

10장. 고정축에 대한 강체의 회전

(Rotation of a Rigid Object About a Fixed Axis)

- 10.1 각위치, 각속도, 각가속도
- 10.2 분석 모형: 각가속도가 일정한 강체
- 10.3 회전 운동과 병진운동의 물리량
- 10.4 돌림힘(토크)
- 10.5 분석 모형: 알짜 토크를 받는 강체
- 10.6 관성모멘트 계산
- 10.7 회전운동에너지
- 10.8 회전 운동에서의 에너지 고찰
- 10.9 강체의 굴림 운동



10.1 각위치, 각속도, 각가속도

(Angular Position, Velocity and Acceleration)

바퀴처럼 부피를 갖는 물체가 어떤 축을 중심으로 회전할 때는, 이 물체를 하나의 입자로 취급하여 그 운동을 분석할 수 없다. 물체의 각 부분들이 주어진 시각에 각각 다른 선 속도와 선 가속도를 갖기 때문이다.

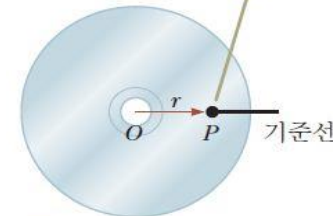
회전하는 물체를 다룰 때 그 물체를 강체라 가정하면 분석이 아주 단순화된다. **강체(rigid body)**는 변형이 없는 물체를 말한다. 오른쪽 그림에서,

$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{단위: } \underline{\text{라디안(radian)}}$$

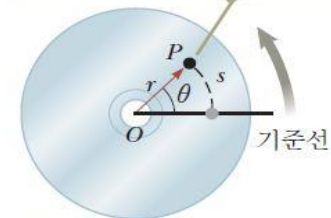
$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ} \theta(\text{deg})$$

디스크의 각위치를 표시하기 위한 고정된 기준선을 선택하였다. P 에 있는 입자는 O 에 있는 회전축으로부터 거리 r 만큼 떨어져 있다.



a

디스크가 회전하면 P 에 있는 입자는 반지름 r 인 원 경로로 길이가 s 인 원호를 그리며 움직인다.



b

기준선으로부터 각 θ 만큼 이동하면 강체에 속한 모든 다른 입자들도 같은 각도 θ 만큼 회전한다. 각 입자와 마찬가지로 전체 강체에 각 θ 를 부여할 수 있으므로, 회전하는 강체의 **각위치(angular position)**를 정의할 수 있다. 이 때 각변위는,

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

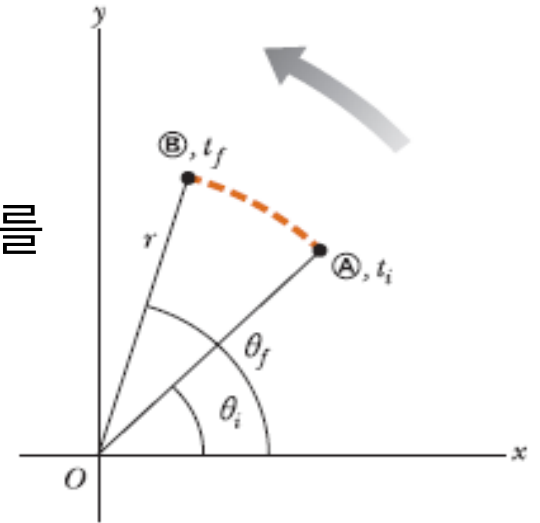
평균 각속력:
(average angular speed)

$$\omega \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

순간 각속력:
(instantaneous angular speed)

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

단위: rad/s 또는 s^{-1}



평균 각가속도

(average angular acceleration)

$$\alpha_{\text{avg}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

순간 각가속도

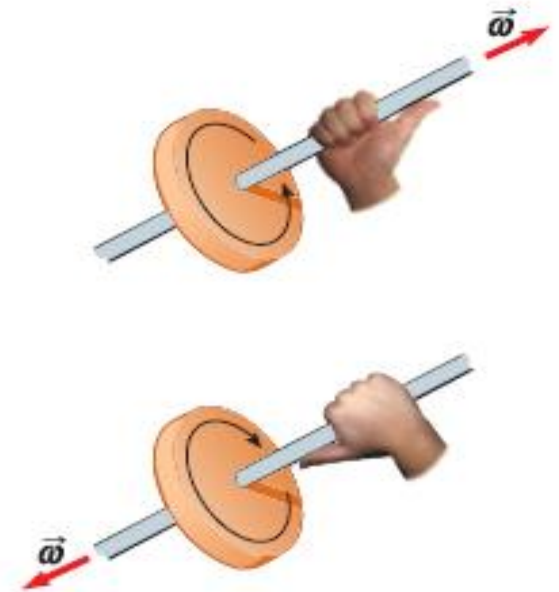
(instantaneous angular acceleration)

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

강체가 고정축에 대하여 회전할 때,
물체 위의 모든 입자는 주어진 시간 간격
동안에 같은 각만큼 회전하고 같은
각속력과 같은 각가속도를 갖는다.

보다 일반적인 회전 운동에서 **각속도와
각가속도는 벡터량**이다.

동일한 강체가 회전축이 바뀌면 회전 운동의 형
태도 바뀌기 때문이다.



10.2 분석 모형: 각가속도가 일정한 강체

(Analysis Model: The Rigid Object Under Constant Angular Acceleration)

고정축을 중심으로 회전하는 강체의 운동은 **각가속도가 일정한 경우**가 많다. 따라서 '**각가속도가 일정한 강체**'라고 하는 회전 운동에 대한 분석 모형을 만들자. 이 모형은 **등가속도 선운동**의 경우와 유사하다. **각가속도 α 가 일정한 경우,**

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

표 10.1 가속도가 일정한 회전 운동과 병진 운동의 운동학 식

| 각가속도가 일정한 강체 | 등가속도 입자 |
|---|--|
| $\omega_f = \omega_i + \alpha t$ | $v_f = v_i + at$ |
| $\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ | $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2$ |
| $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$ | $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ |
| $\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$ | $x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$ |

예제 10.1

회전바퀴

바퀴가 3.50 rad/s^2 의 일정한 각가속도로 회전하고 있다.

(A) $t_i = 0$ 에서 바퀴의 각속력이 2.00 rad/s 일 때, 2.00 s 동안 바퀴가 회전한 각변위를 구하라.

풀이

10.3 회전 운동과 선운동의 물리량 (Angular and Translational Quantities)

강체가 고정축에 대해서 회전할 때 이 강체의 모든 입자들은 회전축을 중심으로 원운동을 한다.

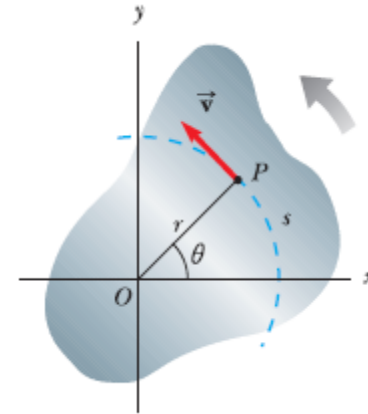
$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad v = r\omega$$

속도에 대한 식을 미분하면

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_t = r\alpha$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \equiv a_r$$

$$\therefore a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



예제 10.2 CD 플레이어

그림 10.6에 있는 CD에는 디지털로 디스크 표면에 패인 홈 부분과 평평한 부분에 소리에 대한 정보가 연속으로 저장되어 있다. 표면의 패인 홈 부분과 평평한 부분은 이진법의 1과 0을 교대로 나타내고, 이것은 플레이어에서 읽혀 소리로 바뀐다. 레이저와 렌즈로 구성된 시스템에서 볼록하거나 평평한 부분이 판독된다. 정보의 한 비트를 나타내는 0과 1을 나타내는 부분의 길이는 그 정보가 디스크 중앙에 있든지 디스크 가장자리에 있든지 디스크 상의 어디에서나 동일하다. 그러므로 동일한 한 비트의 길이가 같은 시간 간격 동안에 레이저-렌즈 시스템을 통과하기 위해서는, 렌즈와 가장 가까운 디스크 표면의 접선 속력이 일정해야 한다. 식 10.10에 따라 각속력은 레이저-렌즈 시스템이 디스크 위에서 지름 방향으로 이동함에 따라 달라져야 한다. 보통의 플레이어에서는 레이저-렌즈 시스템이 있는 점에서의 속력은 1.3 m/s 로 일정하다.

