

12장. 정적 평형과 탄성

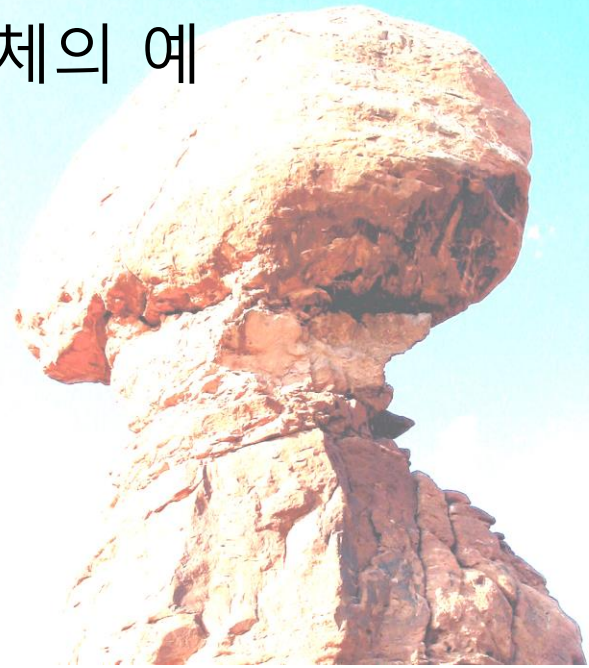
(Static Equilibrium and Elasticity)

12.1 분석 모형: 평형 상태의 강체

12.2 무게중심 알아보기

12.3 정적 평형 상태에 있는 강체의 예

12.4 고체의 탄성

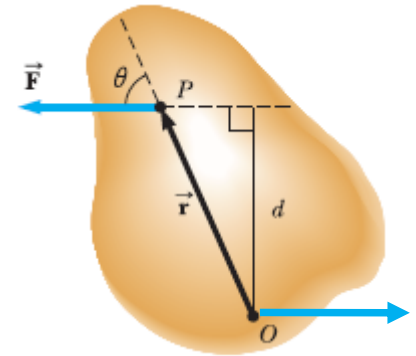


12.1 분석 모형: 평형 상태의 강체

(Analysis Model: Rigid Object in Equilibrium)

입자의 경우에는 작용하는 알짜 힘이 0일 때 평형 상태를 유지한다.
강체의 경우에는 추가 조건이 필요하다.

오른쪽 그림과 같은 경우 알짜 힘은 0이지만 물체가
평형 상태에 있지는 않다. 즉, 회전운동을 하게 된다.



◎ 강체의 평형 조건:

1. 물체에 작용하는 알짜 외력이 반드시 영(0)이어야 한다.

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$$

2. 어떤 축에 관해서든 물체에 작용하는 알짜 외부 토크가 반드시 영(0)이어야 한다.

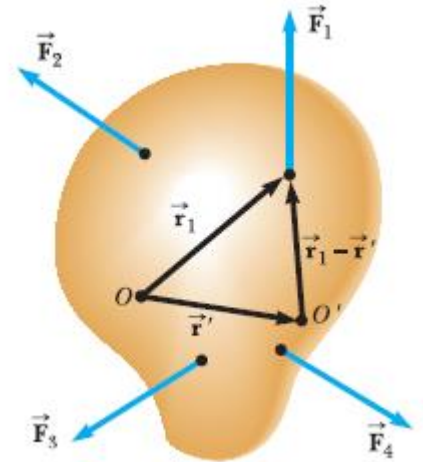
$$\sum \tau_{ext} = 0$$

두 번째 조건을 적용할 때 회전축의 위치를 결정해야 한다.
 O 축에 대한 토크를 계산하면

$$\sum \boldsymbol{\tau}_o = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \dots$$

O' 축에 대한 토크를 계산하면

$$\begin{aligned} \sum \boldsymbol{\tau}_{o'} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}_2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}_3 + \dots \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \dots - \mathbf{r}' \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots) \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \dots \\ &= \sum \boldsymbol{\tau}_o \end{aligned}$$



만일 어떤 물체가 병진 평형 상태에 있고, 하나의 축에 관한 알짜 토크가 영(0)이라면, 다른 어떠한 축에 관해서도 알짜 토크는 반드시 영(0)이다.

