Ejercicios

1. Comente las diferencias (fortalezas y limitaciones) que hay entre la Ley de Grandes Números y el Teorema Central del Límite.

2. Sea X una v.a. con f.g.m. $\left[\frac{1}{2}(2-4t)\right]^{-\frac{15}{2}}, t < 0.50$, demuestre que $P[X > 1104/100] = \frac{3}{4}$.

3. Considere un 'call-center' que administra las llamadas de queja de clientes de cierta aerolínea de bajo costo. Suponga que el número de llamadas entrantes por día, W, sigue una distribución Poisson con $E[W] = 100$. Utilizando una aproximación Normal demuestre que la probabilidad de que se reciban más de 133 llamadas en un día es muy pequeña y que es aproximadamente $\frac{5}{10,000}$.

4. Utilizando sólo f.g.m.'s demuestre que si $n \to \infty$ y $np \to \lambda$, i.e. $p \to 0$, una distribución Binomial con parámetros n y p tiende a una distribución Poisson.

5. Un escéptico da el siguiente argumento, según él, para probar que el teorema central del límite no jala. Aduce que la suma de v.a.i.i.d. con densidad Poisson es una Poisson con parámetro la suma de los parámetros. En particular, si se tienen n distribuciones Poisson y cada una tiene parámetro $1/n$, entonces la distribución exacta de una suma de distribuciones Poisson tendría una distribución Poisson con parámetro 1. Esta no seria igual a una Normal.

   a. ¿Qué opinión tiene respecto a este argumento?

   b. ¿Cómo mostraría rápidamente de qué se trata el problema utilizando sólo las f.g.m.'s correspondientes?

6. El TCL también puede utilizarse para el análisis de errores de redondeo. Suponga que los errores de redondeo están representados por una v.a. uniforme sobre el intervalo $[-1/2, 1/2]$. Si se suman 100 números, aproxime la probabilidad de que el error de redondeo exceda:

   a. 1.

   b. 2.

   c. 5.

7. Un borracho ejecuta una caminata aleatoria de la siguiente manera: cada minuto da un paso hacia adelante o hacia atrás, con probabilidad $1/2$ cada uno, y sus siguientes pasos son independientes. El largo de sus pasos es el mismo: 50 cm.

   a. Utilice el TCL para aproximar la distribución de probabilidades de su ubicación (en pasos) después de 2 horas.

   b. ¿Determine donde es más probable que se encuentre?

   c. ¿Cuál es la proba. de que se encuentre en el mismo lugar $+/-$ 1 paso?

8. El mismo problema anterior, las mismas preguntas, pero suponiendo que el borracho tiene cierta idea de hacia a dónde va. Da pasos hacia adelante con probabilidad $2/3$ y pasos hacia atrás con proba. $1/3$.

9. Suponga que juega una serie de 50 apuestas indeps. en un juego justo. En cada juego usted apuesta $\$5$. Utilice el TCL para aproximar la proba. de que termine perdiendo más de $\$75$.

10. Suponga que ciertas mediciones tienen media μ y varianza $\sigma^2 = 25$. Sea $\bar{X}$ el promedio de n mediciones independientes.

    a. ¿Qué tan grande debe ser n para que $P(|\bar{X} - \mu| < 1) = .95$ utilizando la LGN?

    b. Ahora, ¿Qué tan grande debe ser n para obtener la misma proba. pero utilizando el TCL?

    c. ¿Aprox. cuántas veces es más grande los cálculos utilizando uno y el otro?

    d. ¿De qué depende que pueda utilizar en este caso LGN o TCL?

11. Sean $X_1, \ldots, X_m$ y $Y_1, \ldots, Y_n$ dos m. a. independientes donde $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Entonces la diferencia de las medias muestrales $\bar{X} - \bar{Y}$ es una combinación lineal de v.a.'s Normales independientes y por lo tanto se distribuye Normal.

    a. Encuentre $E[\bar{X} - \bar{Y}]$.

    b. Encuentre $var(\bar{X} - \bar{Y})$.

    c. Suponga que $\sigma_1^2 = 2.0$ y $\sigma_2^2 = 2.5$, y que $m = n$. Encuentre los tamaños de muestra para que $(\bar{X} - \bar{Y})$ esté a no más de una unidad de $(\mu_1 - \mu_2)$ con una proba. de al menos 0.95.