- (A) 가장 안쪽의 첫 트랙($r = 23 \text{ mm}$)에서 정보가 읽힐 때의 디스크의 각속력과 가장 바깥 트랙($r = 58 \text{ mm}$)에서 읽힐 때의 각속력을 분당 회전수(rpm)로 구하라.
- (B) 정상적인 음악 CD의 최대 연주 시간은 74분 33초이다. 이 시간 동안 디스크의 회전수를 구하라.
- (C) $4\,473 \text{ s}$ 동안 CD의 각가속도를 구하라.

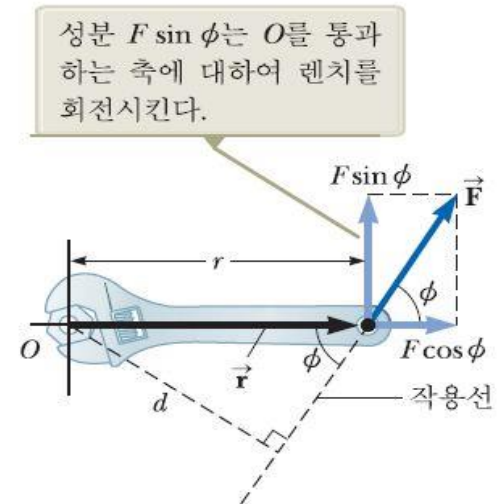
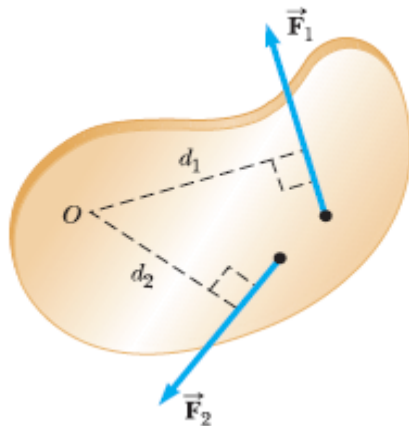
풀이

10.4 돌림 힘 (Torque)

축이 고정되어 있는 강체에 힘을 작용하면, 강체는 그 축에 대하여 회전하려 한다. 이와 같이 어떤 축에 대하여 물체를 회전시키고자 하는 힘의 능력을 **토크**(또는 돌림힘, torque)라 하며 **벡터량**이다.

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

단위: Nm (Joule이 아님)



둘 이상의 힘이 한 물체에 작용할 때 각 힘이 물체에 토크를 작용한다. 토크는 벡터량이므로 회전 방향을 고려해야 한다.

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

예제 10.3

원통에 작용하는 알짜 토크

큰 원통에서 가운데 부분이 튀어나온 2단 실린더가 있다. 실린더는 중심축에 대하여 자유롭게 회전하고 있다. 그림과 같이 힘 T_1 및 T_2 가 작용한다.

(A) 회전축(z 축)에 대하여 실린더에 작용하는 알짜 토크를 구하라.

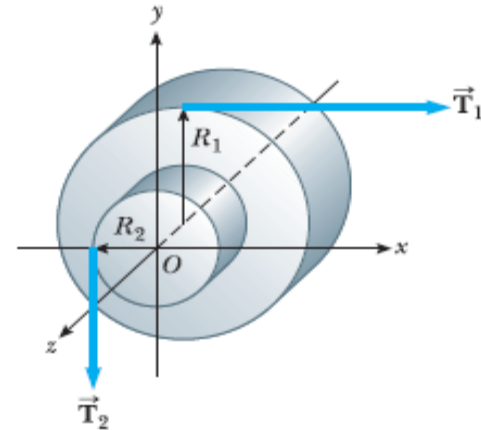
풀이

두 힘이 실린더를 각각 시계 방향과 반시계 방향으로 회전시키려 하므로 토크의 방향도 반대 방향이다. 시계 반대 방향을 (+)방향으로 정하면

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2 T_2 - R_1 T_1$$

(B) $T_1=5.0\text{N}$, $R_1=1.0\text{m}$ 이고, $T_2=15.0\text{N}$, $R_2=0.50\text{m}$ 라고 하자. 회전축에 대한 알짜 토크를 구하라. 그리고 정지 상태에서 시작하였다면 어느 방향으로 원통이 회전하겠는가?

$$\begin{aligned} \sum \tau &= (0.50\text{m})(15\text{N}) - (1.0\text{m})(5.0\text{N}) \\ &= 2.5\text{N} \cdot \text{m} \quad \text{시계 반대 방향} \end{aligned}$$

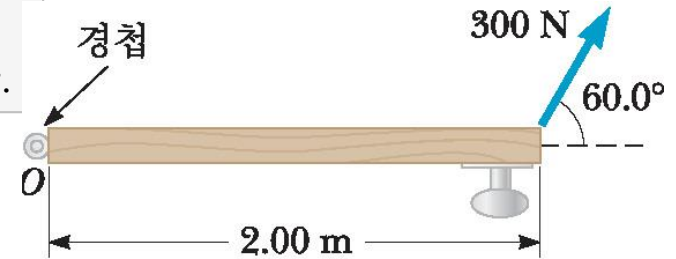


예제 회전문

(a) 한 남자가 그림(a)처럼 경첩으로부터 2.00m 떨어진 곳에 문과 60.0°의 각도를 이루면서 힘 $F = 3.00 \times 10^2 \text{ N}$ 을 작용하고 있다. 경첩의 위치를 회전축으로 선택하여 문에 작용하는 토크를 구하라.

풀이 $\vec{\tau}_F = +rF \sin \theta$

$$= (2.00\text{m}) \times (3.00 \times 10^2 \text{ N}) \sin 60.0^\circ = 5.20 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$



(b) 썰기가 문 반대편에 경첩으로부터 1.50m 에 있다고 하자. (a)에서 작용하는 힘으로 문이 열리지 않도록 하기 위해서는 썰기에는 최소한 얼마만큼의 힘을 가해져야 하는가?

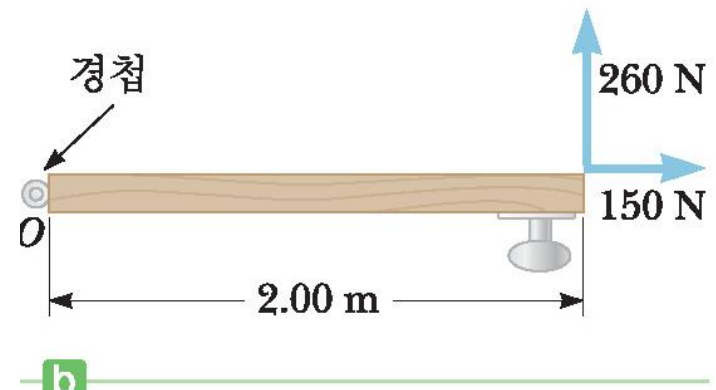
풀이 $\sum \vec{\tau} = 0$

$$\rightarrow \vec{\tau}_{\text{hinge}} + \vec{\tau}_{\text{wedge}} + \vec{\tau}_F = 0$$

$$0 + F_{\text{wedge}} (1.50\text{m}) \sin(-90.0^\circ) + 5.20 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m} = 0$$

$$\therefore F_{\text{wedge}} = -\frac{5.20 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}}{(1.50\text{m}) \sin(-90.0^\circ)} = 347 \text{ N}$$

☞ 썰기에 작용하는 힘의 방향은 아래 방향이다.



10.5 분석 모형: 알짜 돌림힘을 받는 강체

(Analysis Model: Rigid Object Under a Net Torque)

먼저, 외력의 영향을 받아 고정된 점을 중심으로 원을 따라 회전하는 입자의 경우를 생각해 보자. 접선 방향의 알짜힘과 지름 방향의 알짜힘에 의하여 반지름 r 인 원주 위를 회전하는 질량 m 인 입자의 경우

$$\sum F_t = ma_t, \quad \sum F_c = ma_c$$

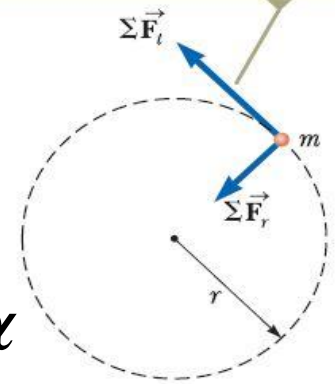
$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r$$

$$a_t = r\alpha, \quad \therefore \sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

$$\therefore \sum \tau = I\alpha \quad (\sum F = ma)$$

입자에 작용하는 알짜 토크는 각가속도에 비례하고, 그 비례상수는 관성 모멘트이다.

