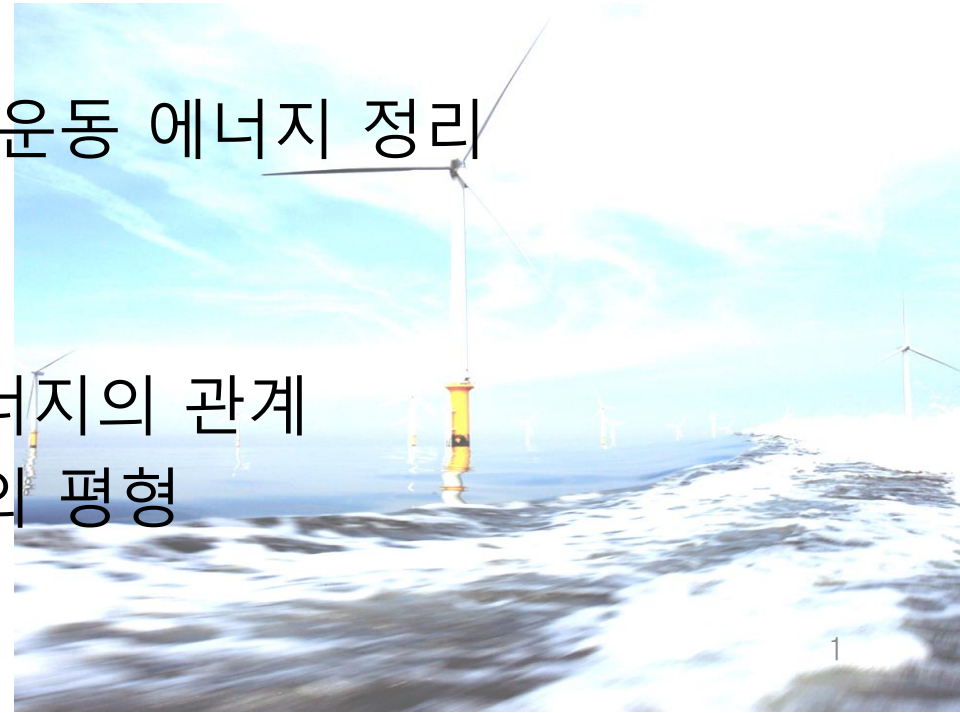


7장. 계의 에너지 (Energy of a System)

- 7.1 계와 환경
- 7.2 일정한 힘이 한 일
- 7.3 두 벡터의 스칼라곱
- 7.4 변하는 힘이 한 일
- 7.5 운동 에너지와 일-운동 에너지 정리
- 7.6 계의 위치 에너지
- 7.7 보존력과 비보존력
- 7.8 보존력과 위치 에너지의 관계
- 7.9 에너지 도표와 계의 평형



- 에너지(energy)에 대한 개념은 과학과 공학에서 가장 중요한 주제 중 하나
 - 일상생활 속에서 에너지라 하면 교통수단이나 난방에 필요한 연료, 전등이나 가전제품을 위한 전기, 소비하는 음식 등으로 이해
 - 이런 생각은 에너지를 제대로 정의한 것이 아니며 연료란 어떤 일을 위해 필요한 것이고, 에너지라고 하는 무엇인가를 제공해 주는 것일 뿐

- 위치나 속도, 가속도, 힘과 같은 양에 대해서 정의하고 뉴턴의 운동 제2법칙과 관련된 원리들을 적용하면 다양한 문제를 해결
 - 뉴턴의 운동법칙을 이용해서 풀 수 있는 문제들 중 일부는 실제로 해결하는 것이 매우 어려움. 이런 문제들은 다른 접근 방법으로 훨씬 간단히 해결할 수 있음.
에너지라는 개념을 이용 (7, 8장)

- 에너지는 우주에 여러 가지 형태로 존재
 - 우주에서 일어나는 모든 물리적인 과정들은 에너지, 에너지의 전달 또는 변환을 포함

○ 에너지에 대한 개념은 뉴턴의 운동법칙에 의존하지 않고서도 역학계의 동역학(dynamics)에 적용

- 운동을 기술하기 위한 “에너지 접근 방법”은 입자에 작용하는 힘이 일정하지 않을 때 특히 유용. 이 경우 가속도가 일정하지 않으므로 등가속도 방정식을 적용할 수 없음
- 자연의 입자들은 때로는 그 입자들의 위치에 따라 변하는 힘을 받음.

이 힘에는 중력과 용수철에 달린 물체에 작용하는 힘 등이 있음.

에너지 보존(8장)이라는 중요한 개념을 이용해서 이러한 상황을 다루는 방법을 소개.

이 접근 방법은 생물학적인 유기체나 공학적 상황에도 적용

라그랑지 방법, 양자역학, 우주초기의 모습 등에 핵심적으로 활용되고 있음.

○ 앞 장에서 소개된 문제풀이 기법은 하나의 입자나, 하나의 입자로 모형화 할 수 있는 물체의 운동에 관한 것

- 하나의 계(system)에 대해 관심을 집중시키고, 계(system) 모형에서 사용할 기법을 개발하는 것에서 새로운 접근 방법을 찾음

7.1 계와 환경

(Systems and Environments)

계 모형에서는, 우리는 우주의 작은 한 부분, 즉 **계(system)**에 대해 관심을 집중하고 그 계를 제외한 우주의 나머지 부분에 대한 구체적인 사항은 무시한다.

유효한 **계**는

- 하나의 물체 또는 입자
- 물체나 입자들의 집합
- 공간의 일부 영역 (예: 자동차 엔진의 실린더 내부)
- 크기와 모양이 변할 수 있음(예: 고무공처럼 벽에 부딪치면 변형되는 것)

주어진 문제에서 특정한 계가 무엇이든 간에, 계의 **경계(system boundary)**라는 가상의 면(꼭 물리적인 면과 동일할 필요는 없다)이 있는데, 이 면은 우주를 계와 그 계를 둘러싼 **환경(environment)**으로 분리한다.

7.2 일정한 힘이 한 일

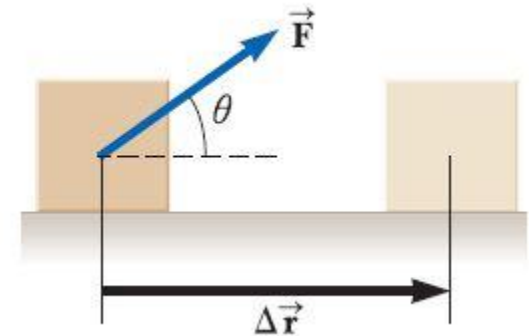
(Work Done by a Constant Force)

일(Work): 어떤 계에 힘이 가해져서 계가 움직였을 때 힘이 계에 대해 일을 했다고 정의한다. (일상적인 의미와 다름)

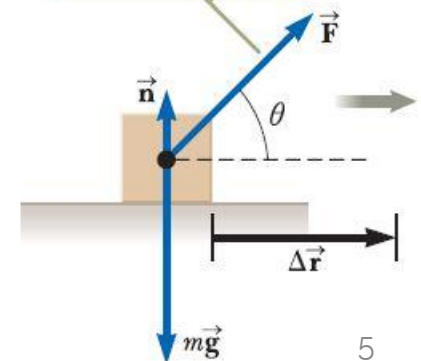
어떤 계에 일정한 크기의 힘을 가하는 주체가 계에 한 일(work) W 는 힘의 크기 F , 힘의 작용점의 변위 크기 Δr 그리고 $\cos\theta$ 의 곱이다.
여기서, θ 는 힘과 변위 벡터가 이루는 각도이다.

$$W \equiv F\Delta r \cos \theta = (F \cos \theta)\Delta r \quad (\text{스칼라 량})$$

어떤 힘이 물체의 위치를 바꾸지 못했다면 물체에 한 일은 없다. 움직이는 물체에 작용하는 힘이 그 작용점의 변위에 대해 수직이라면 그 힘이 한 일은 영이다.