12. Con referencia al problema anterior, suponga que $\sigma_1^2 = 0.4$ y $\sigma_2^2 = 0.8$. Si las medias son iguales, i.e. $\mu_1 = \mu_2$, encuentre la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ exceda la media muestral $\bar{Y}$ por al menos una unidad.

13. Con referencia al problema anterior, suponga que $n_1 = 20$ y que $\sigma_1^2 = 1.4$. Sea S_1^2 la varianza muestral de las 20 mediciones.

    a. Encuentre b tal que $Pr(S_1^2 \leq b) = 0.975$.

    b. Encuentre a tal que $Pr(a \leq S_1^2) = 0.975$.

    c. Si a y b son de los incisos anteriores, ¿cuánto es $Pr(a \leq S_1^2 \leq b)$?

14. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de tamaño n con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Utilice la teoría vista en el curso para determinar:

    a. $E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$.

    b. $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$.

    c. Observando sus respuestas a los incisos anteriores (a y b), y con lo que hasta ahora hemos visto, expliqué cuál de los dos estadísticos sería 'mejor' para estimar a σ^2 entre el utilizado en el inciso a, y el utilizado en el inciso b.

    d. $var\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$.

    e. $var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]$.

15. Sea Z_1, Z_2 una m.a. de tamaño 2 con dist. $N(0,1)$. Determine cuál es la dist. de:

    a. $Z_1 + Z_2$. Justifique.

    b. $(Z_1 - Z_2)/\sqrt{2}$. Justifique.

    c. $\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{2}$. Justifique.

    d. $\frac{Z_1 + Z_2}{\sqrt{(Z_1 - Z_2)^2}}$. Justifique.

16. Sea $X \sim F_{(m,n)}$, demuestre que:

    a. $E[X] = \frac{n}{n-2},\ n > 2$.

    b. $var[X] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)},\ n > 4$.

17. Acepte los incisos de la pregunta anterior y reflexione: ¿por qué se pide que $n > 2$ y $n > 4$, respectivamente?

18. Sea $Z \sim N(0,1)$ independiente de $Y \sim \chi^2_{(\nu)}$. Entonces

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}} \sim t_{(\nu)}.$$

    a. Determine $E[Z]$ y $E[Z^2]$.

    b. Demuestre que si $Y \sim \chi^2_{(\nu)}$, entonces

$$E[Y^r] = \frac{\Gamma([\nu/2] + r)}{\Gamma(\nu/2)} 2^r, \quad r > \frac{-\nu}{2}$$

    c. Use los incisos anteriores para mostrar que:

        1. $E[T] = 0$, si $\nu > 1$.
        2. $var(T) = \nu/(\nu - 2)$, si $\nu > 2$.

19. Demostrar que si $T \sim t_{(1)}$, entonces $T \sim Cauchy$.

20. Demostrar que si $T \sim t_{(n)}$ con $n \longrightarrow \infty$, entonces $T \longrightarrow Z$, donde $Z \sim N(0,1)$.

21. Demostrar que si $X \sim F_{(m,n)}$, entonces $X^{-1} \sim F_{(n,m)}$.

22. Demostrar que si $T \sim t_{(n)}$, entonces $T^2 \sim F_{(1,n)}$.

23. Sea $\bar{X}$ el promedio de una muestra de 16 v.a. Normales con media 0 y varianza 1. Determinar c de modo que:

$$P(|\bar{X}| < c) \;=\; .5.$$

24. Sean W_1 y W_2 v.a.'s independientes con $W_i \sim \chi^2_{n_i}$. Entonces

$$F = \frac{W_1/n_1}{W_2/n_2}$$

sigue una dis. F con n_1 y n_2 g. l.

a. Demostrar que

$$E[F] = n_2/(n_2 - 2), \quad n_2 > 2.$$

b. Demostrar que

$$var(F) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}, \; n_2 > 4.$$

25. Considere las varianzas muestrales S_1^2 y S_2^2 con $n_1 = 10$ y $n_2 = 8$.

a. Encuentre b tal que $Pr\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq b\right) = 0.95$.

b. Encuentre a tal que $Pr\left(a \leq \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = 0.95$.

c. Si a y b son de los incisos anteriores, ¿cuánto es $Pr\left(a \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq b\right)$?

