4장. 이차원에서의 운동
(Motion in Two Dimension)

4.1 위치, 속도, 가속도 벡터

4.2 등가속도 이차원 운동

4.3 포물체 운동

4.4 분석모형:등속 원운동하는 입자

4.5 접선 및 지름 가속도

4.6 상대 속도와 상대 가속도

* 이(2)차원에서 움직이는 입자의 운동학

-2차원 운동에 대한 기본을 알면, 궤도상에 있는 인공위성의 운동에서부터 균일한 전기장내에서 전자의 운동에 이르기까지 다양한 운동을 다룰 수 있음

* 위치, 속도, 가속도가 벡터임을 공부

- 1차원 운동과 같이 2차원 운동에서의 기본 정의로부터 운동 방정식을 유도

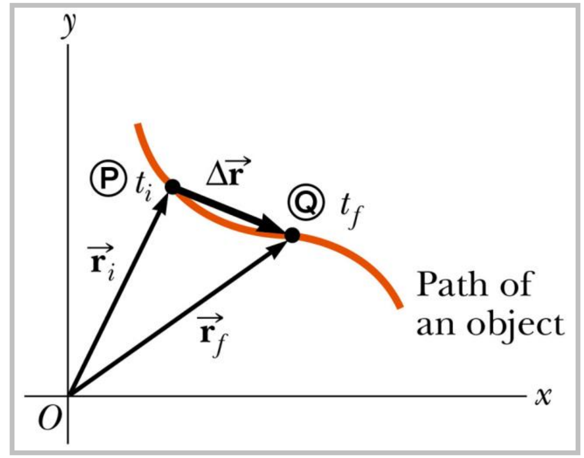
* 2차원 운동인 포물체 운동, 등속 원운동을 다룸

* 상대 운동의 개념을 논의

- 주어진 입자의 위치, 속도, 가속도가 다른 좌표계에 있는 관찰자에게는 왜 다른 값으로 측정되는지를 공부

4.1 위치, 속도, 가속도 벡터

(The Position, Velocity, and Acceleration Vectors)



*** 곡선을 따라 움직이는 물체를 생각해보자.**

☞ 변위벡터

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad [\mathrm{m}]$$

$\vec{r}_i$: **처음 위치**

$\vec{r}_f$: **나중(최종) 위치**

☞ 평균 속도

$$\vec{v}_{mean} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad [\mathrm{m/s}]$$

※ 평균 속도는 $\Delta\vec{r}$ 방향의 벡터량이다.

☞ 순간 속도

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [\mathrm{m/s}]$$

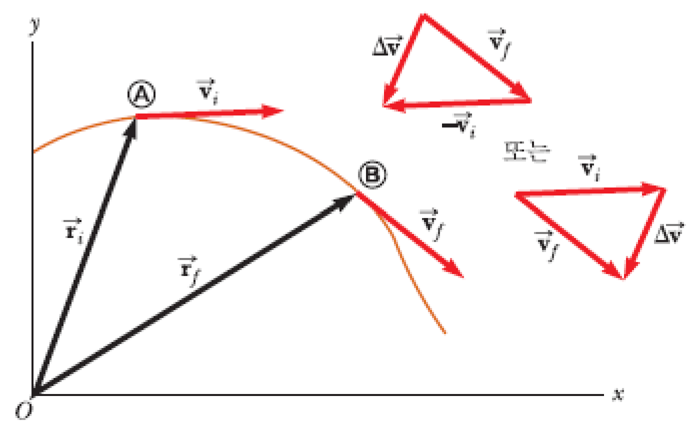
※ 순간 속도 벡터의 방향은 입자 경로의 접선 방향이다.

☞ 평균 가속도

$$\vec{a}_{mean} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

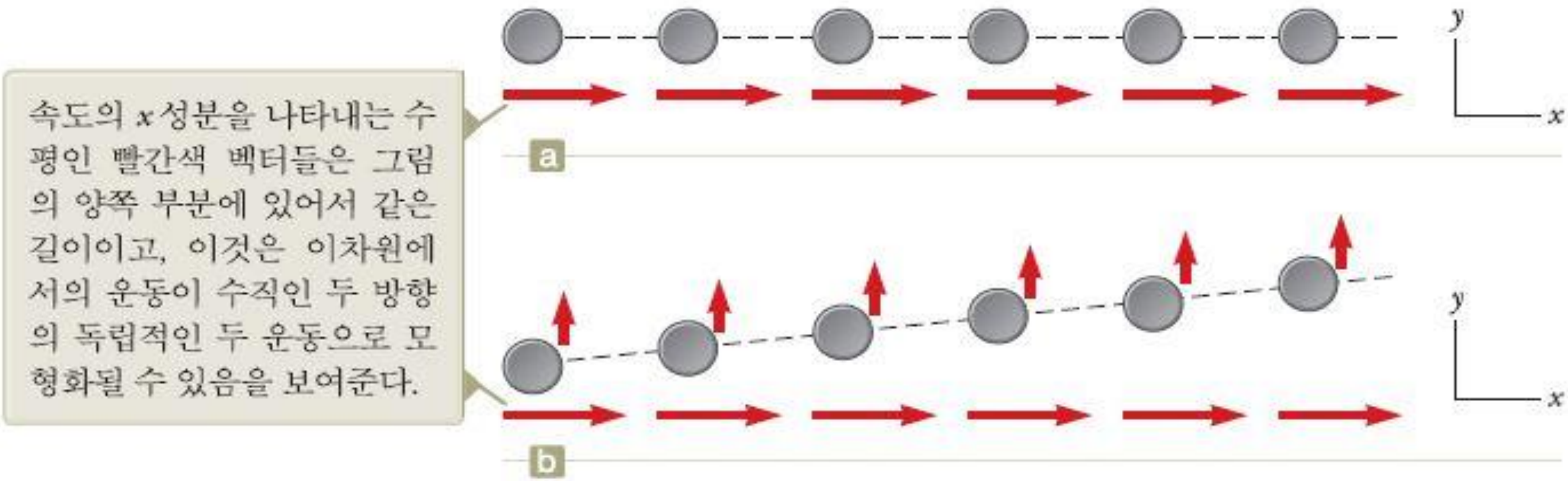
☞ 순간 가속도

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$



4.2 등가속도 이차원 운동

(Two-Dimensional Motion with Constant Acceleration)



2차원 운동은 *x*-와 *y*-축 방향의 각각 독립된 두 개의 운동으로 기술될 수 있다. 즉, *y*-방향으로의 어떠한 영향도 *x*- 방향의 운동에 영향을 주지 않는다.
그리고 그 반대의 경우도 마찬가지이다.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \equiv v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

* 1차원 등가속도 운동 방정식

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x{}^2 = v_{0x}{}^2 + 2a_x \Delta x \qquad (\Delta x = x - x_0)$$