이 경우 \vec{F} 는 물체에 일을 하는 유일한 힘이다.



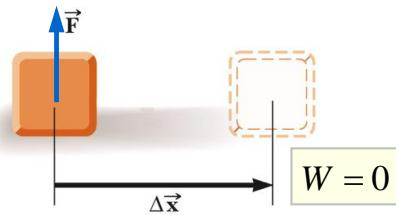
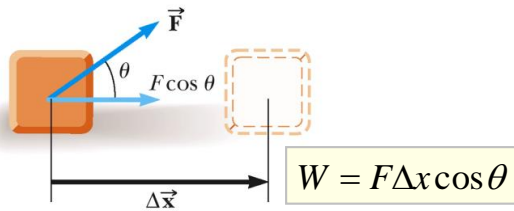
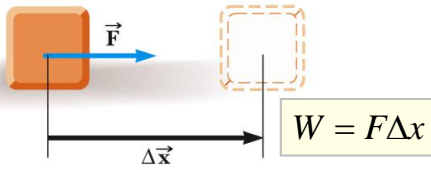
일의 단위: $1J = 1N \cdot m = 1kg \cdot m^2 / s^2 = 10^7 \text{ erg in CGS unit}$

일은 에너지의 전달이다.

W 가 계에 더해진 일이고 W 가 양(+)이라면 에너지는 계로 전달된 것이고,
 W 가 음(-)이라면 에너지는 계로부터 환경으로 전달된 것이다.

따라서 계가 환경과 상호 작용한다면 이 상호 작용은 계의 경계를 통한
에너지의 전달로 묘사할 수 있다. 이 결과로 계에 저장된 에너지가 변한다.

☞ 힘과 일의 관계



☞ 상자를 들어올리는 경우

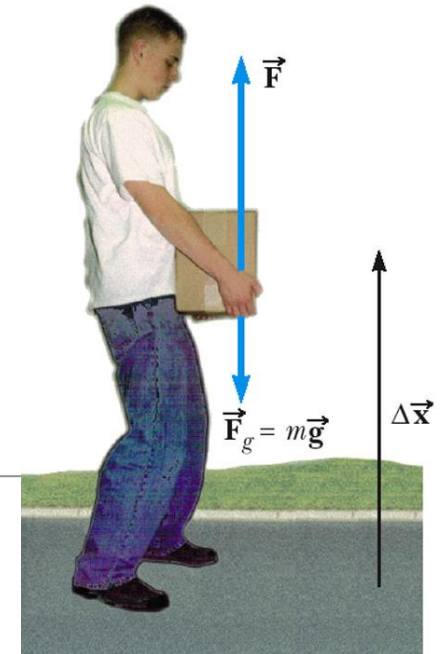
$$\cos 0^\circ = 1 \rightarrow W = F\Delta x > 0$$

☞ 상자를 내려 놓을 경우

$$\cos 180^\circ = -1 \rightarrow W = -F\Delta x < 0$$

※ 일은 스칼라량으로
(+), (-)의 값을 가질 수 있다.

※ 마찰이 있는 경우,
한 일은 마찰이 없을 때보다 작은 값을 가진다.



어떤 힘이 물체의 위치를 바꾸지 못했다면 물체에 한 일은 없다. 움직이는 물체에 작용하는 힘이 그 작용점의 변위에 대해 수직이라면 그 힘이 한 일은 영이다.

일은 에너지의 전달이다.

W 가 계에 더해진 일이고 W 가 양(+)이라면 에너지는 계로 전달된 것이고, W 가 음(-)이라면 에너지는 계로부터 환경으로 전달된 것이다.

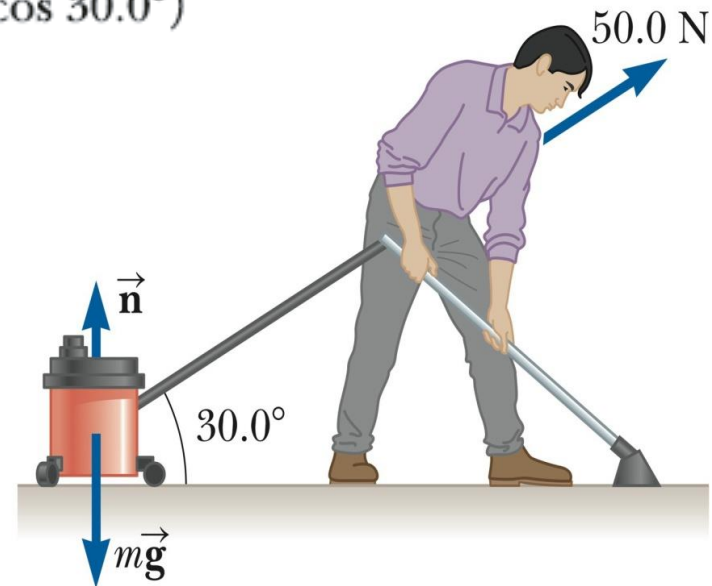
따라서 계가 환경과 상호 작용한다면 이 상호 작용은 계의 경계를 통한 에너지의 전달로 묘사할 수 있다. 이 결과로 계에 저장된 에너지가 변한다.

예제 7.1**진공청소기를 끄는 남자**

그림과 같이 마루를 청소하는 사람이 $F=50.0\text{ N}$ 의 힘으로 수평 방향과 30.0° 의 각도로 진공청소기를 끌고 있다. 진공청소기가 오른쪽으로 3.00 m 움직이는 동안 이 힘이 진공청소기에 한 일을 구하라

풀이

$$W = F \Delta r \cos \theta = (50.0\text{ N})(3.00\text{ m})(\cos 30.0^\circ) \\ = 130\text{ J}$$



심화 예제

얼마나 빨리 돌아 올 수 있나?

사냥을 성공적으로 끝내고 돌아오는 에스키모인이 연어를 실은 썰매를 끌고 있다. 썰매와 연어의 전체 질량은 50.0kg 이고 에스키모인이 줄을 통하여 썰매에 $1.20 \times 10^2\text{N}$ 힘을 가하고 있다.

(a) 줄이 지면과 수평을 이루면서 5.00m 를 끌었다면, 얼마의 일을 하였는가?

