3장. 벡터 (Vectors)

3.1 좌표계

3.2 벡터양과 스칼라양

3.3 벡터의 성질

3.4 벡터의 성분과 단위 벡터

3.1 좌표계
(Coordinate Systems)

공간에서 어쩐 점의 위치를 나타내기 위해 사용되는 방법

가장 많이 사용되는 방식은

- 직각좌표계(Cartesian)
- 극좌표(Polar)

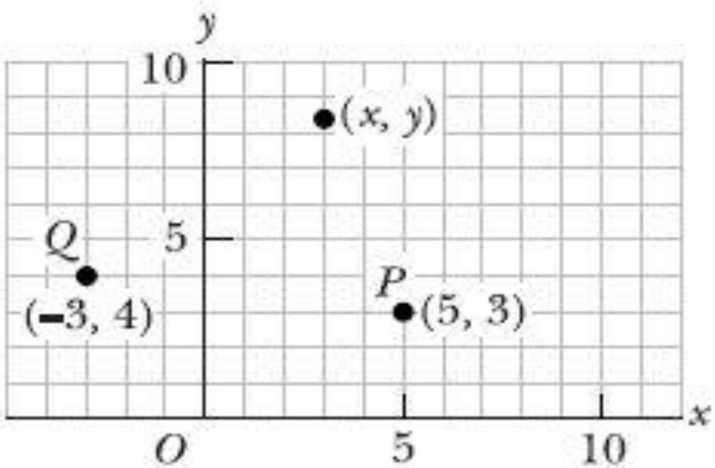
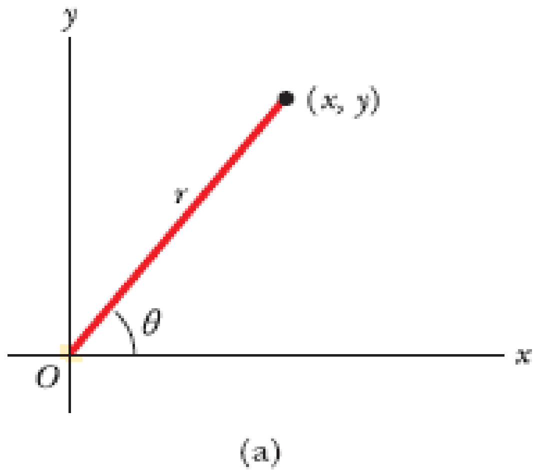
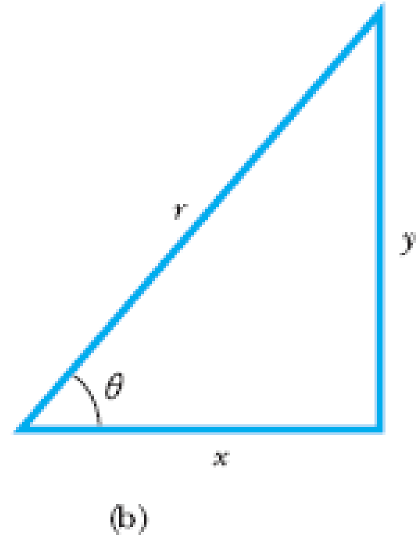


그림 3.1 직교 좌표계에서 점들의 위치 표현법. 모든 점은 좌표 (x, y)로 표시된다.

직교 좌표계: 평면의 한 점을 (x, y)로 표시

평면 극좌표계: 평면의 한 점을 (r, θ)로 표시





$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

예제 3. 1 극좌표

그림 3.3과 같이 xy 평면상의 한 점의 직각 좌표가 (x, y)=(-3.50, -2.50)m 이다. 이 점을 극좌표로 표현하라.

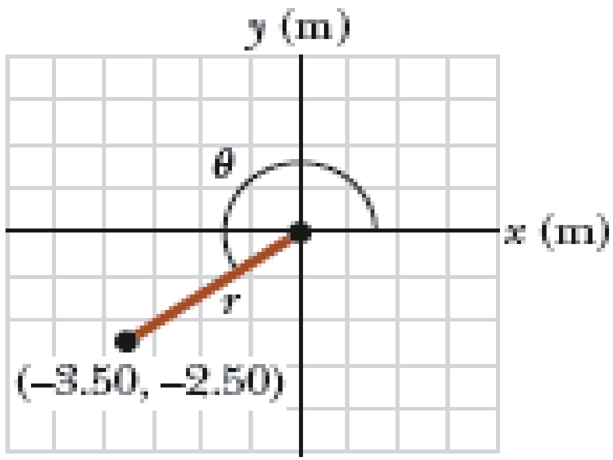


그림 3.3 (예제 3.1) 직각 좌표로 주어질 때 극좌표를 구하는 법

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\ \mathrm{m})^2 + (-2.50\ \mathrm{m})^2} = 4.30\ \mathrm{m}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\ \mathrm{m}}{-3.50\ \mathrm{m}} = 0.714$$