12.2 무게중심 알아보기 (More on the Center of Gravity)

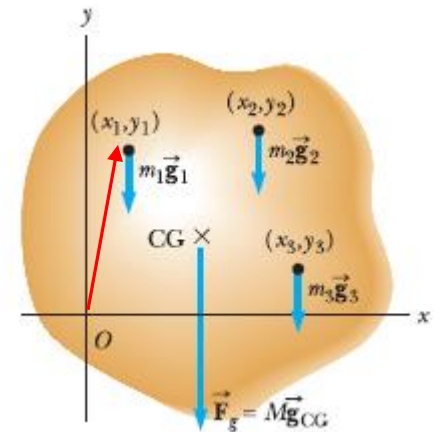
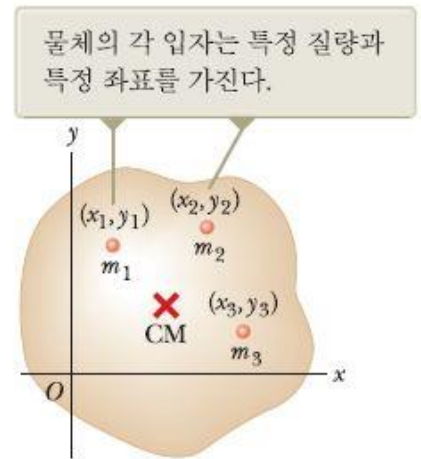
한 물체의 모든 질량 성분에 작용하는 중력의 합은 무게 중심점에 작용하는 단 하나의 중력과 같다. 중력가속도가 물체 전반에 균일하게 미친다면, 그 물체의 무게 중심은 질량 중심과 일치한다.

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

개별 입자에 작용하는 중력을 고려하는 또 다른 관점에서 상황을 살펴보자. 각 중력에 의한 토크는

$$\begin{aligned} & m_1 g_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 g_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 g_3 r_3 \sin \theta_3 + \dots \\ &= m_1 g_1 x_1 + m_2 g_2 x_2 + m_3 g_3 x_3 + \dots \\ &= (m_1 + m_2 + m_3 + \dots) g_{CG} x_{CG} \end{aligned}$$

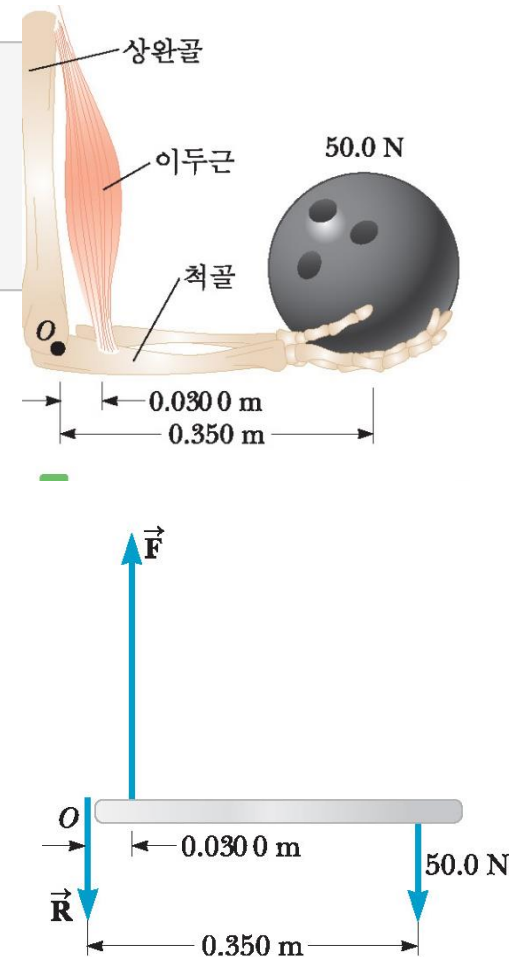
$$g \text{가 균일한 경우(대개는 성립)}, x_{CG} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = x_{CM}$$



12.3 정적 평형 상태에 있는 강체의 예 (Examples of Rigid Objects in Static Equilibrium)

볼링공을 들고 있는 팔뚝

50.0N의 볼링공이 사람의 손에 놓여 있다. 이때 팔뚝은 수평을 유지한다. 이두근(Biceps)은 팔꿈치로부터 0.0300m 지점에 붙어있고, 공은 팔꿈치로부터 0.350m 지점에 있다. 팔뚝 위의 이두근에 의해 작용하는 위쪽 방향 힘 \vec{F} 와 상완골(Humerus)이 관절을 통하여 팔뚝에 작용하는 아래 방향의 힘 \vec{R} 을 구하라.



