8.1절~8.2절

10주2강 가설과 검정1

8.1절

8.1 가설검정의 기초개념

가설검정

- **가설검정**이란 모집단에 대한 어떤 가설을 설정한 뒤에 표본관찰을 통하여 그 가설의 채택 여부를 결정하는 분석방법이다.
- 일반적으로 통계분석에서는 모집단의 모수에 대하여 관심이 있으므로 **가설은 모수에 대하여 설정**한다.

가설설정

- 가설검정에서 가설은 귀무가설(H_0)과 대립가설(H_1)로 설정한다.

① 귀무가설 : "모수가 특정한 값이다" , "두 모수의 값이 같다" 등과 같이 간단하고 구체적인 경우를 귀무가설로 설정한다.

② 대립가설 : "모수가 특정한 값이 아니다" , "한 모수의 값이 다른 모수의 값보다 크다" , "두 모수의 값이 다르다" 등과 같이 모수에 대한 관심의 영역 중에서 귀무가설로 지정되지 않은 모든 경우를 포괄적으로 대립가설로 설정한다.

- **가설검정**이란 두 가설 H_0와 H_1중에서 하나를 선택하는 과정이므로 H_0를 채택(accept)하면 H_1을 기각(reject)하게 되고 H_0를 기각하면 H_1을 채택하게 된다.
- 따라서 **가설검정이란 '두 가설 중에서 귀무가설 H_0 를 채택하든지 또는 기각하는 과정'**이라고 이해할 수 있다.

사례1. 2006년도 회사의 신제품의 월평균 판매량이 3,000개 정도였다. 2007에 이 제품의 월평균 판매량이 증가하였다고 할 수 있는가?

- 이 문제를 수리적으로 표현하면 ‘$\mu =$ 2007년도 신제품의 월평균 판매량’이라고 할 때, ‘$\mu = 3000$인가? 또는 $\mu > 3000$인가?’의 문제가 된다.
- 이 문제의 답을 구하기 위해 몇 개의 점포를 표본으로 하여 2007년도 신제품의 월평균 판매량을 조사하여 구한 표본평균과 표본표준편차를 이용하여 위의 가설에 대한 검정을 실시

사례2. 서울의 강남지역과 강북지역 고등학생들의 수능 성적이 같은가?

- 서울의 강남지역과 강북지역의 고등학생의 수능 성적을 비교하기 위하여 두 지역에서 각각 1000명씩을 무작위로 선발하여 동일한 시험을 실시한 후 그 시험정수에 의하여 두 집단의 수능 성적을 비교
- 이 경우 비교의 초점은 '강남지역과 강북지역의 고등학교 학생들의 수능 평균점수가 같은가? 또는 다른가?' 임.
- 이를 수리적으로 표현하면

μ_1 = 강남지역 학생들 전체의 평균성적

μ_2 = 강북지역 학생들 전체의 평균성적

- 이라고 할 때, 각 지역에서 표본에서 추출된 학생들의 시험성적에 의해 다음을 알고자 하는 것이다.

$\mu_1 = \mu_2$인가 또는 $\mu_1 \neq \mu_2$

검정통계량

- **검정통계량**이란 가설검정에서 관찰된 표본으로부터 구하는 통계량으로 분포가 가설에서 주어지는 모수에 의존한다.
- 귀무가설이 옳다는 전제하에서 구한 검정통계량의 값이 나타날 가능성이 크면 귀무가설을 채택하고 나타날 가능성이 작으면 귀무가설을 기각한다.

유의수준

- **유의수준** α란 귀무가설이 옳은데도 불구하고 이를 기각하는 확률의 크기를 말하며 검정통계량을 구하는 것과는 무관하게 검정을 실시하는 사람의 판단에 따라 결정한다.

기각역

- **기각역**이란 가설검정에서 유의수준 α가 정해졌을 때, 검정통계량의 분포에서 이 유의수준의 크기에 해당하는 영역을 말하는데, 검정통계량의 분포에서 이 영역의 위치는 대립가설의 형태에 따라 다르다.

- **기각역 C 와 유의수준 α의 관계**

유의수준 α ; 귀무가설 하에서 검정통계량이 기각역 C에 속할 확률이다.