입자에 작용하는 접선력은 원의 중심을 통과하는 축에 대하여 입자에 토크를 작용한다.



이 결과를 고정축을 중심으로 회전하는 임의의 모양의 강체에 관해 확장하자. 강체는 아주 작은 크기의 질량 요소 dm 이 무한히 많이 모여 있는 것으로 생각할 수 있다

$$dF_t = (dm)a_t$$

$$d\tau = r dF_t = a_t r dm$$

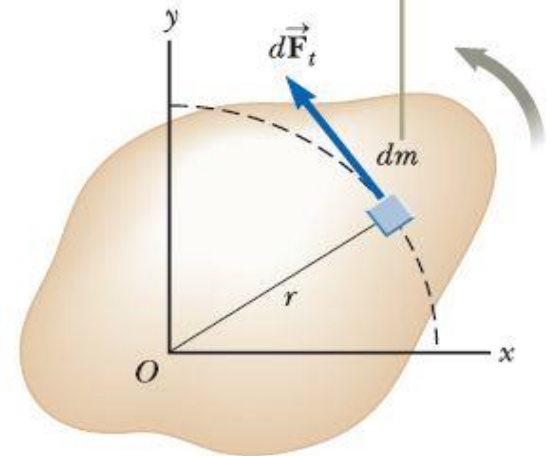
$$d\tau = \alpha r^2 dm \quad (a_t = r\alpha)$$

$$\sum \tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

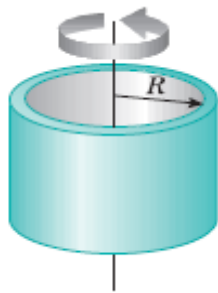
$$\therefore \sum \tau = I\alpha \quad (\sum F = ma)$$

강체에 작용하는 알짜 토크는 각가속도에 비례하고, 그 비례상수는 강체 전체의 관성 모멘트이다.

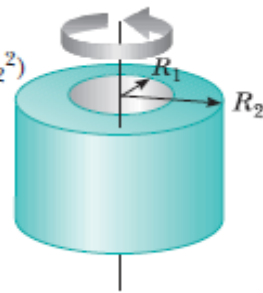
강체의 질량 요소 dm 은 그림 10.15에서의 입자와 같은 방법으로 토크를 받는다.



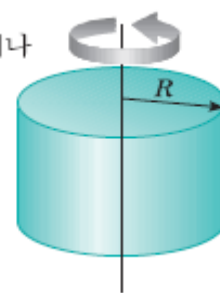
굴림쇠나 얇은
실린더
 $I_{CM} = MR^2$



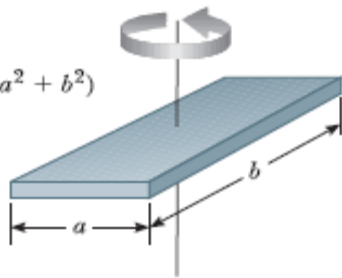
가운데가 빈 실린더
 $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$



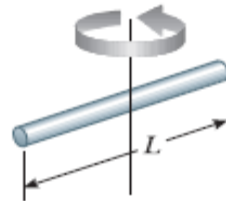
속이 꽉 찬 실린더나
디스크
 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



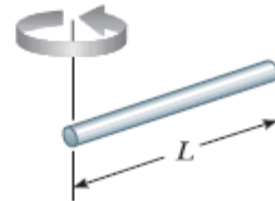
사각형 판
 $I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



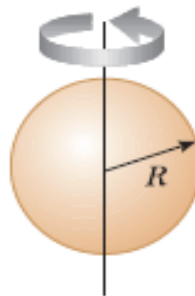
회전축이 중심을
지나는 길고
가는 막대
 $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$



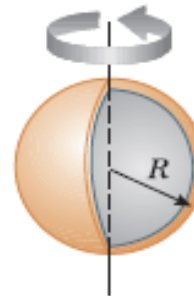
회전축이
끝을 지나는
길고 가는
막대
 $I = \frac{1}{3} ML^2$



속이 꽉 찬 구
 $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



속이 빈 구껍질
 $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$

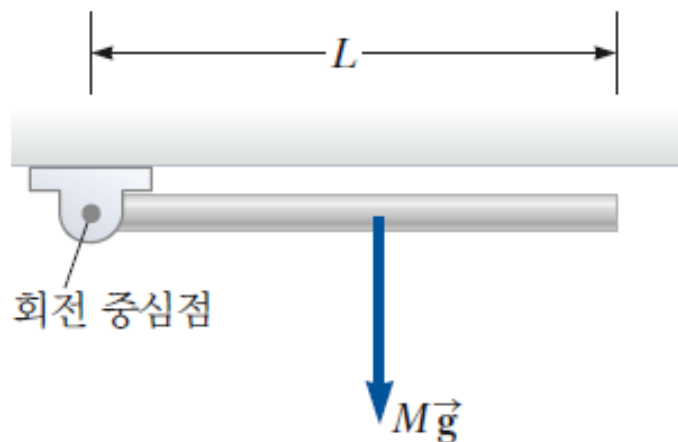


예제 10.4 회전하는 막대

그림 10.12와 같이 길이 L 이고 질량 M 인 균일한 막대의 한쪽 끝이 마찰이 없는 회전 중심점에 연결되어 있고, 수직인 평면에서 회전 중심점에 대하여 자유롭게 회전한다. 정지 상태에 있는 막대를 수평 위치에서 놓는다. 막대의 처음 각가속도와 막대의 오른쪽 끝의 처음 병진 가속도를 구하라.

풀이

그림 10.12 (예제 10.4) 막대가 왼쪽 끝의 회전 중심점에 대하여 자유롭게 회전하고 있다. 막대의 중력은 막대의 질량 중심에서 작용한다.



예제 10.6 바퀴의 각가속도

반지름 R , 질량 M 그리고 관성 모멘트가 I 인 바퀴가 마찰이 없는 수평 축에 설치되어 있다. 바퀴에 감긴 가벼운 줄에 질량 m 인 물체가 달려 있다.
바퀴의 각가속도, 물체의 선가속도, 줄에 걸린 장력을 구하라.

풀이 회전축을 통과하는 축에 대한 토크에 기여하는 유일한 힘은 바퀴에 작용하는 중력 mg 뿐이다.

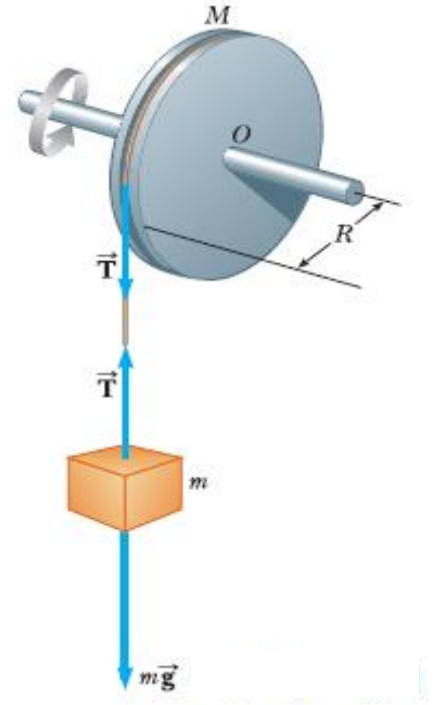
$$\sum \tau = TR = I\alpha \quad (\sum \tau = I\alpha) \Rightarrow (1) \quad \alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{TR}{I}$$

$$\sum F_y = mg - T = ma \quad (2) \quad a = \frac{mg - T}{m}$$

$$(a_t = r\alpha)$$

$$(3) \quad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$\therefore T = \frac{mg}{1 + (mR^2 / I)}, \quad a = \frac{g}{1 + (I / mR^2)}, \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I / mR)}$$



10.6 관성모멘트 계산

(Calculation of Moments of Inertia)

$$I \equiv \sum_i r_i^2 \Delta m_i \quad \therefore I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

여기서 r 은 위치벡터가 아니라 회전축으로부터의 직선 거리이다.

$$\therefore I = \int r^2 dm$$

$$\therefore I = \int \rho r^2 dV$$

예제 10.7 균일한 강체 막대

길이가 L 이고, 질량이 M 인 균일한 강체 막대가 있다. 막대에 수직이고 질량 중심을 지나는 축(y 축)에 대한 관성 모멘트를 구하라.