$$\theta = 216°$$

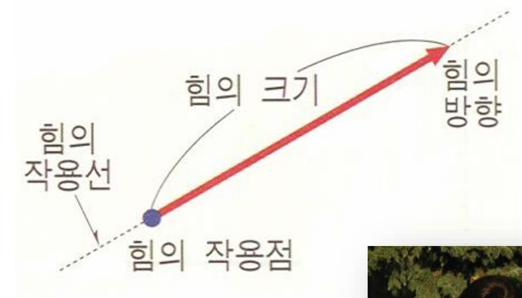
3.2 벡터양과 스칼라양

(Vector and Scalar Quantities)

벡터량(vector quantity)

- 크기와 방향을 모두 갖는 물리량
- 예: 변위, 속도, 가속도, 힘, 운동량, 충격량...
- 표현방법: 문자 위에 화살표를 표시하여 나타낸다. $\left(\vec{A}\right)$
  - · 화살표의 방향 : 물리량의 방향
  - · 화살표의 크기 : 물리량의 크기
- 벡터의 3요소: 작용점, 크기, 방향

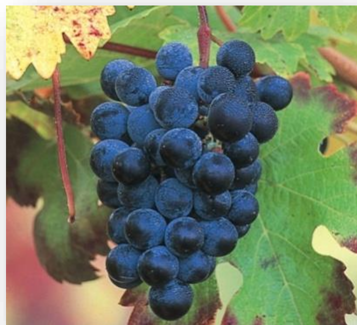
벡터량 표현의 예) 힘



스칼라량(scalar quantity)

- 방향성이 없는 하나의 단순한 수치만으로 나타내는 물리량
- 예: 이동 거리, 속력, 시간간격, 질량, 일, 에너지, 온도, 부피...
- 표현방법: 크기와 물리량에 맞는 단위로 나타낸다.

☞ 크기, 부호, 단위는 가질 수 있으나, 공간에서의 방향은 갖지 않는다.

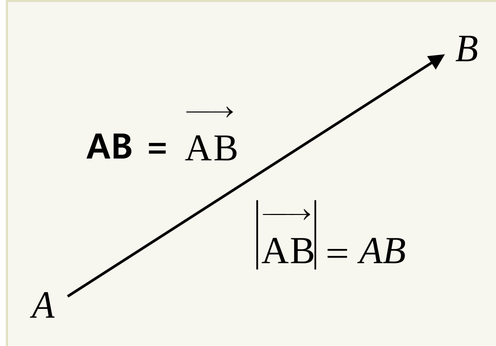


3.3 벡터의 성질

(Some Properties of Vectors)

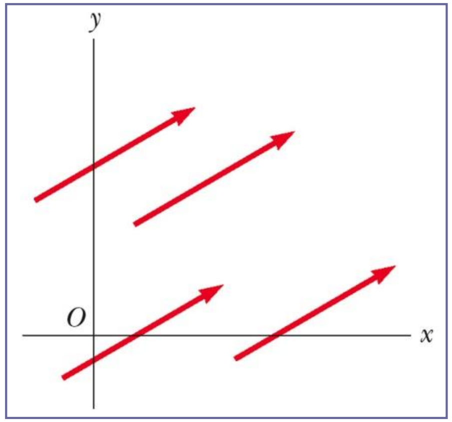
① 벡터의 표현법

- 벡터량을 표시할 때는 글자 위에 화살표로 나타내거나 굵은 글씨체로 나타낸다.



② 두 벡터의 동등성

- 두 벡터 $\vec{\mathrm{A}}$와 $\vec{\mathrm{B}}$는 크기와 방향이 같으면, '두 벡터는 같다'고 정의한다.
- 벡터의 특성에 영향을 주지 않고 평행 이동시킬 수 있다.

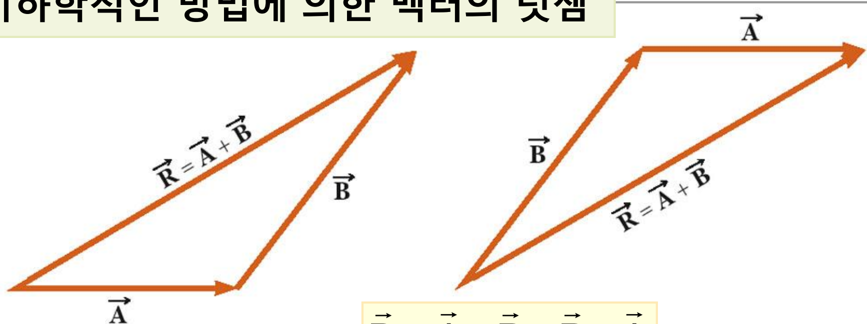


☞ 네 개의 벡터는 같은 길이와 같은 방향을 향하므로 같다.