* 2차원 등가속도 운동 방정식

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{s} = \vec{v}^2 - \vec{v}_0{}^2 \qquad (\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x{}^2 = v_{0x}{}^2 + 2a_x \Delta x \qquad (\Delta x = x - x_0)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_y{}^2 = v_{0y}{}^2 + 2a_y \Delta y \qquad (\Delta y = y - y_0)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$$

$$v_x = v\cos\theta, \; v_y = v\sin\theta$$

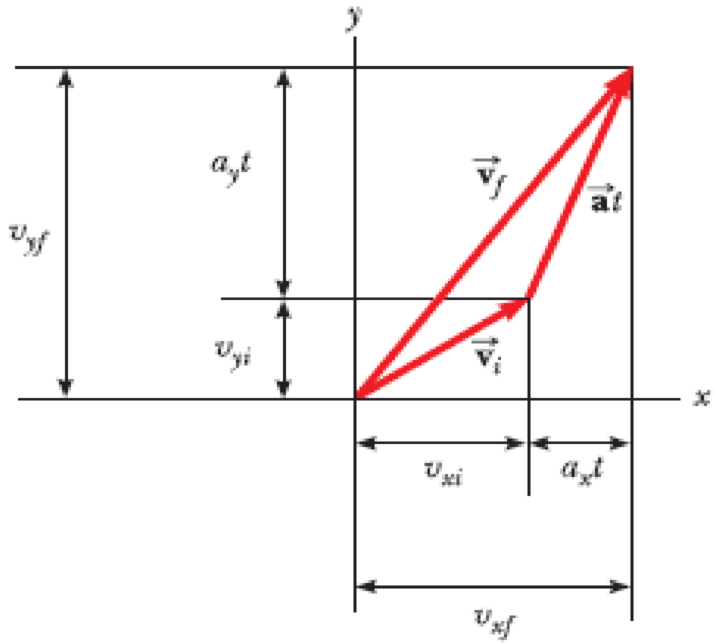
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$$

$$a_x = a\cos\theta, \; a_y = a\sin\theta$$

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t, \qquad v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_f &= v_{xf}\,\mathbf{i} + v_{yf}\,\mathbf{j} \\ &= (v_{xi} + a_x t)\mathbf{i} + (v_{yi} + a_y t)\mathbf{j} \\ &= (v_{xi}\mathbf{i} + v_{yi}\mathbf{j}) + (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$



(a)

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

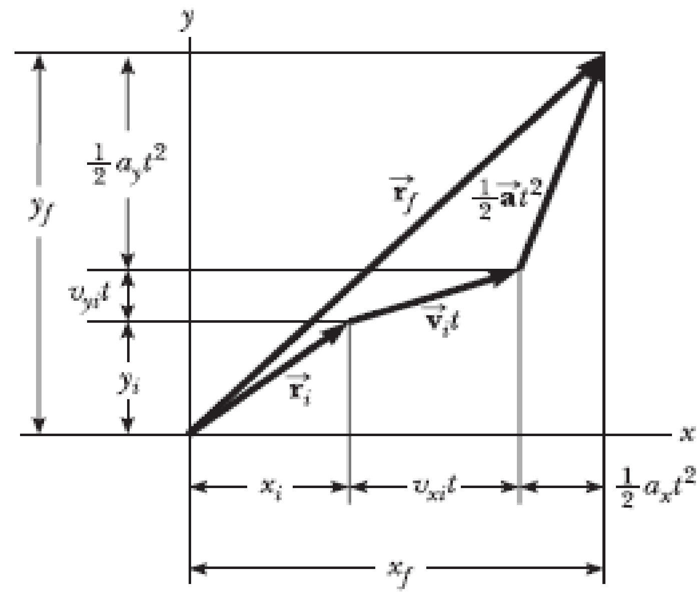
$$y_f = y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$\mathbf{r}_f = x_f\mathbf{i} + y_f\mathbf{j}$$

$$= (x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2)\mathbf{i} + (y_i + v_{yi}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2)\mathbf{j}$$

$$= (x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}) + (v_{xi}\mathbf{i} + v_{yi}\mathbf{j})t + \tfrac{1}{2}(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j})t^2$$

$$\therefore \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$



(b)

예제 4.1 평면에서의 운동

xy 평면에서 입자가 시간 $t = 0$일 때, x 성분은 20 m/s, y 성분은 −15 m/s의 처음 속도로 원점에서 운동하기 시작한다. 이 입자는 x 성분의 가속도 $a_x = 4.0\ \mathrm{m/s^2}$으로 운동한다.

(A)임의의 시간에서 속도 벡터를 구하라

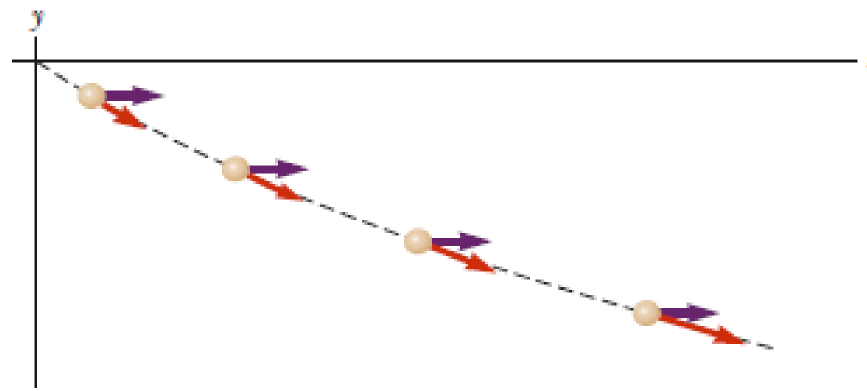


그림 4.6 (예제 4.1) 입자의 운동을 나타낸 그림

(B) 시간 t=5s 일 때 입자의 속도와 속력, 속도벡터가 x축과 이루는 각도를 구하라

(C)임의의 시간 t에서 입자의 x 및 y 좌표와 그 시간에서 입자의 위치 벡터를 구하라

4.3 포물체 운동

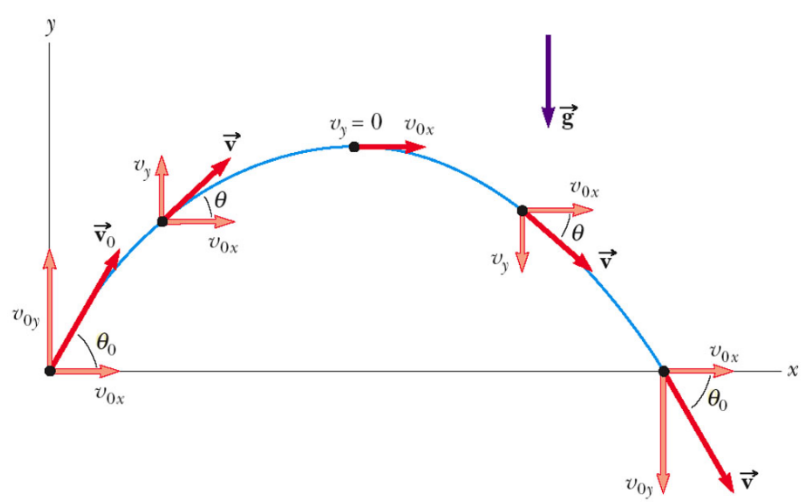
(Projectile Motion)

☞ 포물체 운동은 x 와 y 방향의 운동 합성으로 기술 될 수 있다.

☞ 자유 낙하 가속도의 크기가 $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ 으로
운동 구간 내에서 일정하며 수직 아래 방향으로 향한다.

☞ 공기저항 효과는 무시할 수 있다.

☞ 지구의 자전은 운동에 영향을 주지 않는다.