26. Sea $X_1, \ldots, X_5$ una m.a. de tamaño 5 de una dist. $N(0,1)$. $\bar{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 X_i$, y X_6 de la misma población e indep. de las anteriores.

a. ¿Cuál es la dist. de $W = \sum_{i=1}^5 X_i^2$? Justifique.

b. ¿Cuál es la dist. de $U = \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2$? Justifique.

c. ¿Cuál es la dist. de $W = \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2 + X_6^2$? Justifique.

27. Sean $X's$, $\bar{X}$, W y U como en la pregunta anterior.

a. ¿Cuál es la distribución de $\sqrt{5}X_6/\sqrt{W}$? Justifique.

b. ¿Cuál es la distribución de $2X_6/\sqrt{U}$? Justifique.

c. ¿Cuál es la distribución de $2(5\bar{X}^2 + X_6^2)/U$? Justifique.

28. Sea $X_1, \ldots, X_{10}$ una m.a. de una población $N(0, \sigma^2)$.

a. Determine al distribución de $(10)\bar{X}^2/S^2$. Justifique.

b. Determine al distribución de $S^2/[(10)\bar{X}^2]$. Justifique.

c. Determine la constante c tal que

$$P\left(-c \leq \frac{S}{\bar{X}} \leq c\right) = 0.95$$

y donde el estadístico $S/\bar{X}$ es el *coeficiente de variación muestral*.

29. Sea U y V dos v.a.'s i.i.d. exponenciales con media 1. Encuentre

a. $P(U/V \leq 1)$.

b. La cte. c tal que $\Pr(U/V \leq c) = 0.95$.

30. Una antropóloga desea estimar la estatura promedio de los hombres en cierta raza de personas. Si se asume que la población tiene una desviación estándar de 2.5 pulgadas y si ella selecciona aleatoriamente una muestra de 100 hombres, encuentre la probabilidad de que la

diferencia entre la media muestral y la verdadera media poblacional no exceda en 0.5 pulgadas.

31. Suponga que se tienen 8 focos. Los focos operan de manera similar, simultánea y de manera independiente. Esto es operan cada uno por su cuenta y sin memoria. Si denotamos los tiempos de falla en horas de los focos con X_i, suponga que $X_i \sim Exp(\lambda = 1/1000)$. De modo que el estadístico de orden Y_1 denota el tiempo de la primera falla del conjunto de focos examinado. Determinar:

    a. El tiempo medio de la 1era falla.
    b. El tiempo medio de la 2da falla.
    c. El tiempo medio entre la 1era y 2da falla.

32. Se tienen 2 m. a. indeps. entre sí tomadas de una población que sigue una distribución $N(80, 36)$. Los tamaños de muestra utilizados son 10 y 15. Sea D la diferencia entre las medias muestrales. Encuentre $Pr(|D| > 2)$.

33. Suponga que un jugador de basquetbol puede encestar o anotar puntos con cierto 'tiro' particular con probabilidad 0.3. Utilice el Teorema Central del Límite para encontrar la distribución aproximada de A, el total de anotaciones exitosas de un total de 25 intentos independientes. Encuentre las probabilidades aproximadas de que A sea menor o igual a 5, 7, 9 y 11. Posteriormente compare estas probabilidades contra las probabilidades exactas.

34. Sea $Z \sim Exp(\lambda = 1/2)$ y sea X_1, X_2 una m.a. de tamaño 2 con densidad $N(0, 1)$. Determine cómo se distribuye $[(X_1 - X_2)^2 + 2X_1X_2]/Z$. Justifique.

35. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de tamaño n con dist. poblacional $N(\mu, \sigma^2)$. Suponiendo que n es muy grande determine:

    a. La distribución aproximada de M, la mediana muestral.
    b. La distribución aproximada de $\bar{X}$, la media muestral.
    c. Suponga que $\sigma^2 = 1$ y determine n de modo que $Pr(|M - \bar{X}| < 1) = 0.95$.

