

# 11장. 각운동량

## (Angular Momentum)

11.1 벡터곱과 토크

11.2 분석 모형: 비고립계(각운동량)

11.3 회전하는 강체의 각운동량

11.4 분석 모형: 고립계(각운동량)

11.5 자이로스코프와 팽이의 운동

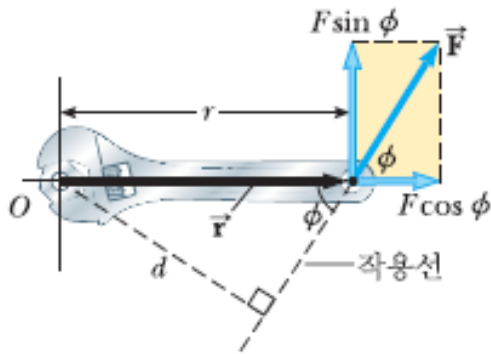


## 11.1 벡터곱과 토크

(The Vector Product and Torque)

앞에서 배운 **토크**를 다시 생각해보자. 토크의 크기는

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

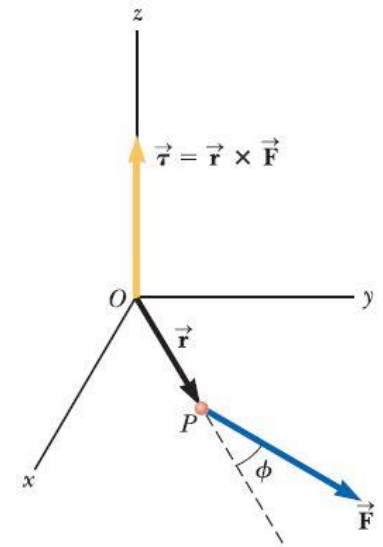


토크의 방향은 **오른나사 법칙**을 따르므로, 토크를 벡터 연산으로 표현하면

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

이런 연산 규칙을 **벡터곱** 또는 **크로스곱**이라고 한다.

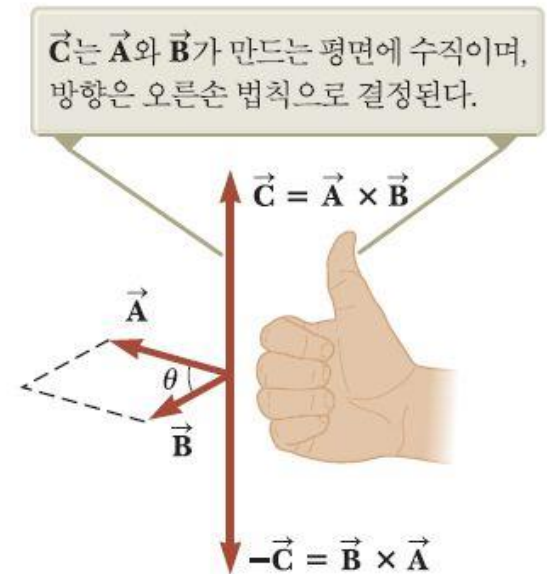
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$



$C$ 의 크기는  $C = AB \sin \theta$

두 벡터가 만드는 평행사변형의 면적에  
해당한다.

$C$ 의 방향은 두 벡터가 만드는 평면에 수직  
이며, 오른손 법칙에 의해 결정된다.

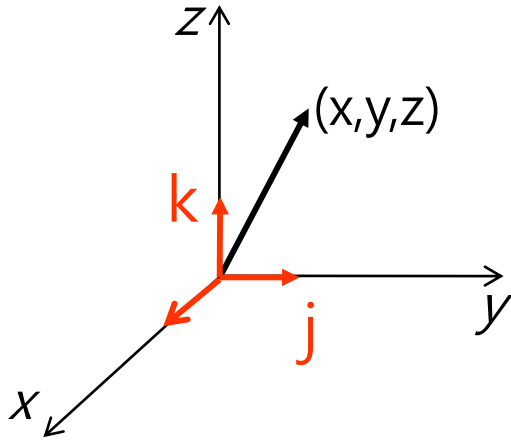


$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$



$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_y \mathbf{k} - A_x B_z \mathbf{j} - A_y B_x \mathbf{k} + A_y B_z \mathbf{i} + A_z B_x \mathbf{j} - A_z B_y \mathbf{i} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

또는

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

### 예제 11.1 벡터곱

xy 평면에 놓인 두 벡터  $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ 와  $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ 가 있다.

