9주2강 중간고사 문제풀이

1. 다음 자료는 한 도시에서 10개의 가구를 추출하여 조사한 생활비 중 식료품비의 비율이다. 다음을 구하여라.

(단, 평균과 분산은 구하는 식만 정확히 적으시면 됩니다.)

19	20	22	22	25	27	28	28	30	31

(1) 평균 [1점]

$$E(x) = \frac{19+20+22+22+25+27+28+30+31}{10} = \frac{252}{10} = 25.2$$

(2) 분산 [1점]

$$\{(19-25.2)^2 + (20-25.2)^2 + (22-25.2)^2 + (22-25.2)^2 + (25-25.2)^2$$
$$+(27-25.2)^2 + (28-25.2)^2 + (28-25.2)^2 + (30-25.2)^2 + (31-25.2)^2\} \times \frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{9}\{19^2 + 20^2 + 22^2 + 22^2 + 25^2 + 27^2 + 28^2 + 28^2 + 30^2 + 31^2$$
$$- \frac{1}{10}(19+20+22+22+25+27+28+28+30+31)^2\}$$

(3) 중위수 [1점]

$$\frac{25+27}{2}=26$$

(4) 사분위 범위 [2점]

$$Q_3\text{의 위치}=\left[\frac{10+1}{2}\right]+\frac{[5.5]+1}{2}=8$$

$$\text{위사분위수}(Q_3)=28$$

$$\text{아래사분위수}(Q_1)=22$$

$$Q_1\text{위치}=3$$

$$\therefore\ \text{사분위 범위}=28-22=6$$

(5) 최빈값 [2점]

$$22, 28$$

2. 두 사건 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 독립이고 $\boldsymbol{P(A) = 0.3, P(B) = 0.4}$라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

$$A, B\text{가 독립이므로 } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

(1) $\boldsymbol{P(A \cup B)}$ [2점]

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58$$

(2) $\boldsymbol{P(B \mid A)}$ [2점]

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.3} = 0.4$$

3.

바이러스 A의 발병률이 5%라 하자. 어떤 과학자가 바이러스 A의 보균자를 진단할 수 있는 검사를 개발하였는데 이 검사에서 양성이 나오면 보균자로 음성이 나오면 비보균자로 진단한다고 하자. 이 검사결과는 A 바이러스 보균자인 경우 95% 양성으로 나오고 비보균자인 경우도 10%양성이 나온다고 하자. 임의로 선택한 한 사람이 검사결과가 양성이었을 때, 이 사람이 바이러스 보균자일 확률을 구하여라. (식만 정확히 적으시면 됩니다.) [3점]

E : 검사결과가 양성인 사건

F : 바이러스 보균자일 사건

$$P(F \mid E) = P(F \cap E)/P(E) = \frac{0.05\times0.95}{0.05\times0.95+\ \ .95\times0.1} = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

4. 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{그외} \end{cases}$$

(1) $E(X)$ [1점]

$$\int_0^4 \left(x \times \frac{1}{8}x\right) dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{8 \times 3} = \frac{8}{3}$$

(2) $Var(X)$ [1점]

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^4 \left(x^2 \times \frac{1}{8}x\right) dx - \frac{64}{9} = \frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 - 64/9 = \frac{4^4}{8 \times 4} - \frac{64}{9} = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

(3) $\boldsymbol{P_r(X \geq 2)}$ [1점]

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{8}x\right) dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = \frac{16-4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

(4) $\boldsymbol{P_r(X^2 \leq y)}$ (단, $\boldsymbol{0 \leq y \leq 16}$) [2점]

$$= P_r(0 \leq x \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{8}x\right) dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{y}} = \frac{y}{16}, \qquad (0 \leq y \leq 16)$$