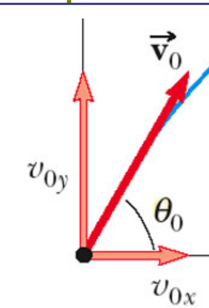


x축 방향 : 등속 운동

y축 방향 : 중력에 의한 등가속도 운동

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g = -9.80\,\mathrm{m/s^2}$$



$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

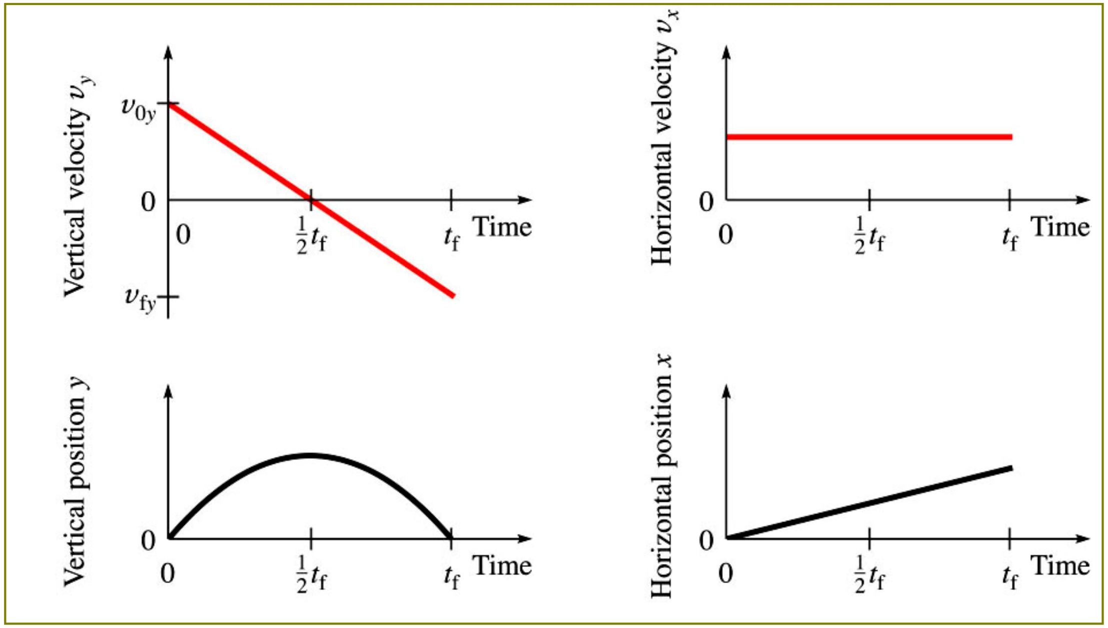
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$
$$v_x^{\ 2} = v_{0x}^{\ 2} + 2a_x \Delta x \qquad (\Delta x = x - x_0)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$
$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$v_y^{\ 2} = v_{0y}^{\ 2} + 2a_y \Delta y \qquad (\Delta y = y - y_0)$$

$$v_x = v_{0x}$$
$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0) t$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$
$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_y^{\ 2} = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g\Delta y \qquad (\Delta y = y - y_0)$$



☞ 포사체 운동 - 최고 높이

- 최고높이 h 에서 물체는 더 이상 올라가지 못하므로 $v_y = 0$ 이다.

$$\Delta y = y - y_0 = h$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta,\ v_y = 0$$

$$v_y{}^2 = v_{0y}{}^2 - 2g\Delta y \quad \rightarrow \quad -2gh = 0^2 - (v_0 \sin\theta)^2$$

$$\therefore\ \boldsymbol{h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

예) 질량이 32.0kg 인 물체가 30.0° 각도를 가지고 초기 속도 $50.0\,\mathrm{m/s}$ 로 발사시켰다.
물체의 최고 높이는 얼마인가?

풀이

$$h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(50.0\,\mathrm{m/s} \times \sin 30.0^\circ)^2}{2 \times 9.80\,\mathrm{m/s^2}} = 31.9\mathrm{m}$$

☞ 포사체 운동 – 수평 도달 거리

$$x = v_{0x} t = (v_0 \cos\theta)\, t$$

$$\rightarrow \ t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$y = (v_0 \sin\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \ \rightarrow \ y = (v_0 \sin\theta) \times \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

$$= (\tan\theta)\, x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

$R =$

수평도달거리는 초기높이와 같은 경우 (y = 0) 로부터 구한다.

$$y = (\tan\theta) x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 = 0 \rightarrow \ x \left(\tan\theta - \frac{g}{2 v_0^{\,2} \cos^2\theta} x \right) = 0$$

$$x = 0, \quad x = R = \frac{\tan\theta}{g} \times 2 v_0^{\,2} \cos^2\theta$$

$$\boldsymbol{R = \frac{\tan\theta}{g} \times 2 v_0^{\,2} \cos^2\theta = \frac{\sin\theta}{g \cos\theta} \times 2 v_0^{\,2} \cos^2\theta = \frac{2 v_0^{\,2} \sin\theta \cos\theta}{g} = \boxed{\frac{v_0^{\,2} \sin 2\theta}{g}}}$$

예제 4.2 멀리뛰기

멀리 뛰기 선수(그림 4.11)가 수평위 20°의 각도로 비스듬하게 속력 11.0 m/s로 뛰어 오른다.

(A) 수평빙향으로 얼마나 멀리 뛰는가?

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0\ \mathrm{m/s})^2 \sin 2(20.0°)}{9.80\ \mathrm{m/s^2}} = \boxed{7.94\ \mathrm{m}}$$

(B) 도달한 최대 높이를 구하라

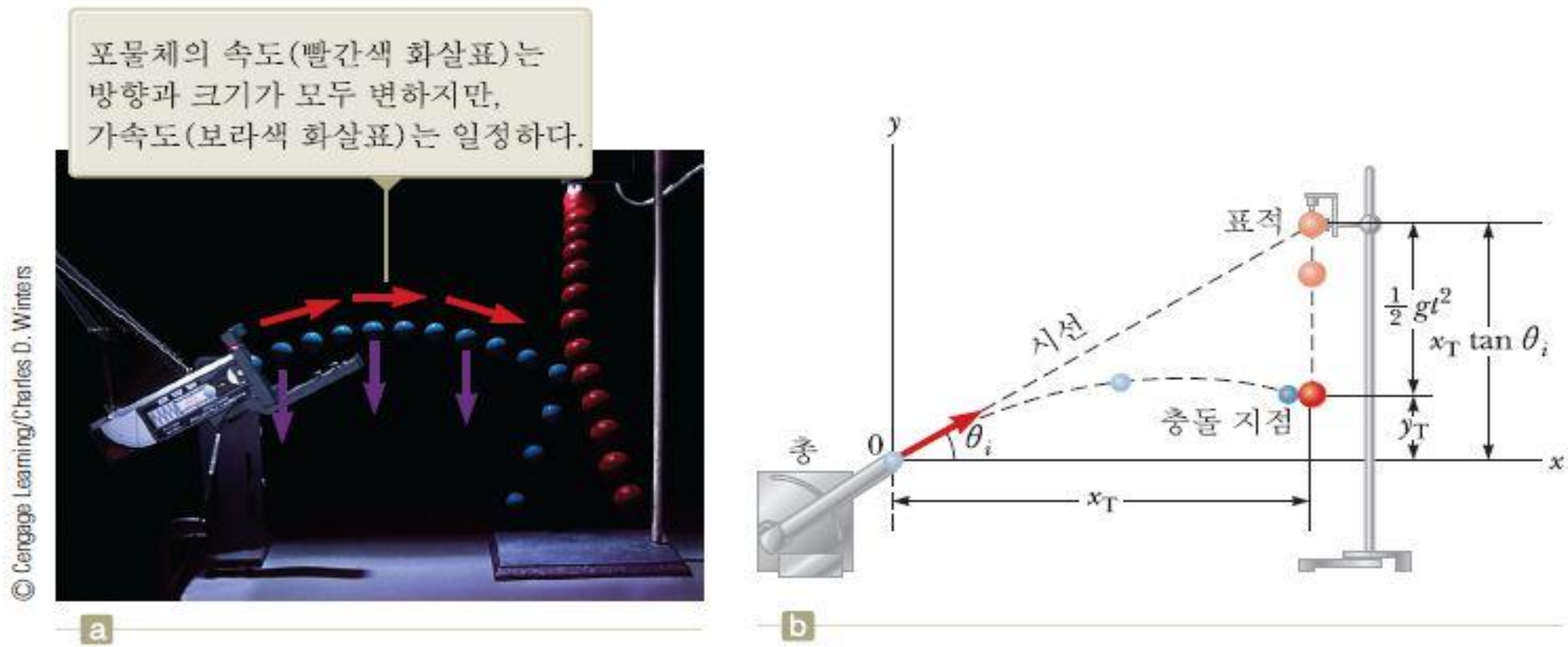
$$h = \frac{v_i^2 \sin^2\theta_i}{2g} = \frac{(11.0\ \mathrm{m/s})^2 (\sin 20.0°)^2}{2(9.80\ \mathrm{m/s^2})}$$

$$= \boxed{0.722\ \mathrm{m}}$$

그림 4.11 (예제 4.2) 2008년 베이징 올림픽 경기에서 남자 10종 경기 중 멀리 뛰기를 하는 프랑스의 로메인 바라스(Romain Barras)

예제 4.3 백발백중

포물체가 표적을 맞추는 실험에서 정지해 있던 표적은 발사와 동시에 떨어지기 시작한다. 최초에 멈춰 있던 표적을 겨누어 발사했다면 언제나 명중할 수 있음을 보여라.