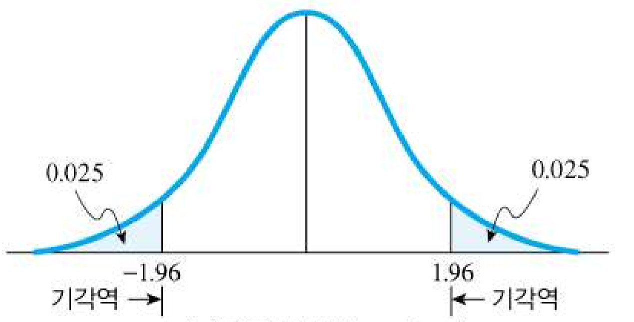
$$P_r(T(X) \in C \mid H_0) = \alpha$$

대립가설과 기각역, $\alpha = 0.05$

- 검정통계량의 분포에서 유의수준 α에 의해 기각역의 크기가 결정되며, 기각역의 위치는 대립가설 H_1의 형태에 의해 결정된다.
- 대립가설의 형태는 가설검정의 목적에 의하여 결정되는데 가설검정은 대립가설의 형태에 따라 양측검정과 단측검정으로 나누어지고, 단측검정은 다시 왼쪽 단측검정과 오른쪽 단측검정으로 분류된다.

① 양측검정
귀무가설이 "모수가 특정값이다"라고 할 때, 대립가설이 "모수가 특정값이 아니다"라고 주어지는 경우로 귀무가설과 대립가설은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$H_0 : \mu = \mu_0$; μ_0은 고정된 상수
$H_1 : \mu \neq \mu_0$
기각역 $C = \{T(X) \leq -C_1$ 또는 $T(X) \geq C_1\}$



(a) 양측검정(H_1 ; $\mu \neq \mu_0$)

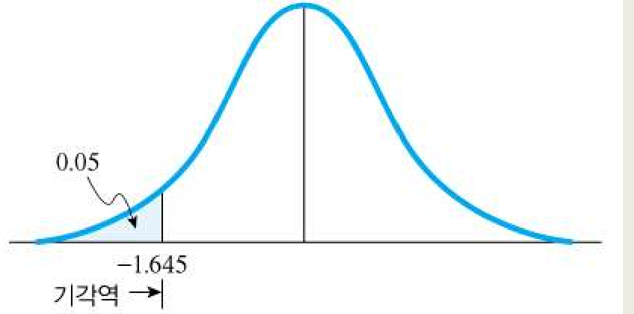
② 왼쪽 단측검정

귀무가설이 “모수가 특정값이다”라고 할 때, 대립가설 H_1이 “모수가 μ_0보다 작다”로 주어지는 경우로 귀무가설과 대립가설을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

기각역 $C = \{T(X) \le C_2\}$



(b) 왼쪽 단측검정(H_1 ; $\mu < \mu_0$)

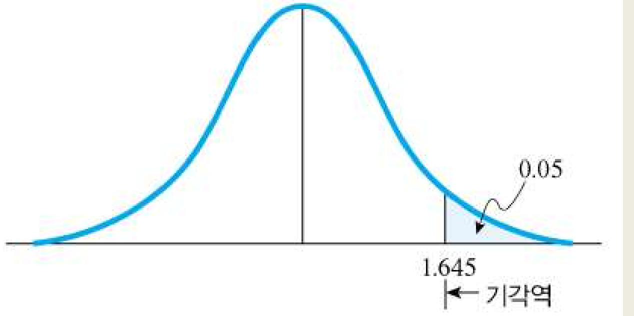
③ 오른쪽 단측검정

귀무가설이 “모수가 특정값이다”라고 할 때, 대립가설 H_1이 “모수가 μ_0보다 크다”로 주어지는 경우로 귀무가설과 대립가설을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

기각역 $C = \{T(X) \ge C_3\}$



(c) 오른쪽 단측검정(H_1 ; $\mu > \mu_0$)

가설검정단계

- 위에 설명한 가설검정 과정을 단계적으로 설명하면 다음과 같다.

[단계1] 검정하고자 하는 목적에 따라서 귀무가설 $\boldsymbol{H_0}$과 대립가설 $\boldsymbol{H_1}$을 설정한다.
[단계2] 검정통계량을 구하고 그 통계량의 분포를 구한다.
[단계3] 유의수준을 결정하고 검정통계량의 분포에서 가설의 형태에 따라 유의수준에 해당하는 기각역을 설정한다.
[단계4] 귀무가설이 옳다는 전제하에서 표본관찰에 의한 검정통계량의 값을 구한다.
[단계5] 각 4단계에서 구한 검정통계량의 값이 기각역에 속하는가를 판단하여 기각역에 속하면 귀무가설 $\boldsymbol{H_0}$을 기각하고 기각역에 속하지 않으면 귀무가설 $\boldsymbol{H_0}$을 채택한다.