③ 벡터의 덧셈

- 기하학적 방법과 대수적인 방법
- 벡터의 평행 이동을 이용하여 처음 벡터의 출발점과 마지막 벡터의 끝을 향하도록 그린다.

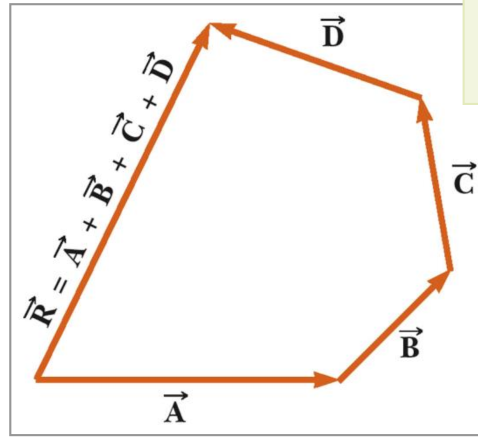
☞ 기하학적인 방법에 의한 벡터의 덧셈



$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

☞ 벡터의 덧셈은 교환 법칙이 성립

☞ 평행사변형법에 의한 벡터의 덧셈



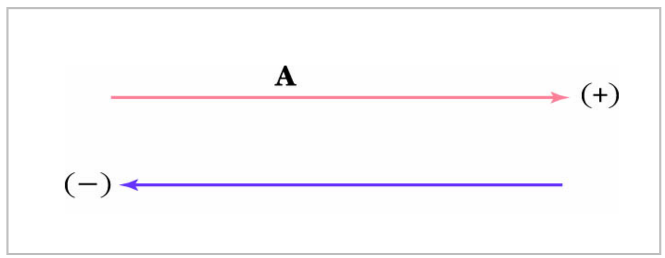
④ 음의 벡터와 영 벡터(zero vector)

$\vec{A}+0=\vec{A}$

$\vec{A}+\left(-\vec{A}\right)=0$

0 : 영(zero) 벡터

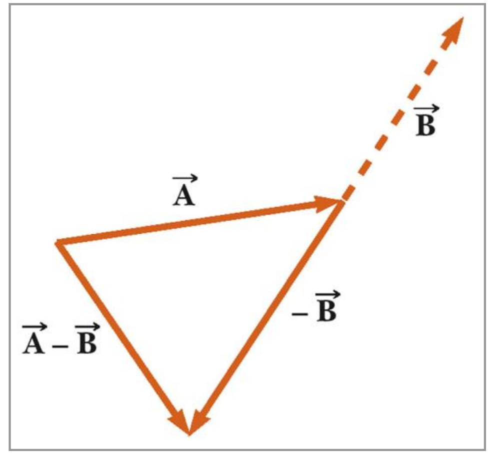
$-\vec{A}$: 벡터 $\vec{A}$ 와 크기는 같고 방향은 반대인 벡터



⑤ 벡터의 뺄셈

- 벡터 연산 $\vec{A}-\vec{B}$ 는 벡터 $\vec{A}$ 에 벡터 $-\vec{B}$ 를 더한 것

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$



⑥ 스칼라와 벡터의 곱셈 및 나눗셈

- 벡터에 스칼라를 곱하거나 나누면, 벡터가 된다.

예) 벡터 $\vec{A}$ 에 3을 곱하면, $3\vec{A}$ 라 쓰며,

그 벡터의 크기는 원래 벡터 $\vec{A}$ 의 3배이고, 방향은 같다.

벡터 $\vec{A}$ 에 -3을 곱하면, $-3\vec{A}$ 라 쓰며,

그 벡터의 크기는 원래 벡터 $\vec{A}$ 의 3배이고, 방향은 반대이다.

