4.1절 ~ 4.4절

3주2강. 확률변수와 확률분포2

4.5절

4.5. 두 확률변수의 분포

결합 확률 분포

1. 이산형 확률변수인 경우

- 확률변수 X의 가능한 값이 $x_1, \cdots, x_n$이고, 확률변수 Y의 가능한 값이 $y_1, \cdots, y_m$이라면, (X, Y)의 결합확률분포는 다음과 같이 정의한다.

$$P_r(X = x_i, Y = y_j) = P_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

- 여기에서 함수 $P_r(X = x_i, Y = y_j) = P_{ij}$를 **결합확률질량함수(joint probability mass function)**라고 정의하며, 모든 (i, j)에 대해 다음이 성립한다.

$$P_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$$

결합 확률 분포

2. 연속형 확률변수인 경우

- 확률변수 X, Y의 **결합확률밀도함수(joint probability density function)**를 $f(x, y)$라고 정의할 때, 모든 (x, y)에 대해 다음이 성립한다.

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

예4-10

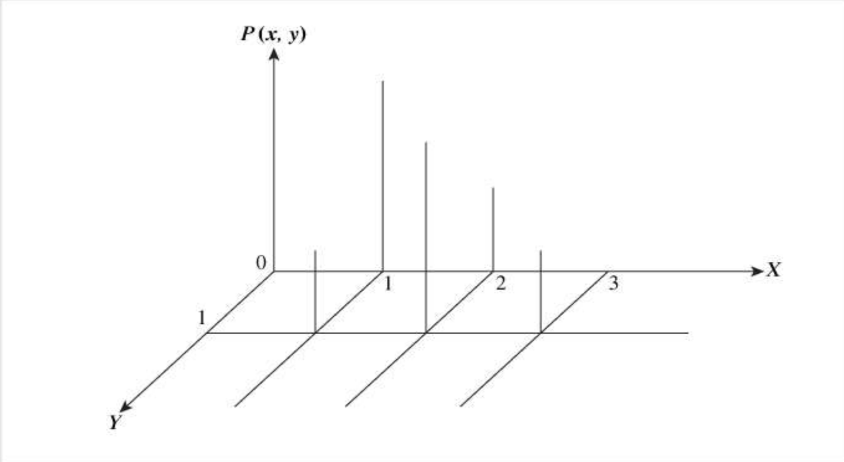
- 동전 3개를 던지는 실험에서 확률변수 X를 'X = 앞면의 수'라고 정의하고, 확률변수 Y를 첫 번째 동전이 앞면인 경우 $Y = 1$, 첫번째 동전이 뒷면인 경우 $Y = 0$이라고 정의한다.
- X와 Y의 결합확률분포를 표와 그래프는 나타내면 다음과 같다.

(sol)

(c) (X, Y)의 확률분포

X \ Y	0	1	합
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
합	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

그림 6-8 (X, Y)의 결합확률분포 그림



주변확률분포의 정의

1. 이산형 확률변수

- 확률변수 X의 가능한 값이 $x_1, \cdots, x_n$이고, 확률변수 Y의 가능한 값이 $y_1, \cdots, y_m$이며, X와 Y의 결합확률분포가 $P_r(X = x_i, Y = y_j) = P_{ij},\ (i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, m)$이라고 할 때, X와 Y의 주변확률분포는 각각 다음과 같이 구한다.
- X의 **주변확률분포** :

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = P_{i1} + P_{i2} + \cdots + P_{im}$$

- Y의 **주변확률분포** :

$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} = P_{1j} + P_{2j} + \cdots + P_{nj}$$

결합 확률 분포

2. 연속형 확률변수인 경우

- 두 확률변수 X, Y의 결합확률밀도함수를 $f(x,y)$라고 할 때, X, Y의 주변확률분포는 각각 다음과 같이 정의한다.
- X의 **주변확률분포** :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy$$

- Y의 **주변확률분포** :

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx$$

- 연속형 확률분포에서 주변확률분포함수를 **주변확률밀도함수(marginal probability density function)**라고 부른다

예4-11. 이산형 확률변수 X와 Y의 결합확률분포가 다음과 같을 때 X와 Y의 주변확률분포를 구하라.

X \ Y	1	2	3	합
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
4	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
합	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

- (sol)

(a) X의 주변확률분포

X	2	3	4	합
확률	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(b) Y의 주변확률분포

Y	1	2	3	합
확률	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

예4-12. 두 연속형 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같을 때, X와 Y의 주변확률분포함수를 구하라.