풀이 점 O를 회전축으로 한다.

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_R + \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_B = 0$$

$$\rightarrow 0 + F(0.0300\text{m}) - (50.0\text{N}) \times (0.350\text{m}) = 0$$

$$\therefore F = \frac{(50.0\text{N}) \times (0.350\text{m})}{0.0300\text{m}} = 583\text{N}$$

$$\sum F_y = F - R - 50.0\text{N} = 0$$

$$\therefore R = F - 50.0\text{N} = 583\text{N} - 50.0\text{N} = 553\text{N}$$

예제 12.2 벽에 기대놓은 사다리

매끈한 수직 벽에 길이가 ℓ 인 균일한 사다리를 기대 세웠다. 사다리의 질량이 m 이고, 사다리와 지면 사이의 정지 마찰 계수가 $\mu_s = 0.40$ 라고 할 때, 사다리가 미끄러지지 않을 최소 각도 θ_{\min} 을 구하라.

풀이 최소 각도에서 정지해 있는 경우를 고려하면

$$(1) \quad \sum F_x = f_s - p = 0 \quad (3) \quad P = f_s$$

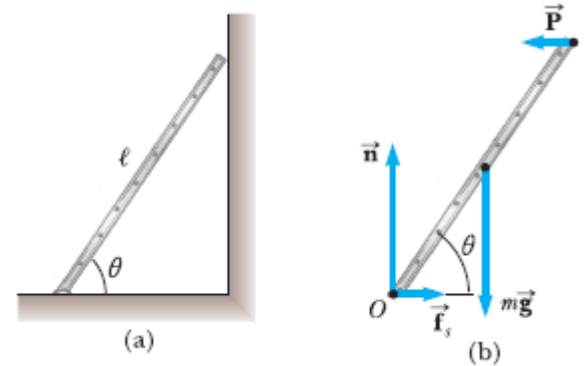
$$(2) \quad \sum F_y = n - mg = 0 \quad (4) \quad n = mg$$

$$P = f_{s,\max} = \mu_s n = \mu_s mg$$

$$(5) \quad \sum \tau_O = P\ell \sin \theta_{\min} - mg \frac{\ell}{2} \cos \theta_{\min} = 0$$

$$\frac{\sin \theta_{\min}}{\cos \theta_{\min}} = \tan \theta_{\min} = \frac{mg}{2P} = \frac{mg}{2\mu_s mg} = \frac{1}{2\mu_s} = 1.25$$

$$\theta_{\min} = \tan^{-1}(1.25) = 51^\circ$$



예제 12.2 벽에 기대놓은 사다리

길이 10.0m 이고 무게 50.0N 인 균질한 사다리가 미끄러운 수직 벽에 기대어 정지해 있다. 만약 사다리가 지면과 50.0° 각을 이루고 미끄러지기 직전에 있다면 사다리와 지면 사이의 정지 마찰계수는 얼마인가?

풀이 점 O를 회전축으로 한다.

$$\sum F_x = f - P = 0 \rightarrow f = P$$

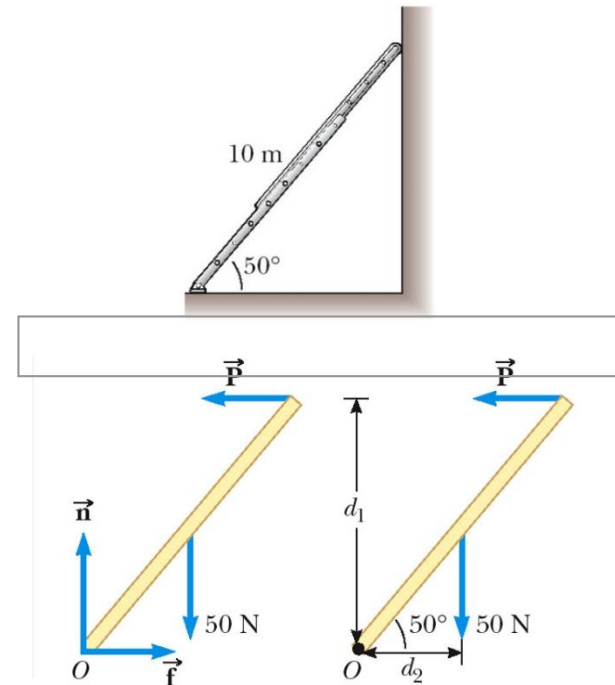
$$\sum F_y = n - 50.0\text{N} = 0 \rightarrow n = 50.0\text{N}$$

