8.5절~8.6절

11주2강 가설과 검정3

복습

가설검정

- **가설검정**이란 모집단에 대한 어떤 가설을 설정한 뒤에 표본관찰을 통하여 그 가설의 채택 여부를 결정하는 분석방법이다.
- 일반적으로 통계분석에서는 모집단의 모수에 대하여 관심이 있으므로 **가설은 모수에 대하여 설정**한다.

가설설정

- 가설검정에서 가설은 귀무가설(H_0)과 대립가설(H_1)로 설정한다.

① 귀무가설 : "모수가 특정한 값이다" , "두 모수의 값이 같다" 등과 같이 간단하고 구체적인 경우를 귀무가설로 설정한다.
② 대립가설 : "모수가 특정한 값이 아니다" , "한 모수의 값이 다른 모수의 값보다 크다" , "두 모수의 값이 다르다" 등과 같이 모수에 대한 관심의 영역 중에서 귀무가설로 지정되지 않은 모든 경우를 포괄적으로 대립가설로 설정한다.

- **가설검정**이란 두 가설 H_0와 H_1중에서 하나를 선택하는 과정이므로 H_0를 채택(accept)하면 H_1을 기각(reject)하게 되고 H_0를 기각하면 H_1을 채택하게 된다.
- 따라서 **가설검정이란 '두 가설 중에서 귀무가설 H_0 를 채택하든지 또는 기각하는 과정'**이라고 이해할 수 있다.

검정통계량

- **검정통계량**이란 가설검정에서 관찰된 표본으로부터 구하는 통계량으로 분포가 가설에서 주어지는 모수에 의존한다.
- 귀무가설이 옳다는 전제하에서 구한 검정통계량의 값이 나타날 가능성이 크면 귀무가설을 채택하고 나타날 가능성이 작으면 귀무가설을 기각한다.

유의수준

- **유의수준** α란 귀무가설이 옳은데도 불구하고 이를 기각하는 확률의 크기를 말하며 검정통계량을 구하는 것과는 무관하게 검정을 실시하는 사람의 판단에 따라 결정한다.

기각역

- **기각역**이란 가설검정에서 유의수준 α가 정해졌을 때, 검정통계량의 분포에서 이 유의수준의 크기에 해당하는 영역을 말하는데, 검정통계량의 분포에서 이 영역의 위치는 대립가설의 형태에 따라 다르다.

- **기각역 C 와 유의수준 α의 관계**

유의수준 α ; 귀무가설 하에서 검정통계량이 기각역 C에 속할 확률이다.

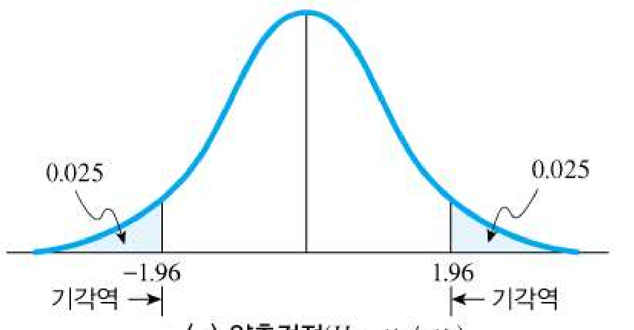
$$P_r(T(X) \in C \mid H_0) = \alpha$$

대립가설과 기각역, $\alpha = 0.05$

- 검정통계량의 분포에서 유의수준 α에 의해 기각역의 크기가 결정되며, 기각역의 위치는 대립가설 H_1의 형태에 의해 결정된다.
- 대립가설의 형태는 가설검정의 목적에 의하여 결정되는데 가설검정은 대립가설의 형태에 따라 양측검정과 단측검정으로 나누어지고, 단측검정은 다시 왼쪽 단측검정과 오른쪽 단측검정으로 분류된다.

① 양측검정
귀무가설이 "모수가 특정값이다"라고 할 때, 대립가설이 "모수가 특정값이 아니다"라고 주어지는 경우로 귀무가설과 대립가설은 다음과 같이 표현할 수 있다.

