1 \sqrt{T-t} \Theta_K^2 + \frac{1}{\Theta} \left(\frac{1}{K\sqrt{T-t}} + d_1 \Theta_K \right)^2 \right]}}$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\Theta^2}{2})\sqrt{T-t}}{\Theta\sqrt{T-t}}.$$

- In der Dupire-Gleichung ist der Nenner wegen $C_{KK} = f(K; S, t, T)e^{-r(T-t)}$ positiv. Wir verifizieren noch, dass der Zähler $C_T + rKC_K$ nichtnegativ ist, so dass $\sigma(K, T)$ eine reelle Zahl ist. Für $\varepsilon > 0$ ist $C(T + \varepsilon, Ke^{r\varepsilon}; t, S) \geq C(T, K; t, S)$. Aus $\frac{1}{\varepsilon}(C(T + \varepsilon, Ke^{r\varepsilon}; t, S) - C(T, K; t, S)) \geq 0$ folgt im Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

$$rKC_K(T, K; t, S) + C_T(T, K; t, S) \geq 0.$$

Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche (1)

- Die Kenntnis der impliziten Volatilitäten für endlich viele Werte (K_i, T_i) reicht nicht aus, die Volatilitätsfläche zu rekonstruieren. Kleine Änderungen in den Daten können zu großen Abweichungen der Lösungen durch Interpolation und Extrapolation führen.
- Bei Annahme einer glatten Volatilitätsfläche wird zu den Marktpreisen $C(K_j, T_j)$ ein $\sigma \in C^2[(0, \infty) \times [t^*, \tau)]$ mit

$$C(K_j, T_j; \sigma) = C(K_j, T_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

gesucht, wobei $C_j(K_j, T_j; \sigma) = C(S^*, t^*; K_j, T_j; \sigma)$ die eindeutige Lösung der verallgemeinerten Black-Scholes-Gleichung

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2(S, t)S^2C_{SS} + rSC_S - rC = 0, \quad S > 0, \quad t^* < t < T_j,$$

mit der Endbedingung $C(S, T_j) = (S - K_j)^+$, $S > 0$, und den Randbedingungen

$$C(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} (C(S, t) - S) = 0, \quad t^* < t < T_j,$$

ist, d.h. die Preisfunktion eines europäischen Calls zum Aktienkurs S^* zur Zeit t^* mit Strike K_j und Fälligkeit T_j .

Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche (2)

- Das variationelle Ausgleichsproblem

$$\sigma_{\text{opt}} := \arg \min_{\sigma \in V} \sum_{j=1}^N (C_j(K_j, T_j; \sigma) - C(K_j, T_j))^2,$$

wobei N die Anzahl der verfügbaren Marktdaten bezeichnet, hat in $V = C^2[(0, \infty) \times [t^*, \tau)]$ unendlich viele Lösungen. Eine Möglichkeit, zu einer eindeutig bestimmten Lösung zu gelangen, besteht im Übergang zum Raum V_m der bikubischen Spline-Funktionen mit natürlichen Randbedingungen zu m Knoten (\bar{S}_j, \bar{t}_j) , $j = 1, \dots, m$.

- V_m wird durch folgende Eigenschaften charakterisiert.
 - ▶ Die Interpolationsaufgabe $f(\bar{S}_j, \bar{t}_j) = \bar{\sigma}_j$, $j = 1, \dots, m$, ist für $f \in V_m$ eindeutig lösbar.
 - ▶ Die Lösung $p(S, t; \bar{\sigma})$ minimiert das Funktional

$$\|f\|_{H^2} := \left(\int (f_{SS}^2 + f_{St}^2 + f_{tt}^2) dS dt \right)^{0,5}$$

bezüglich der $f \in V$, die die Interpolationsbedingung erfüllen.

Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche (3)

- *Anmerkung:* Ein bikubischer Spline besteht aus Polynomen

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j,$$

die auf Rechtecken in der (x, y) Ebene definiert sind, so dass Polynome in angrenzenden Rechtecken die Stetigkeitsbedingung bis zur 2. Ableitung erfüllen.

- In der Praxis kommen Linearkombinationen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} M_i(x) N_j(y)$$

zum Einsatz, wobei M_i und N_j sogenannte normalisierte B-Splines sind. Solche Funktionen ermöglichen eine bessere Anpassung und eine höhere Berechnungsgeschwindigkeit ermöglichen.¹⁰

- Spline-Toolbox in Matlab

¹⁰ Vgl. Hayek (1974), Numerical Methods for Curve and Surface Fitting und Hayek/Halliday (1974), The Least-Squares-Fitting of Cubic Spline Surfaces to General Data Sets.

Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche (4)

- Durch Einschränkung auf V_m lässt sich somit das variationelle Ausgleichsproblem in ein endlich-dimensionales nicht lineares Ausgleichsproblem

$$\sigma_{\text{opt}} := \arg \min_{\bar{\sigma} \in \mathbb{R}^m} \|F(\bar{\sigma})\|^2$$

mit

$$F(\bar{\sigma}) = \begin{pmatrix} C_1(K_1, T_1; p(\cdot, \cdot; \bar{\sigma})) - C(K_1, T_1) \\ \vdots \\ C_N(K_N, T_N; p(\cdot, \cdot; \bar{\sigma})) - C(K_N, T_N) \end{pmatrix}$$

bzgl. der euklidischen Norm überführen.

- Die Lösung des nicht linearen Ausgleichsproblems kann als Nullstelle von $F'(\bar{\sigma})^T F(\bar{\sigma}) = 0$ mit Hilfe des Gauß-Newton-Verfahrens bestimmt werden. Ausgehend von einem Startwert $\bar{\sigma}^{(0)}$ lösen wir iterativ das lineare Gleichungssystem

$$F'(\bar{\sigma}^{(k)})^T F'(\bar{\sigma}^{(k)}) \Delta \bar{\sigma}^{(k)} = -F'(\bar{\sigma}^{(k)})^T F(\bar{\sigma}^{(k)})$$

und setzen $\bar{\sigma}^{(k+1)} := \bar{\sigma}^{(k)} + \Delta \bar{\sigma}^{(k)}$.

Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche (5)

- Im Spezialfall $N = m$ erhält man nach Multiplikation mit $(F'(\bar{\sigma}^{(k)})^T)^{-1}$ die Iterationsvorschrift $F'(\bar{\sigma}^{(k)})\Delta\bar{\sigma}^{(k)} = -F(\bar{\sigma}^{(k)})$.
- Für jede Auswertung von F ist die Lösung von N End-Randwert-Problemen gemäß der verallgemeinerten Black-Scholes-Differentialgleichung erforderlich.
- Die Jakobi-Matrix kann auch per numerischer Differentiation berechnet werden. Dazu benötigt man für jedes j die Lösung von m End-Randwertproblemen mit leicht geänderten Volatilitätsfunktionen $p(S, t, \bar{\sigma} + \delta)$.
- Das variationelle Ausgleichsproblem ist im Sinne der Numerik ein „schlecht gestelltes“ inverses Problem. Die Glattheitsforderung des Spline-Ansatzes wirkt als implizite Regularisierung des Problems.
- Der Spline-Ansatz zielt nicht darauf ab, die beobachteten impliziten Volatilitäten zu interpolieren, sondern ermöglicht eine Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche im Sinne eines minimalen Residuums $F(\bar{\sigma})$.

Geldmarktkonto

Ein Zins lässt sich als Gebühr für die Nutzung von Kapital während einer spezifizierten Zeitperiode auffassen. Er ermöglicht es, den Zeitwert des Geldes anzugeben.

In Abhängigkeit von der Periode und den Verzinsungskonventionen unterscheidet man verschiedene Zinsarten.

Definition

Der Wert $B(t)$ eines **Geldmarktkontos** (**bank account**, **money-market account**) entwickelt sich gemäß der Differentialgleichung

$$dB(t) = r_t B(t) dt, \quad B(0) = 1,$$

wobei r_t ein stochastischer Prozess mit Werten in \mathbb{R}^+ ist. r_t heißt der **instantane Kassazins** (**instantaneous spot rate**) oder **Short-Rate**.

stochastischer Diskontierungsfaktor

- $B(t) = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$
- Um zum Zeitpunkt t eine Geldeinheit zu erhalten, muss zum Zeitpunkt 0 der Betrag $\frac{1}{B(t)}$ angelegt werden.