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_n + \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_g = 0 \quad (\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_f = 0)$$

$$\rightarrow P(10.0\text{m})\sin 50.0^\circ - (50.0\text{N}) \times (5.00\text{m})\sin 40.0^\circ = 0$$

$$P = \frac{(50.0\text{N}) \times (5.00\text{m})\sin 40.0^\circ}{(10.0\text{m})\sin 50.0^\circ} = 21.0\text{N}$$

$$P = f = \mu_s n \rightarrow \mu_s = \frac{P}{n} = \frac{21.0\text{N}}{50.0\text{N}} = 0.420$$



예제

수평 빔 위를 걷기

길이가 5.00m 이고 무게가 $3.00 \times 10^2 \text{N}$ 인 균질한 수평빔이 회전할 수 있게 연결된 핀으로 벽에 붙어있다. 빔의 한쪽 끝은 수평과 53.0° 의 각도를 이루며 케이블에 연결되어 있다. 만약 무게 $6.00 \times 10^2 \text{N}$ 인 사람이 벽으로부터 1.50m 에서 있을 경우 케이블의 장력 \vec{T} 의 크기와 벽에 의해 빔에 작용하는 힘 \vec{R} 을 구하라.

풀이 점 O를 회전축으로 한다.

$$\sum \vec{\tau} = \vec{\tau}_R + \vec{\tau}_{\text{빔}} + \vec{\tau}_{\text{사람}} + \vec{\tau}_T = 0 \quad (\vec{\tau}_R = 0)$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 - w_{\text{빔}} \left(\frac{L}{2} \right) - w_{\text{사람}} (1.50\text{m}) + TL \sin 53^\circ = 0$$

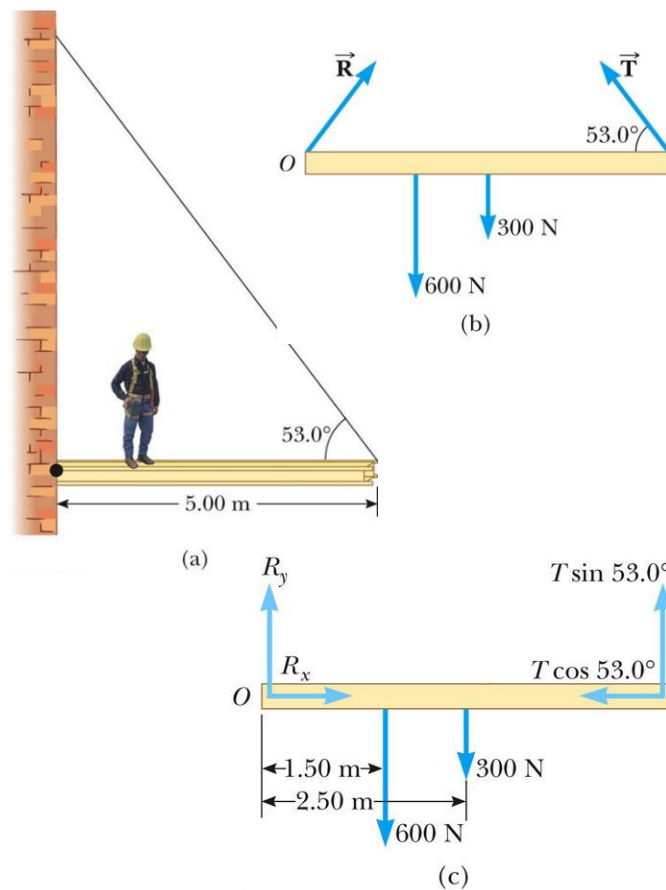
$$L = 5.00\text{m}$$

$$\therefore T = \frac{(3.00 \times 10^2 \text{N})(2.50\text{m}) + (6.00 \times 10^2 \text{N})(1.50\text{m})}{(5.00\text{m})(\sin 53^\circ)} = 413\text{N}$$

$$\sum F_x = R_x - T \cos 53.0^\circ = 0$$

$$\sum F_y = R_y - w_{\text{빔}} - w_{\text{사람}} + T \sin 53.0^\circ = 0$$

$$\therefore R_x = 249\text{N}, \quad R_y = 5.70 \times 10^2 \text{N}$$



12.4 고체의 탄성

(Elastic Properties of Solids)

