3.8절, 3.5절 ~ 3.7절

2주2강. 확률2

3.8. 확률의 몇 가지 예

경우의 수에 의한 확률계산원리

- 경우의 수에 의한 실험에 있어서 특정조건을 만족하는 사건이 일어날 확률은 다음과 같이 구한다.

$$\text{확률} = \frac{\text{주어진 조건을 만족하는 경우의 수}}{\text{모든 가능한 경우의 수}}$$

- **예 3-24** 1년을 365일이라고 할 때 한 모임에 참석한 6명의 생일이 모두 다를 확률은 얼마인가?

- (sol) 6명의 생일이 모두 다른 경우의 수

$$\binom{365}{6} \times 6! = {}_{365}P_6$$

$$P = \frac{{}_{365}P_6}{365^6}$$

예 3-25 8개의 잔이 있는데 이 중에서 4개의 잔에는 펩시콜라가, 그리고 나머지 4개의 잔에는 코카콜라가 들어 있다. 시음자가 이 중에서 코카콜라로 판단되는 4개의 잔을 선택하는 경우 다음을 계산하라.

(a) 모든 가능한 경우의 수는 얼마인가?

(sol) 4 개씩 동일한 8 개의 문자(CCCCPPPP)를 일렬로 세우는 경우의 수와 같다.

$$\frac{8!}{4!\,4!} = \binom{8}{4}$$

(b) 시음자가 임의로 선택하였을 때 최소한 3개의 코카콜라를 정확하게 선택하였을 확률은 얼마인가?

(sol) 선택된 4개의 잔이 (3개의 코카콜라 + 1개의 펩시콜라) 또는 (4개 모두 코카콜라)인 경우의 확률이다.

$$P = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{4}{1} + \binom{4}{4}}{\binom{8}{4}}$$

예 3-26 10명의 노동자와 5명의 사용자가 있는 회사에서 4명으로 구성된 위원회를 만들 때 위원회가 다음과 같이 구성될 확률을 구하라.

(a) 노동자와 사용자 각각 2명씩인 경우

(sol) 노동자와 사용자가 각각 2명씩 선발되는 경우의 수 $\binom{10}{2} \times \binom{5}{2}$

확률은 다음과 같다. $P = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{5}{2}}{\binom{15}{4}}$

(b) 각 집단에서 최소한 1명이 참석하는 경우

(sol) 각 집단에서 최소한 1명이 참석하는 경우의 확률
= 1-(위원회가 한 집단의 대표로만 구성되는 경우의 확률)

$$P = 1 - \left(\frac{\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}} + \frac{\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} \right) = 1 - \frac{\binom{10}{4} + \binom{5}{4}}{\binom{15}{4}}$$

(c) 노동자 대표와 사용자 대표가 반드시 위원회에 포함되는 경우

(sol) $P = \frac{\binom{13}{2} \times \binom{2}{2}}{\binom{15}{4}}$

3.5. 조건부 확률과 독립성

- 학생 100명 중 임의로 한 명을 선택할 때 한 학생이 안경을 끼고 있을 확률은 $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$이다. 그러나 선택된 학생이 남학생이라는 사실을 사전에 알고 있다면 이 학생이 안경을 끼고 있을 확률은 $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$이라고 하는 것이 타당할 것이다.

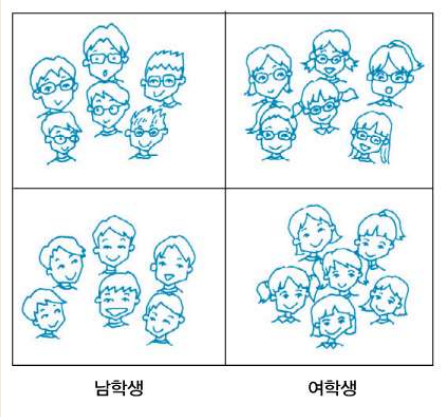
- **조건부 확률**이란 이와 같이 실험에서 **사전정보를 확률계산에 이용하는 방법**이다.

⇒ 마케팅 분석에서 많은 사용이 이루어진다.

-> A 구매고객중 B 구매할 확률(교차판매)

표 3-1 학생 100명의 분포

성별 \ 안경	착용	미착용	계
남	20	40	60
여	30	10	40
계	50	50	100

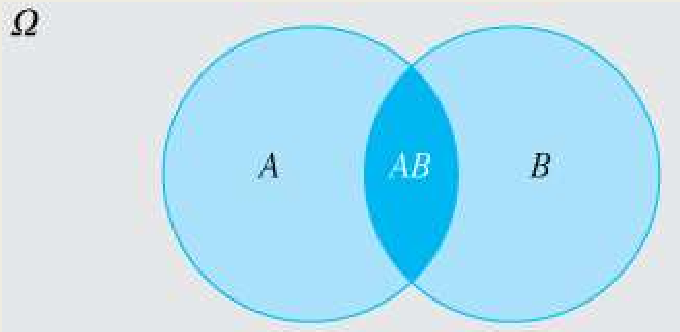


조건부 확률

- 사건 A가 주어졌을 때 사건 B의 조건부 확률은 $P(A) \neq 0$이라는 전제하에서 다음과 같이 정의한다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 사건 A와 B를 벤 다이어그램으로 그리면 다음과 같다.