(5) 확률변수 $\boldsymbol{Y}$를 $\boldsymbol{Y \equiv X^2}$으로 정의할 때, $\boldsymbol{Y}$의 확률밀도함수를 구하여라. [1점]

$$F_Y(y) = P_r(Y \leq y) = \frac{y}{16}, \qquad (0 \leq y \leq 16)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & 0 \leq y \leq 16 \\ 0, & \text{그외} \end{cases}$$

5. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률분포가 다음과 같을 때, $\mathrm{Cov}(X,Y)$를 구하여라. [2점]

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

X	0	1	2
P_r	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1	2
Pr	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P_r	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0

$$E(XY) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$E(X) = \frac{3}{3} = 1 \qquad E(Y) = 1$$

$$\sigma_{XY} = \frac{5}{6} - 1 = \frac{5}{6} - 1 * 1 = -\frac{1}{6}$$

6. 다음의 안에 알맞은 식을 적으시오.

(1) $X \sim \text{Poisson}(\mu)$일 때 [1점]

$$P_r(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \qquad 단, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(2) $X \sim B(n, p)$이고 $q = 1 - p$일 때 [1점]

$$P_r(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad 단, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

(3) $X \sim \text{Geometric}(p)$이고 $q = 1 - p$일 때 [1점]

$$P_r(X = k) = q^{k-1} p, \qquad 단, k = 1, 2, 3, \ldots$$

7. 어느 한 책이 오자가 평균 5페이지 당 15개씩 발생하는 포아송분포를 따른다고 할 때, 특정한 세 페이지에 오자가 하나도 없을 확률을 구하는 식을 e를 포함하는 식으로 적으시오. [3점]

5 페이지 당 15개 $\Longrightarrow$ 세 페이지 당 9개

$$P_r(X=0)=\frac{9^0}{0!}e^{-9}=e^{-9}$$

8. 한 사무실에는 전화가 평균 10분에 5회 꼴로 걸려온다. 이 사무실에서 전화가 한 번 걸려온 후 다음 전화가 걸려올 때까지 시간을 분 단위로 측정할 때 그 시간이 5분 이내일 확률을 e를 사용하여 표현하여라. [3점]

10분에 5회꼴 $\Longrightarrow$ 1분에 0.5회꼴 $\lambda = 0.5$

$f(t) = 0.5e^{-0.5t}, \quad t > 0$

$P_r(T \leq 5) = \int_0^5 0.5e^{-0.5t}\,dt = [-e^{-0.5t}]_0^5 = 1 - e^{-2.5}$

9. 확률변수 X가 $X \sim N(20, 25)$일 때, $P_r(25 \le X \le 30)$를 구하여라. [3점]

$$P_r\left(\frac{25-20}{5} \le Z \le \frac{30-20}{5}\right) = P_r(1 \le Z \le 2)$$

$$= P_r(0 \le Z \le 2) - P_r(0 \le Z \le 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413$$

$$= 0.1359$$

10.(1) 주사위를 100번 던지는 시행에서 짝수의 눈금이 60회이상 나타날 확률을 구하여라. [3점] 단,

z	$P_r(0 \le Z \le z)$
1.9	0.4713
2.0	0.4772
2.1	0.4821

$$B\left(100,\ \frac{1}{2}\right) \sim N(50, 52)$$

$$P_r(X \ge 60) = P_r(X \ge 59.5) \qquad \text{[연속수정]}$$

$$= P_r\left(z \ge \frac{59.5-50}{5}\right)$$

$$= P_r(z \ge 1.9)$$

$$= 0.5 - 0.4713$$

$$= 0.0287$$

(2) 이동 표적을 맞추는 사격의 경우에 매번 시행에서 표적을 맞추는 확률이 0.01이라고 하자. 100번의 시행에서 표적을 1번 이내로 맞출 확률을 e를 포함하는 식으로 구하여라. [3점]

$np = 0.01 \times 100 = 1$

$X \sim \text{Poisson}(1)$

$$P(X \le 1) = P(x = 0) + P(X = 1) = \frac{1^0}{0!}e^{-1} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} = 2e^{-1}$$

끝~~ ♥♥