3.1절 ~ 3.4절, 3.8절

2주1강. 확률1

3.8절

경우의 수, 순열, 조합

순열

- **순열** : n개의 서로 다른 개체가 있을 때 그 중에서 r개를 선택하여 일렬로 세우는 방법의 수.
- 기호 : $${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$ $$= \frac{n!}{(n-r)!}$$
- 약속 : $0! = 1$, ${}_nP_0 = 1$

예1) A, B, C, D, E 5개의 문자를 일렬로 세우는 경우의 수

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

예2) 5개 문자 중에서 임의로 3개를 추출하여 일렬로 세우는 경우의 수

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

예3) 남3, 여4을 일렬로 나열할 때, 남학생들끼리 이웃하는 경우의 수

$$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

예4) 남3, 여4을 일렬로 나열할 때, 남학생들끼리 이웃하지 않게 하는 경우의 수

$$4! \times {}_5P_3 = 24 \times 60 = 1440$$

같은 것이 있는 순열

- **같은 것이 있는 순열** : n개의 개체들 중에서 동일한 것이 $n_1, n_2, \cdots, n_k$개 있을 때, n개를 일렬로 세우는 경우의 수. (단, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$)

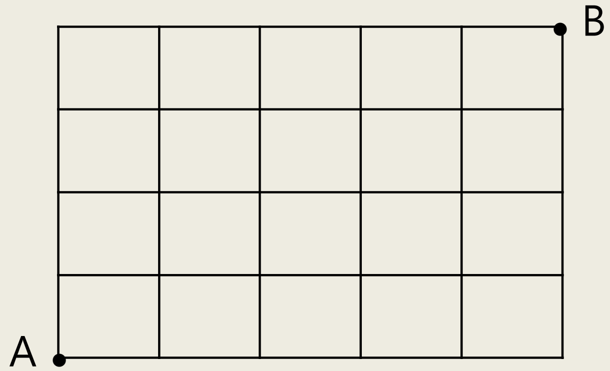
$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

예) 영어 단어 MISSIPPI에 있는 알파벳을 일렬로 세우는 방법의 수

$$\frac{8!}{3!\,2!\,2!\,1!} = 1680$$

예) A에서 B로 가는 최단 경로의 수

$$\frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$



원순열

- **원순열** : 서로 다른 n명을 원탁에 앉히는 방법의 수

$$(n-1)!$$

예1) 5명이 원테이블에 앉는 방법의 수

$$4! = 24$$

예2) 5개의 열쇠를 한 줄로 된 열쇠고리에 끼우는 방법의 수

$$5! = 120$$

예3) 5개의 열쇠를 원형의 열쇠고리에 끼우는 방법의 수

$$\frac{4!}{2} = 12$$

중복순열

- **중복순열** : 서로 다른 n개에서 중복을 허락해 r개를 선택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

$$ {}_{n}\Pi_{r} = n^r $$

- 예) 1, 2 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하여 일렬로 나열하는 방법의 수

$$2^3 = 8$$

조합

- 조합 : n개의 서로 다른 개체 중에서 임의로 r개를 선택하는 방법의 수

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} $$

$$ \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

- ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$, ${}_nC_n = 1$, ${}_nC_0 = 1$

예1) A, B, C, D, E 5개의 문자 중에서 3개를 임의로 추출하는 방법의 수

$$ \binom{5}{3} = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 $$

예2) 4개의 서로 다른 공을 6개의 상자에 넣을 때 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.

ⓐ 아무 제약이 없는 경우

$$_6\Pi_4 = 6^4$$

ⓑ 어떤 상자에도 두 개 이상의 공을 넣을 수 없는 경우

$$\binom{6}{4} \times 4!$$

ⓒ 처음 상자에는 반드시 하나의 공을 넣는 경우

$$4 \times 5^3$$

예3) 9개의 사무실이 있다. 각각 2개의 사무실을 직접적으로 연결하기 위해 필요한 케이블의 수를 구하여라.