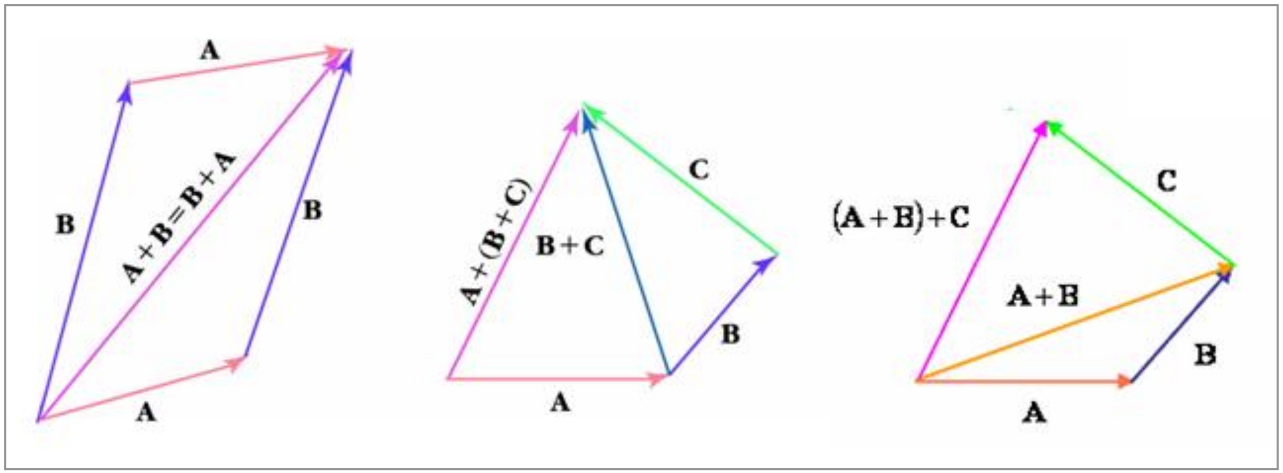
$$m A = B$$

(예 A : A : 2 A)

⑦ 교환법칙과 결합법칙

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \quad \text{: 교환법칙}$$

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right) \quad \text{: 결합법칙}$$



예제 3. 2 휴가여행

그림 3.11a에서 보는 것처럼 북쪽으로 20.0 km 간 후에, 다시 북서쪽 60.0°의 방향으로 35.0 km를 더 갔다. 자동차의 전체 변위의 크기와 방향을 구하라.

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

θ=180°−60°=120°이므로

북쪽으로부터 측정한 R의 방향을 구하기 위하여 사인 법칙을 이용하면

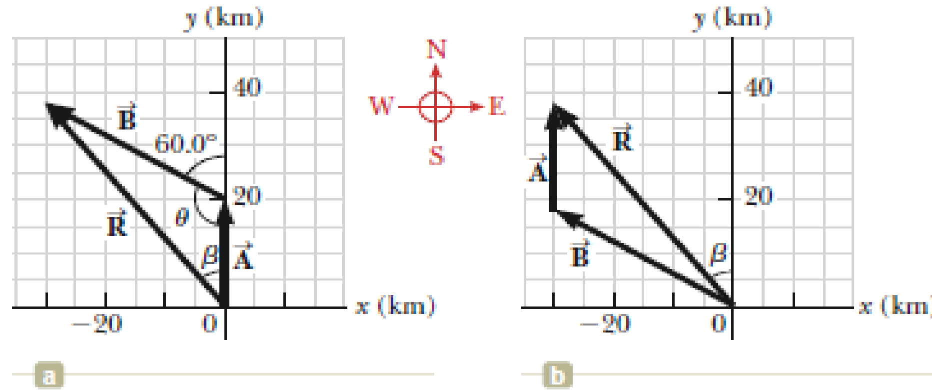


그림 3.11 (예제 3.2) (a) 합 벡터의 변위 $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$를 나타내는 그래프 방법 (b) 순서를 바꾸어 ($\vec{B} + \vec{A}$)로 덧셈을 하여도 동일한 벡터 $\vec{R}$를 얻는다.

$$R = \sqrt{(20.0)^2 + (35.0)^2 - 2(20.0)(35.0)\cos 120^\circ}\ \text{km}$$

$$= 48.2\,\text{km}$$

$$\frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\theta}{R}$$

$$\sin\beta = \frac{B}{R}\sin\theta = \frac{35.0\,\text{km}}{48.2\,\text{km}}\sin 120^\circ = 0.629$$