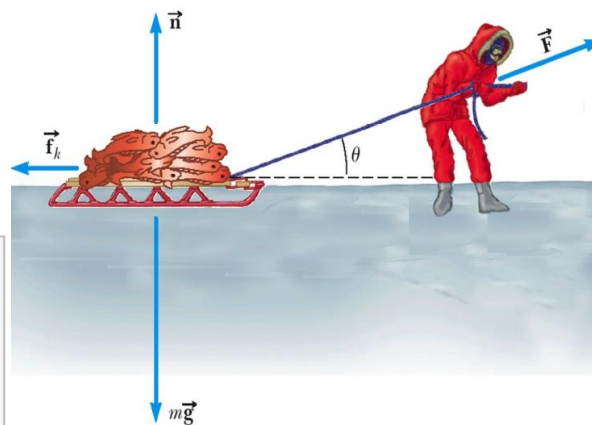
풀이 $\theta = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} W &\equiv \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos \theta \\ &= (1.20 \times 10^2 \text{ N}) \times (5.00 \text{ m}) \cos 0^\circ = 6.00 \times 10^2 \text{ J} \end{aligned}$$

(b) 같은 거리를 지면과 $\theta = 30.0^\circ$ 의 각도로 끌었다면 얼마의 일을 하였는가? 썰매를 점으로 간주하여 줄을 맨 위치 등은 고려하지 않는다.

풀이 $W = F \Delta x \cos \theta$

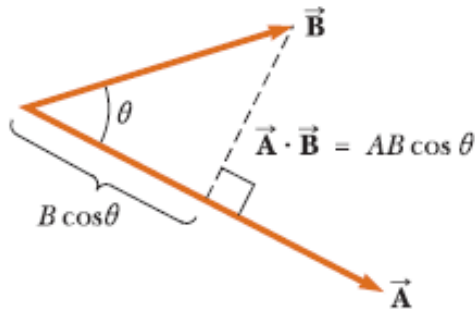
$$= (1.20 \times 10^2 \text{ N}) \times (5.00 \text{ m}) \cos 30.0^\circ = 5.20 \times 10^2 \text{ J}$$



7.3 두 벡터의 스칼라 곱

(The Scalar Product of Two Vectors)

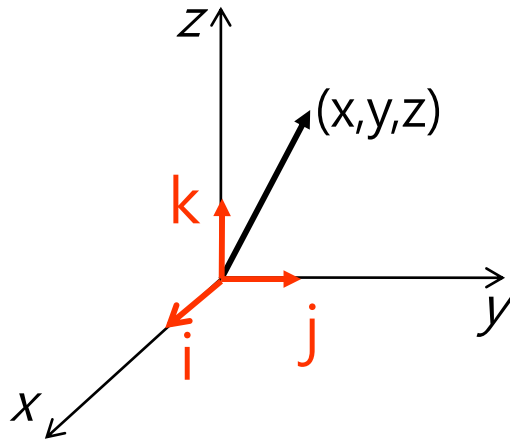
임의의 두 벡터 A와 B의 스칼라곱



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta \quad (\text{정의})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{교환법칙})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{분배법칙})$$



단위벡터 사이의 스칼라곱

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

두 벡터를 성분으로 표시하면

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \text{인 경우} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

따라서 일(work)은 $W = F \Delta r \cos \theta = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$

(참고) 두 벡터의 벡터 곱

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| \equiv AB \sin \theta \quad (\text{크기})$$

(방향: 두 벡터에 수직)

7.4 변하는 힘이 한 일 (Work Done by a Varying Force)

힘이 일을 하는 동안 변하거나 이동 경로가 직선이 아닌 경우에는 힘을 일정하게 취급하거나 경로를 직선으로 근사할 수 있을 만큼 충분히 작은 변위 Δx 동안 한 일을 구한 후 모두 더한다.

오른쪽 그림에서

변위 Δx 동안 한 일: $\Delta W \approx F_x \Delta x$

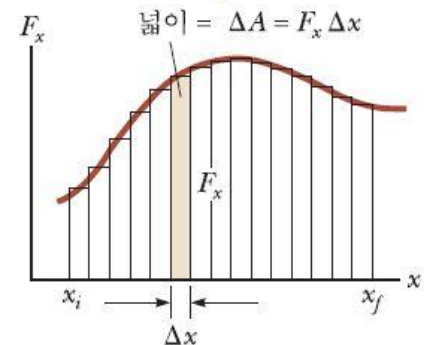
전체 변위에 대하여 더하면 $W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$

구간의 크기를 0으로 접근시키면

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x \equiv \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

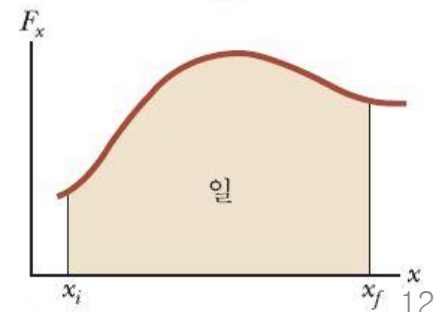
$$\therefore W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

x_i 에서 x_f 로의 변위에 대해 한 전체 일은 모든 사각형의 넓이의 합과 거의 같다.



a

입자가 x_i 에서 x_f 로 움직일 때 변하는 힘의 성분인 F_x 가 한 일은 정확히 이 곡선 아래의 넓이와 같다.



b

어떤 계에 하나 이상의 힘이 작용하고 그 계가 입자로 모형화될 수 있다면,
그 계에 대해 해준 전체 일은 알짜힘이 한 일과 같다.

$$\sum W = W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x) dx$$

보다 일반적인 경우

$$\sum W = W_{net} = \int (\sum \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{r}$$

예)

◆ 용수철이 한 일(Work Done by a Spring)

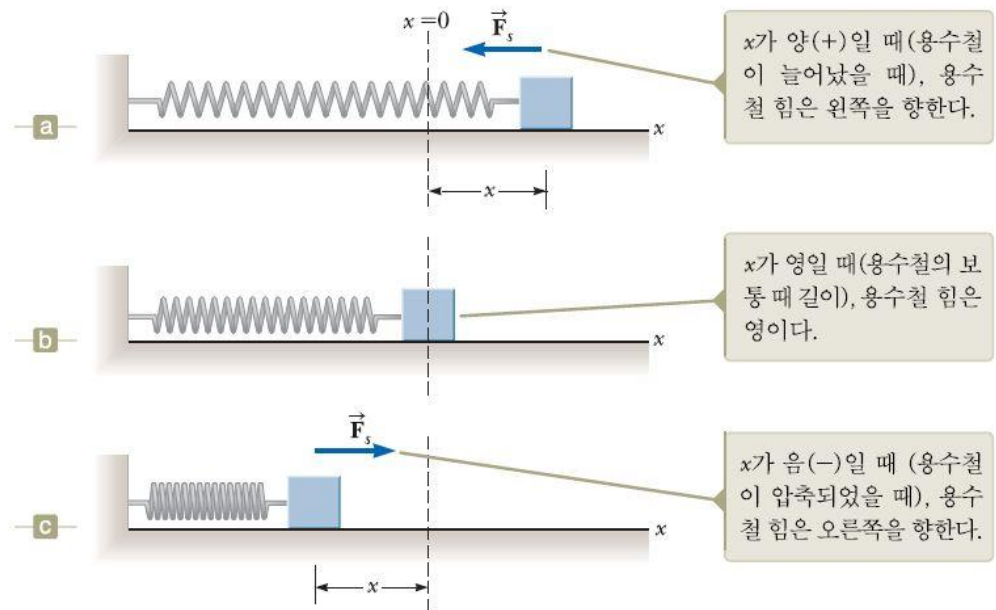
용수철이 평형 상태에서 작은 거리만큼 늘어나거나 줄어들면 이 용수철이 물체에 작용하는 힘은 다음과 같다.