용수철에 관한 경우를 제외하면, 물체에 외력이 작용하더라도 물체의 모양은 유지된다고 가정해 왔다. 실제로는 외력이 작용하면 모든 물체는 어느 정도 모양이 변할 수 있다. 즉, 어떤 물체에 외력을 가함으로써 모양이나 크기 (또는 둘 다)에 변화를 주는 것이 가능하다.

그러나 변화가 일어남에 따라, 물체의 내부 힘은 모양의 변화에 저항한다.

변형력(stress): 모습의 변화를 일으키는 힘에 비례하는 양,
단면의 단위 면적당 물체에 작용하는 외력

변형(strain): 변형력의 결과로 나타나는 형태의 변화 정도

변형력이 아주 작을 때 **변형력은 변형에 비례**함이 알려져 있다.
비례 상수는 모양에 변화를 겪고 있는 물질과 그 변화의 성질에 따라 달라진다. 이 **비례 상수를 탄성률(elastic modulus)**이라고 한다.

$$\text{탄성률} = \frac{\text{변형력}}{\text{변형}} \quad (F = -kx, \text{Hook's law})$$

1. 영률(Young's modulus): 길이 방향의 변화에 대한 고체의 저항
2. 층밀리기 탄성률(shear modulus): 고체 내에서 서로 마주보는 면들의 상대적인 움직임에 대한 저항의 척도
3. 부피 탄성률(bulk modulus): 고체나 액체의 부피 변화에 대한 저항의 척도

영률: 길이 방향으로의 탄성(Young's Modulus: Elasticity in Length)

인장 변형력(tensile stress): 단면적 A 에 대한
외력의 크기 F 의 비율로 정의

인장 변형(tensile strain): 원래 길이 L_i 에 대한
길이의 변화 ΔL 의 비율

$$Y = \frac{\text{인장 변형력}}{\text{인장 변형}} = \frac{F / A}{\Delta L / L_i}$$

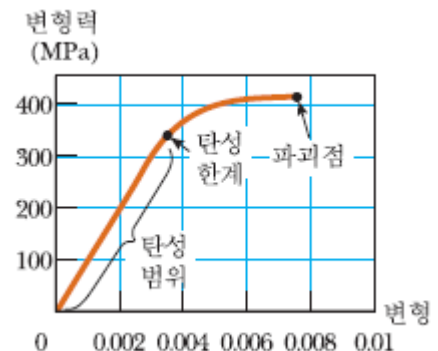
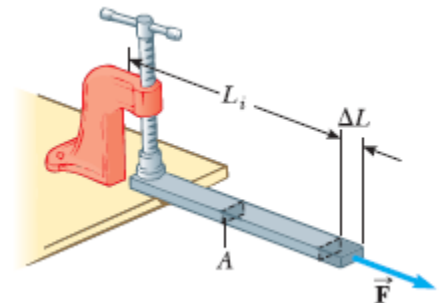
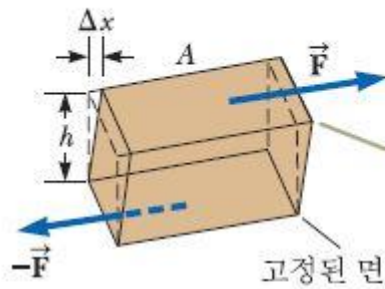


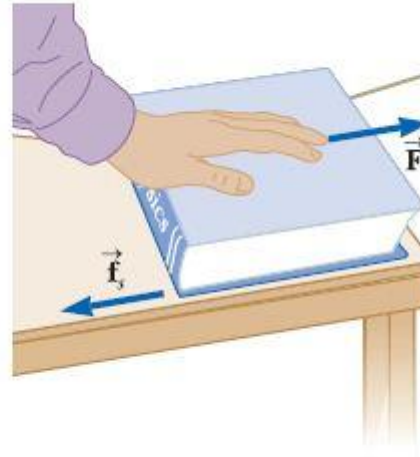
표 12.1 탄성률의 전형적인 값

물 질	영률 (N/m^2)	충밀리기 탄성률 (N/m^2)	부피 탄성률 (N/m^2)
텅스텐	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
철	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
구리	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
황동(놋쇠)	9.1×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
알루미늄	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
유리	$6.5 - 7.8 \times 10^{10}$	$2.6 - 3.2 \times 10^{10}$	$5.0 - 5.5 \times 10^{10}$
석영	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
물	—	—	0.21×10^{10}
수은	—	—	2.8×10^{10}