Definition

Der **stochastische Diskontierungsfaktor** $D(t, T)$ zwischen den Zeitpunkten $t < T$ ist der Betrag, der zum Zeitpunkt t angelegt werden muss, um zum Zeitpunkt T eine Geldeinheit zu erhalten:

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$$

Nullkupon-Anleihe und Marktdiskontierungsfaktor

Definition

Das Auszahlungsprofil einer **Nullkupon-Anleihe (zero-coupon bond)** mit Fälligkeit T besteht aus der Zahlung einer Geldeinheit zum Zeitpunkt T . Der Wert zum Zeitpunkt $t < T$ wird mit $P(t, T)$ bezeichnet.

Die Funktion $T \mapsto P(t, T)$ wird **Strukturkurve der Zerobondpreise**, **Zerobondkurve** oder **Diskontierungsfunktion** in t genannt.

- $P(T, T) = 1$
- $P(t, T) = \mathbb{E}(D(t, T) | \mathcal{F}_t)$
- $P(t, T)$ wird auch *(Markt)-Diskontierungsfaktor* für das Zeitintervall $[t, T]$ genannt.

Verzinsungsarten (1)

- Man unterscheidet zwischen **Kassazinsen (spot rates)** in t , die sich auf ein Zeitintervall $[t, T]$ beziehen, und **Terminzinsen (forward rates)**, die in t für eine Anlage im Zeitraum $[T, S]$ mit $t < T$ vereinbart werden.
- Der **stetige Kassazins (continuously-compounded spot rate)** $R(t, T)$ zum Zeitpunkt t , bezogen auf die Fälligkeit T , ist die konstante Zinsrate, die den Betrag $P(t, T)$ bei stetiger Verzinsung auf den Betrag 1 zum Zeitpunkt T aufzinst, d.h.

$$P(t, T) \cdot \exp(R(t, T) \cdot (T - t)) = 1$$

erfüllt. Es gilt

$$R(t, T) = \frac{-\ln P(t, T)}{T - t}$$

- Die Funktion $T \mapsto R(t, T)$ wird **(Kassa-)Zinsstrukturkurve (term structure of interest rates)** in t genannt.

Verzinsungsarten (2)

- **einfacher Kassazins (simply-compounded spot rate)**

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{(T - t) \cdot P(t, T)}$$

Es gilt

$$P(t, T) \cdot (1 + L(t, T) \cdot (T - t)) = 1.$$

- **Kassazins mit jährlichem Zinseszinsseffekt (annually-compounded spot rate)**

$$Y(t, T) := \frac{1}{P(t, T)^{1/(T-t)}} - 1$$

Es gilt

$$P(t, T) \cdot (1 + Y(t, T))^{T-t} = 1.$$

Forward rate (1)

Definition

Sei $t < T < S$. Eine **Terminzinsvereinbarung (forward rate agreement)** ist ein Vertrag, der zum Zeitpunkt S den Betrag

$$N(S - T)(K - L(T, S))$$

auszahlt, wobei N der Nominalbetrag, K ein fester Zins und $L(T, S)$ der variable einfache Kassa-Zins (spot rate) ist.

Forward rate (2)

Der **Wert** der forward rate agreement zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$FRA(t, T, S, N, K) = N \cdot P(t, S) \cdot (S - T)K + P(t, S) - P(t, T)$$

Berechnung:

$$\begin{aligned} FRA(t, T, S, N, K) &= N \cdot \mathbb{E}_Q \left(D(t, S) \cdot \left((S - T)K - \frac{1 - P(T, S)}{P(T, S)} \mid \mathcal{F}_t \right) \right) \\ &= N \cdot P(t, S) \cdot (S - T)K - \mathbb{E}_Q \left(D(t, S) \cdot \frac{1}{P(T, S)} \mid \mathcal{F}_t \right) + P(t, S) \\ &= N \cdot P(t, S) \cdot (S - T)K + P(t, S) \\ &\quad - \mathbb{E}_Q \left(\mathbb{E}_Q \left[\frac{D(t, T) \cdot D(T, S)}{P(T, S)} \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= N \cdot P(t, S) \cdot (S - T)K + P(t, S) \\ &\quad - \mathbb{E}_Q \left(\frac{D(t, T)}{P(T, S)} \cdot \mathbb{E}_Q [D(T, S) \mid \mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= N \cdot P(t, S) \cdot (S - T)K + P(t, S) - P(t, T) \end{aligned}$$

Forward rate (3)

Die forward rate agreement ist „fair“, wenn sie den Wert 0 hat.

Definition

- a) Der **einfache Terminzins (simply-compounded forward rate)** zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T > t$ und Fälligkeit $S > T$ ist definiert als

$$F(t, T, S) := \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right).$$

- b) Der **stetige Terminzins (continuously-compounded forward rate)** zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T > t$ und Fälligkeit $S > T$ ist definiert als

$$R(t, T, S) := - \frac{\ln P(t, S) - \ln P(t, T)}{S - T}.$$

Forward rate (4)

Zusammenhänge:

- $FRA(t, T, S, N, K) = N \cdot P(t, S) \cdot (S - T) \cdot (K - F(t, T, S))$
- $\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \frac{1}{1 + F(t, T, S)(S - T)}$
- $F(T, T, S) = L(T, S)$
- $\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \exp(-R(t, T, S) \cdot (S - T))$

kurzfristiger Terminzins und Short Rate

Definition

- a) kurzfristiger Terminzins (instantaneous forward rate) zur Zeit t mit Fälligkeit T :

$$f(t, T) = \lim_{S \searrow T} R(t, T, S) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}.$$

- b) Short Rate: $r(t) = f(t, t)$
- c) Die Funktion $T \mapsto f(t, T)$ wird Terminzinsstrukturkurve (term structure of forward rates, forward curve) in t genannt.

Es gilt:

- $f(t, T) = \lim_{S \searrow T} F(t, T, S)$
- $P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right).$

Exkurs: Wechsel des Numeraire (1)

Idee: Vereinfachung der Berechnung durch geschickte Wahl eines Referenzassets, insbesondere im Fall stochastischer Diskontierungsfaktoren

Definition

Ein **Numeraire** ist ein Wertpapier mit positivem Wert ohne Dividendenzahlungen.

Exkurs: Wechsel des Numeraire (2)

Theorem

Seien N ein Numeraire und Q^N ein äquivalentes Martingalmaß, so dass der diskontierte Preisprozess $\frac{S_t}{N_t}$ ein Q^N -Martingal ist. Ist U ein weiterer Numeraire, so wird durch

$$\frac{dQ^U}{dQ^N} := \frac{U_T}{U_0} \frac{N_0}{N_T}$$

ein äquivalentes Martingalmaß Q^U definiert, so dass $\frac{S_t}{U_t}$ ein Q^U -Martingal ist, und für jedes zur Zeit T fällige Auszahlungsprofil X_T stimmen die risikoneutralen Bewertungen unter Q^N und Q^U überein:

$$N_t \cdot \mathbb{E}^N \left(\frac{X_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t \right) = U_t \cdot \mathbb{E}^U \left(\frac{X_T}{U_T} \mid \mathcal{F}_t \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

T -Forward-Maß

Definition

Wählt man den Zero-Coupon-Bond mit Fälligkeit T als Numeraire, so heißt das zugehörige äquivalente Martingalmaß Q^T T -forward-Maß.

Bewertung unter dem T -forward-Maß

Ist H_T eine Auszahlung zum Zeitpunkt T , so ergibt sich ihr Preis zum Zeitpunkt $t < T$ zu

$$\pi_t = P(t, T) \cdot \mathbb{E}^T(H_T \mid \mathcal{F}_t).$$

Zusammenhang zwischen Termin- und Kassazins

Theorem

Unter dem S -forward Maß gilt

$$\mathbb{E}^S(F(t, T, S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u, T, S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

insbesondere

$$\mathbb{E}^S(L(T, S) \mid \mathcal{F}_t) = F(t, T, S), \quad 0 \leq t \leq T < S.$$

Beweis. $F(t, T, S)P(t, S) = \frac{1}{S-T}(P(t, T) - P(t, S))$ ist handelbar, so dass

$$\frac{F(t, T, S)P(t, S)}{P(t, S)} = F(t, T, S)$$

ein Martingal unter \mathbb{E}^S ist. Der Spezialfall folgt aus $F(T, T, S) = L(T, S)$.