$$F_s = -kx \quad \text{Hooke's Law}$$

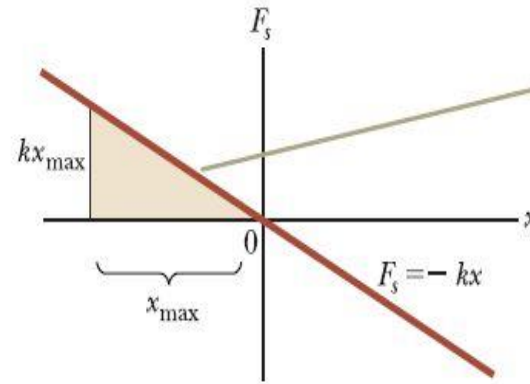
x : 평형 위치로부터의 변위

k : 용수철 상수(N/m)

음(-)의 부호는 용수철 힘이 언제나 평형 상태로부터의 변위에 반대 방향이라는 것을 의미한다. 항상 평형상태($x=0$)를 향하기 때문에 종종 복원력(restoring force)이라고 한다.



$\mathbf{F}_s = F_s \mathbf{i} = -kx \mathbf{i}$ 로 표현하면



물체가 $-x_{\max}$ 에서 0까지 움직일 때 용수철 힘이 한 일은 색칠한 삼각형의 넓이인 $\frac{1}{2}kx_{\max}^2$ 이다.

$-x_{\max}$ 에서 0까지 물체가 움직일 때 용수철이 한 일

=> 이것은 면적과 같다!!!

$$\begin{aligned} W_s &= \int \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx \mathbf{i}) \cdot (dx \mathbf{i}) \\ &= \int_{-x_{\max}}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \end{aligned}$$

임의의 구간 동안 용수철이 물체에 한 일은

$$\therefore W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$

외부에서 힘을 작용하여 물체를 $x_i = -x_{\max}$ 에서 $x_f = 0$ 까지 매우 천천히 움직이도록 한 경우

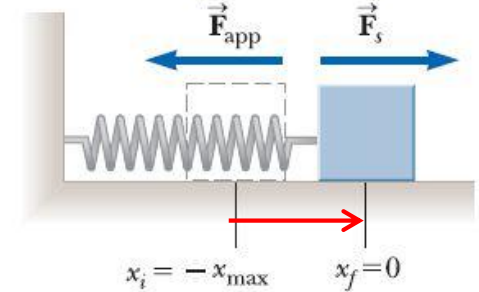
$$(\mathbf{F}_{app} = -F_s \mathbf{i} = -(-kx) \mathbf{i})$$

$$\begin{aligned} W_{app} &= \int \mathbf{F}_{app} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_i}^{x_f} (kx \mathbf{i}) \cdot (dx \mathbf{i}) \\ &= \int_{-x_{\max}}^0 kx dx = -\frac{1}{2} kx_{\max}^2 \end{aligned}$$

이 일은 같은 변위에 대해 용수철 힘이 한 일의 음(-)과 같다.
물체가 $-x_{\max}$ 에서 0까지 움직이는 동안 외부 주체가 용수철이 늘어나지 못하도록 안쪽으로 밀어주어 그 방향이 힘의 작용점의 변위와 반대가 되기 때문이다. 물체의 변위에 대해 작용력이 한 일은

$$\therefore W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

만일 이 물체가 움직이는 과정이 매우 천천히 일어난다면, \vec{F}_{app} 는 항상 \vec{F}_s 와 크기는 같고 방향은 반대이다.



예제 7.4 그래프로 전체 일 계산하기

어떤 입자에 작용하는 힘이 그림과 같이 x 에 따라 변한다. 입자가 $x=0$ 에서부터 $x=6.0$ m까지 움직이는 동안 이 힘이 한 일을 구하라

사각형 부분의 넓이를 계산한다

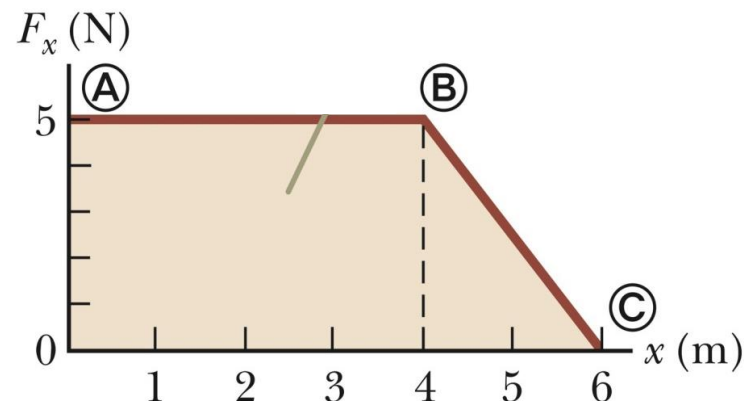
$$W_{\text{A}\text{B}} = (5.0 \text{ N})(4.0 \text{ m}) = 20 \text{ J}$$

삼각형 부분의 넓이를 계산한다

$$W_{\text{B}\text{C}} = \frac{1}{2}(5.0 \text{ N})(2.0 \text{ m}) = 5.0 \text{ J}$$

힘이 입자에 한 전체 일을 계산한다

$$W_{\text{A}\text{C}} = W_{\text{A}\text{B}} + W_{\text{B}\text{C}} = 20 \text{ J} + 5.0 \text{ J} = 25 \text{ J}$$



예제 7.5

용수철의 힘 상수 k 측정하기

용수철의 힘 상수를 구하는 통상적인 방법이 그림 7.11에 나타나 있다. 그림 7.11a와 같이 용수철은 연직으로 매달려 있고, 질량 m 인 물체를 그 아래쪽 끝에 매단다. 용수철은 그림 7.11b와 같이 매달린 mg 의 물체에 의하여 평형 위치로부터 거리 d 만큼 늘어난다.

- (A) 질량이 0.55 kg인 물체가 매달려 2.0 cm만큼 늘어났다면 용수철의 힘 상수는 얼마인가?
 (B) 길이가 늘어나는 도안 용수철이 한 일을 구하라

$$(A) \quad k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55 \text{ kg})(9.8)}{2.0 \times 10^{-2}} = 2.7 \times 10^2 \text{ N/m}$$

$$\begin{aligned} (B) \quad W &= 0 - \frac{1}{2}(kd^2) \\ &= -\frac{1}{2}(2.7 \times 10^2)(2.0 \times 10^{-2}) \\ &= -5.4 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