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$$

중복조합

- **중복조합** : 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하는 방법의 수

$$ {}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r} $$

예1) 1, 2 중에서 중복을 허용하여 세 개의 숫자를 택하는 방법의 수

$$ {}_{2}H_{3} = {}_{4}C_{3} = 4 $$

예2) ⓐ 방정식 $x+y+z=10$을 만족하는 음이 아닌 정수해 순서쌍의 개수를 구하여라.

$$ {}_{3}H_{10} = {}_{12}C_{10} = \frac{12 \times 11}{2} = 66 $$

ⓑ 방정식 $x+y+z=10$을 만족하는 자연수 순서쌍의 개수를 구하여라.

$$ {}_{3}H_{7} = {}_{9}C_{7} = \frac{9 \times 8}{2} = 36 $$

❑ 예3) 두 집합 $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{6,7,8,9,10,11,12\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

ⓐ 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

$${}_7\Pi_5 = 7^5$$

ⓑ 일대일 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

$${}_7P_5$$

ⓒ $\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \ \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$를 만족하는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

$${}_7C_5$$

ⓓ $\forall x_1, x_2 \in X, \quad x_1 < x_2 \ \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ 를 만족하는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하여라.

$${}_7H_5$$

3.1. 집합이론에 대한 기초

집합

- **집합(set)** : 개념이 정확하게 정의된 원소들의 모임
- **유한집합** : 집합의 원소들의 개수를 정확하게 셀 수 있는 집합
- **무한집합** : 원소들의 개수가 무한이거나 셀 수 없는 경우의 집합

- **공집합(null set)** : 원소가 하나도 없는 집합을 말하며 "$\emptyset$ " 또는 { }으로 표현.

- **부분 집합** : 집합 A의 모든 원소들이 집합 B의 원소이면 A는 B의 부분집합 이라고 말하며, $A \subseteq B$로 표현.

- **상호 배반 집합** : 두 집합 A, B가 공통원소를 가지고 있지 않을 때, 즉, A의 모든 원소는 B에 속하지 않고 B의 모든 원소는 A에 속하지 않으면, A와 B는 상호배반집합(mutually exclusive sets)이라고 한다.

- **차집합** : 두 집합 A, B에서 A에 속하나 B에는 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 차집합이라 하며 $A - B$로 표현한다.

- **여집합** : 집합 S의 부분집합 A에 있어서 S에 대한 A의 차집합을 A의 여집합(complement)이라 하고 A' 또는 A^c로 표현한다. 즉, A^c는 S의 원소들 중에서 A에 속하지 않는 원소들의 집합이다.

- 두 집합 A, B의 **합집합(union)**은 A, B 중 어느 하나의 집합에라도 속한 원소들로 구성되는 집합을 말하며 $A \cup B$로 표현한다.

- A와 B의 **교집합(intersection)**은 A와 B 모두에 속한 원소들로 구성되며 $A \cap B$ 또는 AB로 표현한다.

예제

예 3-1 1에서 100까지의 정수의 집합 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$

(sol) 원소의 개수가 100으로 유한하며 셀 수 있으므로 유한집합이다.

예 3-2 양의 정수의 집합 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

(sol) 원소의 개수가 셀 수는 있으나 무한이므로 무한집합이다.

예 3-3 0 에서 1 사이의 실수의 집합 $\{X \mid 0 \le X \le 1\}$

(sol) 원소의 개수를 셀 수 없으므로 무한집합이다.

예 3-4 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(sol) $A \subset B$이고 $B \subset C$이면 $A \subset C$이다. 정의에 의하여 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

예 3-5 두 집합 A, B가 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$은 상호배반인가?

(sol) A와 B는 공통원소가 없으므로 상호배반집합이다.

예 3-6 두 집합 A, B에서 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$일 때 차집합은?