Zusammenhang zwischen kurzfristigem Terminzins und Short Rate

Theorem

Für die Short Rate gilt

$$\mathbb{E}^T(r_T \mid \mathcal{F}_t) = f(t, T), \quad 0 \leq t < T.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^T(r_T \mid \mathcal{F}_t) &= \frac{1}{P(t, T)} \mathbb{E}_Q \left(r_T \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \mathbb{E}_Q \left(\frac{\partial}{\partial T} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= - \frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} = f(t, T)\end{aligned}$$

Swap (1)

Definition

Sei $\mathcal{T} = (T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta)$ ein aufsteigend geordneter Vektor von Zeitpunkten, N ein Nominalbetrag und K eine feste Zinsrate.

- a) Das Auszahlungsprofil eines **Payer Swap (PFS)** besteht aus den Zahlungen

$$N(T_i - T_{i-1})(L(T_{i-1}, T_i) - K), \quad i = \alpha + 1, \dots, \beta.$$

- b) Das Auszahlungsprofil eines **Receiver Swap (RFS)** besteht aus den Zahlungen

$$N(T_i - T_{i-1})(K - L(T_{i-1}, T_i)), \quad i = \alpha + 1, \dots, \beta.$$

Swap (2)

- Wert des RFS zum Zeitpunkt $t < T_\alpha$:

$$\begin{aligned}
 RFS(t, \mathcal{T}, N, K) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} FRA(t, T_{i-1}, T_i, N, K) \\
 &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i) (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \\
 &= -N \cdot P(t, T_\alpha) + N \cdot P(t, T_\beta) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) K \cdot P(t, T_i)
 \end{aligned}$$

- Ein RFS besteht aus einer Long-Position einer fest verzinslichen Anleihe und einer Short-Position einer variabel verzinslichen Anleihe.

Swap (3)

Definition

Die **forward swap rate** $S_{\alpha,\beta}(t)$ zur Zeit t für die Zeitintervalle $\mathcal{T} = (T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta)$ ist definiert durch

$$RFS(t, \mathcal{T}, N, S_{\alpha,\beta}(t)) = 0.$$

$T_\beta \mapsto S_{\alpha,\beta}(T_\alpha)$ heißt **Swap-Kurve** zur Zeit $t = T_\alpha$.

Lösung:

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(t) &= \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i)} \\ &= \frac{1 - \prod_{j=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + (T_j - T_{j-1}) F_j(t)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1 + (T_j - T_{j-1}) F_j(t)}} \end{aligned}$$

mit $F_j(t) := F(t, T_{j-1}, T_j)$

Bond

Definition

- a) Ein **festverzinsliches Wertpapier (coupon bond)** zum Nominalwert N hat das Auszahlungsprofil $(c_{\alpha+1}, \dots, c_{\beta})$ mit

$$c_i = \begin{cases} N(T_i - T_{i-1})K & ; \quad i < \beta \\ N(T_{\beta} - T_{\beta-1})K + N; & i = \beta. \end{cases}$$

- b) Ein **variabel verzinsliches Wertpapier (floating rate note)** zum Nominalwert N hat das Auszahlungsprofil $(c_{\alpha+1}, \dots, c_{\beta})$ mit

$$c_i = \begin{cases} N(T_i - T_{i-1})L(T_{i-1}, T_i) & ; \quad i < \beta \\ N(T_{\beta} - T_{\beta-1})L(T_{\beta-1}, T_{\beta}) + N; & i = \beta. \end{cases}$$

Cap / Floor

Definition

a) Auszahlungsprofil eines **Caps**

$$c_i = N(T_i - T_{i-1})(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+, \quad i = \alpha + 1, \dots, \beta$$

b) Auszahlungsprofil eines **Floors**

$$c_i = N(T_i - T_{i-1})(K - L(T_{i-1}, T_i))^+, \quad i = \alpha + 1, \dots, \beta$$

c) Ein Cap mit einer einzigen Auszahlung c_i heißt **Caplet**.

d) Ein Floor mit einer einzigen Auszahlung c_i heißt **Floorlet**.

Bewertung von Caplets und Floorlets (1)

Wert zur Zeit $t \leq t_{i-1}$ des Caplets mit der Auszahlung c_i zur Zeit t_i :

$$\begin{aligned}
 & \text{caplet}(t, t_{i-1}, t_i, N, K) \\
 &= \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_i} r_s ds \right) N(t_i - t_{i-1})(L(t_{i-1}, t_i) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\
 &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_i} r_s ds \right) N(t_i - t_{i-1})(L(t_{i-1}, t_i) - K)^+ \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right) \mid \mathcal{F}_t \right) \\
 &= N \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_{i-1}} r_s ds \right) P(t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})(L(t_{i-1}, t_i) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\
 &= N \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_{i-1}} r_s ds \right) P(t_{i-1}, t_i) \left[\frac{1}{P(t_{i-1}, t_i)} - 1 - K(t_i - t_{i-1}) \right]^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\
 &= N \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_{i-1}} r_s ds \right) [1 - (1 + K(t_i - t_{i-1}))P(t_{i-1}, t_i)]^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\
 &= N \cdot (1 + K(t_i - t_{i-1})) \\
 &\quad \cdot \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_{i-1}} r_s ds \right) \left[\frac{1}{1 + K(t_i - t_{i-1})} - P(t_{i-1}, t_i) \right]^+ \mid \mathcal{F}_t \right)
 \end{aligned}$$

Bewertung von Caplets und Floorlets (2)

- Ein **Caplet** mit Strike K lässt sich also als **Put-Option auf den Zero-Coupon-Bond** mit Strike $\frac{1}{1+K(t_i-t_{i-1})}$ und Nominal $1 + K(t_i - t_{i-1})$ bewerten.
- Ein **Floorlet** mit Strike K lässt sich also als **Call-Option auf den Zero-Coupon-Bond** mit Strike $\frac{1}{1+K(t_i-t_{i-1})}$ und Nominal $1 + K(t_i - t_{i-1})$ bewerten.

$$\begin{aligned}
 & \text{floorlet}(t, t_{i-1}, t_i, N, K) \\
 &= \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_i} r_s ds \right) N(t_i - t_{i-1}) (K - L(t_{i-1}, t_i))^+ \mid \mathcal{F}_t \right) \\
 &= N \cdot (1 + K(t_i - t_{i-1})) \\
 &\quad \cdot \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_t^{t_{i-1}} r_s ds \right) \left[P(t_{i-1}, t_i) - \frac{1}{1 + K(t_i - t_{i-1})} \right]^+ \mid \mathcal{F}_t \right)
 \end{aligned}$$

Marktquotierung von Caps / Floors mit der Black 76 Formel (1)

Der Markt quotiert Caps und Floors mit der impliziten Volatilität $\sigma_{\alpha,\beta,K}$ auf Basis der Black 76 Formel.

a) **Wert des Caps** zur Zeit $t < T_\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Cap}^{\text{Black}}(t, \mathcal{T}, N, K, \sigma_{\alpha,\beta,K}) \\ = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot (F(t, T_{i-1}, T_i) \cdot \Phi(d_{1;i}) - K \cdot \Phi(d_{2;i})) \end{aligned}$$

b) **Wert des Floors** zur Zeit $t < T_\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Floor}^{\text{Black}}(t, \mathcal{T}, N, K, \sigma_{\alpha,\beta,K}) \\ = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot (K \cdot \Phi(-d_{2;i}) - F(t, T_{i-1}, T_i) \cdot \Phi(-d_{1;i})) \end{aligned}$$

mit

$$d_{1,2;i} = \frac{\ln\left(\frac{F(t, T_{i-1}, T_i)}{K}\right) \pm \frac{\sigma_{\alpha,\beta,K}^2 (T_{i-1} - t)}{2}}{\sigma_{\alpha,\beta,K} \sqrt{T_{i-1} - t}}$$

Marktquotierung von Caps / Floors mit der Black 76 Formel (2)

Hintergrund. Übertragung der klassischen Black-Scholes Formel

$$\begin{aligned}
 d(S_t \cdot \exp(-rt)) &= \sigma S_t dW_t \\
 V_0([S_T - K]^+) &= \exp(-rT) \cdot [S_0^{\text{fwd}} \cdot \Phi(d_+) - K \cdot \Phi(d_-)] \\
 d_{\pm} &= \frac{\ln\left(\frac{S_0^{\text{fwd}}}{K}\right) \pm \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma \sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

mit dem T -forward Preis $S_0^{\text{fwd}} = \exp(rT) \cdot S_0$ auf das Underlying $F(s, T_{i-1}, T_i)$, $t \leq s \leq T_{i-1}$ unter dem Numeraire $P(s, T_i)$.

$$\begin{aligned}
 dF(s, T_{i-1}, T_i) &= \sigma F(s, T_{i-1}, T_i) dW_t \\
 V_t([L(T_{i-1}, T_i) - K]^+) &= P(T_{i-1}, T_i) \cdot P(t, T_{i-1}) \cdot [F(t, T_{i-1}, T_i) \cdot \Phi(d_+) - K \cdot \Phi(d_-)] \\
 d_{\pm} &= \frac{\ln\left(\frac{F(t, T_{i-1}, T_i)}{K}\right) \pm \sigma^2 \frac{T_{i-1} - t}{2}}{\sigma \sqrt{T_{i-1} - t}}
 \end{aligned}$$

Swaption

Definition

Eine **europäische Payer Swaption** stellt das Recht dar, zum festgelegten Fälligkeitszeitpunkt in einen Payer Swap einzutreten. In der Regel ist der Fälligkeitszeitpunkt der Payer Swaption das T_α des Payer Swaps.