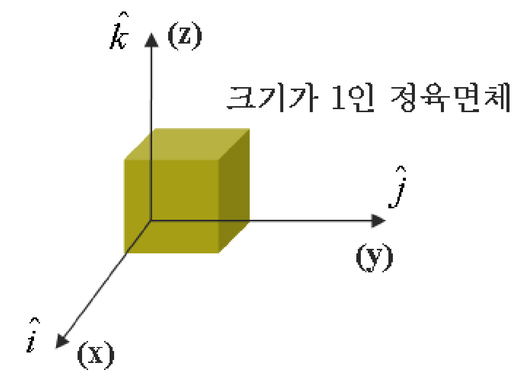
$$\beta = 38.9^\circ$$

3.4 벡터의 성분과 단위 벡터

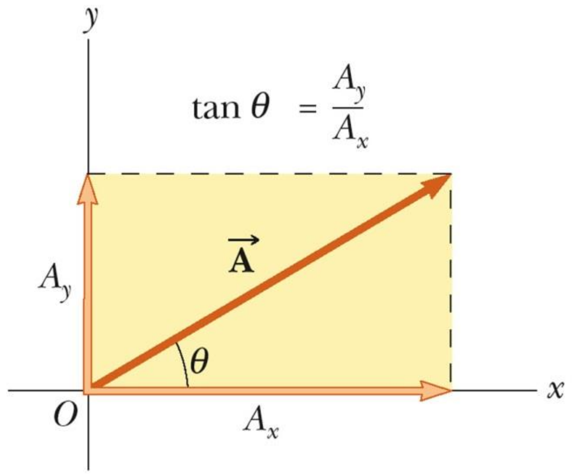
(Components of a Vector and Unit Vectors)

*** 단위 벡터(unit vector)**

- 크기가 1이고 *x, y, z* 방향을 나타내는 $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ 벡터
- 기본벡터(fundamental vector)이라고도 한다.



*** 벡터의 성분**



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} = (A\cos\theta)\hat{i} + (A\sin\theta)\hat{j}$$

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A},\ \sin\theta = \frac{A_y}{A}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2}} = \sqrt{(A\cos\theta)^2 + (A\sin\theta)^2} = A$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

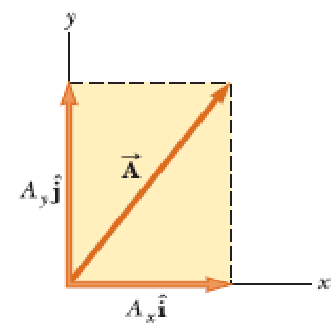
*** 벡터의 대수적 덧셈**

벡터를 좌표 성분 벡터의 합으로 표현 가능!

$$\mathbf{A}_x = A_x\hat{\mathbf{i}} \quad (A_x = A\cos\theta)$$

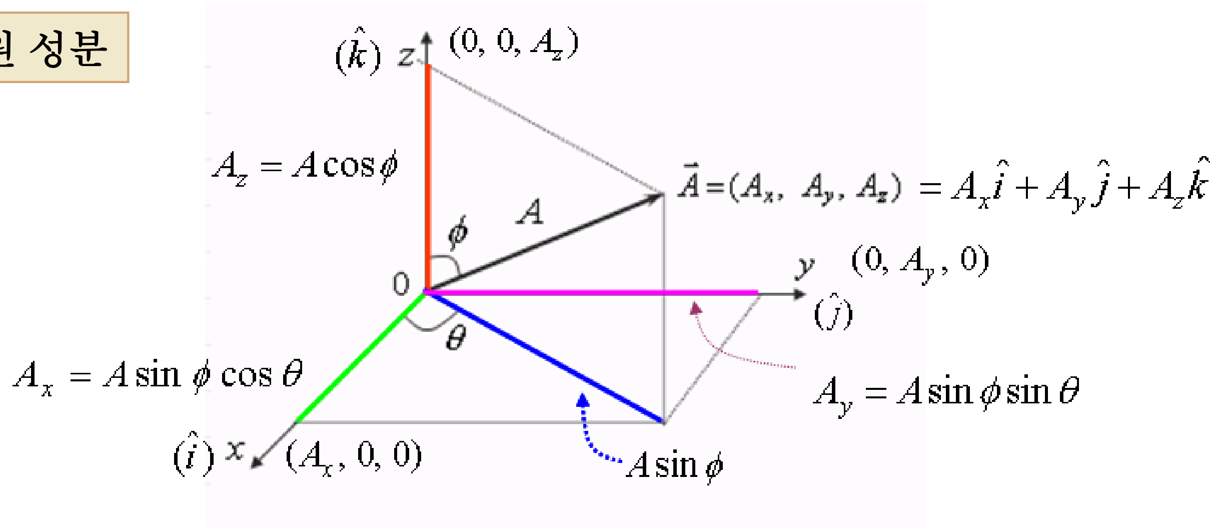
$$\mathbf{A}_y = A_y\hat{\mathbf{j}} \quad (A_y = A\sin\theta)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$



(b)