$\vec{A} \times \vec{B}$ 를 계산하고,  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ 임을 보이라.

풀이

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= 2\hat{i} \times (-\hat{i}) + 2\hat{i} \times 2\hat{j} + 3\hat{j} \times (-\hat{i}) \\ &\quad + 3\hat{j} \times 2\hat{j}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 0 + 4\hat{k} + 3\hat{k} + 0 = 7\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} \times \vec{A} &= (-\hat{i}) \times 2\hat{i} + (-\hat{i}) \times 3\hat{j} + 2\hat{j} \times 2\hat{i} \\ &\quad + 2\hat{j} \times 3\hat{j}\end{aligned}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = 0 - 3\hat{k} - 4\hat{k} + 0 = -7\hat{k}$$

## 11.2 분석 모형: 비고립계(각운동량)

(Analysis Model: Nonisolated System(Angular Momentum))

선운동량과 유사하게, **회전 운동에 관한 운동량**을 생각하자.

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F} = \sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

또,  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = 0$  이므로 위 식의 우변에 더 하면

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt}$$

$$\therefore \sum \boldsymbol{\tau} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

각 운동량

$$(\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt})$$



원점  $O$ 에 대한 입자의 순간 **각운동량**(angular momentum)  $\mathbf{L}$ 은 입자의 순간 위치벡터  $\mathbf{r}$ 과 순간 선운동량  $\mathbf{p}$ 의 벡터곱으로 정의된다.

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{각 운동량}$$

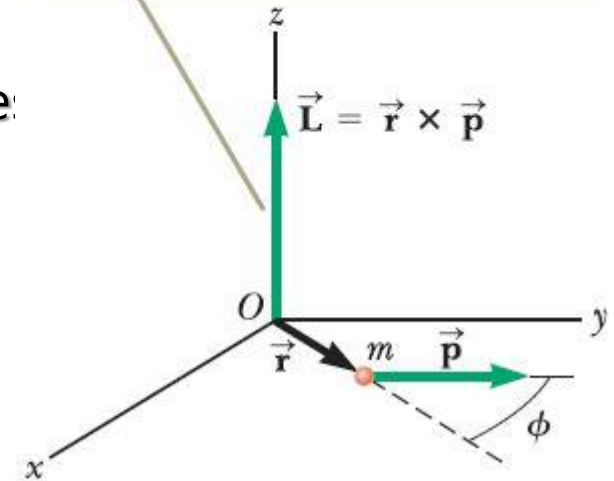
축에 대한 입자의 각운동량  $\vec{L}$ 은 축에 대한 입자의 위치  $\vec{r}$ 과 운동량  $\vec{p}$  모두에 수직인 벡터이다.

◆ 입자계의 각운동량 (Angular Momentum of a System of Particle:

$$\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{L}_n = \sum_i \mathbf{L}_i$$

$$\frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$$

$$\therefore \sum \boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} \quad \left( \sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}_{tot}}{dt} \right)$$



## 예제 11.4 끈으로 연결된 두 물체

질량이  $m_1$ 인 구와 질량이  $m_2$ 인 상자가 도르래를 통해 가벼운 끈으로 연결되어 있다. 도르래의 반지름은  $R$ 이고 테의 질량은  $M$ 이며, 도르래 살의 무게는 무시할 수 있다. 상자가 마찰이 없는 수평면에서 미끄러진다고 할 때, 각운동량과 토크의 개념을 이용하여 두 물체의 선가속도를 구하라.