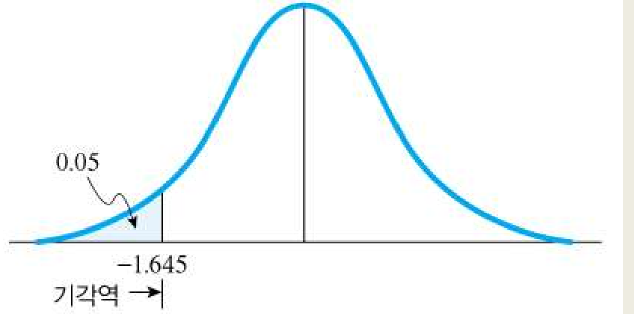
$H_0 : \mu = \mu_0$; μ_0은 고정된 상수
$H_1 : \mu \neq \mu_0$
기각역 $C = \{T(X) \leq -C_1$ 또는 $T(X) \geq C_1\}$



(a) 양측검정(H_1 ; $\mu \neq \mu_0$)

② 왼쪽 단측검정
귀무가설이 "모수가 특정값이다"라고 할 때, 대립가설 H_1이 "모수가 μ_0보다 작다"로 주어지는 경우로 귀무가설과 대립가설을 다음과 같이 표현할 수 있다.

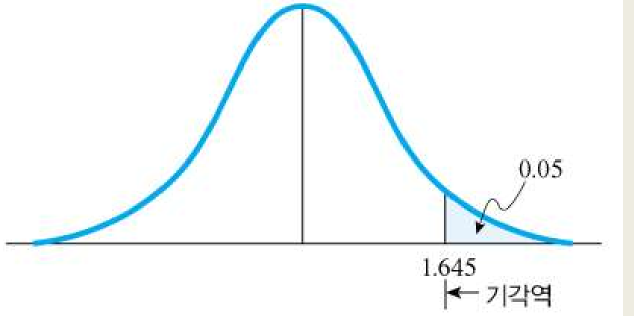
$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$
기각역 $C = \{T(X) \leq C_2\}$



(b) 왼쪽 단측검정(H_1 ; $\mu < \mu_0$)

③ 오른쪽 단측검정
귀무가설이 "모수가 특정값이다"라고 할 때, 대립가설 H_1이 "모수가 μ_0보다 크다"로 주어지는 경우로 귀무가설과 대립가설을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$
기각역 $C = \{T(X) \geq C_3\}$



(c) 오른쪽 단측검정(H_1 ; $\mu > \mu_0$)

단일모평균 μ의 검정(t-검정)

- 단일집단의 모평균 μ에 대한 검정은 모집단의 분포가 평균 μ와 분산 σ^2을 갖는 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$을 따른다는 것을 전제한다고 할 수 있다. 검정을 하기 위하여 추출한 표본을 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$이라고 할 때, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$은 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 확률표본이다.

① 가설의 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : \mu = \mu_0, \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$

(b) 단측검정 : $H_0 : \mu = \mu_0, \;\; H_1 : \mu > \mu_0$ (또는 $\mu < \mu_0$)

→ 여기에서 μ_0은 구체적으로 주어지는 특정한 값이며 H_1에 주어지는 세 가지 서로 다른 가설은 가설검정에서 알고자 하는 목적에 따라 결정된다.