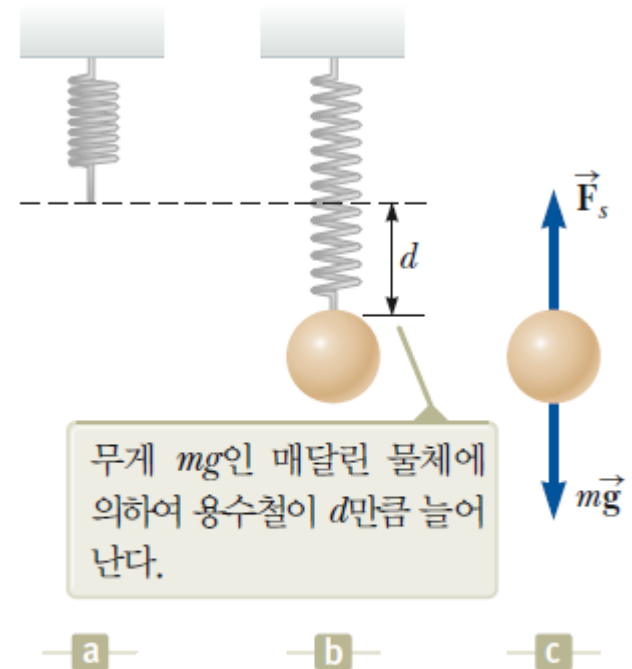
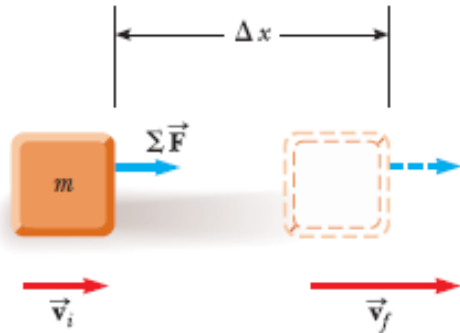


그림 7.11 (예제 7.5) 용수철의 힘 상수 k 구하기

7.5 운동 에너지와 일-운동 에너지 정리 (Kinetic Energy and the Work-Kinetic Energy Theorem)



물체에 알짜힘이 작용하여 그 물체가 가속도를 가지고 (속도 변화) 움직이는 경우를 생각하면

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F dx$$

$\sum F = ma$ 를 대입하면

$$W_{net} = \int_{x_i}^{x_f} m a dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int_{v_i}^{v_f} m v dv$$

$$\therefore W_{net} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

알짜힘이 질량 m 인 입자에 한 일은 운동에너지의 처음 값과 나중 값의 차이와 같다.

운동에너지(kinetic energy)

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

(정의) 스칼라량, 단위는 J

$$W_{net} = K_f - K_i = \Delta K$$

일-(운동)에너지 정리

어느 계에 일이 가해지고 그 계의 유일한 변화가 속력의 변화라면,
알짜힘이 한 일은 그 계의 운동 에너지의 변화와 같다.

일-운동 에너지 정리에 의하면 어떤 계의 속력은 가해진 알짜일의 부호가 양(+)이면 증가하는데, 그 이유는 나중 운동 에너지가 처음 운동 에너지보다 크기 때문이다. 알짜일이 음(-)이라면 속력은 감소하는데, 이것은 나중 운동 에너지가 처음 운동 에너지보다 작기 때문이다.

일-운동 에너지 정리의 ΔK 는 단지 처음과 나중 위치에서의 속력에만 관계하고, 이 두 점 사이의 구체적인 경로와는 무관하다.

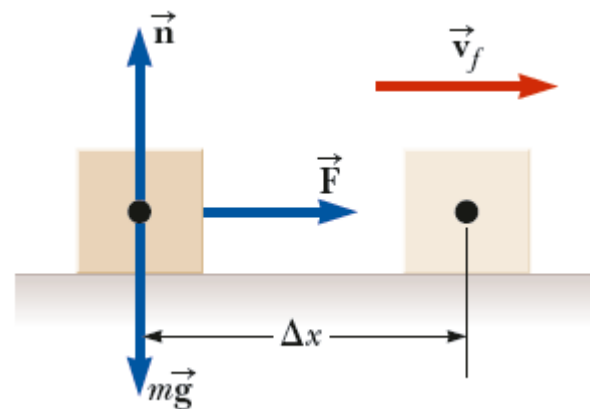
예제 7.6**마찰이 없는 평면에서 물체를 밀기**

6.0 kg인 물체가 처음에 정지해 있다가 크기가 12 N인 일정한 수평력을 받아서 마찰이 없는 수평면을 따라 오른쪽으로 움직이고 있다. 물체가 수평 방향으로 3.0 m 움직인 후의 속력은 얼마인가?

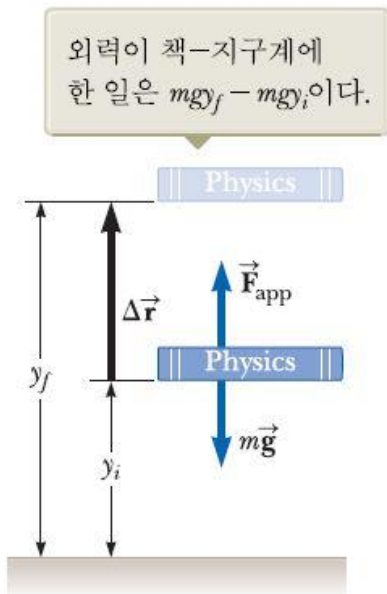
$$W_{\text{ext}} = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W_{\text{ext}}}{m}} = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(12\text{ N})(3.0\text{ m})}{6.0\text{ kg}}} = 3.5\text{ m/s}$$



7.6 계의 퍼텐셜 에너지 (Potential Energy of a System)



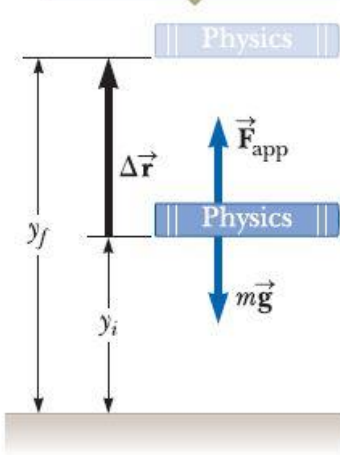
책과 지구로 구성된 계에서 두 물체(책과 지구)는 중력에 의해 상호 작용한다. 이 때 책을 천천히 들어올리면 계에 일을 하게 된다.

일은 에너지의 전달이므로, 계에 한 일은 계의 에너지 증가로 나타나야 한다. 또 책은 일을 하기 전후에 정지 상태이다. 따라서 계의 운동 에너지는 변하지 않는다.

계의 에너지 변화가 운동 에너지 변화가 아니기 때문에, 다른 형태의 에너지로 저장되어야 한다. 책을 들어올린 후 놓으면 낙하할 때 운동 에너지를 가지며, 그 에너지는 책을 들어올릴 때 해 준 일에서 온 것이다.

책이 높은 위치에 있을 때, 계에는 운동 에너지로 바뀔 수 있는 잠재적인 에너지가 있었고, 이것이 책이 떨어지면서 운동 에너지로 바뀌게 된 것이다. 책을 놓기 전의 에너지 저장 형태를 퍼텐셜 에너지(potential energy)라 한다.

외력이 책-지구계에
한 일은 $mgy_f - mgy_i$ 이다.