- 즉, 조건부 확률은사건 A의 크기에 대한 곱사건 AB의 크기의 비율이라고 할 수 있다. $P(B|A)$는 실험에서 나타나는 결과를 A에 한정할 때 사건 B가 나타날 가능성을 측정하는 것이다.

예3-15

- M : 남학생 집합, F : 여학생 집합, G : 안경을 낀 학생집합 이라고 정의한다. 한 학생을 선택하였을 때 그 학생이 안경을 끼고 있다는 조건하에서 그 학생이 여학생일 확률과 그 학생이 남학생일 확률을 구하여라.

(sol) 여학생일 확률

$$P(F|G) = \frac{P(GF)}{P(G)} = \frac{30/100}{50/100} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

남학생일 확률

$$P(M|G) = \frac{P(MG)}{P(G)} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

표 3-1 학생 100명의 분포

성별 \ 안경	착용	미착용	계
남	20	40	60
여	30	10	40
계	50	50	100

확률적 독립성 : 두 사건에 발생이 서로 영향을 미치지 않는다.

- 두 사건 A, B가 다음 조건 중 하나를 만족하면 서로 확률적으로 독립이라고 한다.

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
2. $P(A|B) = P(A)$
3. $P(B|A) = P(B)$

서로 배반과 서로 독립

▶ 서로 배반

두 사건 A, B가 서로 배반이라는 조건은 $AB = \emptyset$을 의미하므로 항상 $P(AB) = 0$ 이다.

▶ 서로 독립

두 사건 A, B가 독립이라는 조건은 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$이다.

▶ 따라서 $P(A)$ 또는 $P(B)$ 가 0이 아닌 한, 두 사건이 상호배반이라는 조건과 두 사건이 상호독립이라는 조건은 동시에 만족할 수 없다.

예3-16

주사위 2개를 던지는 실험에서 사건 A, B, C를 다음과 같이 정의한다.

$A =$ 첫 주사위의 눈금이 1인 사건

$B =$ 두 번째 주사위의 눈금이 2인 사건

$C =$ 두 주사위 눈금의 합이 4인 사건

사건 A, B, C가 서로 독립인가?

(sol) $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$, $B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$,

$C = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$이므로,

$AB = \{(1,2)\}$, $AC = \{(1,3)\}$, $BC = \{(2,2)\}$이고 각 사건의 확률은 다음과 같다.

$P(A) = P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $\quad P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{36}$

$P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P(A)P(B)$: 사건 A와 B는 서로 독립

$P(BC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{72} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} = P(B)P(C)$: 사건 B와 C는 서로 독립이 아니다.

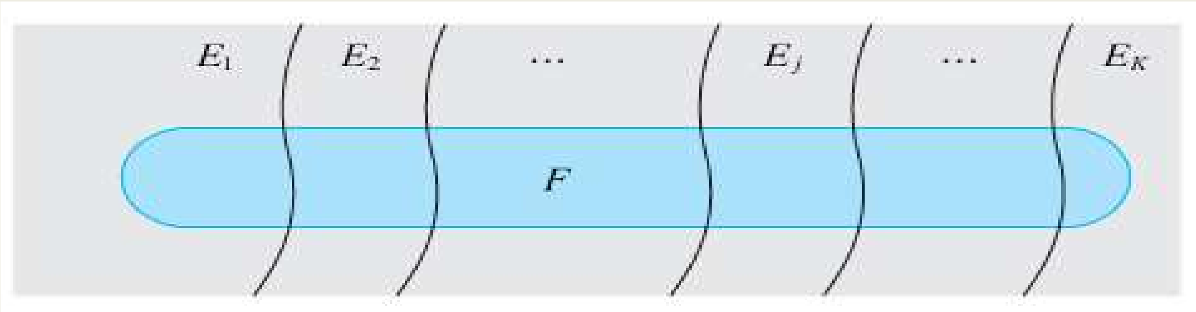
3.6 베이즈 정리

베이즈 정리 (Bayes' Theorem)

- 표본공간 Ω가 k개의 사건 열 $E_1, E_2, \ldots, E_k$에 의하여 분할(partition)된다고 한다. 다른 사건 F가 일어났을 때 이 사건이 E_j에서 일어날 확률은 다음과 같이 계산한다.

$$P(E_j|F) = \frac{P(FE_j)}{P(F)} = \frac{P(FE_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(FE_i)} = \frac{P(F|E_j)P(E_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(F|E_i)P(E_i)}$$

- 여기에서 분할(partition)이란 $E_1, E_2, \ldots, E_k$가 상호배반이며, $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k = \Omega$ 임을 의미한다.