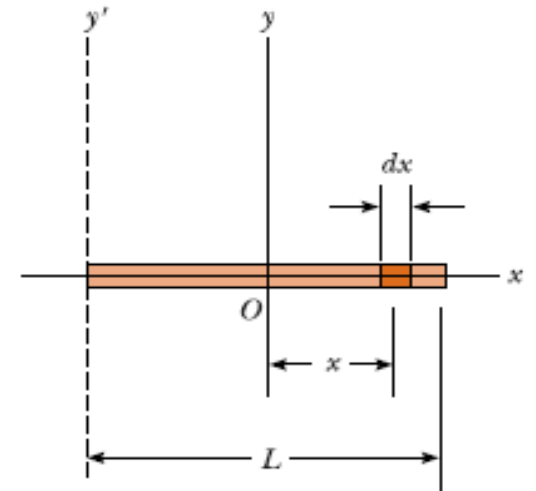
풀이

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx$$
$$= \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} ML^2$$

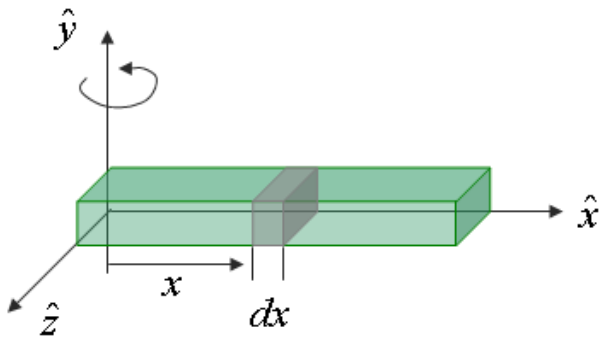


막대의 관성 모멘트

☞ 무수히 많은 입자의 경우 연속체로 고려할 수 있다.

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \rightarrow I = \int x^2 dm$$

* 막대의 끝에서 회전시키는 경우



막대의 전체 길이 : 막대의 미소길이 dx

막대의 전체 질량 M : 막대의 미소질량 dm

$$L:M = dx:dm \rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$$

$$I = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx$$

$$= \frac{M}{L} \times \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} \frac{M}{L} \times L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

예제 10.8 속이 찬 균일한 원통

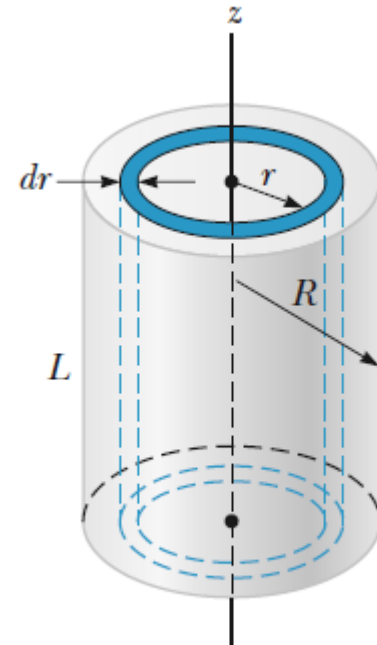
반지름은 R , 질량이 M , 길이가 L 인 속이 찬 균일한 원통이 있다. 중심축(그림 10.16에서 z 축)에 대한 관성 모멘트를 구하라.

풀이

$$dm = \rho dV = \rho L(2\pi r)dr$$

$$I_y = \int r^2 dm = \int r^2 [\rho L(2\pi r)dr] \\ = \frac{1}{2} \pi \rho L R^4$$

$$I_y = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{M}{\pi R^2 L} \right) L R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

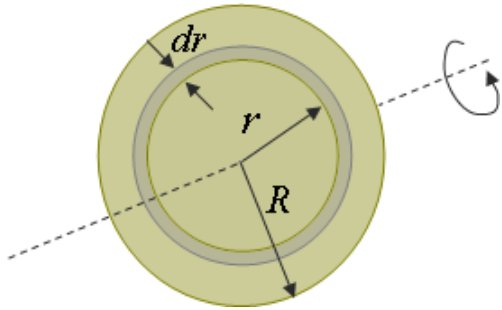


원판의 관성 모멘트

☞ 무수히 많은 입자의 경우 연속체로 고려할 수 있다.

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \rightarrow I = \int x^2 dm$$

* 원판의 중심에서 회전시키는 경우



원판 전체의 면적 πR^2

원판의 질량 M

원판의 미소링의 면적 $\pi r dr$ (미소링의 길이 \times 링의 두께)

링의 미소질량 dm

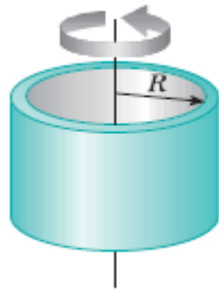
$$\pi R^2 : M = 2\pi r dr : dm \rightarrow dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{M}{R^2} 2r dr$$

$$I = \int r^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

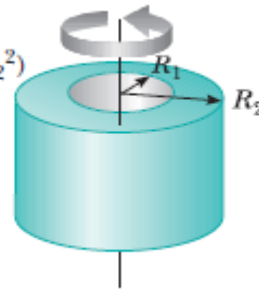
$$= \frac{2M}{R^2} \times \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R = \frac{1}{2} \frac{M}{R^2} \times R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$

강체의 관성 모멘트

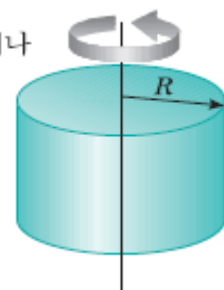
굴렁쇠나 얇은
실린더
 $I_{CM} = MR^2$



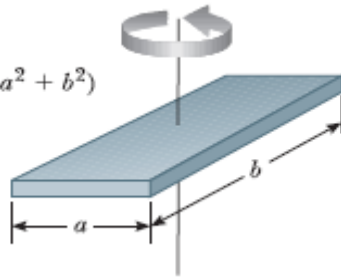
가운데가 빈 실린더
 $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$



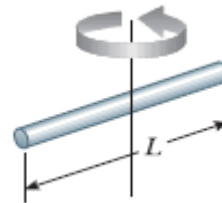
속이 꽉 찬 실린더나
디스크
 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



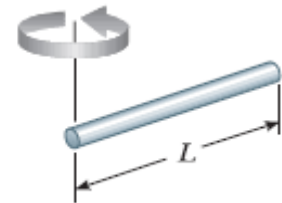
사각형 판
 $I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



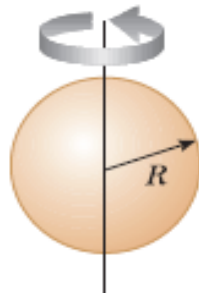
회전축이 중심을
지나는 길고
가는 막대
 $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$



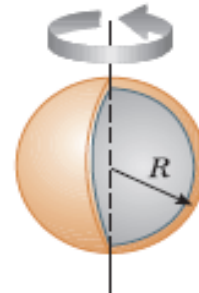
회전축이
끝을 지나는
길고 가는
막대
 $I = \frac{1}{3} ML^2$



속이 꽉 찬 구
 $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



속이 빈 구껍질
 $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$



<https://www.youtube.com/watch?v=GVJ9kkeyVt8>

상세 구하는 방법 참조

▣ 평행축 정리(parallel-axis theorem)

삼차원 물체를 평평한 물체로 압축시킨
다고 가정하면

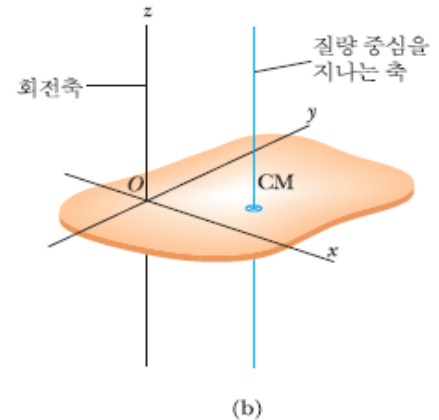
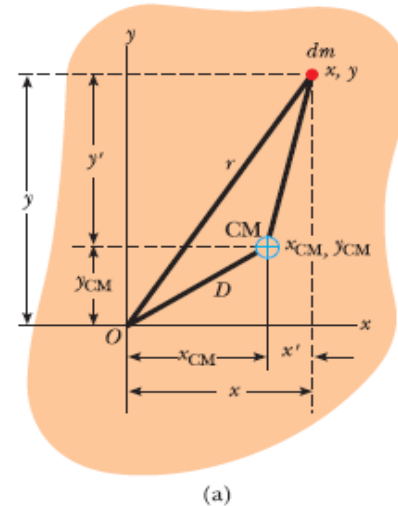
$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm \\ &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned}$$