표적은 y방향의 일차원 등가속도 운동을 하고, 포물체는 y방향으로는 등가속도 운동, x방향으로는 등속운동을 한다. <u>표적</u>의 y좌표에 대한 식은

$$(1) \quad y_T = y_{iT} + (0)t - \frac{1}{2}gt^2 = x_T \tan\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

포물체에 대한 식을 써보면

$$(2) \quad y_P = y_{iP} + v_{yiP} t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= v_{iP} \sin \theta t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP} t = v_{iP} \cos \theta t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta}$$

$$(3) \quad y_P = v_{iP} \sin \theta \left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta} \right) - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= x_P \tan \theta - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$x_p = x_T$ 를 대입하면,

$$\therefore \quad y_T = y_P \quad \Rightarrow$$ 포물체는 항상 표적과 충돌!

예제 4.4 스키 점프 도약대

그림에서 보듯이 한 스키 점프 선수가 수평 방향 25.0 m/s 의 속력으로 스키 트랙을 떠난다. 선수가 착지할 경사면은 30.0° 기울어져 있다. 선수는 경사면 어느 지점에 착지하는가?

풀이

$$x_f = v_{xi} t$$

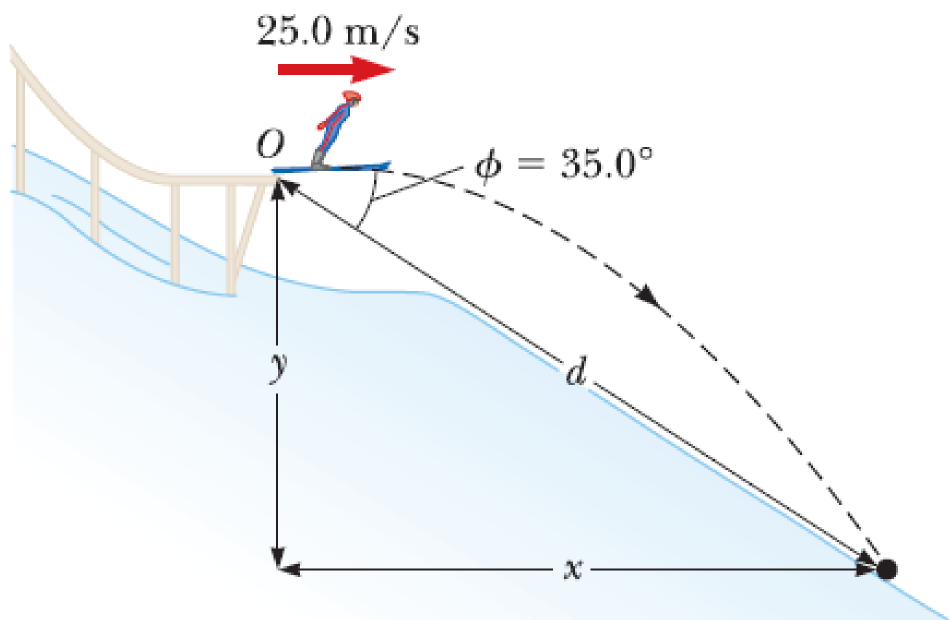
$$y_f = v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$d \cos \phi = v_{xi} t$$

$$-d \sin \phi = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$-d \sin \phi = -\frac{1}{2} g \left(\frac{d \cos \phi}{v_{xi}} \right)^2$$

$$d = \frac{2 v_{xi}^2 \sin \phi}{g \cos^2 \phi} = \frac{2(25.0 \text{ m/s})^2 \sin 35.0°}{(9.80 \text{ m/s}^2) \cos^2 35.0°} = 109 \text{ m}$$



$$x_f = d \cos \phi = (109 \text{ m}) \cos 35.0° = \boxed{89.3 \text{ m}}$$

$$y_f = -d \sin \phi = -(109 \text{ m}) \sin 35.0° = \boxed{-62.5 \text{ m}}$$

예제 대단한 팔

높이가 45.0m 인 건물 옥상에서 공을 처음 속력 $20.0\,\mathrm{m/s}$ 로 하여서, 수평면과 30.0° 위로 던졌다.

(a) 공이 지면에 닿을 때까지 시간은 얼마나 걸리는가?

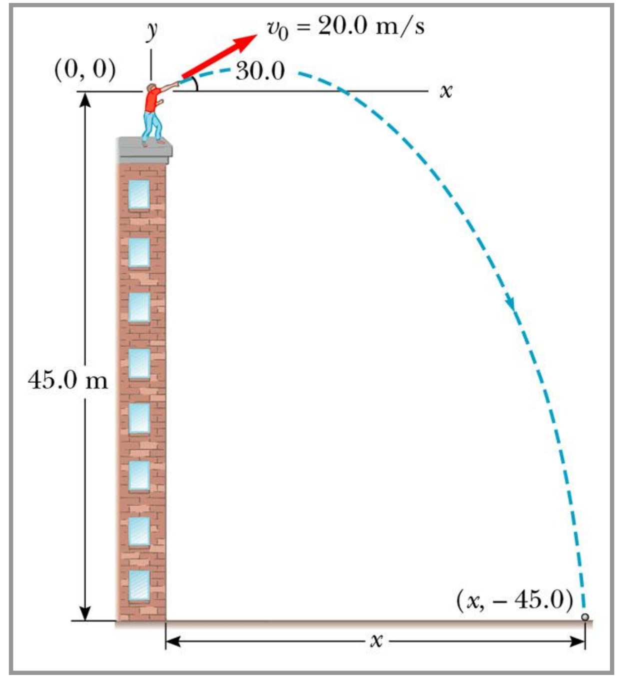
풀이

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = 20.0\mathrm{m/s} \times \cos 30.0^\circ = 17.3\mathrm{m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = 20.0\mathrm{m/s} \times \sin 30.0^\circ = 10.0\mathrm{m/s}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad -45.0\mathrm{m} = (10.0\mathrm{m/s})\,t - \frac{1}{2}\times(9.80\mathrm{m/s}^2)\,t^2$$

$$\therefore t = 4.22\mathrm{s}$$



(b) 이 공이 지면에 충돌하는 속력을 구하라.

풀이

$$v_{0x} = v_x = 17.3\mathrm{m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 10.0\mathrm{m/s} - (9.80\mathrm{m/s}^2)\times(4.22\mathrm{s}) = -31.4\mathrm{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(17.3\mathrm{m/s})^2 + (-31.4\mathrm{m/s})^2} = 35.9\mathrm{m/s}$$

(c) 공이 날아간 수평 거리를 구하라.(공기의 저항은 무시한다.)

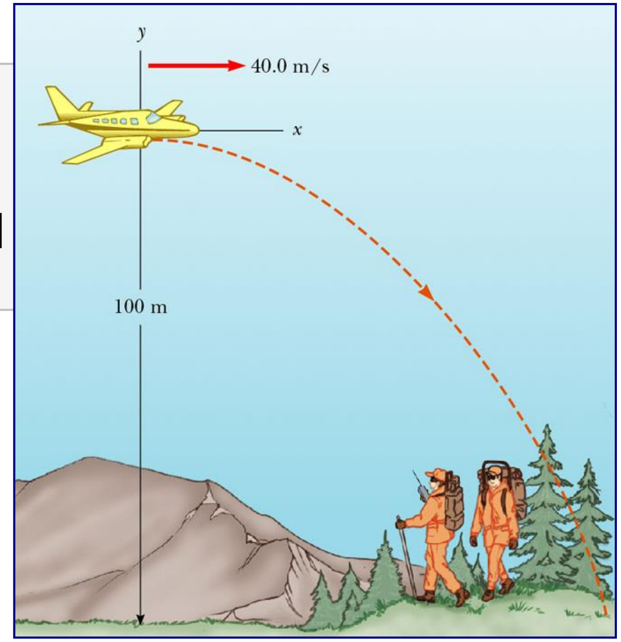
풀이

$$\Delta x = v_{0x}t = (v_0\cos\theta)t = (20.0\mathrm{m/s}\times\cos 30.0^\circ)\times 4.22\mathrm{s} = 73.1\mathrm{m}$$

예제 조난자에게 비상식량 떨어뜨리기

그림에서처럼 산 속에서 길을 잃은 조난자에게 구조비행기가 비상식량을 떨어뜨리려고 한다. 구조기의 고도는 지상에서 $1.00\times10^2\,\mathrm{m}$ 이고 수평 속력은 $40.0\,\mathrm{m/s}$ 이다.