Der (stochastische) Wert zum Zeitpunkt $t < T_\alpha$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & N \cdot D(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) (T_i - T_{i-1}) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \\
 &= N \cdot D(t, T_\alpha) \cdot (S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - K)^+ \cdot \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) P(T_\alpha, T_i).
 \end{aligned}$$

Marktquotierung von Swaptions mit der Black 76 Formel (1)

Der Markt quotiert Swaptions mit der impliziten Volatilität $\sigma_{\alpha,\beta,K}$ auf Basis der Black 76 Formel.

a) **Wert der Payer-Swaption** zur Zeit $t < T_\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Swapt}^{\text{payer}}(t, \mathcal{T}, N, K, \sigma_{\alpha,\beta,K}) \\ = N \cdot (S_{\alpha,\beta}(t) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2)) \cdot \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) \end{aligned}$$

b) **Wert der Receiver-Swaption** zur Zeit $t < T_\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Swapt}^{\text{receiver}}(t, \mathcal{T}, N, K, \sigma_{\alpha,\beta,K}) \\ = N \cdot (K \cdot \Phi(-d_2) - S_{\alpha,\beta}(t) \cdot \Phi(-d_1)) \cdot \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) \end{aligned}$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t)}{K}\right) \pm \frac{\sigma_{\alpha,\beta,K}^2(T_\alpha - t)}{2}}{\sigma_{\alpha,\beta,K} \sqrt{T_\alpha - t}}$$

Marktquotierung von Swaptions mit der Black 76 Formel (2)

Hintergrund. Übertragung der klassischen Black-Scholes Formel

$$\begin{aligned}
 d(S_t \cdot \exp(-rt)) &= \sigma S_t dW_t \\
 V_0([S_T - K]^+) &= \exp(-rT) \cdot \left[S_0^{\text{fwd}} \cdot \Phi(d_+) - K \cdot \Phi(d_-) \right] \\
 d_{\pm} &= \frac{\ln\left(\frac{S_0^{\text{fwd}}}{K}\right) \pm \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma \sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

mit dem T -forward Preis $S_0^{\text{fwd}} = \exp(rT) \cdot S_0$ auf das Underlying $S_{\alpha,\beta}(s)$, $t \leq s \leq T_\alpha$ unter dem Numeraire

$U_s = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (T_i - T_{i-1}) \cdot P(s, T_i)$. $S_{\alpha,\beta}(s) = \frac{P(s, T_\alpha) - P(s, T_\beta)}{U_s}$ ist ein Martingal unter dem Maß Q^U .

$$\begin{aligned}
 dS_{\alpha,\beta}(s) &= \sigma_{\alpha,\beta,K} \cdot S_{\alpha,\beta}(s) dW_t \\
 V_t(\text{swaption}^{\text{payer}}) &= U(t) \cdot [S_{\alpha,\beta}(t) \cdot \Phi(d_+) - K \cdot \Phi(d_-)] \\
 d_{\pm} &= \frac{\ln\left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t)}{K}\right) \pm \sigma_{\alpha,\beta,K}^2 \frac{T_\alpha - t}{2}}{\sigma_{\alpha,\beta,K} \sqrt{T_\alpha - t}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe

Zur Zeit $t = 0$ liege folgende Forward-Kurve vor.

$$\begin{aligned} & \left(F\left(0, 0, \frac{1}{4}\right), F\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \dots, F\left(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right), F\left(0, \frac{7}{4}, 2\right) \right) \\ &= (0.06, 0.09, 0.1, 0.1, 0.1, 0.09, 0.09, 0.09) \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie die zugehörige Strukturkurve der Zerobond-Preise.
- b) Bestimmen Sie die Swap-Rate $S_{0,2}(0)$.
- c) Bestimmen Sie den Cashflow eines Caps mit Strike 0.09, Nominal 100 und Zahlungszeitpunkten $t = \frac{i}{8}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, wenn Sie das Szenario unterstellen, dass die Erwartungen, die der Markt zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Forward-Kurve zum Ausdruck bringt, tatsächlich eintreten.

Lösung

a) Strukturkurve der Zerobond-Preise:

$$P\left(0, \frac{i}{4}\right) = P\left(0, \frac{i-1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot F\left(0, \frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}\right)\right)^{-1}; \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(0, \frac{i}{4})$	0.9852	0.9635	0.9400	0.9171	0.8947	0.8751	0.8558	0.8370

b) Die Swap-Rate beträgt

$$S_{0,2}(0) = \frac{1 - P(0, 2)}{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^8 P(0, \frac{i}{4})} = 0.0897.$$

c) Treten die Markterwartungen tatsächlich ein, so gilt für den einfachen Kassazins $L\left(\frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}\right) = F\left(0, \frac{i-1}{4}, \frac{i}{4}\right)$, $i = 1, 2, \dots, 8$. Die Zahlungen des Caps mit Strike 0.09 und Nominal 100 lauten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
c_i	0	0	0.25	0.25	0.25	0	0	0

Aufgabe

Auf welche Weise kann ein Receiver Swap mit Nominalwert 1 und Fixingterminen 1, 2, 3 (d.h. Zahlungszeitpunkten 2 und 3) zum Zeitpunkt 0 mit Hilfe von Zerobonds repliziert werden? Geben Sie eine geeignete Handelsstrategie mit dem Replikationsportfolio an.

Lösung

Sei K der feste Zinssatz.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden K Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 2$ und $1 + K$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 3$ gekauft sowie ein Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ verkauft. Der Preis des Replikationsportfolios beträgt

$$P = K \cdot P(0, 2) + (1 + K) \cdot P(0, 3) - P(0, 1),$$

wobei $P(t, T)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t bezeichnet. Zum Zeitpunkt $t = 1$ werden $\frac{1}{P(1, 2)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2 verkauft, um eine Geldeinheit an den Inhaber des zur Zeit 1 fällig gewordenen Zerobonds auszuzahlen. Es verbleiben $K - \frac{1}{P(1, 2)} = K - L(1, 2) - 1$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2.

Zum Zeitpunkt $t = 2$ zahlt der Receiver Swap den Betrag $K - L(1, 2)$ aus. Um die verbleibende Position von -1 Geldeinheit auszugleichen, werden $\frac{1}{P(2, 3)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3 verkauft. Es verbleiben

$$1 + K - \frac{1}{P(2, 3)} = K - L(2, 3)$$

Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3, die zum Zeitpunkt 3 den Betrag $K - L(2, 3)$ auszahlen.

Fragestellungen bei der Zinsmodellierung

- Wahl des Underlying: gesamte Zinsstruktur, short rate, Kassazinsen für ausgewählte Fristigkeiten, etc.
- Pull-to-Par: Der Wert einer Nullkuponanleihe konvergiert gegen den Nominalwert.
- Modellierung unter dem realen oder dem risikoneutralen Maß
- Ist ein Modell zinsstrukturkonform?
- Wie gut werden Marktpreise durch die Modellberechnungen approximiert? Plausibilität der impliziten Volatilitäten?
- Gibt es analytische Formeln?
- Praktikabilität von numerischen Bewertungsverfahren und Simulationen
- Sollen Zinsen stets positiv sein? Gibt es ein langfristiges Mittel?
- Anzahl der Parameter und der Unsicherheitsquellen der Ökonomie?

Modellrahmen (1)

- Die Short Rate wird unter dem realen Maß \mathbb{P} durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = \mu(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t))^T dW^*(t)$$

mit einer d -dimensionalen Brownschen Bewegung W^* beschrieben.

- Geldmarktkonto: $B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$
- Das Modell ist arbitragefrei. Es gibt ein äquivalentes Maß Q mit

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)^T dW^*(s) - \int_0^t \frac{1}{2} \|\gamma(s)\|^2 ds\right),$$

so dass die diskontierten Zero-Bond-Preise $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ unter Q ein Martingal bilden.