책을 가속도 없이 천천히 들어올리는 경우, 들어올리는 힘은 물체에 작용하는 중력과 크기가 같으며, 물체는 평형 상태에서 등속 운동한다.

$$\begin{aligned} W_{net} &= (\mathbf{F}_{app}) \cdot \Delta \mathbf{r} = (mg\mathbf{j}) \cdot ((y_f - y_i)\mathbf{j}) \\ &= mgy_f - mgy_i \end{aligned}$$

중력 퍼텐셜 에너지(gravitational potential energy): $\therefore U_g \equiv mgy$ (정의)

중력 퍼텐셜 에너지는 단지 지표면 위 물체의 연직 높이에만 의존한다. 물체-지구 계에 한 일은 물체를 연직 방향으로 들어올리거나, 같은 지점에서 출발하여 마찰이 없는 경사면을 따라 같은 높이까지 밀어 올릴 때 한 일과 같다.

$$\begin{aligned} W_{net} &= (\mathbf{F}_{app}) \cdot \Delta \mathbf{r} = (mg\mathbf{j}) \cdot ((x_f - x_i)\mathbf{i} + (y_f - y_i)\mathbf{j}) \\ &= mgy_f - mgy_i \end{aligned}$$

이 개념을 이용하여 갈릴레이는 뉴턴의 운동 1법칙을 확립하였다!

예제 7.7**훌륭한 운동 선수와 아픈 발가락**

운동 선수의 부주의로 손에서 트로피가 미끄러져 선수의 발가락에 떨어졌다. 바닥을 좌표의 원점($y = 0$)으로 하고, 트로피가 떨어짐에 따라 트로피-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지의 변화를 추정하라. 또한 운동 선수의 머리를 좌표의 원점으로 하고 앞의 계산을 다시 하라.

트로피가 떨어지기 직전의 트로피-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지를 계산한다.

$$U_i = mgy_i = (2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(1.4 \text{ m}) = 27.4 \text{ J}$$

트로피가 선수의 발가락 위에 떨어지는 순간의 트로피-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지를 계산한다.

$$U_f = mgy_f = (2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.05 \text{ m}) = 0.98 \text{ J}$$

트로피-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지의 변화를 계산한다.

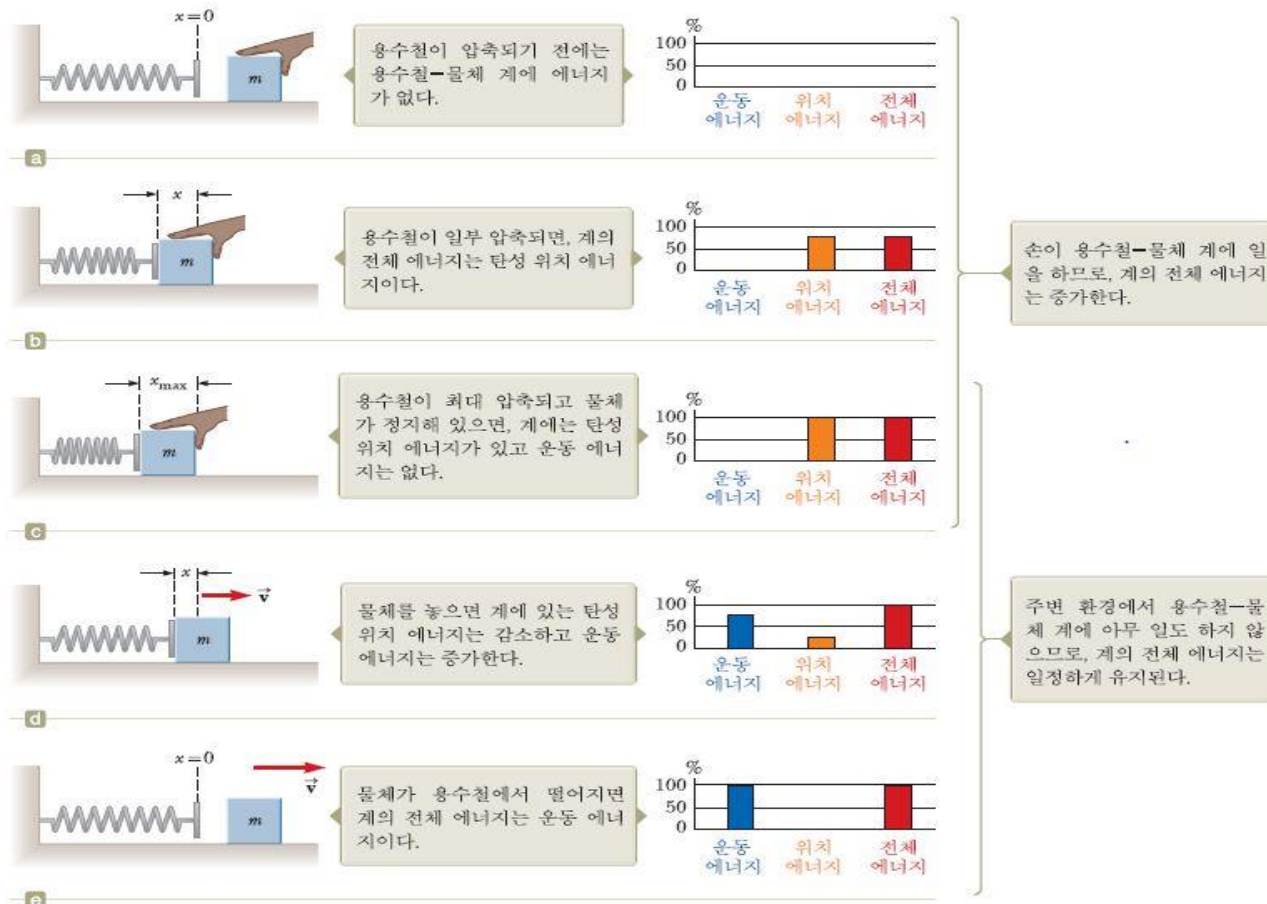
$$\Delta U_g = 0.98 \text{ J} - 27.4 \text{ J} = -26.4 \text{ J}$$

◆ 탄성 퍼텐셜 에너지(Elastic Potential Energy)

용수철과 물체로 구성된 계를 고려하면 $W_{app} = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$

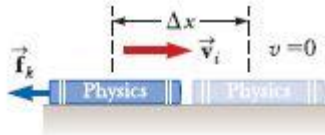
탄성 퍼텐셜 에너지(elastic potential energy)

$$\therefore U_g \equiv \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{정의})$$



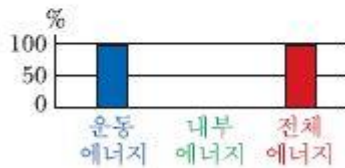
7.7 보존력과 비보존력

(Conservative and Nonconservative Forces)

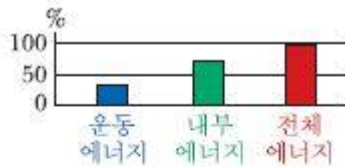


마찰력에 의해서 멈춘다. (a)

처음에는 운동에너지를 가지고 있었다. (b)



표면이 다소 따뜻해졌으며, 계의 운동에너지가 변환되었기 때문이며 온도와 연관된 이 에너지를 내부 에너지(internal energy)라고 하고 E_{int} 라 한다. (c)



- 지표면 근처에서 아래로 떨어지는 물체; 중력이 물체에 한 일은 연직으로 떨어지거나 경사면을 미끄러지거나 관계하지 않는다. 중요한 것은 물체의 고도 변화이다. 그러나 경사면에서의 마찰에 의한 내부 에너지로의 변환은 물체가 미끄러지는 거리에 의존한다



이러한 경로 의존성에 따라 힘을 보존력과 비보존력으로 구분한다.

위에서 살펴본 힘 중에서 중력은 보존력이고, 마찰력은 비보존력이다.