제1종 오류(α)와 제2종 오류(β)

① 제1종 오류(type I error)
귀무가설 H_0가 옳은데도 불구하고 H_0를 기각하는 오류를 제1종 오류라고 한다.
이것이 나타날 확률을 제1종 오류의 크기라고 하는데, 이는 앞에서 정의된 유의수준 α와 같다.

② 제2종 오류(type Ⅱ error)
귀무가설 H_0가 옳지 않은데도 H_0를 채택하는 오류를 제2종 오류라고 한다.
이것이 나타날 확률을 제2종 오류의 크기라고 하는데 이를 β로 표현한다.

표 10-1 가설검정 결과와 오류

정확한 사실 \ 가설검정 결과	H_0가 사실이라고 판정	H_0가 사실이 아니라고 판정
H_0가 사실임	옳은 결정	제1종 오류(α)
H_0가 사실이 아님	제2종 오류(β)	옳은 결정

- 가설검정에서는 제1종 오류 α의 크기를 $0.1, 0.05, 0.01$ 등으로 고정시킨 뒤, 제2종 오류 β가 최소가 되도록 기각역을 설정한다.

8.2절

8.2 단일집단의 모평균 μ의 검정

단일모평균 μ의 검정(t-검정)

- 단일집단의 모평균 μ에 대한 검정은 모집단의 분포가 평균 μ와 분산 σ^2을 갖는 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$을 따른다는 것을 전제한다고 할 수 있다. 검정을 하기 위하여 추출한 표본을 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$이라고 할 때, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$은 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 확률표본이다.

① 가설의 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

(b) 단측검정 : $H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$ (또는 $\mu < \mu_0$)

→ 여기에서 μ_0은 구체적으로 주어지는 특정한 값이며 H_1에 주어지는 세 가지 서로 다른 가설은 가설검정에서 알고자 하는 목적에 따라 결정된다.

② 귀무가설 하에서의 검정통계량과 분포

(a) σ^2을 아는 경우 (b) σ^2을 모르는 경우

② 귀무가설 하에서의 검정통계량과 분포

(a) σ^2을 아는 경우

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$

(b) σ^2을 모르는 경우

(i) $n > 30$일 때

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$

(ii) $n \le 30$일 때

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- [(a) & (b)-(i)] 표준정규분포를 이용하여 검정하는 경우
  모분산 σ^2이 알려져 있는 경우와 σ^2이 알려져 있지 않으나 표본의 수 n이 이상이면 검정통계량의 분포가 근사적으로 표준정규분포를 따르므로 표준정규분포를 이용하여 검정을 실시한다.
- [(b)-(ii)] t-분포를 이용하여 검정하는 경우
  모분산 σ^2이 알려져 있지 않고 표본의 수 n이 30 이하이면 자유도가 $n-1$인 t-분포를 이용하여 검정을 실시한다.
  이 검정에서 검정통계량 $T(X)$가 자유도 $n-1$인 t-분포를 따르므로 ***t*-검정**이라고 한다.

③ 검정

유의수준 하에서의 기각역(표준정규분포를 이용하는 경우)은 다음과 같다.

(a) 양측검정 : $C_{\alpha} = \left(-\infty, Z_{\alpha/2}\right) + \left(Z_{1-\alpha/2}, \infty\right)$

(b) 단측검정 : $C_{\alpha} = (Z_{1-\alpha}, \infty)$

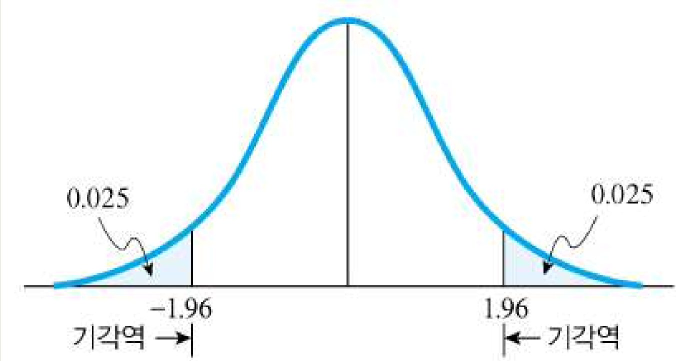
유의수준 α를 정하고 검정의 종류에 따라 기각역을 설정한다.
귀무가설하에서 구한 검정통계량의 값을 구하여, 이 값이 기각역에 속하면 H_0을 기각하고 기각역에 속하지 않으면 H_0를 채택한다.