Modellrahmen (2)

- Dynamik der Short Rate unter Q :

$$dr(t) = \left(\mu(t, r(t)) - \sigma(t, r(t))^T \gamma(t) \right) dt + \sigma(t, r(t))^T dW(t)$$

mit der Q -Brownschen Bewegung $W_t = W_t^* + \int_0^t \gamma(s) ds$

- Das Modell ist unvollständig, da das Geldmarktkonto nicht alle Zero-Bond-Preise replizieren kann. Der Übergang von \mathbb{P} zu Q erfordert die exogene Bestimmung des Marktpreises des Risikos.
- Häufig wird direkt unter Q modelliert, indem das Modell an Marktpreise kalibriert wird. Für den Übergang von Q zu \mathbb{P} ist der Marktpreis des Risikos $\sigma^T(t, r(t))\gamma(t) = \mu(t, r(t)) - r(t)\mathbf{1}_d$ aus historischen Preisbewegungen zu bestimmen.

Bewertung von Derivaten (1)

- Die Modellierung der eindimensionalen Dynamik der Short Rate ermöglicht die Herleitung aller Zinsraten über den Preis der Zero-Coupon Bonds

$$P(t, T) = \mathbb{E}_Q \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right).$$

- Ist $\phi(r(T))$ ein allgemeines, von $r(T)$ abhängiges Auszahlungsprofil zum Zeitpunkt T , so ist sein Preis $\pi(t, r)$ zum Zeitpunkt t bei gegebenem Wert r der Short Rate gegeben durch

$$\pi(t, r) = \mathbb{E}_Q \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \phi(r(T)) \mid r(t) = r \right).$$

Bewertung von Derivaten (2)

Theorem

Die Short Rate Dynamik unter dem risikoneutralen Maß sei gegeben durch

$$dr(t) = b(t, r(t)) dt + \sigma(t, r(t)) dW(t)$$

mit einer Brownschen Bewegung W . Ferner sei die Auszahlungsfunktion ϕ stetig und $\pi : (t, r) \mapsto \pi(t, r)$ erfülle die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen des Satzes von Feynman / Kac. Dann ist π Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\pi_t + b(t, r) \cdot \pi_r + \frac{\sigma^2(t, r)}{2} \cdot \pi_{rr} - r \cdot \pi = 0, \quad (t, r) \in (0, T) \times \mathbb{R},$$

unter der Endwertbedingung $\pi(T, r) = \phi(r(T))$.

affine Zinsstrukturmodelle

- Bei der Bewertung von Derivaten erweisen sich affine Zinsstrukturmodelle als vorteilhaft:

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r(t)), \quad t \in [0, T],$$

wobei A und B deterministisch sind.

- Das Short Rate Modell ist genau dann affin, wenn es stetige Funktionen $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ mit

$$\sigma^2(t, x) = \alpha_0(t)x + \alpha_1(t), \quad b(t, x) = \beta_0(t)x + \beta_1(t)$$

gibt. Dann sind A und B Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A(t, T) &= \frac{1}{2} \alpha_0(t) B(t, T)^2 - \beta_0(t) B(t, T), \\ \frac{\partial}{\partial t} B(t, T) &= \frac{1}{2} \alpha_1(t) B(t, T)^2 - \beta_1(t) B(t, T) - 1 \end{aligned}$$

mit $A(T, T) = 0$ und $B(T, T) = 0$.

Beispiele von Ein-Faktor-Modellen

- Vasicek Modell

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma dW_t$$

- Cox-Ingersoll-Ross Modell

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW_t, \quad 2ab > \sigma^2$$

- Hull-White Modell

$$dr(t) = a \cdot [b(t) - r(t)]dt + \sigma(t) dW_t$$

- Black-Karasinski Modell (nicht affin)

$$dr(t) = r(t) \cdot [b(t) - a \cdot \ln(r(t))]\sigma dt + \sigma r(t) dW_t$$

Hull-White Modell (1)

- **SDGL:** $dr(t) = a \cdot [b(t) - r(t)]dt + \sigma dW_t$

- **Lösung:**

$$r(t) = r(s) \exp(-a(t-s)) + \int_s^t \exp(-a(t-u)) \cdot a \cdot b(u) du \\ + \sigma \int_s^t \exp(-a(t-u)) dW_u$$

- **Verteilungen:**

- ▶ $r(t) | \mathcal{F}_s \sim \mathcal{N}(m(s, t), v(s, t))$ mit

$$m(s, t) = r(s) \exp(-a(t-s)) + \int_s^t \exp(-a(t-u)) \cdot a \cdot b(u) du,$$

$$v(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - \exp(-2a(t-s)))$$

- ▶ $\int_t^T r(v) dv | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(\int_t^T m(t, v) dv, \int_t^T \frac{\sigma^2}{a^2} [1 - \exp(-a(T-v))]^2 dv\right)$

Hull-White Modell (2)

- **SDGL der Zerobondpreise** unter dem risikoneutralen Maß Q

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t) dt - \sigma \frac{1 - \exp(-a(T - t))}{a} dW_t$$

- Unter Q ist $P(t, T)$ **lognormalverteilt**, und es gilt

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r(t))$$

mit

$$B(t, T) = \frac{1}{a} [1 - \exp(-a(T - t))]$$

$$A(t, T) = -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s, T) ds + a \int_t^T b(s) B(s, T) ds$$

Hull-White Modell (3)

- **Dynamik unter dem T -forward-Maß:**

$$dr(t) = \left(a(b(t) - r(t)) - \sigma^2 \cdot \frac{1 - \exp(-a(T - t))}{a} \right) dt + \sigma dW_t^T$$

- Auch unter dem T -forward-Maß sind die Zerobondpreise lognormalverteilt mit den Parametern

$$\begin{aligned} \mu_P(t_0, t, T) &:= \mathbb{E}^T(\ln(P(t, T)) \mid \mathcal{F}_{t_0}) \\ &= \ln\left(\frac{P(t_0, T)}{P(t_0, t)}\right) - \frac{1}{2}\sigma_P^2(t_0, t, T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P(t_0, t, T) &= \sqrt{\text{Var}^T(\ln(P(t, T)) \mid \mathcal{F}_{t_0})} \\ &= \frac{1}{a}[1 - \exp(-a(T - t))] \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}[1 - \exp(-2a(t - t_0))]}, \end{aligned}$$

wobei $t_0 \leq t \leq T$.

Hull-White Modell (4)

- Unter dem T -forward-Maß ergibt sich der Wert zur Zeit t der europäischen **Call-Option** mit Fälligkeit T und Strike K **auf einen Zerobond** mit Nominal 1 und Endfälligkeit T_B zu

$$C(t, T, T_B, K) = P(t, T) \cdot \mathbb{E}^T \left((P(T, T_B) - K)^+ \right).$$

Mit $P(T, T_B) \sim LN(\mu_P(t, T, T_B), \sigma_P^2(t, T, T_B))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Call}(t, T, T_B, K) &= P(t, T) \cdot \left(\exp(\mu_P + \sigma_P^2/2) \cdot \Phi \left(\frac{\mu_P - \ln(K) + \sigma_P^2}{\sigma_P} \right) \right. \\ &\quad \left. - K \cdot \Phi \left(\frac{\mu_P - \ln(K)}{\sigma_P} \right) \right) \\ &= P(t, T_B) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(d_2) \end{aligned}$$

Hull-White Modell (5)

- mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(t, T_B)}{P(t, T) \cdot K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_P^2(t, T, T_B)}{\sigma_P(t, T, T_B)}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_P(t, T, T_B)$$

- Es folgt

- ▶ europäische **Put-Option** mit Fälligkeit T und Strike K auf **einen Zerobond** mit Nominal 1 und Endfälligkeit T_B

$$Put(t, T, T_B, K) = K \cdot P(t, T) \cdot \Phi(-d_2) - P(t, T_B) \cdot \Phi(-d_1)$$

- ▶ $Cap(t) = N \cdot \sum_{i=1}^n (1 + K \cdot (t_i - t_{i-1})) \cdot Put(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + K(t_i - t_{i-1})})$
- ▶ $Floor(t) = N \cdot \sum_{i=1}^n (1 + K \cdot (t_i - t_{i-1})) \cdot Call(t, t_{i-1}, t_i, \frac{1}{1 + K(t_i - t_{i-1})})$

- Im Spezialfall eines konstanten b liegt das **Vasicek-Modell** vor. Es ist nicht zinsstrukturkonform.