◆ 보존력(Conservative Forces)

1. 두 점 사이를 이동하는 입자에 보존력이 한 일은 이동 경로와 무관하다.
2. 폐경로를 따라 이동하는 입자에 보존력이 한 일은 영(0)이다
(폐경로는 출발점과 도착점이 같은 경로를 말한다).

일반적으로 계의 구성 요소 중 한 물체가 한 점에서 다른 점으로 이동할 때, 보존력이 한 일 W_c 는 계의 위치 에너지의 처음 값에서 나중 값을 뺀 것과 같다.

$$W_c = U_i - U_f = -\Delta U$$

◆ 비보존력(Nonconservative Forces)

보존력에 대한 성질 1과 2를 만족하지 못하는 힘을 비보존력이라고 한다.
마찰력이 대표적인 비보존력이다.

계의 운동 에너지와 위치 에너지의 합을 역학적 에너지(mechanical energy)라고 정의한다.

$$E_{mech} = K + U$$

계 내부에서 작용하는 비보존력은 역학적 에너지의 변화를 초래한다.

7.8 보존력과 위치 에너지의 관계

(Relationship Between Conservative Forces and Potential Energy)

보존력이 계 내부에서 한 일과 위치 에너지의 감소가 같도록 위치 에너지 함수(potential energy function) U 를 정의할 수 있다. 1차원으로 고려하면

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U$$

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad \therefore U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i$$

일반적으로 U_i 의 값을 영(0)으로 잡는다. 실제로 U_i 를 어떤 값으로 잡든지 관계 없다. 왜냐하면 영이 아닌 값은 $U_f(x)$ 를 상수 만큼만 이동시킬 뿐이고, 물리적으로 의미를 갖는 것은 위치 에너지 변화이기 때문이다.

또, 힘의 작용점이 미소 변위 dx 만큼 움직인다면, 계의 미소 위치 에너지 변화 dU 는

$$dU = -F_x dx \quad \Rightarrow \quad \therefore F_x = -\frac{dU}{dx} \quad (U = f(x) \text{로 표현})$$

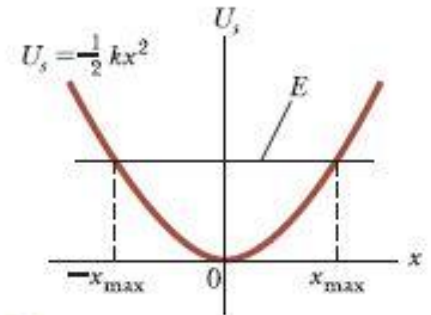
7.9 에너지 도표와 계의 평형

(Energy Diagrams and Equilibrium of a System)

용수철이 갖는 위치에너지는 $U_s = \frac{1}{2} kx^2$ 이므로

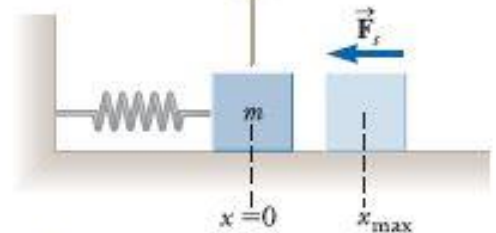
$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

위치에너지 곡선의 기울기가 보존력의 크기에 대응한다.
기울기가 0인 점은 힘이 작용하지 않는 평형점에 해당한다.



a

용수철의 복원력은 항상 안정 평형 위치인 $x=0$ 을 향해 작용한다.



b

예제 7.8 원자 크기에서의 힘과 에너지

분자 내 두 중성 원자 사이의 힘에 관계된 위치 에너지는 아래 위치 에너지 함수로 모형화할 수 있다.

$$U(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

여기서, x 는 원자 간 간격이고, 두 매개변수는 $\sigma = 0.263 \text{ nm}$ 와 $\varepsilon = 1.51 \times 10^{-22} \text{ J}$ 이다. 이 함수의 그래프를 그리고, 두 원자 사이의 평형 거리를 구하라.

풀이 위치 에너지와 보존력과 관계로부터

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\varepsilon \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right]$$

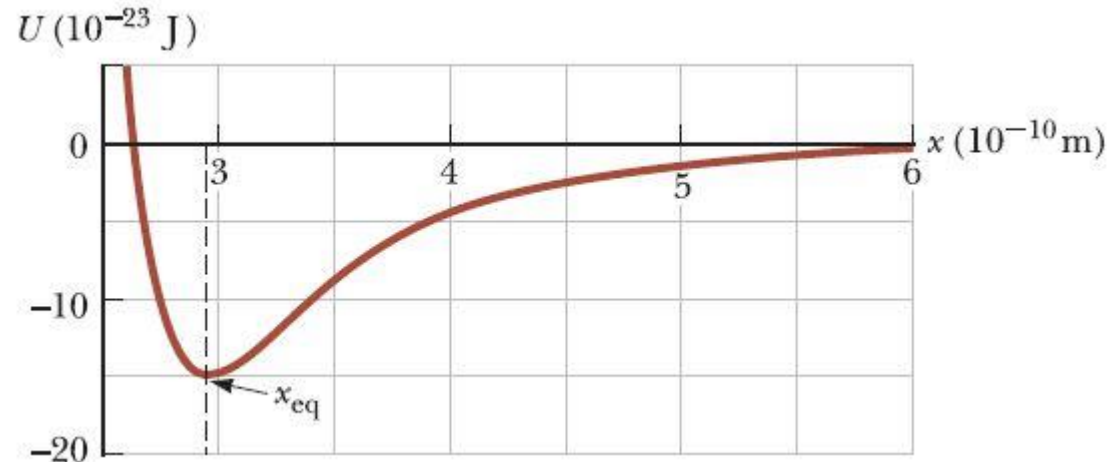
$$= 4\varepsilon \left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} + \frac{6\sigma^6}{x^7} \right]$$

$$x_{eq} = 2^{1/6} \sigma$$

$$= 2.95 \times 10^{-10} \text{ m}$$

평형점을 고려하면

$$4\varepsilon \left[\frac{-12\sigma^{12}}{x_{eq}^{13}} + \frac{6\sigma^6}{x_{eq}^7} \right] = 0$$



연습문제

1. 슈퍼마켓에서 한 구매자가 쇼핑 카트를 수평 아래 25.0° 의 각도로 35.0 N 의 힘으로 밀고 있다. 이 힘은 다양한 마찰력과 균형을 이루고 있으므로 쇼핑 카트는 일정한 속력으로 움직인다.
- (a) 구매자가 쇼핑 카트를 밀고 길이 50.0 m 인 통로 에서 이동할 때 구매자가 쇼핑 카트에 한 일을 구하라.
 - (b) 모든 힘이 쇼핑 카트에 한 알짜일은 얼마인가? 왜 그런가?
 - (c) 구매자가 다음 통로에서 수평 방향으로 힘을 주면서 같은 속력을 유지하며 이동한다. 만약 마찰력이 바뀌지 않았다 면, 구매자가 주어야 하는 힘은 더 큰가, 같은가, 아니면 보다 작은가?
 - (d) 구매자가 쇼핑 카트에 한 일은 어떠한가?