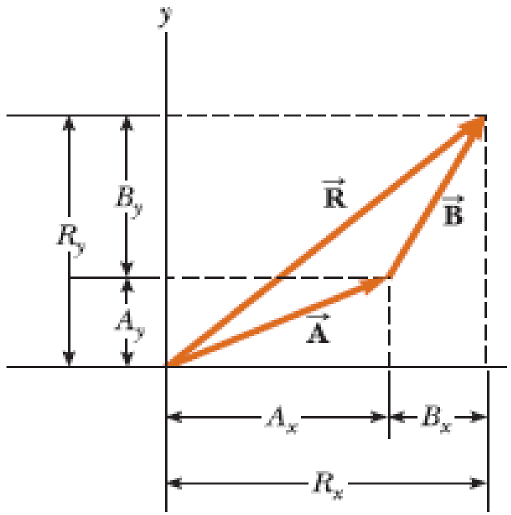
* 벡터의 3차원 성분



$$
\begin{aligned}
A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2} &= A^2\sin^2\phi\cos^2\theta + A^2\sin^2\phi\sin^2\theta + A^2\cos^2\phi \\
&= A^2\sin^2\phi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + A^2\cos^2\phi \\
&= A^2\sin^2\phi + A^2\cos^2\phi = A^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad |\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}
$$

3.4 벡터의 성분과 단위 벡터



$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= (\mathbf{A_x} + \mathbf{A_y}) + (\mathbf{B_x} + \mathbf{B_y})$$ 성분으로 분해

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$ 성분으로 표시

$$= (A_x\hat{\mathbf{i}} + B_x\hat{\mathbf{i}}) + (A_y\hat{\mathbf{j}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$ 교환, 결합법칙

$$= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}}$$ 덧셈의 정의

3차원으로 표현하는 경우,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{A_x} + \mathbf{A_y} + \mathbf{A_z}) + (\mathbf{B_x} + \mathbf{B_y} + \mathbf{B_z})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y - B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z - B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

예제 3.4 도보 여행

한 도보 여행자가 첫째 날에 베이스 캠프의 동남쪽 45.0° 방향으로 25.0km 의 도보 여행을 했다. 둘째 날에는 동북쪽 60.0° 방향으로 40.0km 를 걸어서 산림 감시원의 망루를 발견하였다.

(a) 첫째 날과 둘째 날에 도보 여행자의 변위의 성분을 구하라.

풀이

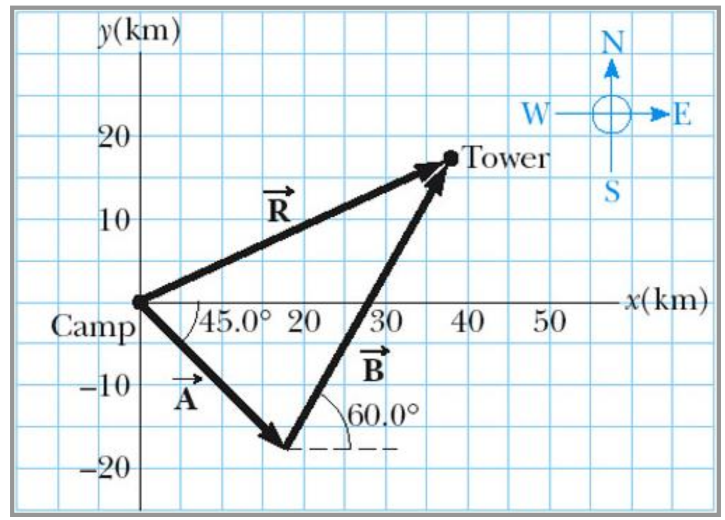
$$|\vec{A}| = A = 25.0\text{km},\ |\vec{B}| = B = 40.0\text{km}$$

$$\rightarrow\ A_x = A\cos\theta = (25.0\text{km})\times\cos(-45.0^\circ) = 17.7\text{km}$$

$$A_y = A\sin\theta = (25.0\text{km})\times\sin(-45.0^\circ) = -17.7\text{km}$$

$$B_x = B\cos\phi = (40.0\text{km})\times\cos(60.0^\circ) = 20.0\text{km}$$

$$B_y = B\sin\phi = (40.0\text{km})\times\sin(60.0^\circ) = 34.6\text{km}$$



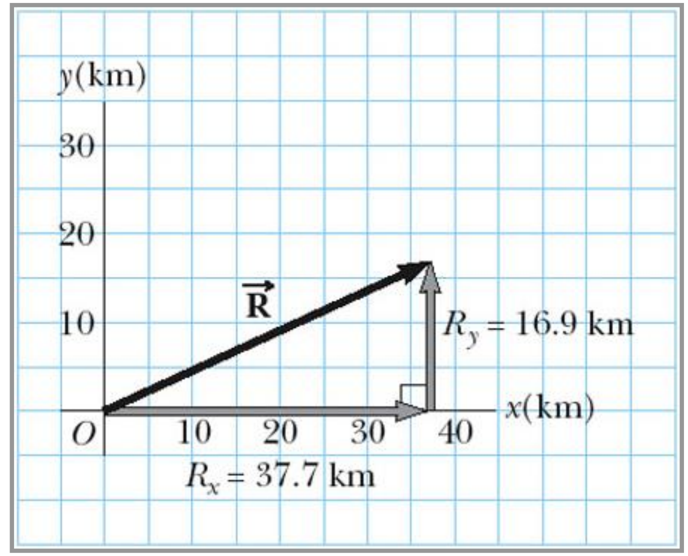
(b) 여행에 대한 도보 여행자의 전체 변위의 성분을 구하라.