36. Da un ejemplo donde la población objetivo y la población muestreada son:

    a. Lo mismo.
    b. No son lo mismo.

37. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de tamaño n con dist. poblacional $N(0, 1)$. Sean:

$$\begin{aligned} \bar{X}_k &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i, \\ \bar{X}_{n-k} &= \frac{1}{n-k}\sum_{j=k+1}^{n} X_j. \end{aligned}$$

    Utilizando los resultados que vimos y lo que sabe de cursos pasados, determine:

    a. Si $\bar{X}_k$ y $\bar{X}_{n-k}$ son o no independientes. Justifique.

    Ahora determine la distribución de:

    b. $\frac{1}{2}(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k})$. Justifique.
    c. $k\bar{X}_k^2 + (n-k)\bar{X}_{n-k}^2$. Justifique.
    d. X_1^2/X_2^2. Justifique.
    e. X_1/X_n. Justifique.

38. Sea Z_1, Z_2 una m.a. de tamaño 2 con dist. poblacional $N(0, 1)$ y sea X_1, X_2 una m.a. de tamaño 2 con dist. poblacional $N(1, 1)$. Suponga que las Z_i's son independientes de las X_j's. Utilizando los resultados que vimos y lo que sabe de cursos pasados, determine la distribución de:

    a. $\bar{X} + \bar{Z}$. Justifique.
    b. $(Z_1+Z_2)/\sqrt{[(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2]/2}$. Justifique.

c. $[(X_1 - X_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]/2$. Justifique.

d. $(X_2 + X_1 - 2)^2/(X_2 - X_1)^2$. Justifique.

39. Sea X_1, X_2 m.a. de tamaño 2 con densidad

$$f_X(x) \;=\; e^{-x},$$

para $x > 0$. Determine cómo se distribuye X_1/X_2. Justifique.

*(trabajo en curso...... **ultima actualización:** 7 de febrero de 2014)*

Parte VI

Respuestas o ‘hints’ de ejercicios

Respuestas o 'hints' asociados a algunos ejercicios:

1. Hint: Usar teoremas y ligar con el ejercicio 10.
2. $m_X(t) = (1/(1-2t))^{(15/2)} \Rightarrow X \sim \chi^2_{(15)} \Rightarrow P[X > 11.04] = 1 - P[\chi^2_{(15)} < 11.04]$.
3. Hint: $W \sim Po(100) \Rightarrow$ Si $n \to \infty$, $P[W > 133] = 1 - \Phi(3.3)$.
4. Hint: Notar que $p = \lambda/n$.
5. Hint: Definición de e^t.
6. Hint: $X \sim U[-1/2, 1/2] \Rightarrow$ TCL: $\sum^{100} X_i \sim N(0, 100/12)$.
7. Hint: TCL: $\sum^{120} X_i \sim N(0, 3{\times}10^5)$. c. 0.0718.
8. c. 0.0001
9. Hint: $X =$ pérdida en un juego. $\Rightarrow \sum X_i =$ pérdida general.
10. $n_a = 500$; $n_b = 96$.
11. c. Al menos 18.
13. a. $b = 2.42$; b. $a = 0.656$.
18. Hint: Recuerde que para toda v. a. $E[Z^2] = var(Z) + E[Z]^2$.
19. Hint: Sustituir.
20. Hint: Utilice la aproximación de Stirling a la función Gamma para z grande,

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z.$$

    Esta aproximación da lugar a la conocida *Fórmula de Stirling*: $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.
23. $c = 0.17$. (Nota. Ya se corrigió el problema, faltaba un valor absoluto. Esta es la respuesta correcta).
25. a. $b = 3.68$; b. $a = 1/3.29$, c. $Pr\left(a \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq b\right) = 0.90$.
30. 0.9544.
31. c. 142.86.
32. 0.4151.
37. a. Hint: Utilice la definición y propiedades de la covarianza de sumas de v.a.'s.

(trabajo en curso...... **ultima actualización:** *7 de febrero de 2014)*