**풀이** 도르래 회전축에 대해 각운동량을 계산하면

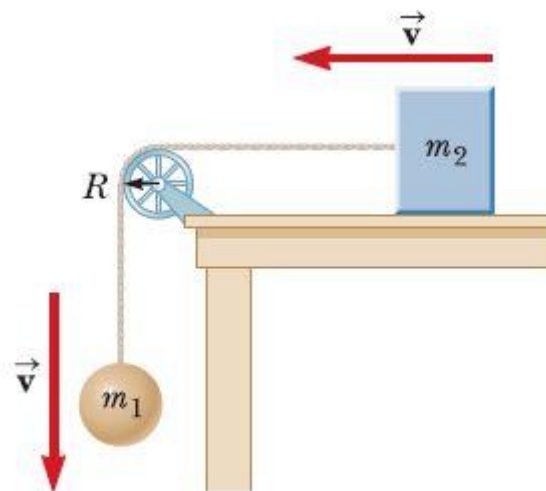
$$(1) \quad L = m_1 v R + m_2 v R + M v R \\ = (m_1 + m_2 + M) v R$$

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt} \text{에 따라서}$$

$$m_1 g R = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2 + M) v R]$$

$$(2) \quad m_1 g R = (m_1 + m_2 + M) R \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$





## 11.3 회전하는 강체의 각운동량

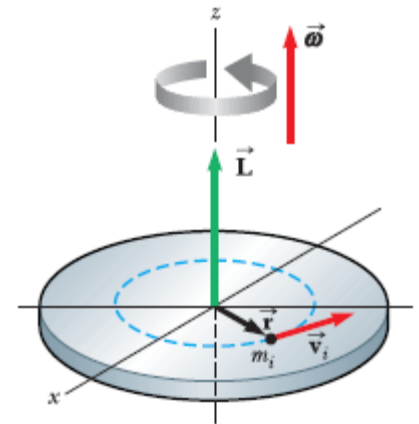
(Angular Momentum of a Rotating Rigid Object)

$z$ -축과 일치하는 고정축 주위로 회전하는 강체의 각운동량을 결정하자.  
강체의 각 입자들은  $xy$  평면 내에서  $z$ -축 주위를 각속력  $\omega$ 로 회전한다.  
질량이  $m_i$ 인 입자의  $z$ -축에 대한 각운동량의 크기는  $m_i v_i r_i$ 이다.

$$\therefore L_i = m_i r_i^2 \omega \quad (\because v = r\omega)$$

따라서 강체 전체의 각운동량은

$$\therefore L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$



$$\therefore L_z = I\omega \quad (p = mv)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha, \quad \therefore \sum \tau_{ext} = I\alpha \quad (F = ma)$$

### 예제 11.5 볼링공

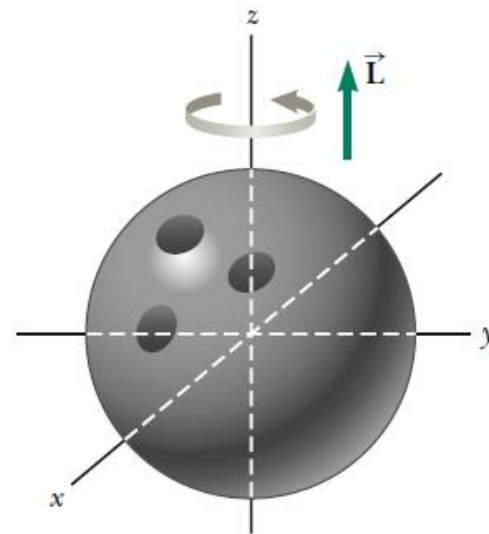
그림 11.8과 같이 10 rev/s로 회전하는 볼링공의 각운동량의 크기를 구하라.