풀이

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

$$\rightarrow \quad R_x = A_x + B_x = 17.7\text{km} + 20.0\text{km} = 37.7\text{km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7\text{km} + 34.6\text{km} = 16.9\text{km}$$



(c) 베이스 캠프로부터 변위의 크기와 방향을 구하라.

풀이

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}}$$

$$= \sqrt{(37.7\text{km})^2 + (16.9\text{km})^2} = 41.3\text{km}$$

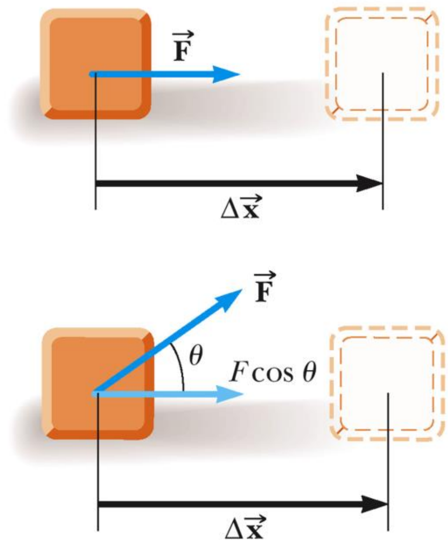
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{16.9\text{km}}{37.7\text{km}}\right) = 24.1^{\circ}$$

☞ 벡터의 곱셈

☞ 스칼라곱(scalar product) = 도트곱(dot product)

- 곱셈의 결과가 스칼라량이다.

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = C}$$



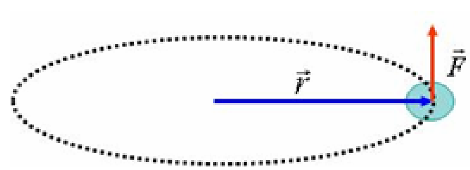
$$\boxed{W = F\Delta x}$$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F\Delta x \cos\theta}$$

☞ 벡터곱(vector product) = 크로스곱(cross product)

- 곱셈의 결과가 벡터량이다.

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}}$$

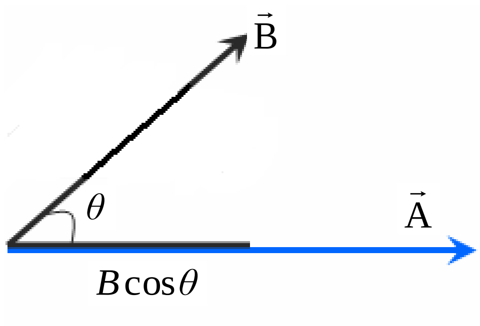


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \;\rightarrow\; |\vec{\tau}| = rF\sin\theta$$

– 회전력의 (+)값은 반시계방향을 의미한다.

– 회전력의 (–)값은 시계방향을 의미한다.

☞ 스칼라곱



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}, \quad \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} + A_x\hat{i}\cdot B_y\hat{j} + A_x\hat{i}\cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{j}\cdot B_x\hat{i} + A_y\hat{j}\cdot B_y\hat{j} + A_y\hat{j}\cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{i} + A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{j} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k} \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

예) 다음 두 벡터 사이의 각을 구하라.

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}, \quad \vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

풀이

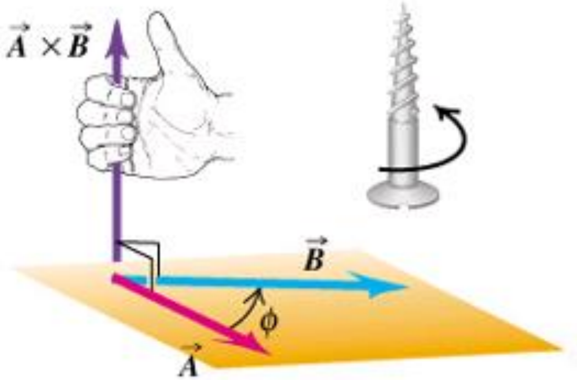
$$A_x = 2,\ A_y = 3,\ A_z = 4,\ B_x = 1,\ B_y = -2,\ B_z = 3$$

$$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

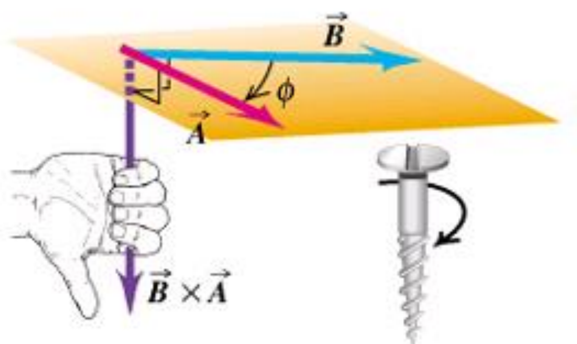
$$B = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{29}\times\sqrt{14}} \quad \rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{14}}\right) \approx 66.6^\circ$$