Beispiel (1)

Im Hull-White Modell mit den Parametern $a = 0,15$ und $\sigma = 0,0125$ soll eine **europäische Call-Option** mit Fälligkeit $T = 1$ und Strike $K = 0,98$ **auf einen Zerobond** mit Nominal 1 und Endfälligkeit $T_B = 2$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bewertet werden. Marktpreise sind $P(0,1) = 0,977114$ und $P(0,2) = 0,946579$. Wir berechnen

$$C(0, T, T_B, K) = P(0, T_B) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot P(0, T) \cdot \Phi(d_2)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{P(0, T_B)}{P(0, T) \cdot K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_P^2(0, T, T_B)}{\sigma_P(0, T, T_B)}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma_P(0, T, T_B). \end{aligned}$$

Beispiel (2)

Einsetzen der Daten ergibt:

$$\begin{aligned}\sigma_P(0, 1, 2) &= \frac{1 - e^{-0.15(2-1)}}{0.15} \cdot \sqrt{\frac{0,0125^2}{2 \cdot 0.15} \cdot (1 - e^{-2 \cdot 0.15 \cdot (1-0)})} \\ &= 0,010789\end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{0.946579}{0.977114 \cdot 0.98}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0.010789^2}{0.01789} = -0.6414962$$

$$d_2 = -0.6522852$$

$$C(0, 1, 2, 1.01) = 0.946579 \cdot \Phi(d_1) - 0.98 \cdot 0,977114 \cdot \Phi(d_2) = 0.004787$$

Hull-White Modell: Optionen auf Kupon-Bonds (1)

- Sei $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ der Cashflow eines Kupon-Bonds, wobei c_i zum Zeitpunkt T_i fällig wird. Der Preis des Kupon-Bonds zum Zeitpunkt $T < T_1$ ist gegeben durch

$$CB(T, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r(T)),$$

wobei der Preis des Zerobonds $P(T, T_i, r(T))$ mit Fälligkeit T_i und Nominal 1 in expliziter Abhängigkeit von der Short Rate $r(T)$ zum Bewertungszeitpunkt dargestellt wird.

- Wir betrachten eine Put-Option mit Strike K auf den Kupon-Bond. Bei Fälligkeit T zahlt die Option den Betrag

$$(K - CB(T, \mathcal{C}))^+ = \left(K - \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r(T)) \right)^+.$$

- Trick von Jamshidian: Bestimme den Zinssatz r^* , für den $\sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r^*) = K$ gilt.

Hull-White Modell: Optionen auf Kupon-Bonds (2)

- Gilt $\frac{\partial P(t,s,r)}{\partial r} < 0$ für alle $0 < t < s$, so ist der Payoff gleich

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r^*) - \sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r(T)) \right)^+ \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \left(P(T, T_i, r^*) - P(T, T_i, r(T)) \right)^+. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung ist im Hull-White-Modell erfüllt.

- Preis der Put-Option auf den Kupon-Bond:

$$PutCB(t, T, \mathcal{C}, K) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot Put(t, T, T_i, P(T, T_i, r^*))$$

- Preis der Call-Option auf den Kupon-Bond:

$$CallCB(t, T, \mathcal{C}, K) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot Call(t, T, T_i, P(T, T_i, r^*))$$

Hull-White Modell: Optionen auf Swaptions

- Europäische Swaptions können als Option auf einen Kupon-Bond mit Strike 1 aufgefasst werden.
- Wir betrachten eine Payer Swaption mit Strike K , Fälligkeit T und Zahlungszeitpunkten T_1, \dots, T_n mit $T_1 > T$.
- Setze $c_i := K(T_i - T_{i-1})$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $c_n := 1 + K(T_n - T_{n-1})$. Wir bestimmen die Short Rate r^* , für die $\sum_{i=1}^n c_i P(T, T_i, r^*) = 1$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Swapt}^{\text{payer}}(t, T, (T_1, \dots, T_n), N, K) \\ = N \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot \text{Put}(t, T, T_i, P(T, T_i, r^*)). \end{aligned}$$

- Analog gilt für eine Receiver Swaption

$$\begin{aligned} \text{Swapt}^{\text{receiver}}(t, T, (T_1, \dots, T_n), N, K) \\ = N \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot \text{Call}(t, T, T_i, P(T, T_i, r^*)). \end{aligned}$$

Hull-White Modell: Kalibrierung (1)

Theorem

Seien $P_M(t_0, t)$ die am Markt zur Zeit t_0 beobachteten Zerobondpreise und $F(t_0, t)$ die zugehörigen instantanen Forward Rates. Wählt man

$$b(t) := \frac{1}{a} \frac{\partial F(t_0, t)}{\partial t} + F(t_0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - \exp(-2a(t - t_0))),$$

so stimmen die unter dem Hull-White Modell berechneten Zerobondpreise $P(t_0, t)$ für beliebige Wahl von a, σ mit den beobachteten Preisen $P_M(t_0, t)$ überein.

σ und a können durch Anpassung an am Markt beobachtbare Cap Volatilitäten geschätzt werden.

Hull-White Modell: Kalibrierung (2)

Beweis. Aus

$$\begin{aligned} P(t_0, t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{t_0}^t r(v) dv \mid \mathcal{F}_{t_0} \right) \right] \\ &= \exp \left(- \int_{t_0}^t m(t_0, v) dv + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_{t_0}^t (1 - e^{-a \cdot (t-v)})^2 dv \right) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{\partial \ln(P(t_0, t))}{\partial t} \\ &= -m(t_0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_{t_0}^t 2 \cdot (1 - e^{-a \cdot (t-v)}) \cdot a \cdot e^{-a \cdot (t-v)} dv \\ &= -r(t_0) \cdot e^{-a \cdot (t-t_0)} - \int_{t_0}^t e^{-a \cdot (t-v)} \cdot a \cdot b(v) dv \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a} \int_{t_0}^t \left[e^{-a \cdot (t-v)} - e^{-2a \cdot (t-v)} \right] dv. \end{aligned}$$

Hull-White Modell: Kalibrierung (3)

Beweis. (Fortsetzung)

Wir berechnen

$$g(t) + \frac{1}{a} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = -b(t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2a(t-t_0)}).$$

Nach Voraussetzung erfüllt auch $-F(t_0, t)$ diese Differentialgleichung, und es gilt $g(t_0) = -F(t_0, t_0) = r(t_0)$. Daraus folgt $g(t) = -F(t_0, t)$, d.h.

$$\frac{\partial \ln(P(t_0, t))}{\partial t} = \frac{\partial \ln(P_M(t_0, t))}{\partial t}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Case Study 1: pfadabhängige Derivate

Ein variables Darlehen in Höhe von 500000 Euro läuft über eine Laufzeit von 30 Jahren und sieht die komplette Rückzahlung zum Laufzeitende vor. Es werden insgesamt 360 monatlich nachschüssig zahlbare Zinszahlungen vereinbart. Der Zinssatz zum Zinszahlungstermin T_i , $i = 1, \dots, 360$, beträgt $\max(3\%, 1.5\% + z(T_{i-1}))$, wobei $z(T_i)$ die EURIBOR-Zinsrate zum Zeitpunkt T_i bezeichnet. Der Darlehensnehmer wünscht eine Begrenzung des Zinssatzes durch die obere Schranke

$$\min \left(4.5\%, 1.5\% + \min \left(z(T_{i-1}), \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i z(T_{j-1}) \right) \right).$$

Gesucht ist der faire Preis für diese Absicherung.

Case Study 2: Kollektiv von Erlebensfallversicherungen

- Wir betrachten ein Kollektiv von I_x identischen reinen Erlebensfallversicherungen gegen Einmalbeitrag

$$\pi = {}_T p_x \cdot \exp(-r^* T),$$

wobei ${}_T p_x = \frac{I_{x+T}}{I_x}$ und r^* der Rechnungszins ist.