(a) 비상식량 상자는 구조기에서 떨어뜨린 위치에서 수평으로 얼마되는 지점에 낙하하는가?



풀이

$$x_0 = y_0 = 0,\ y = -1.00\times10^2\,\mathrm{m}$$

$$v_{0x} = 40.0\mathrm{m/s},\ v_{0y} = 0,\ a_x = 0,\ a_y = -g = -9.80\mathrm{m/s}^2$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \ \rightarrow\ -1.00\times10^2\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2}\times\left(9.80\mathrm{m/s}^2\right)t^2$$

$$\therefore t = 4.52\mathrm{s}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \ \rightarrow\ x = \left(40.0\mathrm{m/s}\right)t$$

$$\therefore x = \left(40.0\mathrm{m/s}\right)\times\left(4.52\mathrm{s}\right) = 181\mathrm{m}$$

(b) 상자가 지면에 도달하기 직전 속도의 수평과 수직성분은 얼마인가?

풀이

$$v_{0x} = v_x = 40.0\mathrm{m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = -\left(9.80\mathrm{m/s}^2\right)\times\left(4.52\mathrm{s}\right) = -44.3\mathrm{m/s}$$

문제 풀이 전략 – 포물체 운동

1. 좌표계를 선택해 경로, 처음과 나중 위치, 속도, 가속도를 그린다.
2. 처음 속도를 x성분과 y성분으로 분해한다.
3. 수평 방향의 운동과 수직 방향의 운동을 독립적으로 다룬다.
4. 포물체의 수평 방향의 운동을 푸는데 등속도 문제의 풀이 방법을 이용한다.
5. 포물체의 수직 방향의 운동을 푸는데 등가속도 문제의 풀이 방법을 이용한다.

예제 비행기에서 로켓떨어뜨리기

수평방향으로 1.00×10^2 m/s 로 비행하는 제트기가 어떤 높이에서 로켓 포탄을 떨어뜨린다.
로켓포탄은 즉시 점화되어 y 방향으로 중력을 받으면서 x 방향으로는 $20.0\,\mathrm{m/s^2}$ 의 가속도로 가속된다.
로켓이 1.00 km 를 낙하하였을 때
(a) y 방향의 속도

풀이

(b) x방향의 속도

풀이

(c) 속도의 크기와 방향을 구하라

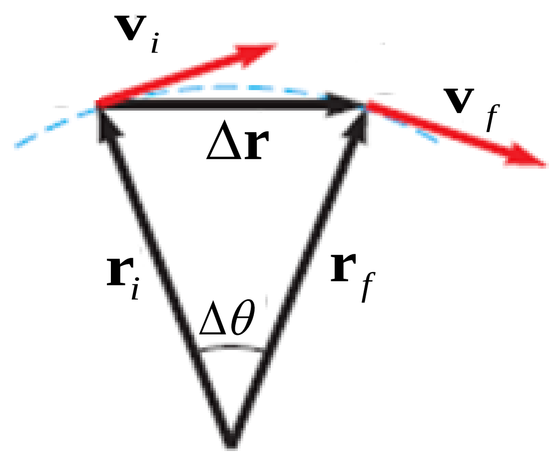
풀이

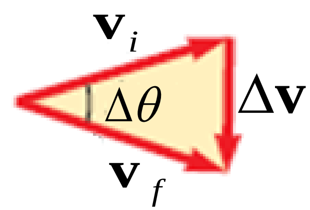
4.4 분석모형: 등속 원운동하는 입자

(Analysis Model: Particle in Uniform Circular Motion)

등속 원운동: 일정한 속력으로 원주 위를 움직이는 운동

$\boxed{\mathbf{r} \perp \mathbf{v}}$ $\quad |\mathbf{v}| = v$ (일정)





$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r}, \quad |\Delta \mathbf{v}| = \frac{v}{r}|\Delta \mathbf{r}|.$$

$$\mathbf{a}_{avg} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad |a_{avg}| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \to v \qquad \Delta \mathbf{v} \to -|\Delta \mathbf{v}|\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a}_{avg} \to -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

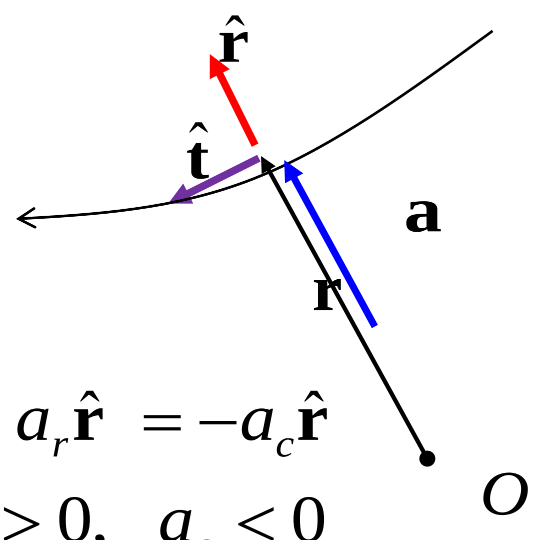
$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r}}$$:구심 가속도

등속 원운동에서 입자의 주기 T

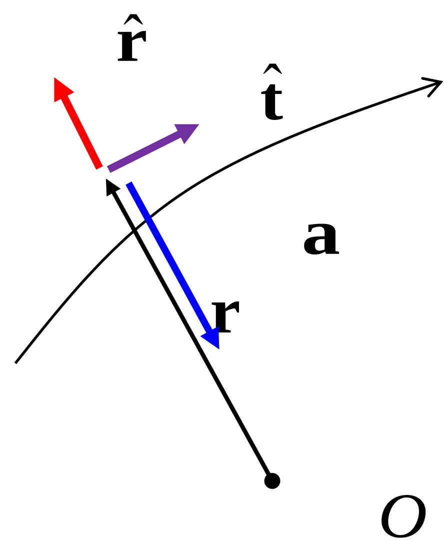
$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}}$$

지름방향, 구심 방향 그리고 접선 방향



$$\boxed{a_r = -a_c}$$



$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} = -a_c \hat{\mathbf{r}}$$

$$a_r > 0, \quad a_c < 0$$

$$\mathbf{a} = a_r \hat{\mathbf{r}} = -a_c \hat{\mathbf{r}}$$

$$a_r < 0, \quad a_c > 0$$

예제 4. 5 지구의 구심 가속도

(A) 태양 주위로 공전하는 지구의 구심 가속도를 구하라

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \mathrm{m})}{(1\ \mathrm{yr})^2}\left(\frac{1\ \mathrm{yr}}{3.156 \times 10^7\ \mathrm{s}}\right)^2$$

$$= 5.93 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

(B) 태양 주위로 공전하는 지구의 각속력을 구하라

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \mathrm{yr}}\left(\frac{1\ \mathrm{yr}}{3.156 \times 10^7\ \mathrm{s}}\right) = 1.99 \times 10^{-7}\ \mathrm{s^{-1}}$$