풀이

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = 0.040 \text{ kgm}^2$$

$$\begin{aligned} L &= I\omega = (0.040 \text{ kgm}^2) \left(10 \frac{\text{rev}}{\text{s}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) \\ &= 2.53 \text{ kgm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

그림 11.8 (예제 11.5) 그림과 같이  $z$ 축 주위로 회전하는 볼링공은  $+z$  방향으로 각운동량  $\vec{L}$ 을 갖는다. 회전의 방향이 반대가 되면  $\vec{L}$ 은  $-z$  방향을 향한다.



## 11.4 분석 모형: 고립계(각운동량)

(Analysis Model: Isolated System(Angular Momentum))

$$\sum \boldsymbol{\tau} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad \sum \tau_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_{tot}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_{tot} = \text{일정},$$

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$$

계에 작용하는 알짜 외부 토크가 영(0)일 때,  
즉 계가 고립되어 있으면 계의 전체 각운동량은  
크기와 방향 모두 일정하다.

각운동량 보존(conservation of angular momentum)

$$\left(\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0\right) \quad \text{선운동량 보존}$$

고립계에서

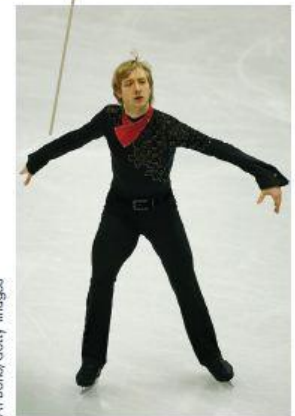
$$\left\{ \begin{array}{l} E_i = E_f \quad (\text{에너지 전달이 없는 경우}) \\ \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f \quad (\text{알짜 외력이 0인 경우}) \\ \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f \quad (\text{알짜 외부 토크가 0인 경우}) \end{array} \right.$$

팔과 다리가 몸 가까이에 있으면,  
스케이터의 관성 모멘트는 작고  
각속력은 크다.



Clive Rose/Getty Images

회전을 끝내기 위해, 팔과 다리를  
뻗어 관성 모멘트를 크게 한다.



Al Bello/Getty Images

## 예제 11.7 회전 목마

원반 모양의 수평판이 마찰이 없는 수직축을 중심으로 자유롭게 회전하고 있다. 수평판의 질량은  $M=100\text{kg}$ 이고 반지름은  $R=2.0\text{m}$ 이다. 질량이  $m=60\text{kg}$ 인 학생이 원반의 가장자리로부터 중심을 향하여 천천히 걸어가고 있다. 만약 학생이 원반의 가장자리에 있을 때 계의 각속력이  $2.0\text{ rad/s}$ 이었다면, 학생이 중심으로부터  $r=0.50\text{m}$  떨어진 지점에 도달했을 때 계의 각속력을 구하라.

**풀이** 점 O를 지나는 회전축에 대한 계의 관성모멘트는

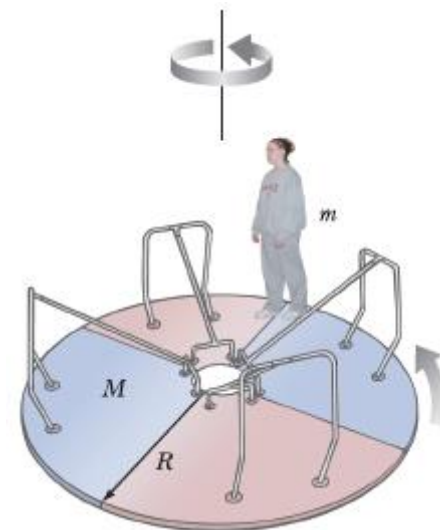
$$I_i = I_{pi} + I_{si} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

$$I_f = I_{pf} + I_{sf} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f$$

$$\therefore \omega_f = \left[ \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \right] \omega_i$$