유의수준과 신뢰수준

- 가설검정에서 유의수준 $\alpha\%$는 구간추정에서 신뢰수준 $(100-\alpha)\%$와 동일한 의미를 갖는다. 이를테면 표준정규분포에서 95% 신뢰구간은

$$P_r(-1.96 \le \boldsymbol{Z} \le 1.96) = 0.95$$

  에 의하여, 신뢰구간은 $(-1.96, 1.96)$임을 알 수 있다.
- 반면에, 표준정규분포를 이용하는 검정에서 5% 유의수준 하에서의 기각역은 $(-\infty, -1.96)$과 $(1.96, \infty)$로 위의 95% 신뢰구간과 반대임을 알 수 있다.
- 이와 같이 5% 유의수준 하에서의 기각역은 95% 신뢰수준 하에서의 신뢰구간과 반대의 의미를 갖는다. 따라서 유의수준 $\alpha\%$ 하에서의 검정은 $(100-\alpha)\%$의 신뢰수준 하에서의 검정이라고도 표현한다.



예8-1.

1997년도 우리나라 초등학교 신입생의 평균신장은 140cm였다. 지난 10년간 초등학교 신입생의 평균신장이 증가하였는가를 알아보기 위하여 2007년도 초등학교 신입생 100명을 '랜덤하게' 추출하여 조사한 결과, 신장의 평균과 표준편차가 각각 145cm, 20cm이었다. 지난 10년간 초등학교 신입생의 평균신장이 증가하였다고 볼 수 있는가를 검정하라.

(sol)

(1) 가설의 설정 : 지난 10년 동안 평균신장이 증가하였는지를 검정하고자 하므로, 가설은 다음과 같이 설정한다.

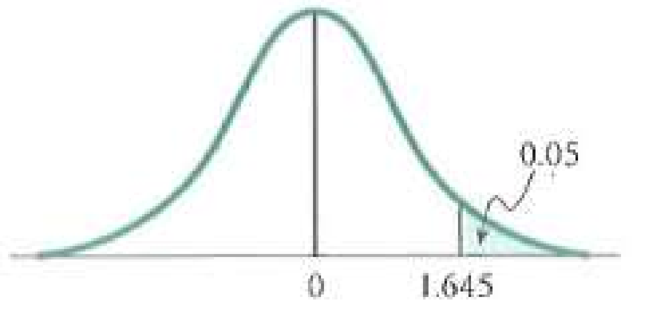
$$H_0 : \mu = 140 \quad v.s \quad H_1 : \mu > 140$$

(2) 검정통계량과 분포 : 귀무가설하에서의 검정통계량과 검정통계량의 분포는 다음과 같다.

$$T(X) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{145 - 140}{20/\sqrt{100}} = 2.5$$

표본의 크기는 $n = 100 > 30$이므로, $T(X) \sim N(0,1)$이다.

⑶ 검정 : 유의수준 $\alpha = 0.05$인 경우 표준정규분포에서 $P(Z > 1.645) = 0.05$이므로 기각역은 다음 그림의 빗금 친 부분과 같다.



$T(X) = 2.5\ (> 1.645)$는 기각역에 속하므로 귀무가설 H_0은 기각된다.
즉, 유의수준 5% 하에서 지난 10년 동안 우리나라 초등학교 신입생의 평균신장이 증가하였다고 볼 수 있다.

예8-2.

시중에 나와 있는 한 음료수의 병에는 함량이 $\mathbf{10}\boldsymbol{ml}$라고 표시되어 있다. 공정거래위원회에서는 이 음료수의 함량이 정확하게 표시되어 있는가를 알아보기 위하여 시중의 슈퍼마켓에서 '랜덤하게' 10개의 병을 추출하여 함량을 조사한 결과, 다음과 같은 자료를 얻었다. 이 음료수 병에 들어 있는 음료수의 양이 $\mathbf{10}\boldsymbol{ml}$라고 주장할 수 있는가를 검정하라.

$$(\mathbf{8.8, 12.2, 9.5, 8.3, 8.6, 8.3, 9.5, 8.0, 11.5, 8.1})$$

(sol)

(1) 가설의 설정 : 병에 담긴 음료수의 양의 평균이 $10ml$인가 또는 그렇지 않은가 알고자 하므로 H_0와 H_1은 각각 다음과 같다.

