Задание для лабораторного практикума по теме «Анализ реализации итерационного метода на примере схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона»

Напишите программу, реализующую алгоритм решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (1) сеточным методом в прямоугольной области Ω.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \\ &u(x,y)=g(x,y), \qquad (x,y)\in\Gamma=\partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Используйте следующую конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{j+1,k}-2u_{j,k}+u_{j-1,k}}{h^2}+\frac{u_{j,k+1}-2u_{j,k}+u_{j,k-1}}{l^2}=f_{j,k}, \quad (x_j,y_k)\in\omega_h, \\ &u_{j,k}=g_{j,k} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_j,y_k)\in\gamma_h, \end{aligned} \tag{2}$$

где $u_{j,k}$ - приближенное значение решения разностной задачи в узле (x_j,y_k), ω_h - совокупность внутренних узлов сетки, γ_h - совокупность граничных узлов сетки, $f_{j,k}=f(x_j,y_k)$, $g_{j,k}=g(x_j,y_k)$, h - шаг сетки по оси Ox, l - шаг сетки по оси Oy.

При разработке алгоритма необходимо предусмотреть возможность:

- изменения размеров прямоугольной области Ω.
- задания других граничных условий,
- проведения расчетов на последовательно удваиваемых сетках.

Для решения системы разностных уравнений (2) используйте итерационный метод в соответствии с вариантом задания, приведенном в таблице 1. Отладьте программу и рассчитайте решение разностной задачи из таблицы 1 с точностью $\varepsilon=0.01$. Сравните полученное решение с точным.

Таблица 1. *Варианты заданий*

Исполнитель	**Правая часть**	**Граничные условия**	**Итерационный метод**	**Точное решение**
Аракелов Артур	$f(x,y) = 2e^{-(x+y)^2}(4x^2 + 8xy + 4y^2 - 2)$	$u(x, y = 0) = e^{-x^2}$ $u(x = 1, y) = e^{-(y+1)^2}$ $u(x, y = 1) = e^{-(x+1)^2}$ $u(x = 0, y) = e^{-y^2}$	Якоби	$u(x,y) = e^{-(x+y)^2}$
Беззубов Дмитрий	$f(x,y) = 2\ln(x+y) + 3$	$u(x, y = 0) = \frac{1}{2}x^2\ln(x)$ $u(x = 2, y) = \frac{1}{2}(2+y)^2\ln(2+y)$ $u(x, y = 1) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)$ $u(x = 1, y) = \frac{1}{2}(1+y)^2\ln(1+y)$	Зейделя	$u(x,y) =$ $= \frac{1}{2}(x+y)^2\ln(x+y)$
Воробьева Арина	$f(x,y) = -(x^2 + y^2)\ \ \sin(xy)$	$u(x, y = -1) = -\sin(x)$ $u(x = 1, y) = \sin(y)$ $u(x, y = 1) = \sin(x)$ $u(x = -1, y) = -\sin(y)$	Верхней релаксации	$u(x,y) = \sin(xy)$
Калинин Евгений	$f(x,y) = e^{-xy}(x^2 + y^2)$	$u(x, y = 0) = 1$ $u(x = 1, y) = e^{-y}$ $u(x, y = 1) = e^{-x}$ $u(x = 0, y) = 1$	Нижней релаксации	$u(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$
Ковшов Степан	$f(x,y) = 4e^{1-x^2-y^2}(x^2 + y^2 - 1)$	$u(x, y = -1) = e^{-x^2}$ $u(x = 1, y) = e^{-y^2}$ $u(x, y = 1) = e^{-x^2}$ $u(x = -1, y) = e^{-y^2}$	Якоби	$u(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$
Корчева Полина	$f(x,y) = 2x^3 - 2x^2 + 6xy^2 - 2y^2$	$u(x, y = 0) = \frac{1}{8}(256 - x^4\ \ )$ $u(x = 1, y) =$ $= y^2 + \frac{1}{8}(256 - (1 + y^2)^2)$ $u(x, y = 1) =$ $= x^2 + \frac{1}{8}(256 - (x^2 + 1)^2)$ $u(x = 0, y) = \frac{1}{8}(256 - y^4\ \ )$	Зейделя	$u(x,y) =$ $= x^2y^2 + \frac{1}{8}(256 -$ $-(x^2 + y^2)^2)$
Курагина Надежда	$f(x,y) = 2e^{-(x+y)^2}(4x^2 + 8xy + 4y^2 - 2)$	$u(x, y = 0) = e^{-x^2}$ $u(x = 1, y) = e^{-(y+1)^2}$	Зейделя	$u(x,y) = e^{-(x+y)^2}$

		$u(x, y = 1) = e^{-(x+1)^2}$ $u(x = 0, y) = e^{-y^2}$		
Пуль Даниил	$f(x, y) = 2\ln(x + y) + 3$	$u(x, y = 0) = \frac{1}{2}x^2\ln(x)$ $u(x = 2, y) = \frac{1}{2}(2 + y)^2\ln(2 + y)$ $u(x, y = 1) = \frac{1}{2}(x + 1)^2\ln(x + 1)$ $u(x = 1, y) = \frac{1}{2}(1 + y)^2\ln(1 + y)$	Якоби	$u(x, y) =$ $= \frac{1}{2}(x + y)^2\ln(x + y)$
Сажура Салах-Эддин	$f(x, y) = -(x^2 + y^2)\ \ \sin(xy)$	$u(x, y = -1) = -\sin(x)$ $u(x = 1, y) = \sin(y)$ $u(x, y = 1) = \sin(x)$ $u(x = -1, y) = -\sin(y)$	Нижней релаксации	$u(x, y) = \sin(xy)$
Сергеев Дмитрий	$f(x, y) = e^{-xy}(x^2 + y^2)$	$u(x, y = 0) = 1$ $u(x = 1, y) = e^{-y}$ $u(x, y = 1) = e^{-x}$ $u(x = 0, y) = 1$	Верхней релаксации	$u(x, y) = \mathrm{e}^{-xy}$
Синицын Никита	$f(x, y) = -(x^2 + y^2)\ \ \sin(xy)$	$u(x, y = -1) = -\sin(x)$ $u(x = 1, y) = \sin(y)$ $u(x, y = 1) = \sin(x)$ $u(x = -1, y) = -\sin(y)$	Якоби	$u(x, y) = \sin(xy)$
Смирнова Елена	$f(x, y) = 4e^{1-x^2-y^2}(x^2 + y^2 - 1)$	$u(x, y = -1) = e^{-x^2}$ $u(x = 1, y) = e^{-y^2}$ $u(x, y = 1) = e^{-x^2}$ $u(x = -1, y) = e^{-y^2}$	Зейделя	$u(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$