O좌표계에서 질량 중심의 좌표가
(x_{CM} , y_{CM} , 0)이라면

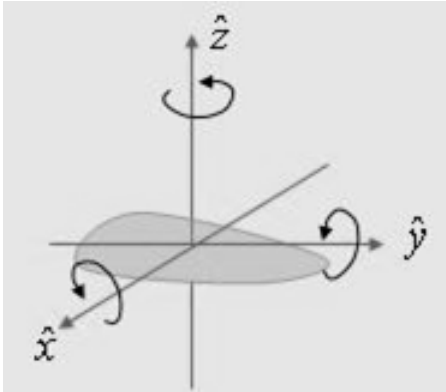
$$x = x' + x_{CM}, \quad y = y' + y_{CM}, \quad z = z' = 0 \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} I &= \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2] dm \\ &= \underbrace{\int [(x')^2 + (y')^2] dm}_{I_{CM}} + 2x_{CM} \cancel{\int x' dm} + 2y_{CM} \cancel{\int y' dm} + \underbrace{(x_{CM}^2 + y_{CM}^2)}_{D^2} \int dm \end{aligned}$$

$$\therefore I = I_{CM} + MD^2$$

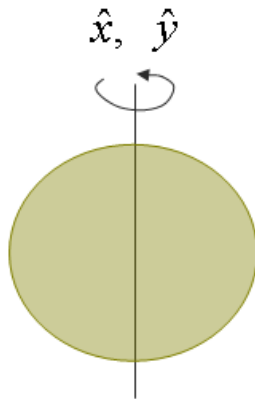
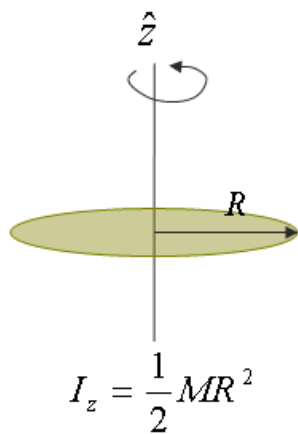


■ 수직 축정리(vertical-axis theorem)



$$I_z = I_x + I_y$$

z 축 - 평면판과 수직을 이루는 축
 x, y 축 - 평면판과 나란한 축



$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_z = I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2, \quad I_x = I_y$$

$$\rightarrow I_z = 2I_x = \frac{1}{2}MR^2 \quad \therefore I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2$$

10.7 회전운동에너지

(Rotational Kinetic Energy)

강체를 작은 입자들의 집합으로 생각하고, 이 강체가 고정된 z -축을 중심으로 각속력 ω 로 회전한다고 가정하자. 먼저, 질량 m_i 인 입자가 회전축으로부터 r_i 떨어진 점에서 접선 속력 v_i 로 운동하는 경우

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{이므로 전체 운동 에너지는}$$

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

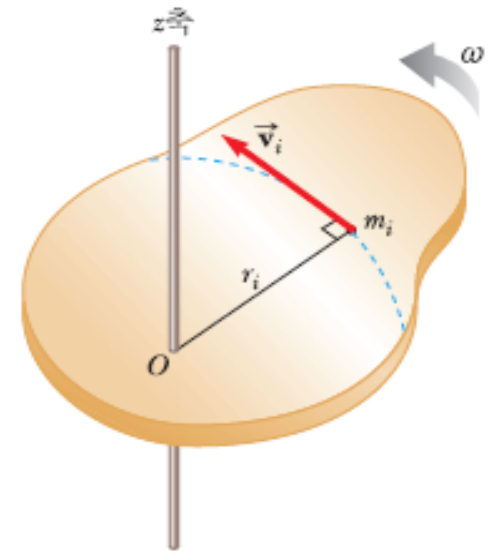
$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\therefore K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

◀ 회전 운동 에너지

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

◀ 관성 모멘트(moment of inertia)의 정의



예제 10.10 회전하는 네 개의 물체

네 개의 작은 구가 xy 평면에서 질량을 무시할 수 있는 두 막대의 끝에 묶여 있다. 구의 반지름은 막대기의 크기에 비해 아주 작다고 가정한다.

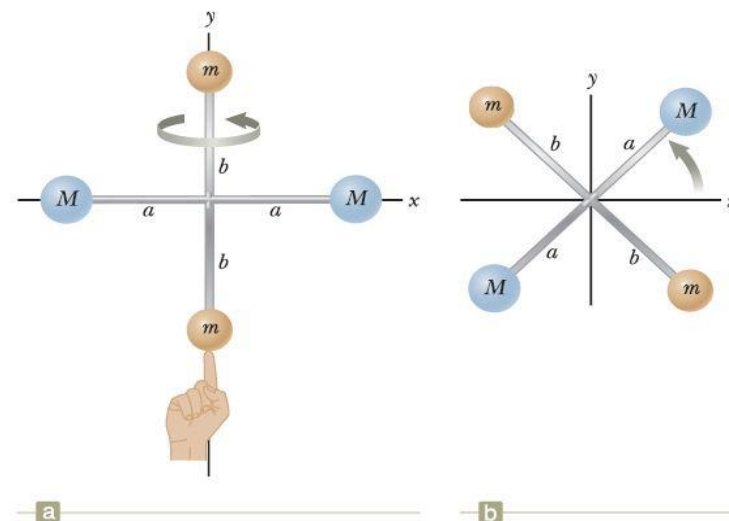
(A) 계가 y 축을 중심으로 ω 의 각속력으로 회전할 때, 이 축에 대한 관성 모멘트와 회전 운동 에너지를 구하라.

풀이

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2$$

$$= 2Ma^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$



(B) 이 계가 O 를 관통하는 축(z 축)을 중심으로 xy 평면에서 회전한다고 가정하자. 이 축에 대한 관성 모멘트 및 회전 운동 에너지를 구하라.

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

10.8 회전 운동에서의 에너지 고찰

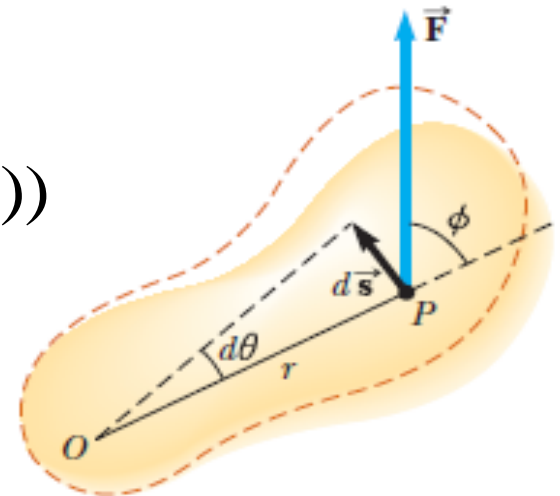
(Energy Considerations in Rotational Motion)

회전 운동을 에너지의 관점에서 접근해보자. 힘 F 가 작용하여 회전축 O 에 대해 작은 거리 $ds = r d\theta$ 만큼 회전시킬 때 한 일은

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = (F \sin \phi) r d\theta$$

$$(F \sin \phi) r = \tau \quad \therefore dW = \tau d\theta$$

$$\left(\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}\right) \quad \therefore \mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \omega \quad (\mathcal{P} = Fv)$$



강체가 고정축에 대해서 회전할 때, 외부 힘이 한 일은 회전 운동 에너지의 변화와 같다: 회전 운동에 대한 일-운동 에너지 정리

$$\therefore \sum \tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

$$\therefore \sum \tau d\theta = dW = I\omega d\omega \quad (dW = \tau d\theta)$$

$$\therefore \sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

회전 운동에 대한 일-운동 에너지 정리

(work-kinetic energy theorem for rotational motion)

표 10.3 회전 운동과 병진 운동에서의 유용한 식

| 고정축에 대한 회전 운동 | 병진 운동 |
|--|---|
| 각속력 $\omega = d\theta/dt$ | 병진 속력 $v = dx/dt$ |
| 각가속도 $\alpha = d\omega/dt$ | 병진 가속도 $a = dv/dt$ |
| 알짜 토크 $\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ | 알짜힘 $\Sigma F = ma$ |
| $\alpha = \text{일정} \begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$ | $a = \text{일정} \begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$ |
| 일 $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$ | 일 $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$ |
| 회전 운동 에너지 $K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$ | 병진 운동 에너지 $K = \frac{1}{2} mv^2$ |
| 일률 $P = \tau\omega$ | 일률 $P = Fv$ |
| 각운동량 $L = I\omega$ | 선운동량 $p = mv$ |
| 알짜 토크 $\Sigma \tau = dL/dt$ | 알짜힘 $\Sigma F = dp/dt$ |