$$H_0 : \mu = 10ml \quad v.s \quad H_1 : \mu \neq 10ml$$

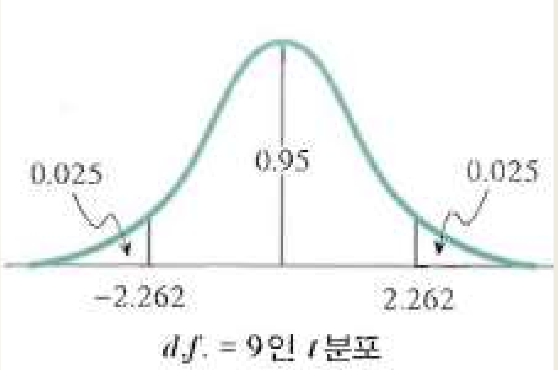
(2) 검정통계량과 그 분포 : 주어진 10개의 자료로부터 $\overline{X} = 10.08, S = 12.07$을 구할 수 있으며, 따라서, 귀무가설 하에서의 검정통계량의 값은 다음과 같다.

$$T(X) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{10.08 - 10}{12.07/\sqrt{10}} = 0.021$$

표본의 크기는 $n = 10 < 30$이므로 $T(X)$는 자유도가 $n - 1 = 9$인 t-분포를 따른다.

(3) 검정 : 유의수준 $\alpha = 0.05$라고 할 때, 부록 V의 [표 4]에 의하여 $d.f. = 9$인 경우

$P(-2.26 \leq t \leq 2.26) = 0.95$이다.



따라서 기각역은 위의 그림의 빗금 친 부분이며, 귀무가설 하에서의 검정통계량의 값 $T(X) = 0.021$은 기각역에 속하지 않으므로 귀무가설은 기각되지 않는다.

즉, 5%의 잘못 판단할 가능성을 전제로 할 때 음료수병에 들어 있는 음료수 양의 평균은 $10ml$라고 볼 수 있다.

예8-3.

한 담배제조회사에서는 새로 개발된 담배의 타르(tar) 함량이 평균 $4mg$미만라고 주장하였다. 그 주장이 사실인가를 알아보기 위하여 25개의 담배를 '랜덤하게' 선택하여 분석한 결과 표본평균이 $3.90mg$과 표준편차가 $0.14mg$을 얻었다. 담배제조회사의 주장이 타당한가를 검정하라.

(sol)

(1) 가설의 설정 : 담배에 포함된 타르의 평균이 $4mg$ 미만인가에 관심이 있으므로 H_0와 H_1은 각각 다음과 같다.

$$H_0 : \mu = 4mg \quad v.s \quad H_1 : \mu < 4mg$$

(2) 검정통계량과 분포 : 귀무가설 하에서 검정통계량은 다음과 같이 계산된다.

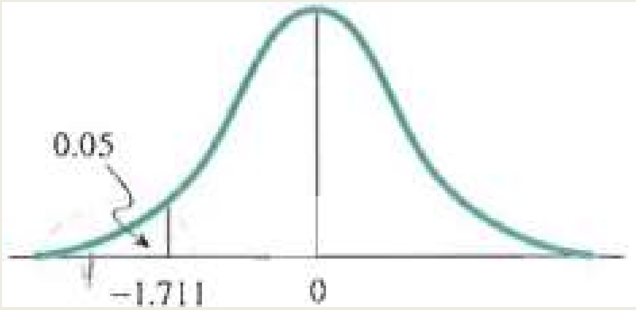
$$T(X) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{3.90 - 4.0}{0.14/\sqrt{25}} = -3.57$$

표본의 수 $n = 25 < 30$이므로 $T(X)$는 자유도가 $n - 1 = 24$인 t-분포를 따른다.

(3) 검정 : 유의수준 $\alpha = 0.05$라고 할 때, 부록 V의 [표 4]에 의하여, $d.f. = 24$인 t-분포에서

$P(t \leq -1.711) = 0.05$임을 알 수 있다.

따라서 기각역은 아래 그림의 빗금 친 부분이며 귀무가설 하에서의 검정통계량의 값 $T(X) = -3.57$은 기각역에 포함되므로 H_0은 기각된다.



즉, 새로운 담배에 포함된 타르의 평균이 $4mg$ 이하라는 담배회사의 주장은 5% 유의수준 하에서 타당하다고 볼 수 있다.

끝~~ ♥♥