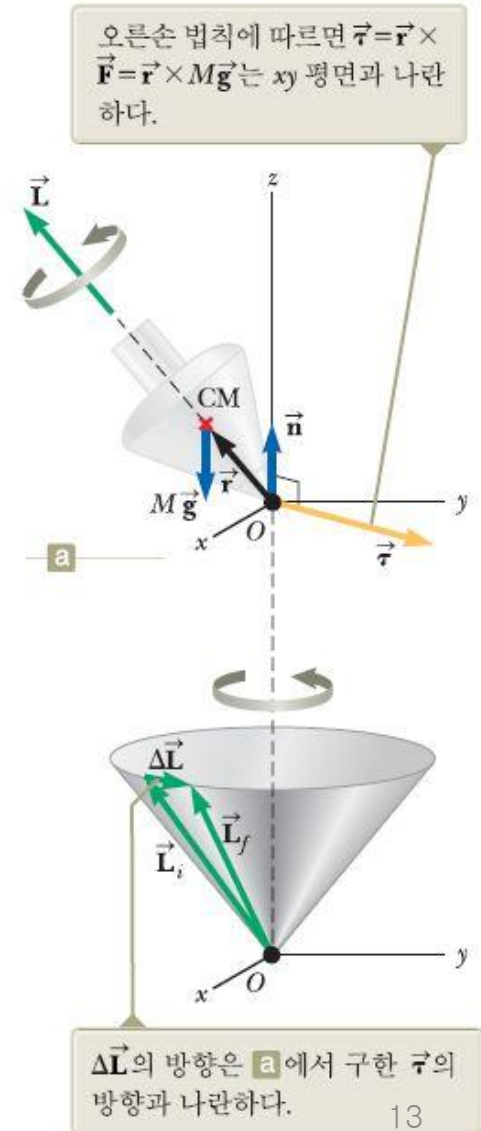


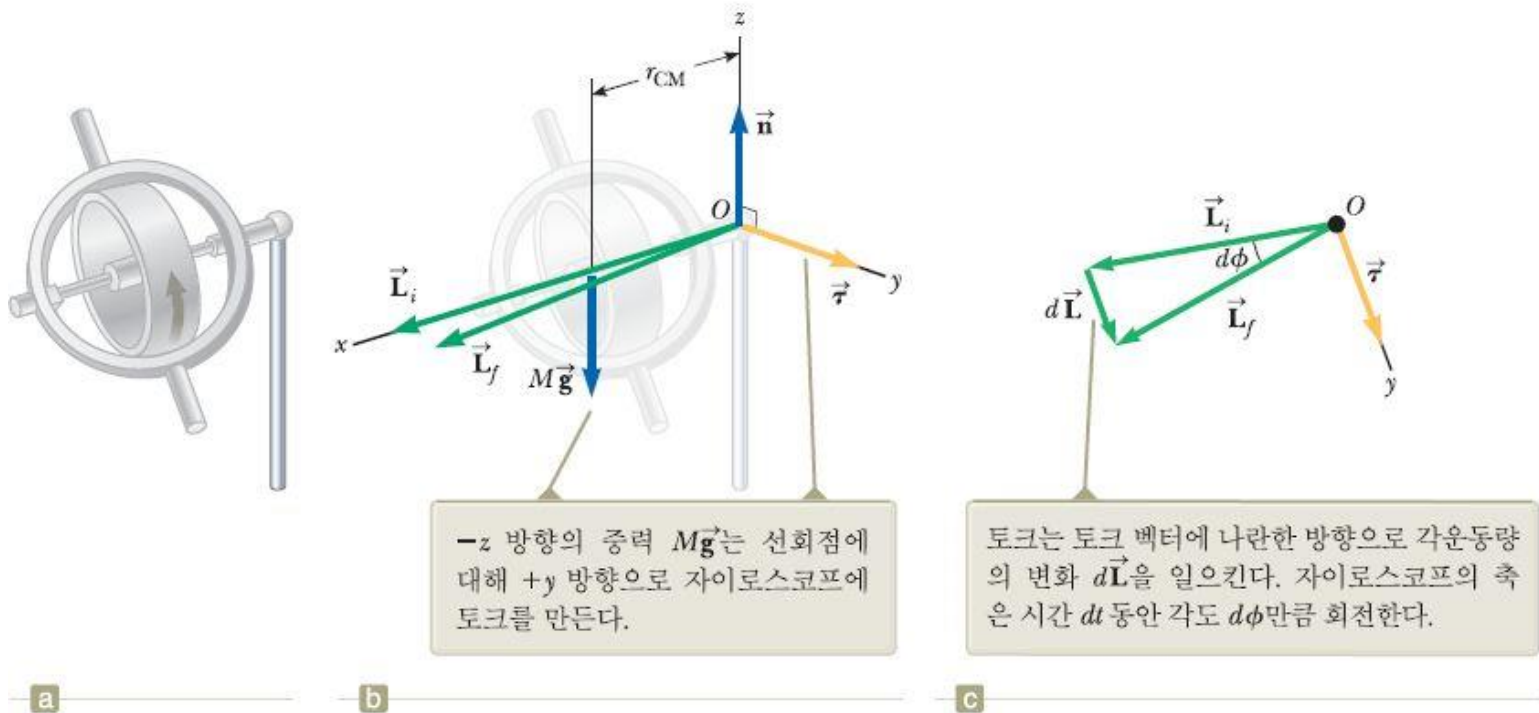
## 11.5 자이로스코프와 팽이의 운동 (The Motion of Gyroscopes and Tops)