☞ 벡터곱(1)



(a)



$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$$

$$|\vec{C}|=C=AB\sin\phi$$

$$|\vec{A}|=A,\quad |\vec{B}|=B,\quad |\vec{C}|=C$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

☞ **교환법칙이 성립하지 않는다.**

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{i}\times\hat{i}=0$$
$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} \qquad \hat{j}\times\hat{j}=0$$
$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k},\quad \vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})\\
&=A_x\hat{i}\times B_x\hat{i}+A_x\hat{i}\times B_y\hat{j}+A_x\hat{i}\times B_z\hat{k}\\
&\quad+A_y\hat{j}\times B_x\hat{i}+A_y\hat{j}\times B_y\hat{j}+A_y\hat{j}\times B_z\hat{k}\\
&\quad+A_z\hat{k}\times B_x\hat{i}+A_z\hat{k}\times B_y\hat{j}+A_z\hat{k}\times B_z\hat{k}\\
&=A_xB_y\hat{k}-A_xB_z\hat{j}-A_yB_x\hat{k}+A_yB_z\hat{i}+A_zB_x\hat{j}-A_zB_y\hat{i}\\
&=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}
\end{aligned}$$

☞ 벡터곱(2)

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

(-) (+)

예) 다음 두 벡터의 벡터곱을 구하라.

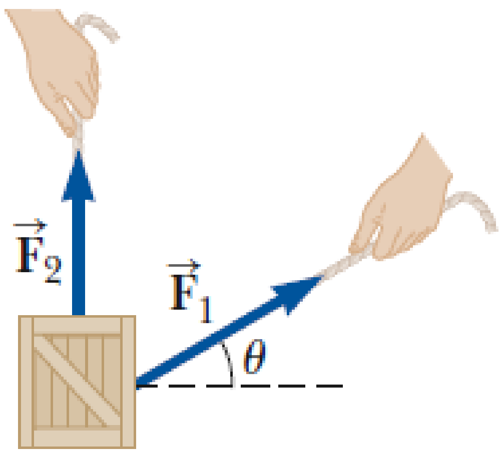
$$\vec{\mathrm{A}} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}, \quad \vec{\mathrm{B}} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

풀이

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = (9+8)\hat{i} - (6-4)\hat{j} + (-4-3)\hat{k} = 17\hat{i} - 2\hat{j} - 7\hat{k}$$

연습문제

1. 그림과 같이 $+x$ 축 방향과 θ = 30.0°의 각도를 이루는 방향으로 크기가 6.00단위인 힘 $\vec{F_1}$ 이 원점에 놓인 물체에 작용한다. $+y$축 방향으로 크기가 5.00단위인 두 번째 힘 $\vec{F_2}$ 도 이 물체에 작용한다. 합력 $\vec{F_1}+\vec{F_2}$의 크기와 방향을 구하라.(P57.10번)



연습문제

2. $\vec{A} = 2.00\hat{i} + 6.00\hat{j}$, $\vec{B} = 3.00\hat{i} - 2.00\hat{j}$ 인 두 벡터가 있다.
   (a) 벡터의 합 $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ 와 차 $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ 를 그림으로 그려라
   (b) $\vec{C}$와 $\vec{D}$를 단위 벡터들로 표현하라 (P58.24번)

연습문제

3. 그림은 두 사람이 고집 센 노새를 끌고 있는 모습을 헬리콥터에서 본 그림이다. 오른쪽에 있는 사람은 크기가 120 N이고 방향이 θ_1 = 60.0°인 힘 $\vec{F_1}$으로 끈다. 왼쪽에 있는 사람은 크기가 80.0 N이고 방향이 θ_2 = 75.0°인 힘 $\vec{F_2}$로 끈다.
(a) 그림에 보인 두 힘과 동등한 단 하나의 힘과
(b) 만약 세 번째 사람이 노새에게 힘을 가해서 노새가 받는 힘의 합이 영이 되도록 하는 힘을 구하라. 힘의 단위는 N 이다.(P58.27번)