② 귀무가설 하에서의 검정통계량과 분포

(a) σ^2을 아는 경우

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$

(b) σ^2을 모르는 경우

(i) $n > 30$일 때

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,\ 1)$$

(ii) $n \le 30$일 때

$$T(X) = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

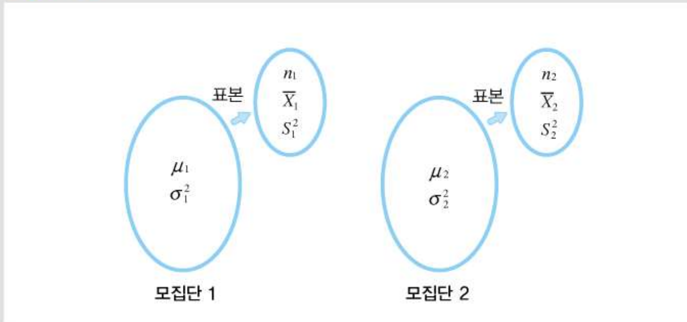
두 집단의 모평균의 동일성에 대한 검정

- 두 집단의 모평균의 동질성에 대한 검정에 있어서의 전제조건은 '**두 집단이 서로 독립이며 두 집단 모두 정규분포를 따른다**'는 것이다.
- 일반적으로 두 집단이 서로 독립이며 각 집단의 평균과 분산이 각각 $(\mu_1, {\sigma_1}^2)$과 $(\mu_2, {\sigma_2}^2)$인 정규분포를 따를 때 두 모평균의 동일성 $(\mu_1 = \mu_2)$에 대한 검정은 각 집단에서 '랜덤하게' n_1과 n_2개의 표본을 추출하여 실시한다.

표 10-2 두 독립집단의 모수와 통계량

집단 \ 모수와 통계량	모수		표본의 크기	통계량	
	모평균	모분산		표본평균	표본분산
집단 1	μ_1	σ_1^2	n_1	$\overline{X}_1$	S_1^2
집단 2	μ_2	σ_2^2	n_2	$\overline{X}_2$	S_2^2

그림 10-2 두 모집단과 표본



① 가설의 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

(b) 단측검정 : $H_0 : \mu_1 = \mu_2, H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (또는 $\mu_1 < \mu_2$)

② 귀무가설하에서의 검정통계량의 값과 분포

(a) σ_1^2, σ_2^2이 알려져 있는 경우

$$T(X) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

(a) σ_1^2, σ_2^2이 알려져 있지 않는 경우

(i) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$인 경우

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$이라 할 때, S_1^2, S_2^2 모두 σ^2의 추정량이다.

σ^2의 추정치로 S_1^2와 S_2^2의 가중평균 S_p^2 사용.

$$T(X) = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$T(X) \sim N(0,1), \qquad n_1 + n_2 > 30$인 경우

$T(X) \sim t_{n_1+n_2-2}, \qquad n_1 + n_2 \le 30$인 경우

(ii) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$인 경우

$T(X) = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ 이며 $T(X)$의 분포는 $n_1 + n_2 > 30$일 때, $T(X) \sim N(0,1)$이다.

③ 검정

- 검정통계량 $T(X)$의 분포에서 **가설의 종류(단측검정 또는 양측검정)와 유의수준 α에 의하여 기각역을 설정**한다.
- 귀무가설하에서의 검정통계량의 값 $T(X)$**가 기각역에 속하면 귀무가설을 기각**하고 **기각역에 속하지 않으면 귀무가설을 채택**한다.

짝진표본의 모평균에 대한 검정

- n개의 쌍 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$으로 관측된 표본에서, 관찰값의 차이를 $d_i = x_i - y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$이라고 할 때, 두 집단 평균 μ_X와 μ_Y의 동일성에 대한 검정은 $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$이므로 다음과 같이 실시한다.

표 10-3 짝진표본의 관찰값

쌍번호	1	2	3	4	…	n
X	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n
D	d_1	d_2	d_3	d_4	…	d_n

① 가설 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : \mu_D = 0,\ \ H_1 : \mu_D \neq 0$

(b) 단측검정 : $H_0 : \mu_D = \mu_2,\ \ H_1 : \mu_D > 0$(또는 $\mu_D < 0$)

② 검정통계량과 분포

두 집단 차이의 평균과 분산을 다음과 같다고 할 때, 귀무가설 검정통계량은 다음과 같다.

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \ , \ S_d^{\ 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 \qquad T(X) = \frac{\bar{d}}{S_d\sqrt{n}}$$

검정통계량 $T(X)$의 분포는 n에 따라 다음과 같이 나타난다.

$T(X) \sim N(0,\ 1),\ \ n > 30$인 경우,

$T(X) \sim t_{n-1},\qquad n \le 30$인 경우이다.