예3-17

- 결핵에 감염된 사람의 비율 : 10%, 결핵에 감염되지 않은 사람의 비율 : 90%
- 결핵에 감염된 사람 중 투베르클린 반응검사 결과가 양성(+)인 경우 : 95%
- 결핵에 감염되지 않음 사람 중 쿠베르클린 반응검사 결과가 양성인 경우 : 10%
- 한 사람에게 투베르클린 반응검사를 실시한 결과 양성반응이 나타났다고 할 때, 이 사람이 실제로 결핵에 감염되었을 확률은?
- (sol) 결핵에 감염된 사람의 집단 : E

$$P(E) = 0.1, \qquad P(E^C) = 0.9$$

$$P(+ \mid E) = 0.95, P(+ \mid E^C) = 0.1$$

$$P(E \mid +) = \frac{P(E+)}{P(+)} = \frac{P(E+)}{P(E+) + P(E^C+)} = \frac{P(+ \mid E)P(E)}{P(+ \mid E)P(E) + P(+ \mid E^C)P(E^C)}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.1}{0.95 \times 0.1 + 0.1 \times 0.9} = \frac{0.095}{0.185} = 0.51$$

3.7 복원추출법과 비복원추출법

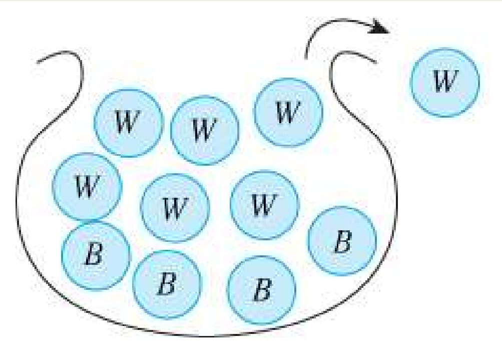
복원추출법과 비복원추출법

▶ 복원 추출법 (sampling with replacement)

표본을 한 번에 하나씩 추출할 때 한 번 추출된 원소를 다음 표본 추출대상에 포함시키는 방법을 복원추출법이라 한다.

▶ 비복원 추출법 (sampling without replacement)

한 번 추출된 원소는 다음 표본추출 대상에서 제외시키는 방법을 비복원 추출법이라고 한다.



추출방법에 따른 확률 계산

- 흰 공(W) 6개와 검은 공(B) 4개가 들어 있는 상자에서 공을 계속하여 2개를 꺼낼 때 두 개의 공이 모두 흰 공일 확률을 추출방법에 따라 다음과 같이 구한다.

▶ 복원 추출법

처음 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$이고, 복원추출이므로 두번 째 꺼낸 공이 흰 공일 확률도 $\frac{3}{5}$이다.

따라서 처음 두 공이 모두 흰 공일 확률은 $P\left(1^{st}=W,2^{nd}=W\right)=P(1^{st}=W)\cdot P\left(2^{nd}=W\right)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$ 이다.

▶ 비복원 추출법

처음에 꺼낸 공이 흰 공이라는 전제하에서 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $P\left(2^{nd}=W\mid 1^{st}=W\right)=\frac{5}{9}$이고, 처음 꺼낸 공이 검은 공일 때 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $P\left(2^{nd}=W\mid 1^{st}=B\right)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이다. 따라서 두 공 모두 흰 공일 확률은 $P\left(1^{st}=W,2^{nd}=W\right)=P\left(2^{nd}=W\mid 1^{st}=W\right)P(1^{st}=W)=\frac{5}{9}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}$이다.

독립시행의 확률

- 독립시행 : 동일한 시행을 반복하는 경우에 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립이면 이와 같은 시행을 **독립시행**이라 한다.

- 독립시행의 확률 : 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 $p\ (0 < p < 1)$일 때, 이 시행을 n회 반복하는 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 다음과 같다. (단, $r = 0, 1, 2, \cdots, n$)

$$ {}_{n}C_{r}\, p^{r}(1-p)^{n-r} $$

예) 한 개의 주사위를 10번 던질 때, 10번 중 6번 3의 배수의 눈이 나올 확률을 구하여라.
풀이)

$$ {}_{10}C_{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{4} $$

끝~~ ♥♥