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{다른 곳에서}\end{cases}$$

(sol) X, Y의 결합분포는 3차원 공간상에서 가로, 세로, 높이가 모두 1인 정육면체이며, 따라서 그 체적(두 확률변수의 전체확률)이 1이 됨을 알 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^1 1\,dx\right]dy=\int_0^1 1\,dy=1$$

X의 주변확률분포함수와 Y의 주변확률분포함수는 다음과 같다.

$$f(x)=\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1 1\,dy=1 \qquad f(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1 1\,dx=1$$

(a) X의 주변확률분포함수

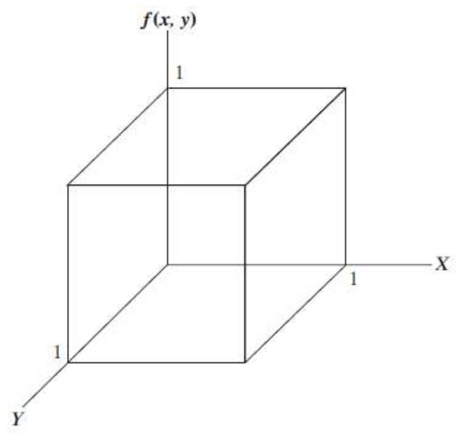
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(b) Y의 주변확률분포함수

$$f(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

결합확률분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

그림 4-9 X, Y의 결합확률분포



예4-13. 두 연속형 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같을 때, X와 Y의 주변확률분포함수를 구하라.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \ge 0, y \ge 0 \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(sol) 위의 결합확률밀도함수는 모든 (x, y)값에 대하여 다음과 같이 결합확률밀도함수의 조건을 만족한다.

$$f(x,y) = e^{-x-y} \ge 0 \text{ 이고,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot e^{-y}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-y}\left[\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\right]dy = \left[\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\right]\cdot\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = 1$$

X의 주변확률분포함수와 Y의 주변확률분포함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-x-y}\ dy = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy = e^{-x}, x \geq 0 \qquad f(y) = e^{-y}, y \geq 0$$

(a) X의 주변확률분포함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(b) Y의 주변확률분포함수

$$f(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

4.6절

4.6. 두 확률변수의 독립성

두 확률변수의 독립성

1. 이산형 확률변수

- 두 이산형 확률변수 X, Y의 결합확률분포함수를 $P(X = x, Y = y)$ 라 하고, 각각의 주변분포함수를 $P(X = x)$, $P(Y = y)$라고 할 때, 모든 가능한 (x, y) 값에 대하여,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

일 때 한하여 두 변수 X 와 Y 는 **독립**이다.

2. 연속형 확률변수

- 두 연속형 확률변수 X, Y의 결합확률밀도함수를 $f(x, y)$라 하고, $f(x)$와 $f(y)$를 각각 X, Y의 주변확률밀도함수라고 하면,

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

일 때 한하여 두 변수 X 와 Y 는 **독립**이다.

예4.14. [예 4-11]에 있는 확률분포표에서 두 이산형 확률변수 X와 Y가 독립인가를 증명하여라.

(sol)

$P(X=2, Y=1)=\frac{1}{12}$이고 $P(X=2)=\frac{1}{3}, P(Y=1)=\frac{1}{4}$ 이므로

$P(X=2, Y=1)=P(X=2)\cdot P(Y=1)$이다.

그러나 $P(X=3, Y=2)=0$인데 $P(X=3)=\frac{1}{3}, P(Y=2)=\frac{1}{2}$ 이므로

$P(X=3, Y=2)\neq P(X=3)\cdot P(Y=2)$가 되어 X와 Y는 독립이 아니다.

예4-15 두 이산형 확률변수 X, Y의 결합확률분포가 다음과 같을 때, X와 Y가 독립인가를 증명하라.

X \ Y	1	2	합
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{12}$
합	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

(sol)

$Y = 1$인 경우의 세 확률값에 대해 계산한 결과는 다음과 같다.

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{12} = P(X = 1) \cdot P(Y = 1)$$

$$P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{9} = P(X = 2) \cdot P(Y = 1)$$

$$P(X = 3, Y = 1) = \frac{1}{36} = P(X = 3) \cdot P(Y = 1)$$

$Y = 2$인 경우의 세 확률값에 대하여도 위와 같이, 다음의 조건을 만족한다.

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

∴ 정의에 의하여 두 확률변수 X와 Y는 확률적으로 독립이다.

예4-16 두 연속형 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같을 때, X와 Y가 독립인가를 증명하라.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(sol) [예 4.13]에서 X와 Y의 주변확률밀도함수가 각각 $f(x) = e^{-x}$, $f(y) = e^{-y}$임을 구하였으므로 다음을 만족한다.

$$f(x,y) = e^{-x-y} = e^{-x} \cdot e^{-y} = f(x) \cdot f(y)$$

따라서 두 확률변수 X와 Y는 확률적으로 독립이다.

끝~~ ♥♥