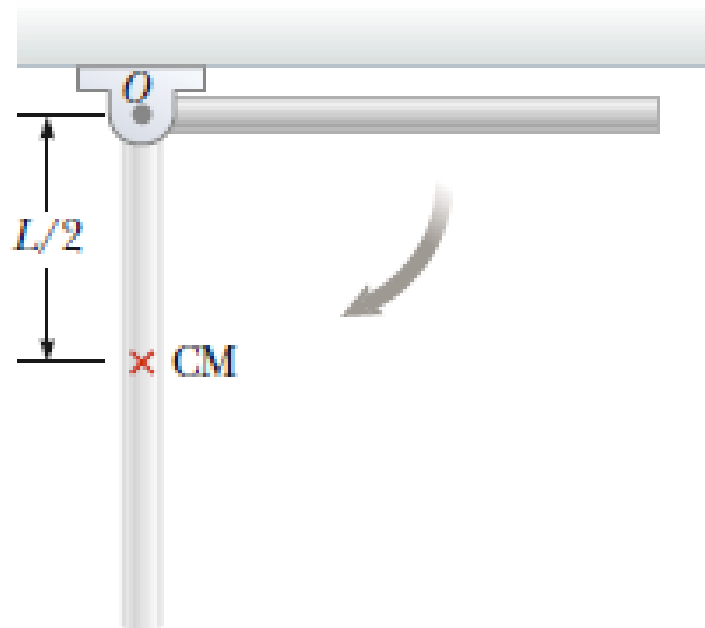
예제 10.11 회전하는 막대 다시 보기

길이 L 이고 질량 M 인 균일한 막대가 한쪽 끝을 통과하는 마찰이 없는 회전 중심점을 중심으로 회전하고 있다(그림). 정지 상태에 있는 막대를 수평 위치에서 놓는다.

(A) 막대가 가장 낮은 위치에 도달할 때 각속력을 구하라.

(B) 연직 위치에 있는 경우, 질량 중심의 접선 속력과 막대의 가장 낮은 점의 접선 속력을 구하라.

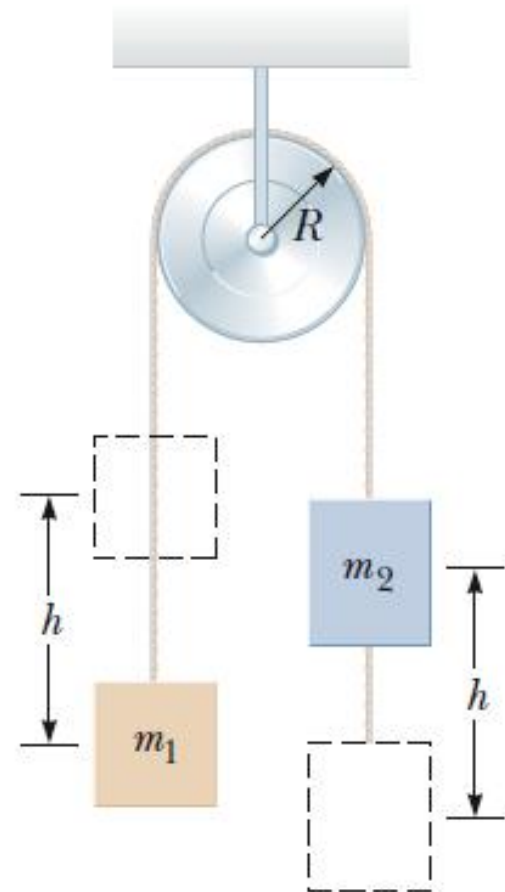
풀이



예제 10.12 에너지와 애틀우드기계

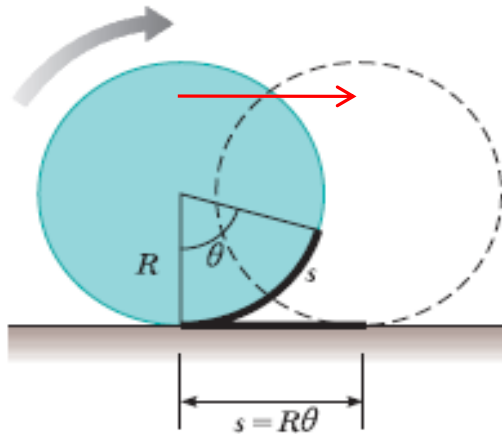
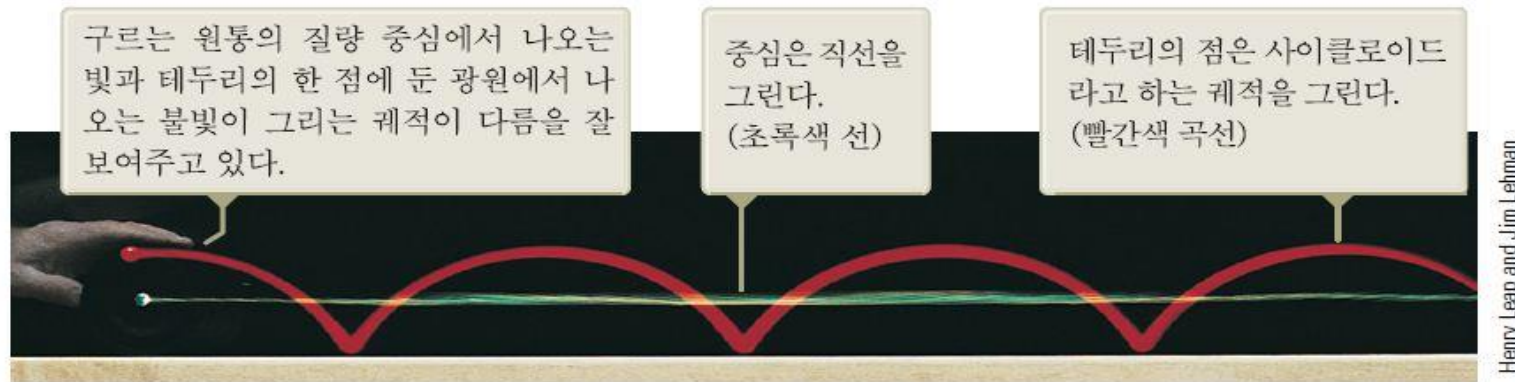
그림처럼 도르래를 통하여 줄로 연결된 서로 다른 질량 m_1 과 m_2 를 가진 두 물체를 생각해 보자. 도르래의 반지름은 R 이고, 관성모멘트는 I 이다. 줄은 도르래에서 미끄러지지 않고 전체 계는 정지 상태에서 시작하였다. 물체 2가 거리 h 만큼 내려왔을 때, 각 물체의 병진 속력을 구하고, 이때 도르래의 각속력도 함께 구하라.

풀이



10.9 강체의 굴림 운동 (Rolling Motion of a Rigid Object)