■ 증밀리기 탄성률: 형태에 대한 탄성 (Shear Modulus: Elasticity of Shape)



증밀리기 변형력은 물체의 윗면이 바닥면에 대하여 오른쪽으로 움직이게 한다.



증밀리기 변형력은 책의 앞면이 뒷면에 대하여 오른쪽으로 움직이게 한다.

a

b

증밀리기 변형력(shear stress): 증밀리는 면의 넓이에 대한 A 접선 방향 힘의 비(F/A)

증밀리기 변형(shear strain): $\Delta x/h$ 로 정의
 Δx 는 증밀리는 면이 움직인 수평 거리, h 는 물체의 높이

$$S \equiv \frac{\text{증밀리기 변형력}}{\text{증밀리기 변형}} = \frac{F/A}{\Delta x/h}$$

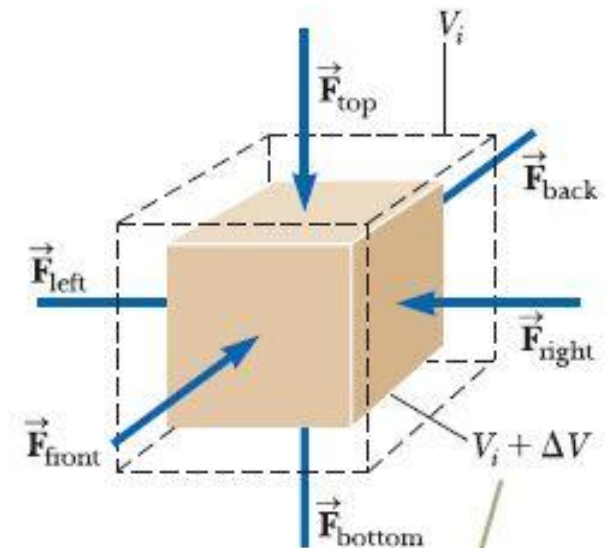
부피 탄성률: 부피에 대한 탄성 (Bulk Modulus: Volume Elasticity)

부피 변형력(volume stress): 표면에 작용하는 전체 힘의 크기 F 와
표면의 넓이 A 의 비율

부피 변형(volume strain): 부피의 변화 ΔV 를 원래의 부피 V 로 나누는 것

$$B \equiv \frac{\text{부피변형력}}{\text{부피변형}} = -\frac{\Delta F / A}{\Delta V / V_i} = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_i}$$

(B 를 양(+))으로 하기 위해서 -부호)

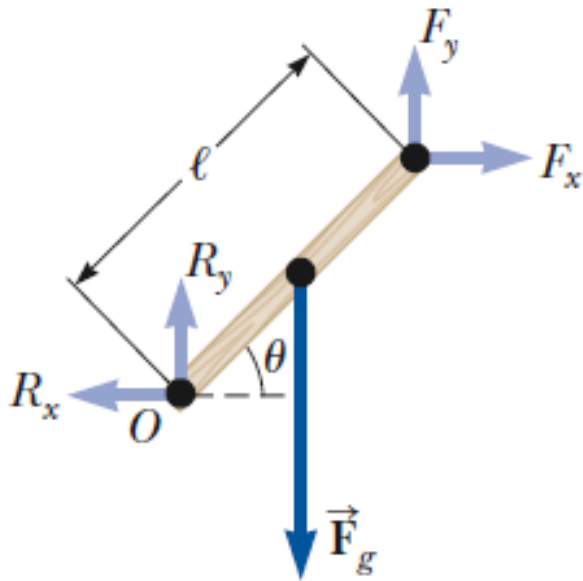


정육면체의 부피는 변하지만
모양은 변하지 않는다.