(sol) $A - B = \{1, 2, 3\}, B - A = \{6, 7, 8\}$

예 3-7 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$일 때, S에 대한 A의 여집합은?

(sol) $A^c = \{4, 5, 6\}$

예 3-8 집합 A, B가 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$일 때, 합집합과 교집합은?

(sol) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$

3.2. 표본공간과 사건

표본공간과 사건

- 실험에 의하여 나타날 수 있는 실현 가능한 모든 결과들의 집합을 **표본공간(sample space: Ω)**이라 한다.
- 실험에서 나타날 수 있는 개개의 결과들을 표본공간의 **원소(element)**라고 한다.

- **사건(사상: events)**이란 표본공간의 부분집합으로 표본공간의 원소들 중에서 일부분으로 이루어진 집합으로, 표본공간과 사건과의 관계는 집합이론에서 부분집합에 대한 정의로 설명될 수 있다.

- 사건들은 표본공간의 부분집합이므로 집합이론에서 이용되는 합집합, 교집합, 여집합의 개념을 표본공간과 사건에도 적용시킬 수 있다.

예 3-9 각 실험에 있어서 표본공간을 정의해 보자.

① 동전 하나를 던지는 실험

(sol) $\Omega = \{H, T\}, H$: 앞면, T : 뒷면

② 동전 두개를 동시에 던지는 실험

(sol) $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$, H : 앞면, T : 뒷면

③ 주사위 1개를 던지는 실험

(sol) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

④ 새로 만들어진 전구가 끊어질 때까지 걸리는 시간을 관측하는 실험

(sol) $\Omega = \{X \mid 0 \leq X\}$

예 3-10 [예 3.9]에 있는 각각의 실험에 대한 표본공간에서 다음과 같은 사건을 정의해보자.

① 사건 A : 동전의 앞면이 나올 사건

(sol) $A = \{H\}$

② 사건 A : 첫 동전이 앞면일 사건, 사건 B : 두 동전 모두 뒷면이 나올 사건

(sol) $A = \{HH, HT\}$, $B = \{TT\}$

③ 사건 E : 나타난 결과가 짝수일 사건

(sol) $E = \{2, 4, 6\}$

④ 사건 E : 전구의 수명이 10 시간 이내일 사건

(sol) $E = \{X \mid 0 \leq X \leq 10\}$

예 3-11 [예 3.9]의 실험 2에서 사건 A, B, C를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \{HH, HT\}, B = \{TH, TT\}, C = \{HH, TT\}$$

세 사건 중 상호배반인 사건을 찾아라.

(sol) $\mathrm{B} \cap C = \{TT\}$

$A \cap C = \{HH\}$

$A \cap B = \emptyset$

이므로 A와 B는 상호배반사건이다.

3.3. 확률의 기초 개념

확률

- **확률**은 `가능성의 척도'를 측정하는 숫자로 0과 1 사이의 값으로 표현한다.

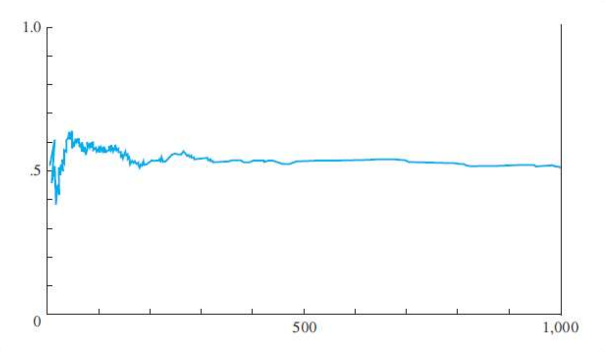
- 어떤 사건이 일어날 확률이 0이다. → 그 사건이 발생될 가능성이 전혀 없다는 것을 의미
- 어떤 사건이 일어날 확률이 1이다. → 그 사건이 틀림 없이 발생한다는 것을 의미