4.5 접선 및 지름 가속도

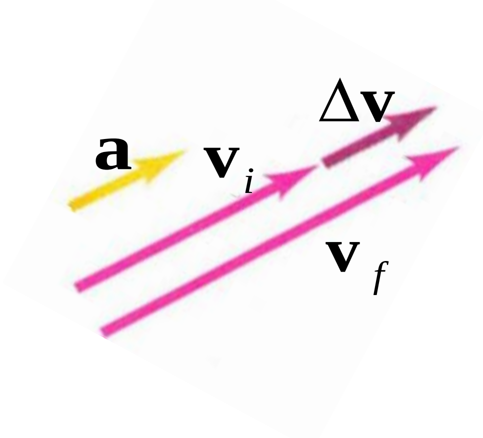
(Tangential and Radial Acceleration)

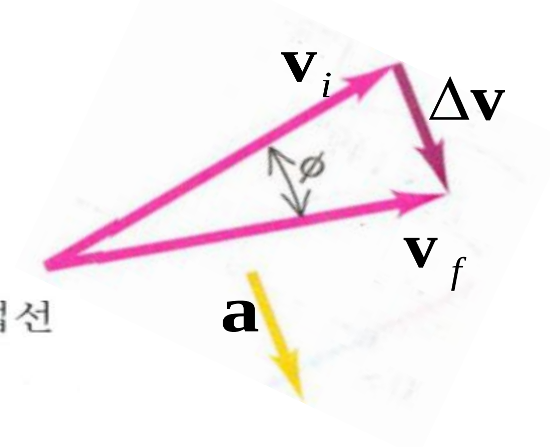
가속도의 속도와 나란한 성분과 수직인 성분

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v}$$

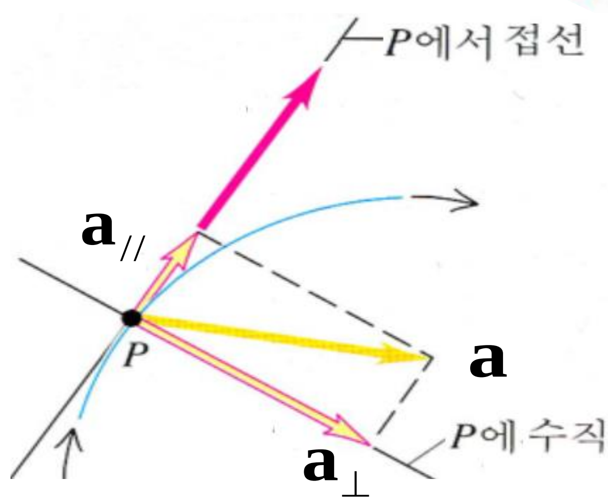
속도 v가 가속도 a 와 평행하면 **v의 크기가 변한다.**

속도 v가 가속도 a 와 수직하면 v의 크기가 변화 없고 방향이 변한다.





$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{//} + \mathbf{a}_{\perp}$$

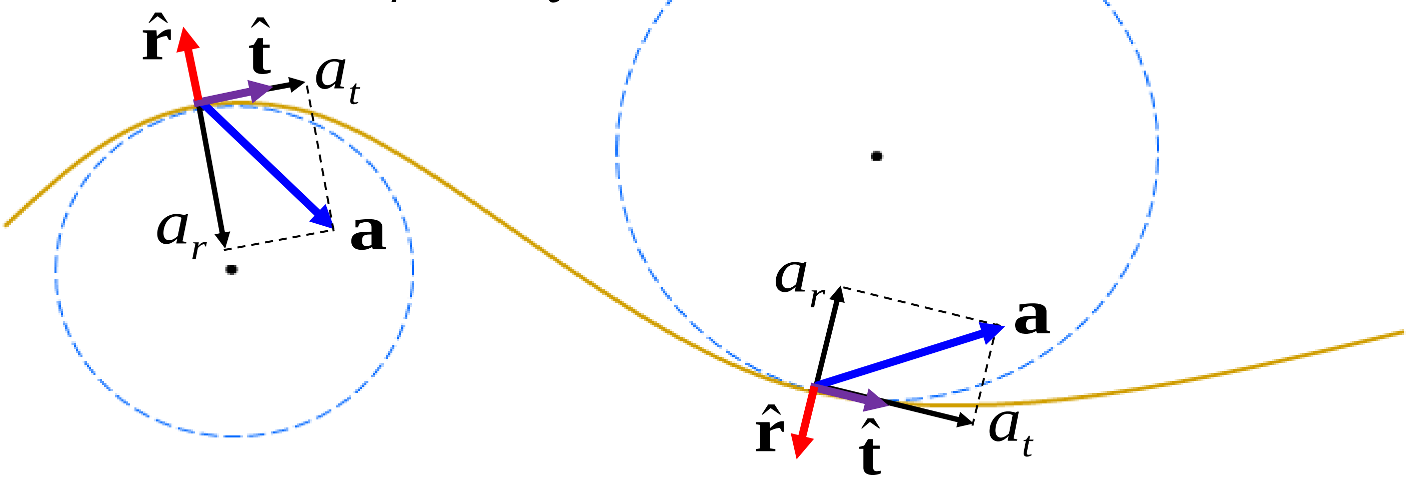


가속도의 접선 성분과 지름 성분

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$\hat{\mathbf{t}}$: 접선방향의 단위 벡터

$\hat{\mathbf{r}}$: 지름방향의 단위 벡터



접선 가속도

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,|\mathbf{v}|}{dt} \Rightarrow$$

속력 변화
순간 속도의 방향

지름 가속도

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \Rightarrow$$

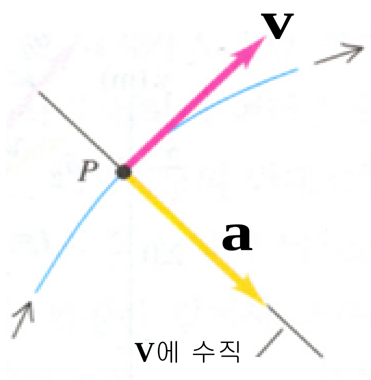
속도의 방향 변화

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

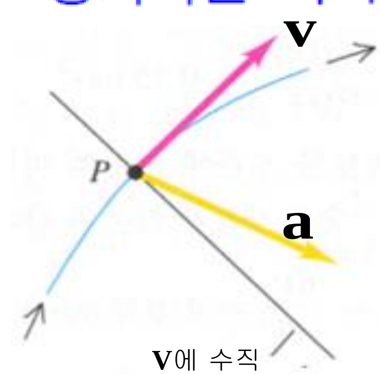
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

$$a_t = \frac{d\,|\mathbf{v}|}{dt},\ a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

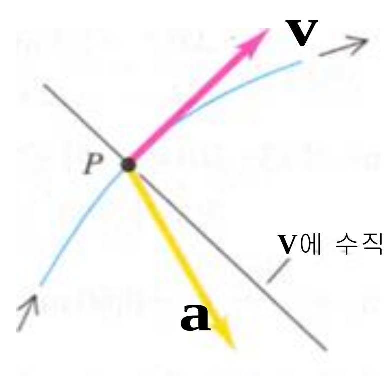
일정한 속력



증가하는 속력



감소하는 속력



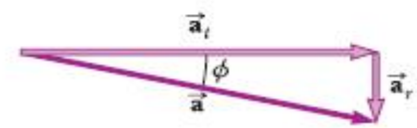
예제 4. 6　고개 넘기

어떤 차가 도로를 따라 0.300 m/s²의 등가속도로 달리고 있다. 차가 도로에 있는 언덕을 넘어가는데, 언덕의 꼭대기는 반지름 500 m인 원모양이다. 차가 언덕 꼭대기에 도달하는 순간에, 속도 벡터는 수평이고 크기는 6.00 m/s이다. 이 순간 차의 전체 가속도 크기와 방향을 구하라.