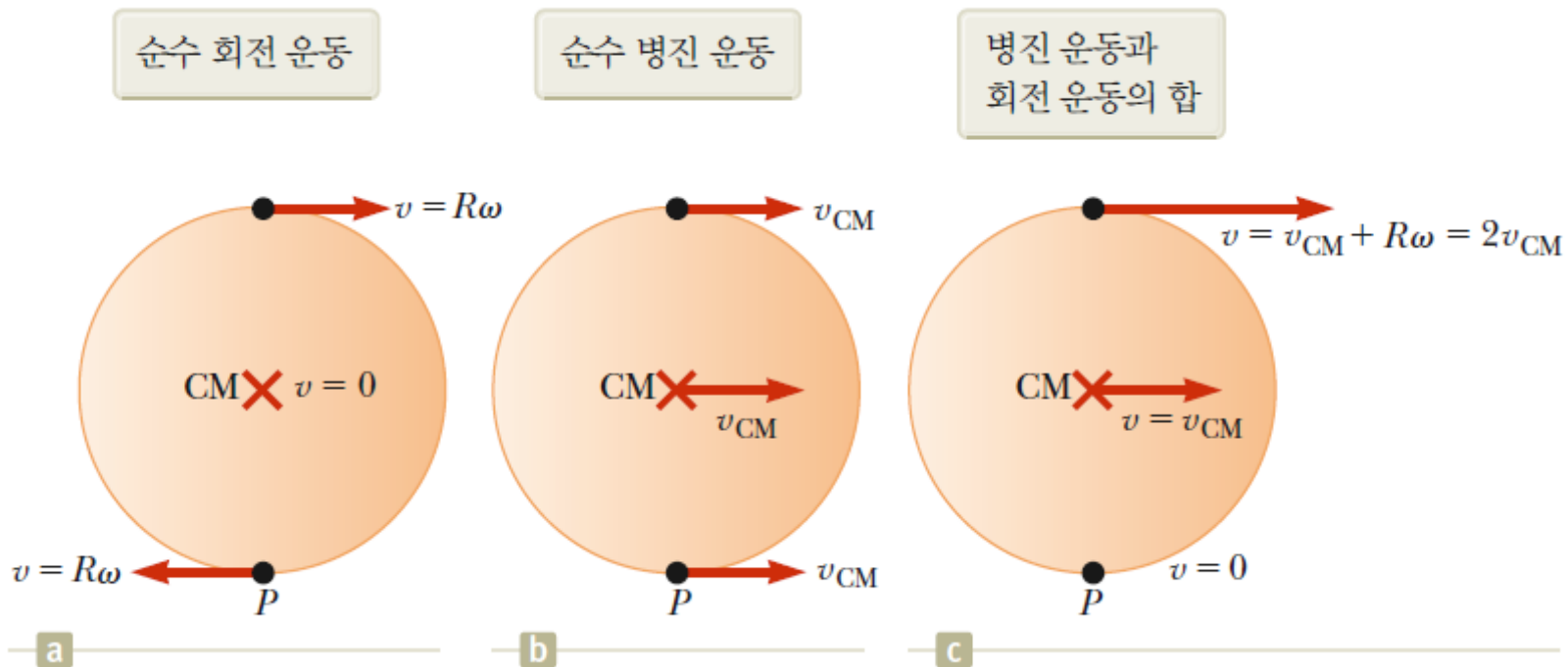
회전 운동과 병진 운동을 동시에 하는 경우를 생각해 보자.



미끄러지지 않고 수평면 위에서 굴러가고 있는
반지름 R 의 원통을 고려하면,

$$v_{\text{CM}} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_{\text{CM}} = \frac{dv_{\text{CM}}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

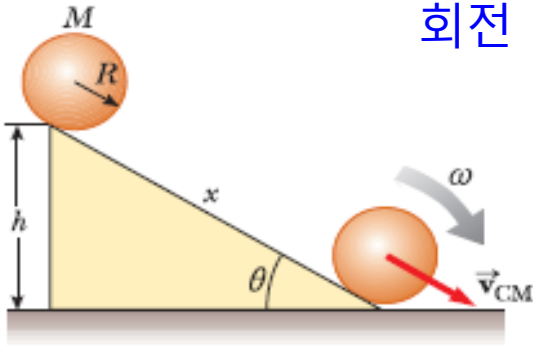


마지막 그림에서 물체는 p점을 중심으로 회전 운동하는 것으로 생각할 수 있으므로

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad I_P = I_{CM} + MR^2 \text{ (평행축 정리)}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (v = r\omega)$$

즉, 구르는 물체의 전체 운동 에너지는 질량 중심에 대한 회전 운동 에너지와 질량 중심의 병진 운동 에너지의 합이다.



순수 굴림 운동의 경우 $v_{CM} = R\omega$ 이므로

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \left(\frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2$$

구가 경사면 바닥에 있을 때 중력 위치 에너지가 영(0)이라고 하면

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M \right) v_{CM}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$\therefore v_{CM} = \left(\frac{2gh}{1 + (I_{CM} / MR^2)} \right)^{1/2}$$

구르지 않고 미끄러지는 경우보다 느리다!

예제 10.13 경사면을 굴러 내려가는 구

그림 10.26에 있는 속이 찬 구에 대하여 경사면 바닥에서 질량 중심의 병진 속력과 병진 가속도의 크기를 구하라.

풀이

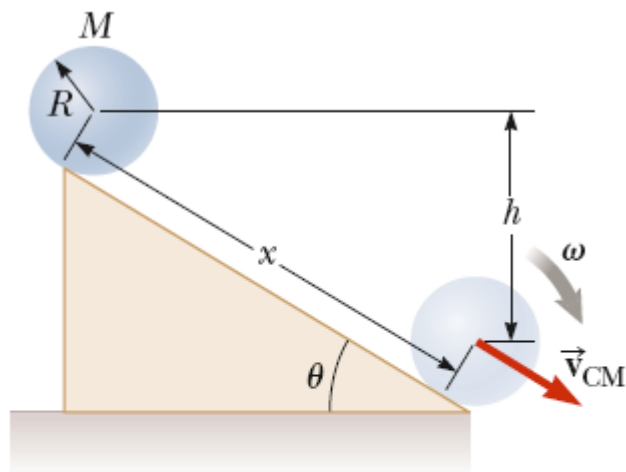


그림 10.26 구가 경사면을 따라 굴러서 내려가고 있다. 미끄러지지 않으면 구-지구 계의 역학적 에너지는 보존된다.

$$v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + (\frac{2}{5}MR^2 / MR^2)} \right]^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh \right)^{1/2}$$

$h = x \sin \theta$ 를 위의 식에 적용한다.

$$v_{CM}^2 = \frac{10}{7}gx \sin \theta \quad v_{CM}^2 = 2a_{CM}x$$

두 표현식이 같다고 놓아 a_{CM} 을 구한다.

$$a_{CM} = \frac{5}{7}g \sin \theta$$

연습문제

1. 물레가 정지 상태에서 일정한 각가속도로 돌기 시작해서 30.0 s 만에 1.00 rev/s의 각속력으로 돈다. (a) 평균 각가속도를 rad/s^2 의 단위로 구하라. (b) 같은 시간 동안 각가속도를 두 배로 하면 나중 각속력도 두 배가 되는가?
(P259.2번)

연습문제

2. 어떤 시간 동안, 회전해서 열리는 문의 각위치가 $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.00t^2$ 의 함수로 표현된다. 여기서 θ 의 단위는 rad, t 의 단위는 s이다. 시간 (a) $t = 0$, (b) $t = 3.0$ s에 문의 각위치, 각속력, 각가속도를 구하라.
(P259.3번)

연습문제

3. 정지되어 있는 바퀴가 일정한 각가속도로 운동을 하여 3.00 s 후에 12.0 rad/s 의 각속력에 도달한다.

(a) 바퀴의 각가속도 크기를 구하라. (b) 이 시간 동안 회전한 각도를 라디안으로 표현하라.

(P259.5번)

연습문제

4. 공작실 회전숫돌을 1.00×10^2 rev/min로 돌리고 있던 전기 모터가 꺼진다. 정지할 때까지 회전숫돌의 각가속도가 -2.00 rad/s^2 라고 가정하자. (a) 회전숫돌이 정지할 때까지 걸리는 시간은 얼마인가? (b) (a)의 시간 동안 회전숫돌이 회전한 각도는 몇 라디안인가?
(P259.7번)

연습문제

5. 경주용 자동차가 반지름이 250 m인 원형 트랙을 돈다. 자동차가 45.0 m/s의 일정한 속력으로 이동한다고 가정할 때, (a) 각속력과 (b) 가속도의 방향과 크기를 구하라.

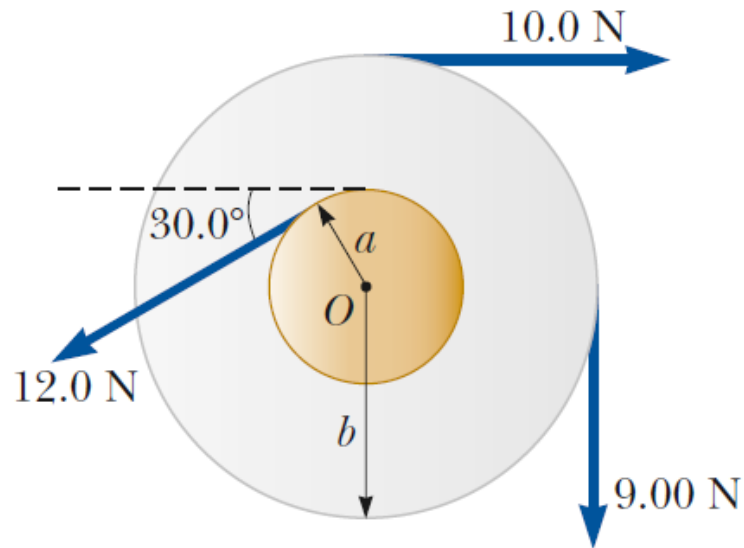
(P259.10)