- **확률의 고전적 해석**
- 각각의 사건에 대한 확률이 누구에 의해서나 동일한 값으로 계산되는 확률의 계산방법을 확률의 고전적 해석 또는 확률의 객관적 해석이라 한다. 예를 들면 `52장으로 된 트럼프 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때 에이스(ace)가 뽑힐 확률은 52장 중에서 에이스가 4장이므로4/52이다'와 같이 누구에 의해서나 동일한 값으로 계산되는 계산방법을 말한다

확률의 상대도수에 의한 해석과 주관적인 해석

- 확률의 상대도수에 의한 해석은 확률의 실험적 접근에 의한 방법으로 반복실험에 의하여 나타난 결과의 표현이다.
- 동일한 실험을 무한히 반복할 때 한 사건에 대하여 상대 도수에 의하여 계산된 확률은 고전적 의미의 확률에 접근한다고 할 수 있다.

그림 3-1 동전을 1,000번 던질 때 앞면의 상대도수



- 관찰자의 주관에 따라서 다르게 측정될 수 있는 확률을 주관적 확률이라고 하고, 이러한 접근방법을 확률의 주관적 해석이라고 한다.

3.4. 확률

확률

- 확률의 고전적 해석, 상대도수에 의한 해석, 주관적 해석 중에서
- 수학적 모형에 의한 확률은 고전적 의미의 확률, 즉 객관화된 확률의 정의를 따른다.

- 표본공간 Ω의 부분집합인 사건 E의 확률 $P(E)$은 표본공간 Ω의 원소 개수에 대한 사건 E의 원소 개수의 비율을 의미하며 다음과 같다.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

확률의 공리(axioms of probability)

- 확률실험에서 Ω를 표본공간, E를 사건, $\emptyset$를 공집합이라 할 때, $E \subset \Omega$, $\emptyset \subset \Omega$이며, 확률은 항상 다음 조건을 만족한다.

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$
3. 모든 $i \ne j$에 대해 $E_i \cap E_j = \emptyset$이면, 즉 모든 $i \ne j$, $i, j = 1, 2, \cdots$에 대해 E_i와 E_j가 상호배반사건이면

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

예 3-12 주사위 1개를 던지는 실험에서 사건 E를 윗면이 짝수인 사건이라고 정의할 때 사건 E의 확률은

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad E = \{2, 4, 6\}$$

(sol)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

예 3-13 주사위 1개를 던지는 실험에서 사건 A, B, C은 다음과 같다.

A : 눈금이 짝수인 사건

B : 눈금이 1 또는 3인 사건

C : 눈금이 1 또는 2인 사건

A, B, C를 집합으로 나타내고 각 사건의 확률을 계산하라. 세 사건의 상호배반 여부를 조사하라.

sol) $A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 3\}$

$C = \{1, 2\}$

$A \cap B = \emptyset$: A와 B는 상호배반

$A \cap C = \{2\}, B \cap C = \{1\}$: A와 C , B와 C는 상호배반이 아니다.

예 3-14 동전 세 개를 동시에 던지는 실험에서 세 사건 E, F, G를 각각 다음과 같이 정의한다.

E : 첫째 동전이 앞면이 나타나는 사건
F : 셋째 동전이 뒷면이 나타나는 사건
G : 세 동전 모두 앞면이 나타나는 사건

표본공간을 정의하고 $P(E), P(F), P(G), P(E \cap F), P(E^c), P(E \cup F)$을 구하라.

(sol) 표본공간 : $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

사건 : $E = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}, F = \{HHT, HTT, THT, TTT\}, G = \{HHH\}$

$$P(E) = P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(G) = \frac{1}{8}, \quad P(E \cap F) = P(\{HHT, HTT\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(E^C) = 1 - P(E) = \frac{1}{2}, \quad P(E^C) = P(\{THH, THT, TTH, TTT\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

끝~~ ♥♥