연습문제

2. 3.35×10^{-5} kg의 빗방울이 중력과 공기 저항의 영향에 따라 일정한 속력으로 연직으로 떨어진다. 빗방울은 입자로 모형화한다. 이 빗방울이 100 m를 떨어진다고 할 때

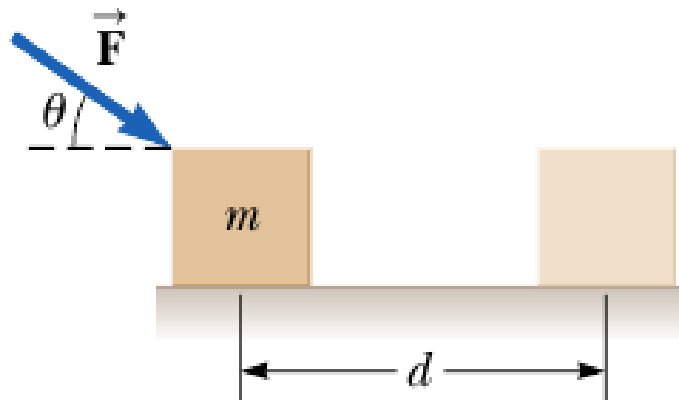
- (a) 중력이 빗방울에 한 일과
- (b) 공기 저항이 빗방울에 한 일을 구하라.

연습문제

3. 그림에서와 같이, 질량 $m = 2.50 \text{ kg}$ 인 물체가 크기 $F = 16.0 \text{ N}$ 이고 수평 방향과 각도 $\theta = 25.0^\circ$ 를 이루는 일정한 힘을 받아, 마찰이 없는 책상의 수평면 위에서 $d = 2.20 \text{ m}$ 움직인다.

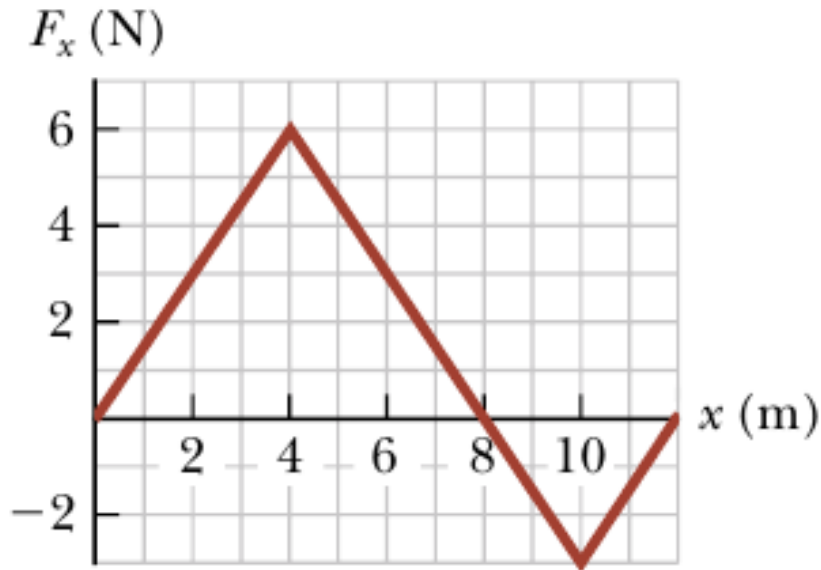
이때

- (a) 외력이 물체에 한 일,
 - (b) 책상에 의한 수직항력이 한 일,
 - (c) 중력이 한 일,
 - (d) 물체에 작용하는 알짜힘이 한 일을 구하라.
- (P162.3번)



연습문제

- 4.그림과 같이 힘이 입자에 작용하고 있다. 입자가 (a) $x = 0$ 부터 $x = 8.00$ m까지,
(b) $x = 8.00$ m부터 $x = 10.0$ m까지,
(c) $x = 0$ 부터 $x = 10.0$ m까지 움직이는 동안 힘이 입자에 한 일을 구하라.(P163.8번)



연습문제

5. 질량 4.00 kg 의 물체가 훅의 법칙을 따르는 가벼운 용수철에 수직으로 매달려 있을 때, 용수철은 2.50 cm 늘어난다. 4.00 kg 의 물체를 제거하고,
- (a) 1.5 kg 의 물체를 매달면 얼마나 늘어나는가?
 - (b) 외부 인자가 평형 위치로부터 4.0 cm 를 늘이는 데 한 일은 얼마인가?(P163.11번)

연습문제

6. 훅의 법칙을 따르는 가벼운 용수철의 늘이지 않은 처음 길이는 35.0 cm이다. 용수철의 한쪽 끝을 문틀의 상부에 부착 하고 7.50 kg의 물체를 용수철의 다른 쪽 끝에 매달았을 때, 용수철의 길이는 41.5 cm이다.

(a) 용수철의 힘 상수를 구하라.

(b) 용수철을 수평으로 놓고 두 명이 용수철의 양 끝에서 190 N의 힘으로 서로 반대 방향으로 잡아당긴다. 이 상황에서 용수철의 길이를 구하라.(P163.12번)

연습문제

7. 궁수가 활시위를 자신의 몸 쪽으로 0.400 m 당긴다. 이때 작용하는 힘은 0에서 230 N까지 일정하게 증가한다.

(a) 이 활의 등가 용수철 상수는 얼마인가?

(b) 궁수가 활시위에 한 일은 얼마인가?(P163.13번)

연습문제

8. 한 노동자가 35.0 kg 의 나무상자를 일정한 속력으로 나무 바닥을 따라 밀어 12.0 m 의 거리를 움직였다. 이때 나무상자에 일정한 수평력 F 를 가해서 한 일은 350 J 이다. 이때

(a) F 의 값을 구하라.

(b) 만약 노동자가 F 보다 큰 힘을 가한다면, 나무상자의 움직임은 어떻게 되는가?

(c) 또 F 보다 작은 힘을 가한다면 어떻게 되는가?

(P164.25번)

연습문제

9. 2,100 kg짜리 말뚝박는 기계로 I빔을 땅에 박으려고 한다. 빔의 머리를 때리기에 앞서 해머는 5.00 m를 낙하하고, 빔을 땅속으로 12.0 cm 박은 후 멈추게 된다. 에너지를 고려 하여 해머가 정지할 때까지 빔이 해머에 작용하는 평균력을 구하라.(P164.27번)

연습문제

10. 0.20 kg 의 돌이 우물의 맨 위쪽에서 1.3 m 위에 고정되어 있다가 우물 안으로 떨어진다. 우물의 깊이는 5.0 m 이다.

우물의 맨 위쪽에 돌이 있는 위치를 기준으로 하여,

(a) 돌이 떨어지기 전과

(b) 돌이 우물 바닥에 도달하는 순간에서의 돌-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지를 구하라.

(c) 돌이 떨어지기 시작할 때부터 우물 바닥에 도달하기까지 돌-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지는 얼마나 변하는가?(P165.30번)

연습문제

11. 무게 400 N인 어린이가 길이 2.00 m인 한 쌍의 밧줄에 매달려서 앞뒤로 흔들리고 있다. 어린이가 가장 최하점에 있을 때를 기준으로 해서

- (a) 밧줄이 수평일 때,
- (b) 밧줄이 연직과 30.0° 의 각도를 이룰 때,
- (c) 어린이가 원호의 맨 아래에 있을 때의 어린이-지구 계의 중력 퍼텐셜 에너지를 구하라.