연습문제

6. 반지름이 8.00 cm인 원판이 중심축 주위로 1,200 rev/min 의 일정한 각속력으로 회전한다. 이때
- (a) 각속력,
 - (b) 중심에서 3.00 cm 떨어진 점의 접선 속도,
 - (c) 가장자리에 있는 점의 지름 가속도,
 - (d) 가장자리에 있는 점이 2.00 s 동안 진행한 거리를 구하라.(P260.14번)

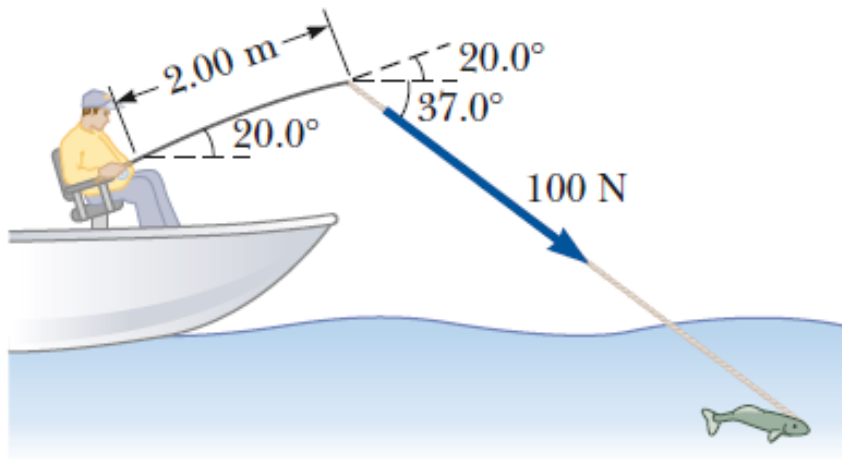
연습문제

7. 그림에 나타난 것처럼 O 를 지나는 회전축을 기준으로 할 때 바퀴에 작용하는 알짜 돌림힘은 얼마인가? 여기서 $a = 10.0\text{ cm}$, $b = 25.0\text{ cm}$ 이다.(P260.16번)



연습문제

8. 그림에서처럼 낚싯대가 수평과 20.0° 의 각도를 이루고 있다. 만약 물고기가 수평면 아래로 37.0° 의 각도를 이루는 100 N 의 힘으로 낚싯줄을 당긴다면, 종이면에 수직이고 낚시꾼의 손을 지나는 축에 대하여 물고기가 작용하는 돌림힘은 얼마인가? 낚싯줄은 낚시꾼의 손에서 2.00 m 에 위치해 있다.
(P260.17번)



연습문제

9. 단단하고 균일한 원반 형태인 회전숫돌의 반지름이 7.00cm 이고 질량이 2.00kg 이다. 모터가 회전숫돌에 작용하는 $0.600\text{ N}\cdot\text{m}$ 의 일정한 돌림힘에 의하여 정지 상태에서부터 일정하게 가속된다.

(a) 회전숫돌이 $1,200\text{ rev/min}$ 의 속력에 도달하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?

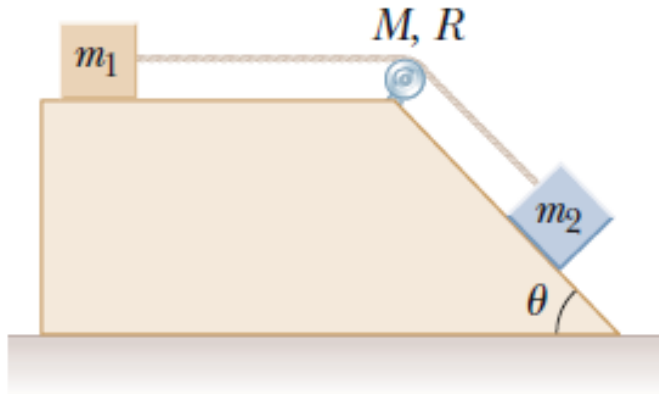
(b) 가속하는 동안 회전숫돌은 몇 번 회전하는가?

(P260.19번)

연습문제

10. 질량 $m_1 = 2.00 \text{ kg}$ 인 물체와 질량 $m_2 = 6.00 \text{ kg}$ 인 두 물체가 반지름 $R = 0.250 \text{ m}$, 질량 $M = 10.0 \text{ kg}$ 인 도르래 위로 질량이 없는 줄에 의하여 연결되어 있다. 그림에 보인 것처럼 질량 하나는 썰기 모양의 경사면 위에 있고 각 $\theta = 30.0^\circ$ 이다. 두 물체의 운동 마찰 계수는 0.360 이다.

- (a) 두 물체와 도르래에 대한 힘 도형을 그리라.
 - (b) 두 물체의 가속도와
 - (c) 도르래 양쪽의 줄에 걸린 장력을 구하라.
- (P260.21번)



연습문제

11. 높이가 2.20 m, 너비가 0.870 m, 질량이 23.0 kg인 속이 균일하게 찬 얇은 문이 있다.

(a) 경첩을 중심으로 회전하는 경우, 문의 관성 모멘트는 얼마인가?

(b) 이 계산에 필요하지 않은 자료가 있는가?

(P261.25번)

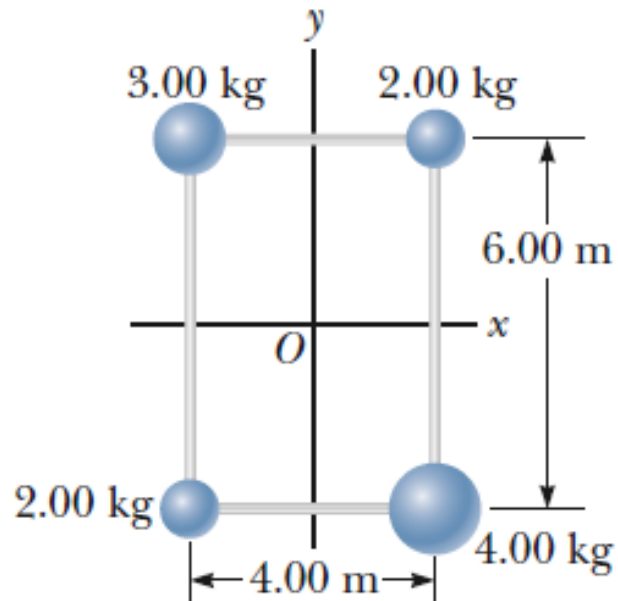
연습문제

12. 그림과 같이 질량이 무시되는 강체 막대에 네 입자가 연결되어 있다. 원점은 사각형의 가운데이다. 이 계가 z 축을 중심으로 xy 평면에서 6.00 rad/s 의 각속력으로 회전하고 있다.

(a) z 축을 중심으로 하는 관성 모멘트를 구하라.

(b) 이 계의 회전 운동 에너지를 구하라.

(P262.31번)



연습문제

13. 수평으로 놓인 800 N의 회전목마는 반지름이 1.50 m인 고체 원반이다. 이 회전목마의 가장자리에 접선 방향으로 50.0N의 일정한 수평력이 작용하여, 회전목마가 정지 상태에서부터 움직이기 시작한다. 3.00 s 후 회전목마의 운동 에너지를 구하라.(P262.33번)

연습문제

14. 질량이 10.0 kg 인 원통 형태의 물체가 미끄러짐 없이 수평면을 굴러가고 있다. 어느 순간 질량 중심의 속력이 10.0m/s 가 된다. 이때
- (a) 질량 중심의 병진 운동 에너지,
 - (b) 질량 중심에 대한 회전 운동 에너지,
 - (c) 전체 운동 에너지를 구하라.
- (P263.37번)

연습문제

15. 테니스공은 얇은 벽으로 된 속이 빈 구이다. 그림에 표시된 트랙의 수평 부분에서 미끄러짐이 없이 4.03 m/s 의 속력으로 구르고 있다. 공은 반지름 $r = 45.0 \text{ cm}$ 의 연직 원형 고리의 안쪽을 따라 구르다가 결국은 수평보다 $h = 20.0 \text{ cm}$ 아랫부분에서 트랙을 벗어난다.

(P263,39번)

- 고리의 최고점에서의 속력을 구하라.
- 공이 고리의 최고점에서 트랙을 벗어나지 않음을 보이라.
- 트랙을 떠날 때의 속력을 구하라.
- 공과 트랙 사이의 마찰력이 무시할 수 있을 만큼 작아 공이 트랙에서 구르지 않고 미끄러진다고 가정하자. 고리의 최고점에서의 속력은 더 늘어나는가 아니면 줄어드는가?
- (d)에서 얻은 답을 설명하라.