③ 검정

검정통계량 $T(X)$의 분포에서 **가설의 종류(단측검정 또는 양측검정)와 유의수준 α에 의하여 기각역을 설정**한다.

귀무가설하에서의 검정통계량의 값 $\boldsymbol{T(X)}$가 **기각역에 속하면 귀무가설을 기각**하고
기각역에 속하지 않으면 귀무가설을 채택한다.

단일 모비율 P의 검정

- 단일 모집단의 특성의 비율 P에 대한 검정에서 n개의 표본을 관찰한 결과 모집단의 특성을 만족하는 경우가 X개라고 할 때 모비율 P가 특성값 P_0 과 같은가에 대한 검정이다.

① 가설의 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : P = P_0,\ H_1 : P \neq P_0$

(b) 단측검정 : $H_0 : P = P_0,\ H_1 : P > P_0$(또는 $P < P_0$)

② 귀무가설하에서의 검정통계량의 값과 분포

$\hat{P} = \frac{X}{n}$라 할 때 $\hat{P} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$ 귀무가설 하에서 검정통계량의 값과 분포는 다음과 같다.

$$T(X) = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0,1)$$

③ 검정

검정통계량 $T(X)$의 분포에서 **가설의 종류(단측검정 또는 양측검정)와 유의수준 α에 의하여 기각역을 설정**한다.

귀무가설 하에서의 검정통계량의 값 $T(X)$가 **기각역에 속하면 귀무가설을 기각**하고 **기각역에 속하지 않으면 귀무가설을 채택**한다.

8.5절

8.5 모비율 P에 대한 검정(계속)

두 모비율의 동일성 검정

- 집단1과 집단2의 특성이 비율이며, 각 집단의 모비율이 각각 P_1과 P_2라고 할 때, 각 집단에서 각각 크기가 n_1과 n_2인 표본을 임의로 추출하여 조사한 결과 특성을 만족하는 표본의 수가 X_1과 X_2라고 하면 모비율 P_1과 P_2의 추정량을 각각 $\hat{P}_1$과 $\hat{P}_2$라고 할 때 두 집단의 모비율의 동일성 여부를 검정하는 것이다.

① 가설의 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : P_1 = P_2, H_1 : P_1 \neq P_2$

(b) 단측검정 : $H_0 : P_1 = P_2, H_1 : P_1 < P_2$(또는 $P_1 > P_2$)

② 검정통계량과 분포

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1},\ \hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2},\ \hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

라 할 때, 귀무가설하에서 검정통계량의 값과 분포는 다음과 같다.

$$T(X) = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim N(0,1)$$

③ 검정

검정통계량 $T(X)$의 분포에서 **가설의 종류(단측검정 또는 양측검정)와 유의 수준 α에 의하여 기각역을 설정**한다.

귀무가설하에서의 검정통계량의 값 $T(X)$가 **기각역에 속하면 귀무가설을 기각**하고 **기각역에 속하지 않으면 귀무가설을 채택**한다.

예8-11.

한 공장에서 두 대의 기계 A, B가 동일한 제품을 생산한다. 두 기계에 의한 생산품의 불량률이 동일한가를 알아보기 위하여 각각의 기계로부터 생산된 제품 중에서 임의로 50개씩을 표본으로 추출하여 조사한 결과 기계 A의 생산품 중에서는 9개의 불량품이 관측되었고 기계 B의 생산품에서는 5개의 불량품이 관측되었다. 두 기계의 불량률이 동일한가에 대한 검정을 유의수준 5%하에서 실시하라.