- Wir nehmen an, dass die Prämien in das Bankkonto investiert werden.
- akkumulierter Wert der Prämien minus Leistungen zur Zeit T :

$$I_{x+T} \left(\exp \left(\int_0^T r(s) ds - r^* T \right) - 1 \right)$$

- Marktwert zur Zeit 0:

$$I_{x+T} (\exp(-r^* T) - P(0, T))$$

Case Study 2: Absicherung mit Receiver Swaps (1)

- Schließe $N = I_x \cdot \pi = I_{x+T} \exp(-r^* T)$ Receiver Swaps zur Zeit 0 mit Swap Rate $S_{0,T}$ ab (kostenlos).
- Barwert zur Zeit 0 der Swap Zahlungen:

$$\begin{aligned}
 & N \int_0^T \exp\left(-\int_0^s r(\tau) d\tau\right) (S_{0,T} - r(s)) ds \\
 &= N \left[S_{0,T} \int_0^T \exp\left(-\int_0^s r(\tau) d\tau\right) ds - \left(1 - \exp\left(-\int_0^T r(s) ds\right)\right) \right]
 \end{aligned}$$

- akkumulierter Wert der Swap Zahlungen zur Zeit T :

$$N \cdot S_{0,T} \int_0^T \exp\left(\int_s^T r(\tau) d\tau\right) ds - N \left(\exp\left(\int_0^T r(s) ds\right) - 1 \right)$$

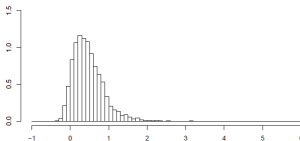
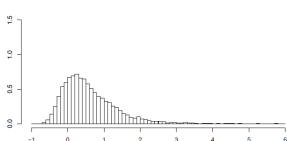
Case Study 2: Absicherung mit Receiver Swaps (2)

- Wert zur Zeit T von Prämien minus Leistungen:

$$I_{x+T} \left(\exp \left(\int_0^T r(s) ds - r^* T \right) - 1 \right)$$

- Gesamtwert zur Zeit T :

$$I_{x+T} \left(S_{0,T} \exp(-r^* T) \int_0^T \exp \left(\int_s^T r(\tau) d\tau \right) ds - (1 - \exp(-r^* T)) \right)$$



Case Study 2: Überlegungen unter dem realen Maß

- Der Zins als gemeinsamer Risikofaktor verhindert den Pooling-Effekt.
 - ▶ Sei L_{x+T} die zufällige Anzahl der Überlebenden des Alters $x + T$. Der Variationskoeffizient strebt gegen 0, wenn die Anzahl der Versicherten gegen ∞ geht (Pooling).
 - ▶ Für den stochastischen Barwert

$$PV = L_{x+T} \exp \left(- \int_0^T r(s) ds \right) = L_{x+T} \cdot D(0, T)$$

trifft dies nicht mehr zu; denn:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(PV) &= \mathbb{E}L_{x+T} \cdot \mathbb{E}(D(0, T)) \\ \text{Var}(PV) &= \mathbb{E}L_{x+T}^2 \cdot \text{Var}(D(0, T)) + \text{Var}(L_{x+T}) \cdot (\mathbb{E}(D(0, T)))^2\end{aligned}$$

Case Study 3: Risikokapital für das Zinsrisiko

- Sei $c(t)$, $t = 1, 2, \dots, T$, ein Cashflow von Versicherungsleistungen.
- stochastischer Barwert zum Zeitpunkt 0:

$$PV(0) = \sum_{t=1}^T c(t) \cdot \exp \left(- \int_0^t r(u) du \right)$$

- stochastischer Barwert zum Zeitpunkt 1:

$$PV(1) = \sum_{t=1}^T c(t) \cdot \exp \left(- \int_1^t r(u) du \right)$$

- Der Marktwert zum Zeitpunkt 0 ergibt sich als Erwartungswert unter dem risikoneutralen Maß Q :

$$MV(0) = \mathbb{E}_Q(PV(0))$$

Case Study 3: Risikokapital für das Zinsrisiko

- Um einen Marktwertanstieg der Verbindlichkeiten mit Wahrscheinlichkeit α puffern zu können, ist zum Zeitpunkt 0 das Risikokapital

$$VaR_{\alpha}(\Delta MV) = MV_{\alpha}(1) \cdot P(0, 1) - MV(0)$$

zu stellen, wobei $P(0, 1)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeitszeitpunkt 1 und

$$MV_{\alpha}(1) = \mathbb{E}_Q(PV(1) \mid r(1) = VaR_{\alpha}(r(1)))$$

- Dabei ist $VaR_{\alpha}(r(1))$ unter dem realen Maß \mathbb{P} als $(1 - \alpha)$ -Quantil zu bestimmen.

Case Study 3: Risikokapital für das Zinsrisiko

Beispiel: Vasicek-Modell

- Dynamik unter dem realen Maß:

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW_t$$

- Bezeichnet λ den Marktpreis des Risikos, so folgt $r(t)$ unter dem risikoneutralen Maß Q der Gleichung

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t)) dt + \sigma dW_t^Q$$

mit $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

- *Übung.* Unter beiden Maßen wird die Dynamik durch ein affines Modell mit einer normalverteilten Short Rate beschrieben.
- Das α -Quantil des Barwerts der Verbindlichkeiten ergibt sich für das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Short Rate.

Case Study 4: Verträge mit Überschussbeteiligung

- **Asset-Modell** unter dem realen Maß \mathbb{P}

$$dr(t) = a \cdot (b - r(t)) dt + \sigma_r dW_r(t)$$

$$dS(t) = S(t) \cdot (\mu dt + \sigma_S dW_S(t))$$

mit $W_r = W_1$ und $W_S = \varrho \cdot W_1 + \sqrt{1 - \varrho^2} \cdot W_2$, wobei W_1 und W_2 unabhängige Brownsche Bewegungen und $\varrho \in [0, 1]$ sind.

- **Lösung** unter \mathbb{P}

$$r(t) = \exp(-at) \cdot r(0) + b \cdot (1 - \exp(-at)) + \sigma_r \cdot \exp(-at) \cdot \int_0^t \exp(au) dW_r(u)$$

$$S(t) = S(0) \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) \cdot t + \sigma_S \cdot W_S(t)\right)$$

$$B(t) := \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right) \quad (\text{Bankkonto})$$

Case Study 4: Verträge mit Überschussbeteiligung

- **Asset-Modell** unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} unter der Annahme eines konstanten Marktpreises des Risikos λ

$$dr(t) = a \cdot \left(b - \frac{\lambda \sigma_r}{a} - r(t) \right) dt + \sigma_r d\tilde{W}_r(t)$$

$$dS(t) = S(t) \cdot \left(r(t) dt + \sigma_S d\tilde{W}_S(t) \right)$$

mit $\tilde{W}_r(t) = W_r(t) + \lambda \cdot t$ und $\tilde{W}_S(t) = W_S(t) + \int_0^t \frac{\mu - r(s)}{\sigma_S} ds$

- verwendete Maßtransformation

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = & \exp \left(-\lambda W_1(t) - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right. \\ & \left. - \int_0^t \frac{\mu - r(s) - \varrho \lambda \sigma_S}{\sigma_S \sqrt{1 - \varrho^2}} dW_2(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\mu - r(s) - \varrho \lambda \sigma_S)^2}{\sigma_S^2 (1 - \varrho^2)} ds \right) \end{aligned}$$

Case Study 4: Verträge mit Überschussbeteiligung

- Die diskontierten Preisprozesse

$$\exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) S(t) \quad \text{und} \quad \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) P(t, T), \quad 0 \leq t \leq T$$

sind \mathbb{Q} -Martingale.

- SDE der Zerobondpreise unter \mathbb{Q} :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t) dt - \sigma_r \frac{1 - \exp(-a(T - t))}{a} d\tilde{W}_r(t)$$

Case Study 4: Verträge mit Überschussbeteiligung

- Erlebensfallvertrag mit Einmalprämie P und endfälliger Garantie $L(T) = P(1+i)^T$
- Kapitalanlagestrategie: Investition des festen Anteils α in das Geldmarktkonto $B(t)$ und des festen Anteils $1 - \alpha$ in Aktien $S(t)$
- Die Kapitalanlagestrategie führt zu einer Mischung der infinitesimalen Renditen.
- Dynamik der Assets unter \mathbb{P}

$$\begin{aligned}
 A(0) &= P \\
 dA(t) &= A(t) \cdot \left(\alpha \cdot \frac{dB(t)}{B(t)} + (1 - \alpha) \cdot \frac{dS(t)}{S(t)} \right) \\
 &= A(t) \cdot (\alpha r(t) dt + (1 - \alpha)(\mu dt + \sigma_S dW_S(t)))
 \end{aligned}$$

- Dynamik der Assets unter \mathbb{Q}

$$\begin{aligned}
 A(0) &= P \\
 dA(t) &= A(t) \cdot (r(t) dt + (1 - \alpha)\sigma_S d\tilde{W}_S(t))
 \end{aligned}$$

Case Study 4: Verträge mit Überschussbeteiligung

- Bewertung unter dem risikoneutralen Maß
 - ▶ Wert der endfälligen Garantie: $\max(0, L(T) - A(T))$
 - ▶ Wert der Schlussüberschussbeteiligung:
 $SP(T) = \gamma \cdot \max(A(T) - L(T), 0)$
 - ▶ Bestimmung der fairen Beteiligungsrate γ^* , so dass

$$P = \mathbb{E}_Q \left(\exp \left(- \int_0^T r(s) ds \right) (L(T) + SP(T)) \right)$$

- Bewertung unter dem realen Maß
 - ▶ Shortfall-Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(A(T) < L(T))$
 - ▶ $VaR_\alpha(L(T) - A(T))$
 - ▶ $ES_\alpha(L(T) - A(T))$
 $= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L(T) - A(T) | L(T) - A(T) > VaR_\alpha(L(T) - A(T)))$

Case Study 5: Callable Bonds

- Ein callable Bond räumt dem Emittenten ein Kündigungsrecht ein.
- Kann der Emittent einen Kupon-Bond zu einem einzigen Zeitpunkt kündigen, so kann dieses Kündigungsrecht mit Hilfe einer europäischen Receiver-Swaption repliziert werden.