팽이에 작용하는 중력이 O점에 대해 작용하는 토크  
때문에 회전축의 방향이 바뀌게 된다.  
따라서 팽이의 중심축이 z-축을 회전축으로  
회전하게 된다.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

그림에서  $\mathbf{r}$ 의 방향과  $\mathbf{L}$ 의 방향과 일치하므로 토크의 방  
향은 각운동량과 수직한 방향이 된다. 따라서 각운동량  
의 크기는 변하지 않고 방향만 바뀐다.





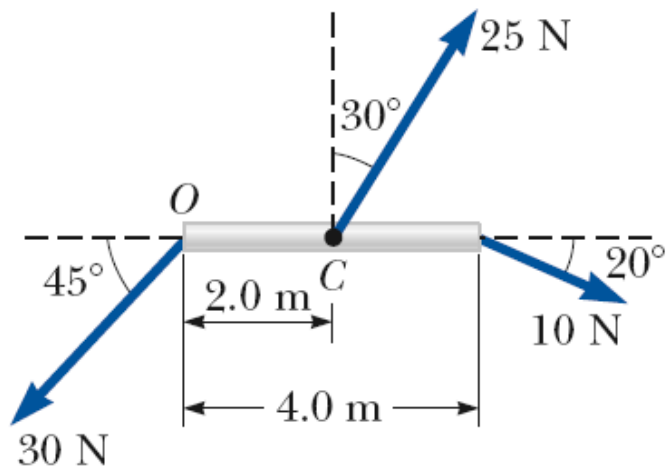
벡터 그림으로부터 시간 간격  $dt$  동안 각운동량 벡터는 축이 회전한 각도인  $d\phi$ 만큼 회전함을 알 수 있다.

$$\sin(d\phi) \approx d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau dt}{L} = \frac{(Mgh)dt}{L}$$

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega} \quad (\text{세차 진동수})$$

## 연습문제

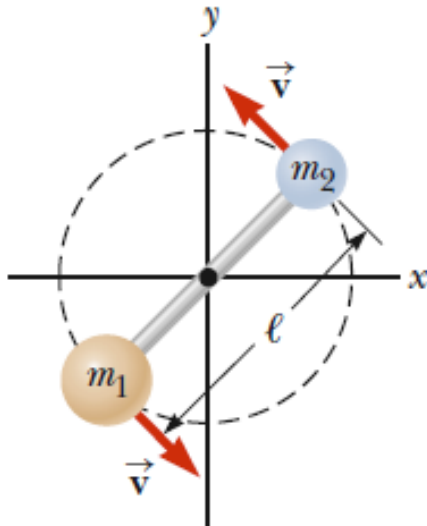
1. 그림에서와 같이 (a) 종이에 수직이고  $O$  를 지나는 회전축에 대하여 (b) 종이에 수직이고  $C$  를 지나는 회전축에 대하여, 막대에 작용하는 알짜 돌림힘(크기와 방향)을 각각 구하라. (P282.5번)