(sol)

⑴ 가설의 설정 : 기계 A의 불량률을 , 기계 B의 불량률을 라고 할 때 두 기계의 불량률이 동일한가에 대한 검정을 실시하고자 하므로 와 은 각각 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$H_0 : P_1 = P_2$$

$$H_1 : P_1 \neq P_2$$

(2) 검정통계량과 분포 : 두 기계의 불량률의 추정량과 표본 전체의 불량률은 각각 표본관측 결과에 의하여 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\hat{P}_1 = \frac{X_1}{n_1} = \frac{9}{50} = 0.18$$
$$\hat{P}_2 = \frac{X_2}{n_2} = \frac{5}{50} = 0.10$$

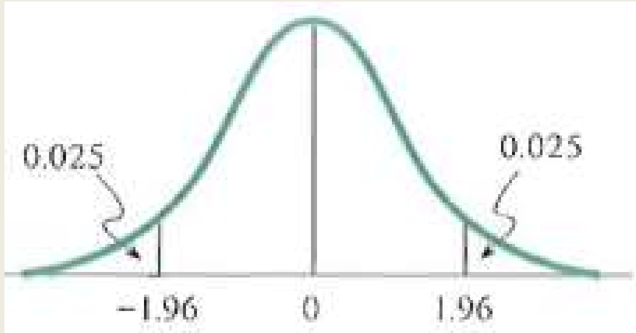
$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} = \frac{9+5}{50+50} = \frac{14}{100} = 0.14$$

따라서 귀무가설하에서 검정통계량의 값 $T(X)$는 다음과 같다.

$$T(X) = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.18 - 0.10}{\sqrt{0.14 \times 0.86\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)}} = \frac{0.08}{0.0694} = 1.15$$

$T(X)$는 근사적으로 $N(0, 1)$을 따른다.

⑶ 검정 : 유의수준 $\alpha = 0.05$ 하에서 양측검정에 대한 표준정규분포의 기각역은 아래 그림의 빗금친 부분과 같다.



$T(X) = 1.15$가 기각역에 속하지 않으므로 귀무가설은 기각되지 않는다. 즉 위의 표본관측 결과에 의할 때 두 기계의 불량률은 동일하다고 할 수 있다.

8.6절

8.6 단일집단의 모분산에 대한 검정

단일집단의 모분산 σ^2에 대한 검정

- 단일정규모집단의 모분산 σ^2에 대한 검정은 모분산 σ^2이 어떤 특정값과 같은가에 대한 검정이라고 할 수 있다. 모분산 σ^2에 대한 검정은 검정통계량이 표본분산 S^2이며, 이 검정통계량이 χ^2-분포를 따른다.

① 가설의 설정

(a) 양측검정 : $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2,\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(b) 단측검정 : $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2,\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$(또는 $\sigma^2 < \sigma_0^2$)

② 검정통계량과 분포

검정에 필요한 검정통계량과 분포는 다음과 같다.

$$T(X) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ ,\quad T(X) \sim \chi^2_{(n-1)}$$

③ 검정

$\chi^2_{(n-1)}$에서 검정의 종류(단측검정 또는 양측검정)와 유의수준 α에 따라

기각역을 설정하고 검정통계량 $T(X)$가 기각역에 속하면 귀무가설을 기각한다

예8-12.

병에 자동으로 음료수를 채우는 시스템에서 채워지는 음료수 양의 분산이 1g 이하이어야만 시스템이 안정적이라고 할 수 있다. 품질관리 책임자가 음료수병 10개를 임의로 추출하여 음료수의 양을 측정한 결과 표본분산 $S^2 = 0.16$을 구하였다. 이 시스템의 분산이 1g 이하인가를 유의수준 5%하에서 검정하라.

(sol)

(1) 가설의 설정 : 관심의 초점이 모분산 σ^2의 값이 1g 이하인가이므로 귀무가설과 대립가설은 각각 다음과 같이 설정할 수 있다.

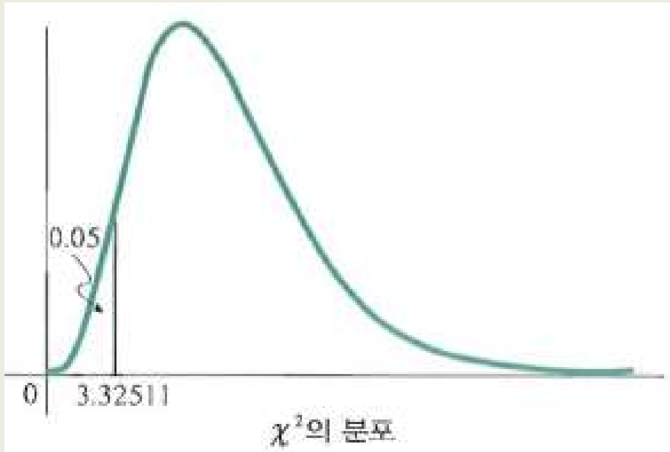
$$H_0 : \sigma^2 = 1, \qquad H_1 : \sigma^2 < 1$$