여러 분야에 적용: 콘크리트, 철 구조물 등

연습문제

1. 그림에 나타난 물체가 평형을 이루기 위하여 필요한 조건을 쓰라. 점 O 를 지나는 축에 대한 돌림힘을 구하라.(P300.1번)

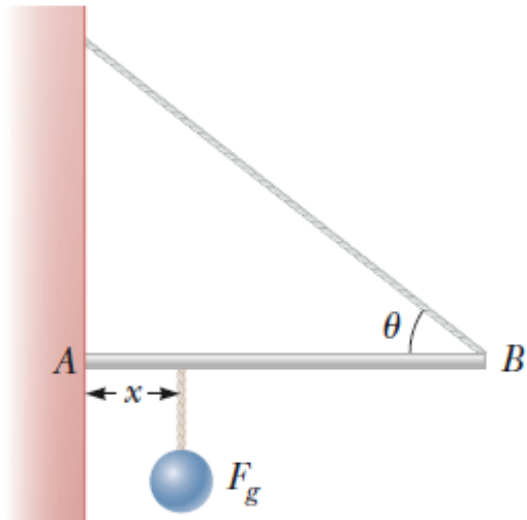


연습문제

2. 길이가 15.0 m이고 무게가 500 N 나가는 균일한 사다리를 마찰이 없는 벽에 기대 세운다. 사다리와 수평과의 각도는 60.0° 이다. (a) 800 N의 소방관이 사다리의 길이 방향으로 4.00 m 올라가 있을 때, 지면이 사다리의 발에 작용하는 수평 방향 힘과 연직 방향 힘을 구하라. (b) 만일 소방관이 길이 방향으로 9.00 m 올라갔을 때 사다리가 거의 미끄러지기 직전이라면, 사다리와 지면 사이의 정지 마찰 계수는 얼마인가?(P302.13번)

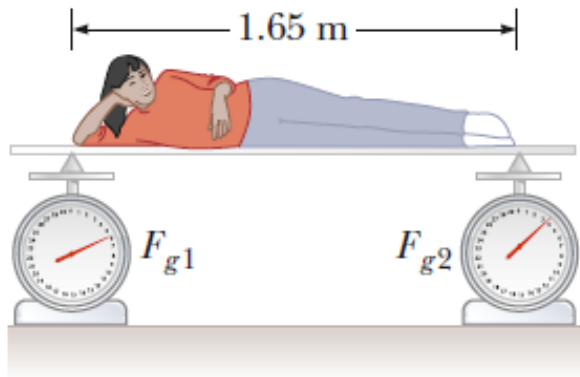
연습문제

3. 그림에서처럼 길이가 4.00 m이고 무게가 F_g 인 균일한 막대의 한 끝이 $\theta = 37^\circ$ 의 각도를 이루며 케이블에 매달려 지지되고 있다. 또 다른 끝은 벽에 닿아 마찰에 의하여 지탱된다. 벽과 막대 사이의 정지 마찰 계수는 $\mu_s = 0.500$ 이다. 막대와 같은 무게 F_g 를 점 A로부터 x 인 곳에 추가로 매달아도 점 A에 걸쳐 있는 막대가 미끄러져 떨어지지 않을 거리 x 의 최솟값을 구하라.(P304.22번)



연습문제

4. 운동 생리학에서는 사람의 질량 중심을 구하는 것이 종종 중요하다. 이를 구하기 위하여 그림과 같은 자세를 이용한다고 하자. 이때 가볍고 얇은 널빤지가 두 저울 사이에 있고, 저울의 눈금은 각각 $F_{g1} = 380 \text{ N}$, $F_{g2} = 320 \text{ N}$ 을 가리키고 있다. 저울 사이의 거리가 1.65 m라 하면, 누워 있는 사람의 질량 중심은 발끝으로부터 얼마나 떨어져 있는가?(P304.25번)



연습문제

5. 지름 1 mm의 철선이 0.2 kN의 장력을 지탱할 수 있다. 20kN의 장력을 견디기 위한 철선의 지름을 구하라.

연습문제

6. 길이가 2.00 m이고 단면의 지름이 4.00 mm인 원통형 강선이 가볍고 마찰이 없는 도르래에 걸쳐 있다. 그림과 같이 줄 한쪽 끝에는 질량 $m_1 = 5.00$ kg, 다른 끝에는 질량 $m_2 = 3.00$ kg인 물체가 달려 있다. 물체들이 자유롭게 직이도록 놓는다. 물체들이 움직이는 동안 늘어난 줄의 길이를 구하여 물체를 매달기 전 줄의 길이와 비교하라.