## 연습문제

2. 길이  $\ell = 1.00 \text{ m}$ 인 가벼운 강체 막대의 양 끝에 질량  $m_1 = 4.00 \text{ kg}$ 과  $m_2 = 3.00 \text{ kg}$ 인 두 물체가 연결되어 있다. 연결된 물체들이 막대의 중앙을 중심으로  $xy$  평면에서 회전하고 있다(그림). 두 물체의 속력이  $5.00 \text{ m/s}$ 일 때, 원점에 대한 계의 각운동량을 구하라.

(P282,11번)

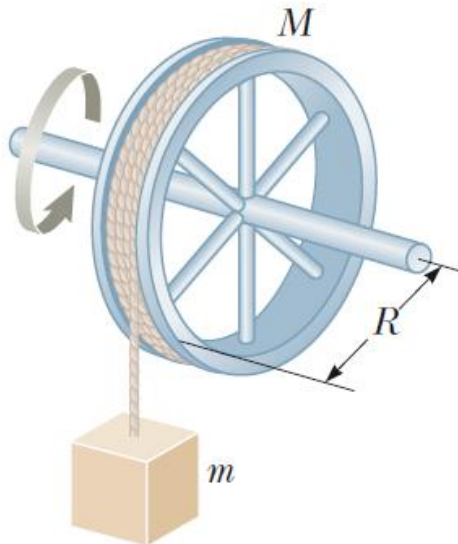




## 연습문제

3. 그림과 같이 질량  $m = 4.00 \text{ kg}$ 인 물체가 도르래에 감긴 질량을 무시할 수 있는 가벼운 줄 끝에 매달려 있다. 도르래는 반지름  $R = 8.00 \text{ cm}$ 이고 질량  $M = 2.00 \text{ kg}$ 인 얇은 고리 모양이고, 실의 질량은 무시한다.

- 계에 작용하는 도르래의 축에 대한 알짜 돌림힘의 크기는 얼마인가?
- 물체가 속도  $v$ 에 도달할 때 도르래의 각속력은  $\omega = v/R$ 이다. 도르래 축에 대한 계의 전체 각운동량의 크기를 계산하라.
- (b)에서 얻은 결과와  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ 을 이용하여 물체의 가속도를 구하라.  
(P283.18번)



## 연습문제

4. 반지름  $r = 0.500 \text{ m}$ , 질량  $m = 15.0 \text{ kg}$ 인 속이 찬 균일한구가 중심을 지나는 연직축에 대하여 시계 반대 방향으로 회전하고 있다. 각속력이  $3.00 \text{ rad/s}$ 일 때 각운동량 벡터를 구하라.(P283.22번)

## 연습문제

5. 질량  $m = 3.00 \text{ kg}$ , 반지름  $r = 0.200 \text{ m}$ 인 균일한 원판이 표면에 수직인 고정축 주위로 회전하고 있다. 각진동수가  $6.00 \text{ rad/s}$ 일 때 회전축이

(a) 질량 중심을 지날 때와

(b) 중심과 가장자리의 중간 지점을 지날 때의 각운동량 크기를 각각 구하라.(P283.24번)

## 연습문제

6. 질량이  $0.400\text{ kg}$ 인 입자가 질량이  $0.100\text{ kg}$ 인 미터자의 눈금이  $100\text{ cm}$ 인 곳에 붙어 있다. 미터자가 평평하고 마찰이 없는 수평 탁자 위에서 각속력  $4.00\text{ rad/s}$ 로 회전하고 있다.