(2) 검정통계량과 분포 : $n = 10$에 근거한 표본분산이 $S^2 = 0.16$g이므로, 귀무가설 ($\sigma^2 = 1$g)하에서의 검정통계량의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$T(X) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9 \times 0.16}{1} = 1.44$$

$T(X)$는 자유도가 $n - 1 = 9$인 χ^2-분포를 따른다.

(3) 검정 : 부록 V의 [표5]에서 $d.f. = 9$일 때 $P(\chi^2 > 3.32511) = 0.950$이므로,
유의수준 $\alpha = 0.05$일 때 위쪽 단측검정의 기각역은 아래 그림의 빗금친 부분과 같다.



$T(x) = 1.44$는 기각역에 속하므로 귀무가설은 기각된다. 즉 위의 표본관찰결과에 의할 때 5% 유의수준 하에서 자동 병채우기 시스템의 분산은 1g 이하라고 할 수 있다.

예8-13.

유리병 뚜껑의 지름은 표준편차가 0.6mm 이하이어야만 유리병에 맞는다. 15개의 뚜껑을 임의로 조사한 결과 표준편차가 0.65mm였다. 이 자료에 의할 때 병뚜껑의 지름의 표준편차가 0.6 이상이라고 판단할 수 있는지 유의수준 1%하에서 검정하라.

(sol)

(1) 가설의 설정 : 모분산 σ^2이 $0.6^2 = 0.36$ 이상인가 또는 그렇지 않은가를 검정하고자 하므로 귀무가설과 대립가설은 각각 다음과 같이 설정할 수 있다.

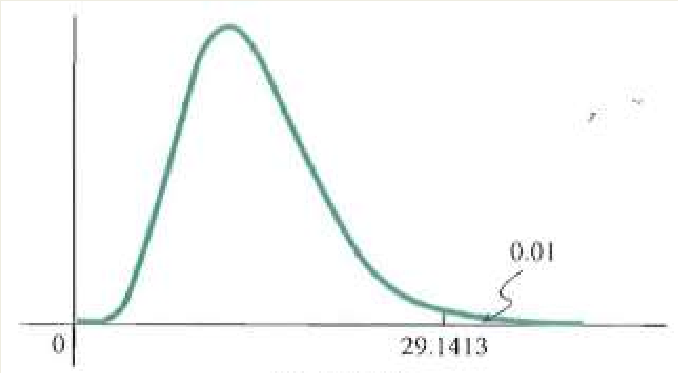
$$H_0 : \sigma^2 = 0.36, \qquad H_1 : \sigma^2 > 0.36$$

(2) 검정통계량과 분포 : $n = 15$에 근거한 표본분산이 $S^2 = 0.65^2 = 0.4225$이므로, 귀무가설 하에서의 검정통계량의 값은 다음과 같이 계산된다.

$$T(X) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{14 \times 0.4225}{0.36} = 16.43$$

$T(X)$는 자유도가 $n - 1 = 14$인 χ^2-분포를 따른다.

(3) 검정 : 부록V의 [표5]에서 $d.f. = 14$일 때 $P(\chi^2 > 29.1413) = 0.01$이므로,
유의수준 $\alpha = 0.01$일 때 위쪽 단측검정의 기각역은 아래 그림의 빗금친 부분과 같다.



$\chi^2_{(14)}$의 분포

$T(x) = 16.43$는 기각역에 속하지 않으므로 귀무가설은 기각되지 않는다.
즉 위의 표본관찰결과에 의할 때 1% 유의수준 하에서
뚜껑의 지름의 표준편차가 0.6mm보다 크다고 볼 수 없다.

끝~~ ♥♥