(a)

지름 가속도를 구하면

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{6.00^2}{500} = -0.072\ \mathrm{m/s^2}$$



(b)

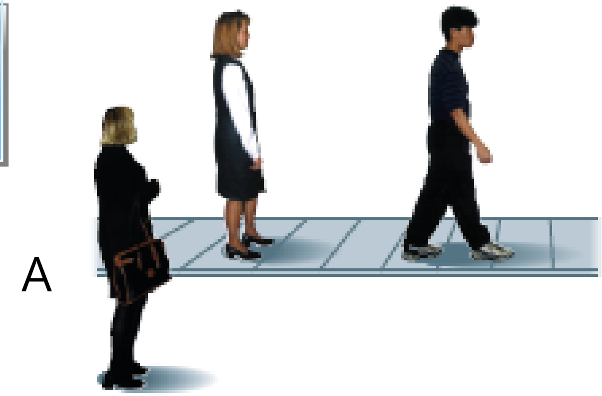
$a_t = 0.3\ m/s^2$ **이므로**

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.072)^2 + 0.300^2} = 0.309\ m/s^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1}\left(\frac{-0.072}{0.030}\right) = -13.5°$$

4.6 상대 속도와 상대 가속도

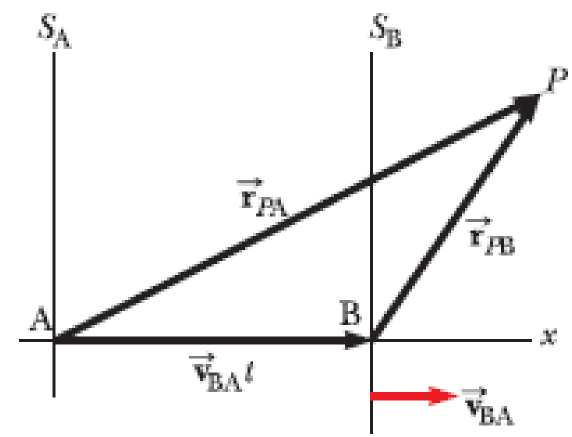
(Relative Velocity and Relative Acceleration)



관찰자의 운동 상태에 따라
대상 물체의 운동이 다르게 표현된다.

두 기준틀의 원점이 일치하는 순간을 t=0이라 하고,
기준틀 S_B가 S_A에 대해 상대적으로 등속운동한다고 가정하면

$$\mathbf{r}_{PA} = \mathbf{r}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} t$$



양변을 시간에 대해 미분하면

$$\frac{d\mathbf{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PB}}{dt} + \mathbf{v}_{BA}$$

$$\mathbf{u}_{PA} = \mathbf{u}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$

◀ 갈릴레이 속도 변환
(참고: 로렌쯔 변환)

양변을 다시 시간에 대해 미분하면

$$\frac{d\mathbf{u}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_{PB}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt} \qquad \therefore \ \mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}$$

등속으로 움직이는 두 기준틀에서 측정한 가속도는 같다. 즉, 뉴턴의 운동 법칙이 동일하게 적용된다 (Einstein의 특수 상대성이론).

예제 4.7 강을 가로질러 가는 배

배가 강물에 대하여 10.0 km/h 의 속도로 넓은 강을 건너려고 북쪽을 향해 가고 있다.
강물은 동쪽으로 5.0 km/h 의 등속도로 흐르고 있다.
강둑에 있는 관측자가 측정한 배의 속도를 구하라.

풀이 $\vec{v}_{BR} = 10.0\,\mathrm{km/h}$: **물에 대한 배의 속도**

$\vec{v}_{RE} = 5.00\,\mathrm{km/h}$: **지면에 대한 강물의 속도**

$$\vec{v}_{BR} = \vec{v}_{BE} - \vec{v}_{RE}$$

$$v_{BR\,x} = 0,\ v_{BR\,y} = +10.0\,\mathrm{km/h}$$

$$v_{REx} = +5.00\,\mathrm{km/h},\ v_{REy} = 0$$

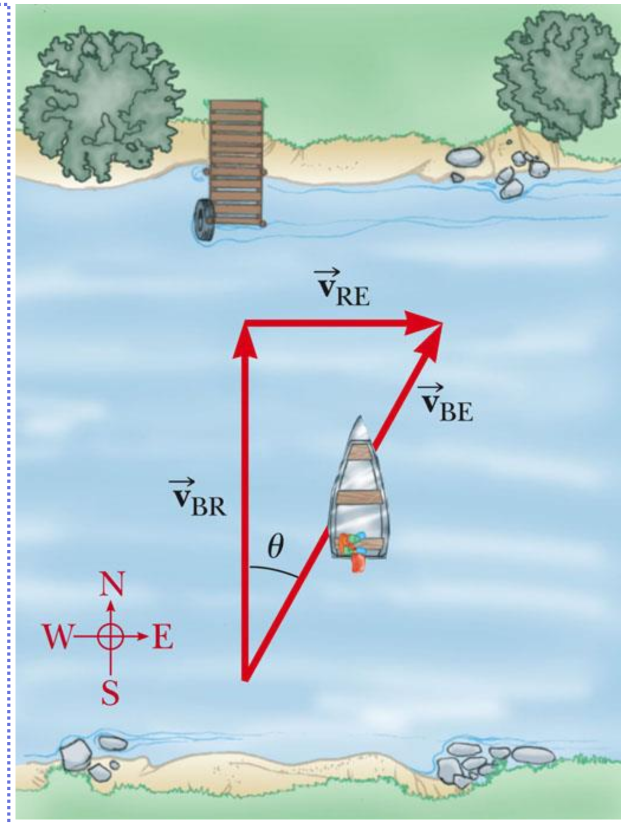
$$\rightarrow\ \vec{v}_{BE} = \vec{v}_{BR} + \vec{v}_{RE} = \left(v_{BRx} + v_{REy}\right)\hat{i} + \left(v_{BRy} + v_{REy}\right)\hat{j}$$

$$v_{BEx} = v_{BRx} + v_{REx} = 0 + \left(+5.00\,\mathrm{km/h}\right) = 5.00\,\mathrm{km/h}$$

$$v_{REy} = v_{BRy} + v_{REy} = +10.0\,\mathrm{km/h} + 0 = 10.0\,\mathrm{km/h}$$

$$\left|\vec{v}_{BE}\right| = \sqrt{\left(v_{BEx}\right)^2 + \left(v_{BEy}\right)^2} = \sqrt{\left(5.00\,\mathrm{km/h}\right)^2 + \left(10.0\,\mathrm{km/h}\right)^2} = 11.2\,\mathrm{km/h}$$

$$\tan\theta = \frac{v_{BEx}}{v_{BEy}}\ \rightarrow\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{BEx}}{v_{BEy}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00\,\mathrm{km/h}}{10.0\,\mathrm{km/h}}\right) = 26.6^\circ$$



배가 수면에 대하여 같은 속력 10.0 km/h 로 그림과 같이 정북쪽으로 강을 건너자면 뱃머리는 어느 방향으로 돌려야 하는가? 또 강둑에 서 있는 관측자에 대한 배의 속력은 얼마인가?
이때 강물은 동쪽을 향하여 5.0 km/h 로 흐르고 있다.

