傅立叶变换

庄金峰

2018 年 6 月 27 日

1 启发

一个矩形波，可以由很多个正弦波叠加慢慢逼近，在 WIKI 中有展示。一个正弦波，对应一个圆周运动在 X 轴上的投影。正弦波的周期对应角速度，振幅对应半径，相位对应起始位置。所以用一个圆表示一个正弦波是可以的。正弦波按时间变化和圆周的角速度建立了时域到频域的转化通道。

2 正交坐标系

参照空间直角坐标系，如果两个向量的点乘等于 0，说明二者相互垂直。

常量，正弦函数，余弦函数在周期范围内相乘，叠加之后的值等于 0，说明这三者相互垂直，可以构成坐标系。

2.1 定义

综合上面描述，f(x) 可以分解为一个常量，多个正弦和余弦的叠加：

$f(x) = a_0 + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + ... + a_n cosx + b_n sinx$

$f(x) = sin(x)$

2.2 计算系数

计算 a_0:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}(a_0 + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + ... + a_n cosx + b_n sinx)dx$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx$

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

计算 a_n, b_n:

$\int_{-\pi}^{\pi} cosnx f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}(a_0 + a_1 cosx + b_1 sinx + a_2 cos2x + b_2 sin2x + ... + a_n cosx + b_n sinx) cosnx dx$

$\int_{-\pi}^{\pi} cosnx f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n cos^2 nx dx$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cosnx f(x)dx$