(a)  $50.0\text{ cm}$  눈금을 지나고 탁자에 수직인 축에 대하여 회전할 경우와

(b)  $0\text{ cm}$  눈금을 지나고 탁자에 수직인 축에 대하여 회전할 경우 계의 각운동량을 구하라(P284.26번)

## 연습문제

7. 반지름  $R = 2.00 \text{ m}$ , 관성 모멘트  $I = 250 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 인 회전목마가 마찰이 없는 연직축에 대하여  $10.0 \text{ rev/min}$ 의 각속력으로 회전하고 있다. 회전축을 향하여  $25.0 \text{ kg}$ 의 어린이가 회전목마 위로 뛰어올라 가장자리에 앉는다. 회전목마의 새로운 각속력은 얼마인가? (P284.30번)

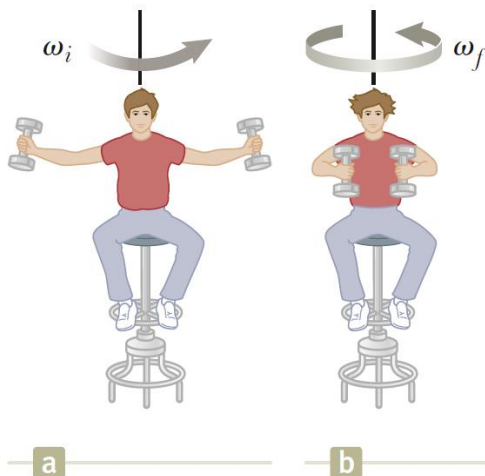
## 연습문제

8. 60.0 kg의 여성이 반지름이 2.00 m이고 관성 모멘트가  $500 \text{ kgm}^2$ 인 수평 회전반의 서쪽 가장자리에 서 있다. 회전반은 처음에 정지 상태에 있으며, 중심을 지나는 마찰이 없는 연직축 주위로 자유롭게 회전할 수 있다. 여성이 지구에 대하여  $1.50 \text{ m/s}$ 의 일정한 속력으로 (계를 위에서 볼 때) 시계 방향으로 가장자리를 따라 걷기 시작한다. 여성-회전반계의 운동을 고려해 보자. (a) 계의 역학적 에너지는 일정한가? (b) 계의 운동량은 일정한가? (c) 계의 각운동량은 일정한가? (d) 회전반은 어느 방향으로 얼마의 각속력으로 돌게 되는가? (e) 여성이 운동을 시작하고 회전반이 움직이기 시작하면서, 인체의 화학적 에너지 중 얼마만큼이 여성-회전반 계의 역학적 에너지로 변환되는가?(P284.32번)

## 연습문제

9. 어떤 학생이 일인용 회전의자에 질량이 각각 3.00 kg인 아령을 들고 앉아 있다(그림). 그림 (a)처럼 학생이 양팔을 수평으로 벌릴 때, 회전축에서 아령까지의 거리는 1.00 m이고 각속력은 0.750 rad/s이다. 학생과 의자의 관성 모멘트가 3.00 kg·m<sup>2</sup>로 팔의 위치와 관계없이 일정하다고 가정한다. 그림 (b)처럼 회전하는 도중에 학생이 팔을 안으로 오므려 회전축과 아령 사이의 거리가 0.300 m가 되게 한다. 이때

- 새로운 각속력을 구하라.
- 팔을 벌릴 때와 안으로 오므릴 때, 이 회전하는 계의 운동 에너지를 각각 구하라.(P285.33번)



## 연습문제

10. 마찰이 없는 수평면 위에 정지해 있는 질량  $M$ 의 나무 조각이 길이  $\ell$  인 질량을 무시할 수 있는 강체 막대에 붙어 있다(그림). 막대의 다른 한쪽 끝을 고정시켜 회전할 수 있도록 하였다. 수평면에 평행하고 막대에 수직인 방향으로 속력  $v$ 로 움직이던 질량  $m$ 인 총알이 나무 조각에 충돌하여 박힌다.

- 막대의 회전축에 대한 총알-나무 조각 계의 각운동량은 얼마인가?
- 총알이 원래 갖고 있던 운동 에너지의 어느 정도가 충돌 과정에서 계의 내부 에너지로 변환되는가? (P285.36번)