풀이 $\vec{v}_{BR} = 10.0\,\mathrm{km/h}$: **물에 대한 배의 속도**

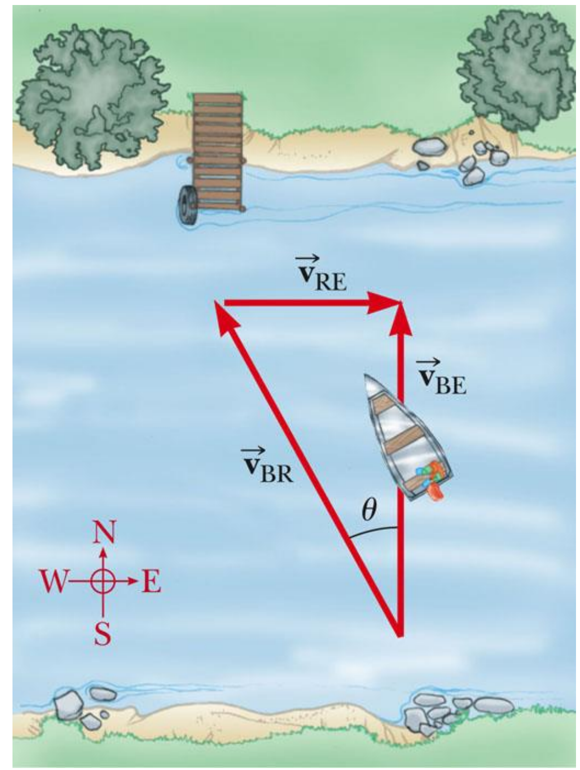
$\vec{v}_{RE} = 5.00\,\mathrm{km/h}$: **지면에 대한 강물의 속도**

$$\vec{v}_{BR} = \vec{v}_{BE} - \vec{v}_{RE}$$

Vector	x 성분(Km/h)	y 성분(Km/h)
$\vec{v}_{BR}$	$-(10.0km/h)\sin\theta$	$(10.0km/h)\cos\theta$
$\vec{v}_{BE}$	0	v
$\vec{v}_{RE}$	$5.0km/h$	0

$$|\vec{v}_{BE}| = \sqrt{(v_{BR})^2 - (v_{RE})^2} = \sqrt{(10.0\,\mathrm{km/h})^2 - (5.0\,\mathrm{km/h})^2} = 8.66\,\mathrm{km/h}$$

$$\tan\theta = \frac{v_{RE}}{v_{BE}} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{RE}}{v_{BRE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0^\circ$$



연습문제

1. 마야족의 왕이나 학교 운동부는 점프를 잘하는 퓨마나 쿠거(산사자) 등의 동물명으로 이름을 짓기도 한다. 쿠거는 45.0°의 각도로 지면을 떠날 때 12.0 ft의 높이를 도약할 수 있다. 이런 도약을 하기 위하여 지면을 떠날 때 SI 단위로 얼마의 속력을 갖는가?(P83.10번)

연습문제

2. 어떤 행성에서 우주인이 처음 속력 3.00 m/s로 점프할 때, 최대 수평 거리가 15.0 m이다. 이 행성에서의 자유 낙하 가속도는 얼마인가? (P83.11번)

연습문제

3. 동네 술집에서 고객이 리필을 요청하며 빈 맥주 머그잔을 카운터로 미끄러 뜨린다. 카운터의 높이는 1.22 m이다. 머그잔은 카운터 끝에서 1.40 m를 날아가 바닥에 떨어진다.

(a) 카운터에서 떨어질 때 머그잔의 속도를 구하라.

(b) 마루에 부딪치기 바로 직전 머그잔의 속도의 방향을 구하라.(P83.12번)

연습문제

4. 포물체의 수평 도달 거리가 최대 높이의 세 배가 되도록 하려면 발사각은 얼마가 되어야 하는가?(P83.14번)

연습문제

5. 산비탈에서 눈사태를 유도하기 위하여 대포를 처음 속력 300 m/s, 수평 위 55.0° 각도로 발포한다. 발포 후 42.0 s만에 포탄이 산 쪽에서 폭발한다. 폭발한 곳의 x와 y 좌표는 발포점에 대하여 상대적으로 얼마인가?(P83.15번)

연습문제

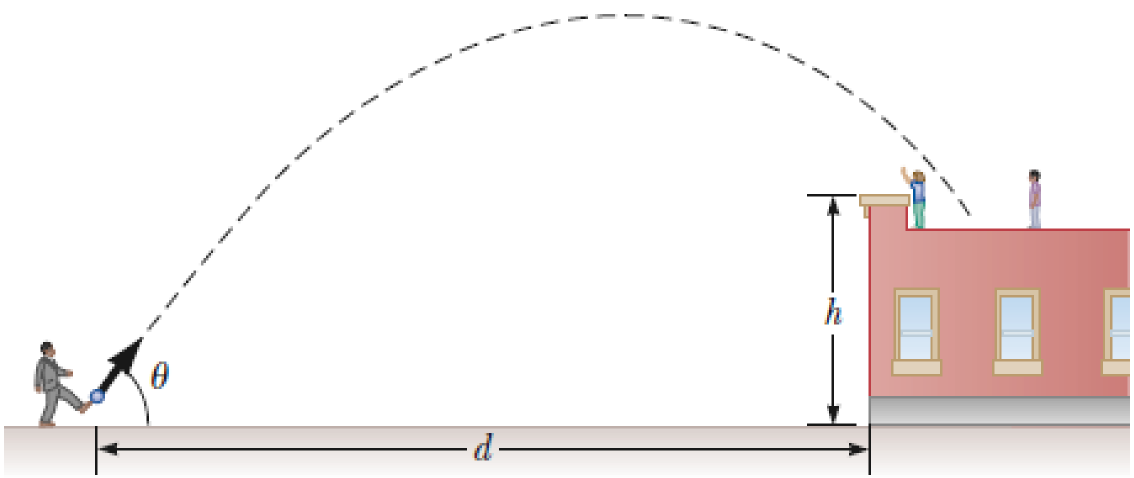
6. 포물체가 최대 높이에 도달할 때의 속력은 공이 최대 높이의 절반일 때 속력의 절반이다. 포물체의 처음 발사 각도는 얼마인가?(P83.17번)

연습문제

7. 건물의 위층 창문을 통하여 수평에서 아래 방향으로 20.0° 의 각도, 8.00 m/s로 공을 던진다. 공은 3.00 s 후에 지면에 도달한다.
(a) 공이 지면에 도달한 지점과 건물 바닥과의 수평 거리를 구하라.
(b) 공이 출발한 높이를 구하라.
(c) 공이 출발한 높이에서 10.0 m 아래에 도달하는 시간을 구하라.(P83.18번)

연습문제

8. 아래에 있는 도로로부터 높이 6.00 m인 학교 건물 평평한 옥상에 놀이터가 있다(그림). 건물 벽의 높이는 h = 7.00 m이고 놀이터 주변에는 1 m 높이로 난간을 세워 놓았다. 공이 거리로 떨어져 밑에 있던 보행자가 건물로 부터 거리 d = 24.0 m만큼 떨어진 곳에서 각도 θ = 53.0°로 공을 차 돌려주었다. 공이 벽 바로 위 위치에 도달하는 데 2.20 s가 걸렸다.
(a) 찬 공의 속력을 구하라.
(b) 공이 벽 위를 지날 때의 연직 높이를 구하라.
(c) 공이 지붕에 떨어진 곳부터 벽까지의 수평 거리를 구하라.(P84.21)



연습문제

9. 다이빙 대에 서 있는 소년이 물을 향하여 돌을 던진다. 돌이 출발한 높이는 수면 위 2.50 m 이고, 처음 속도는 수평에서 위쪽 60.0°인 방향으로 4.00 m/s이다. 돌이 수면에 떨어지면, 돌의 속력은 수면에 도달하기 직전에 비하여 반으로 급격히 줄고, 그 후 물속에서는 속력이 일정하게 유지되어 운동한다. 수영장의 깊이가 3.00 m일 때, 돌을 던진 순간부터 수영장 바닥에 도달하기까지 걸리는 시간은 얼마인가?(P84.26)

연습문제

10. 한 학생이 벼랑 끝에 서서 수평 방향으로 돌을 v_i = 18.0 m/s의 속력으로 던진다. 벼랑은 그림과 같이 물표면으로 부터 h = 50.0 m 위에 있다.
(a) 돌의 처음 위치의 좌표를 구하라.
(b) 돌의 처음 속도의 성분을 구하라.
(c) 돌의 연직 운동에 대한 적절한 분석 모형은 무엇인가?
(d) 돌의 수평 운동에 대한 적절한 분석 모형은 무엇인가?
(e) 돌 속도의 x 성분과 y 성분에 대한 식을 시간으로 나타내라.
(f) 돌의 위치에 대한 식을 시간으로 나타내라.
(g) 돌이 벼랑 끝을 떠나서 그 아래 물에 도달하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?
(h) 돌이 수면에 충돌할 때의 속력과 각도는 얼마인가?(P84.25)