Wird die Swaption ausgeübt, so kann der Emittent mit den festen Zinszahlungen des Swap die Kupon-Zahlungen bedienen und mit dem Nominalbetrag einen variabel verzinslichen Bond kaufen, dessen Koupens die zu zahlenden variablen Zinsen des Swaps decken. Am Ende der ursprünglichen Laufzeit wird die Rückzahlung des variabel verzinslichen Bonds zur Rückzahlung des Nominals verwendet.

- Ist das Kündigungsrecht jederzeit ausübbar, kann es mit Hilfe einer amerikanischen Receiver-Swaption bewertet werden. Besteht das Kündigungsrecht zu endlich vielen Zeitpunkten, liegt eine Bermuda-Swaption vor.

Case Study 5: Callable Bonds

- Die Bewertung einer europäischen Swaption kann mit dem Trick von Jamshidian auf die Preise von Calls und Puts auf Zerobonds zurückgeführt werden.
- Ein alternativer Bewertungsansatz¹¹ nutzt aus, dass Swaptions als Optionen auf Kupon-Bonds mit Strike 1 aufgefasst werden können und Kupon-Bond-Preise unter dem T -Forward-Maß Q^T lognormalverteilt sind. Sei $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ mit $c_i = K(T_i - T_{i-1})$ für $i = 1, \dots, n$, $T_0 := T$ und $c_n = 1 + K(T_n - T_{n-1})$.

$$\begin{aligned}
 \text{Swapt}^{\text{payer}}(t, T, (T_1, \dots, T_n), N, K) &= \text{CallCB}(t, T, \mathcal{C}, K, 1) \\
 &= P(t, T) \cdot \mathbb{E}^T [(CB(T, \mathcal{C}) - 1)^+ | \mathcal{F}_t] \\
 \text{Swapt}^{\text{receiver}}(t, T, (T_1, \dots, T_n), N, K) &= \text{PutCB}(t, T, \mathcal{C}, K, 1) \\
 &= P(t, T) \cdot \mathbb{E}^T [(1 - CB(T, \mathcal{C}))^+ | \mathcal{F}_t]
 \end{aligned}$$

¹¹Vgl. Russo, Fabozzi, Pricing Coupon Bond Options and Swaptions under the One-Factor Hull-White Model, 2016.

Case Study 5: Callable Bonds

- Zur Bestimmung der Parameter der Lognormalverteilung leiten wir die Dynamik des Kupon-Bonds unter Q^T ab.

- ▶ Dynamik der Zerobonds unter Q :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r(t) dt - \sigma B(t, T) dW(t)$$

mit $B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$

- ▶ Dynamik der Zerobonds unter Q : Aus

$CB(t, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n c_i P(t, T_i)$ folgt mit der Itô-Formel

$$\frac{dCB(t, \mathcal{C})}{CB(t, \mathcal{C})} = r(t) dt - \sigma H(t, T) dW(t)$$

mit $H(t, T) = \frac{\sum_{i=1}^n c_i P(t, T_i) B(t, T_i)}{\sum_{i=1}^n c_i P(t, T_i)}$.

- ▶ Unter Q^T ist der Forward-Preis $CB^F(t, \mathcal{C}) := \frac{CB(t, \mathcal{C})}{P(t, T)}$ ein Martingal. Mit der Itô-Formel folgt

$$\frac{dCB^F(t, \mathcal{C})}{CB^F(t, \mathcal{C})} = \sigma (B(t, T) - H(t, T)) dW^T(t).$$

Case Study 5: Callable Bonds

- Unter Q^T ist $CB(T, \mathcal{C}) = CB^F(T, \mathcal{C})$ lognormalverteilt mit den Parametern 0 und $\Sigma^2 := \sigma^2 \int_0^T (B(t, T) - H(t, T))^2 dt$.
- Es folgt

$$\begin{aligned} \text{CallCB}(t, T, \mathcal{C}, K, X) &= P(t, T) \cdot \mathbb{E}^T [(CB(T, \mathcal{C}) - X)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= CB(t, \mathcal{C}) \cdot \Phi(d_1) - X \cdot P(t, T) \cdot \Phi(d_2) \end{aligned}$$

mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln \left[\frac{CB(t, \mathcal{C})}{X \cdot P(t, T)} \right] \pm \frac{1}{2} \Sigma^2}{\Sigma}.$$

Case Study 5: Callable Bonds

- Callable Bonds, die zu endlich vielen Zeitpunkten gekündigt werden können, stellen Bermuda-Swaptions dar.
- Zur Bewertung können das Projektions-SOR-Verfahren (freies Randwertproblem) oder der Longstaff-Schwartz-Algorithmus herangezogen werden.
- Im Longstaff-Schwartz Algorithmus wird der Fortsetzungswert der Option jeweils mit dem Wert bei Ausübung der Option verglichen. Dieser Ausübungswert kann im Hull-White-Modell mit den analytischen Formeln für die Zerobondpreise unter Verwendung von (14) bestimmt werden.

Simulation

- Da die zweidimensionale Normalverteilung von $\left(r(T), \int_0^T r(v) dv\right)$ bekannt ist, können Optionen, deren Auszahlung nur von $r(T)$ abhängt, durch Ziehen von Zufallsvektoren aus dieser Verteilung numerisch effizient bewertet werden.
- Übung: $\text{Cov}\left(r(T), \int_0^T r(v) dv\right) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 + \exp(-2at) - 2\exp(-at))$
- Soll die Simulation des Diskontierungsfaktors vermieden werden, bietet sich die Simulation des Payoffs unter dem T -Forward-Maß Q^T an. Die Dynamik der Short Rate unter Q^T hat die Gestalt

$$dr(t) = a(b(t) - B(t, T)\sigma^2 - r(t)) dt + \sigma dW^T(t),$$

so dass auch unter Q^T die Short-Rate normalverteilt ist.

Diese Methode kann auch für Optionen verwendet werden, die nur von endlich vielen $r(t_j)$, $j = 1, \dots, d$ abhängen.

PDE (1)

- Der Preis eines Derivats $V(t) = V(t, T, r(t))$ erfüllt die Feynman-Kac Gleichung

$$V_t + \left(a(b(t) - r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma \right) V_r + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} - r(t)V = 0.$$

- Endbedingungen für verschiedene Derivate
 - ▶ Zerobond: $V_T = 1$
 - ▶ Call-Option auf den Zerobond mit Fälligkeit $T_C < T$:

$$V(T_C) = (P(T_C, T) - K)^+$$
- Wert des Payer Swaps, der stetig die feste Zinsrate r^* gegen die Short Rate r austauscht

$$\begin{aligned} V_t + \left(a(b(t) - r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma \right) V_r + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} \\ - r(t)V + (r - r^*) &= 0 \\ V(T) &= 0 \end{aligned}$$

PDE (2)

- Wert der Payer Swaption mit Fälligkeit T auf den obigen Swap mit Endzeitpunkt $T_S > T$

$$V_t + \left(a(b(t) - r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma \right) V_r + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} - r(t)V = 0$$

$$V(r, T) = (W(r, T) - K)^+$$

Dabei bezeichnen $W(r, T)$ den Wert des Payer Swaps und K den Strike der Swaption.

- Zur Bewertung der Payer Swaption wird zunächst der Wert des Swaps zum Zeitpunkt T bestimmt und danach die Option, in den Swap einzutreten.