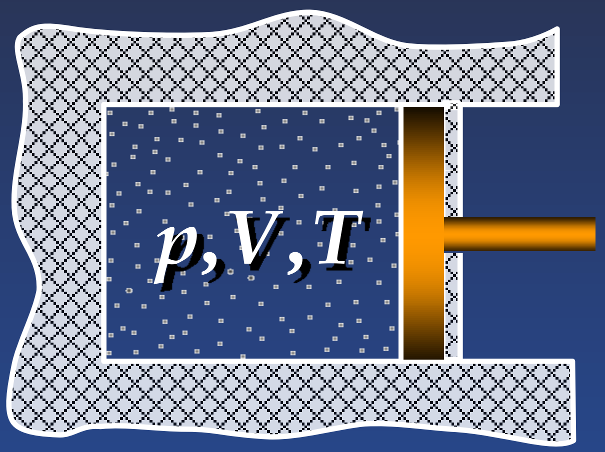
# §13.3 绝热过程　多方过程

# 一、准静态绝热过程

**过程特点：** 与外界无热量交换，即 $dQ \equiv 0$




$$dQ = dE + dW = 0 \quad \therefore \quad dW = -dE$$

$$pdV = -\nu C_{V,m} dT \qquad (1)$$

对 $pV = \nu RT$ 两边微分：

$$pdV + Vdp = \nu RdT \qquad (2)$$

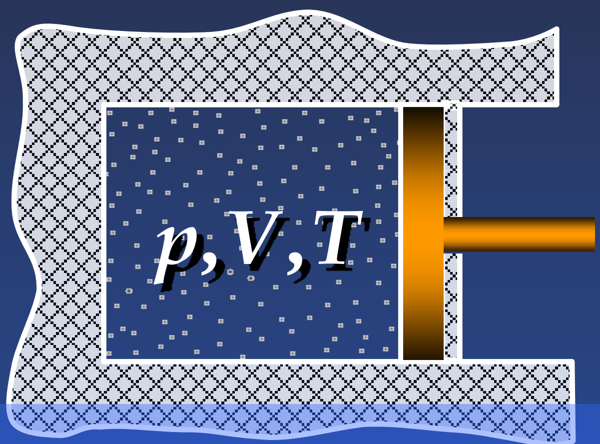
(1)、(2) $\longrightarrow$

$$\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \gamma$$

$$\gamma \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \longrightarrow d\ln(pV^{\gamma}) = 0$$

$$\therefore \quad pV^{\gamma} = C_1 \qquad \text{(泊松公式)} \qquad (4)$$




利用 $pV = \nu RT$ 关系，可得：

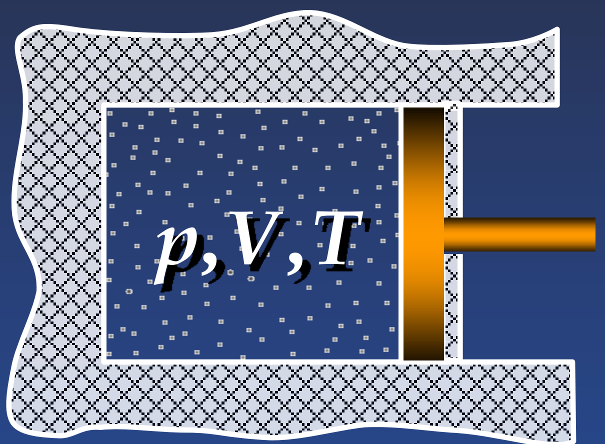
$$\begin{cases} TV^{\gamma-1} = C_2 & (5) \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3 & (6) \end{cases}$$

$$pdV + Vdp = \nu RdT \qquad (2)$$

(1)、(2) $\longrightarrow$ $$\overbrace{\frac{C_{p,m}}{C_{V,m}}}^{=\gamma} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\gamma \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \longrightarrow d\ln(pV^{\gamma}) = 0$$

$\therefore$ $pV^{\gamma} = C_1$ （泊松公式） (4)




利用 $pV = \nu RT$ 关系，可得:

$$\begin{cases} TV^{\gamma-1} = C_2 & (5) \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3 & (6) \end{cases}$$

(4)、(5)、(6) 即为 “绝热方程”。

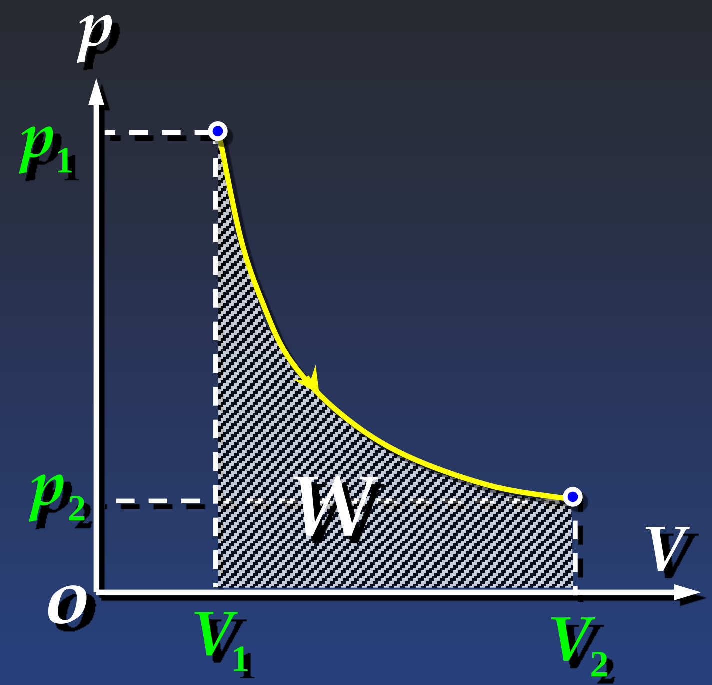
- $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} = \cdots = C_1$ ，同样可求出 $C_2$、$C_3$。
- 上述三个绝热方程仅适应于准静态绝热过程。

## 1. 绝热过程的功 $W_Q$：

$$pV^{\gamma}=C_1 \qquad p\propto V^{-\gamma}$$

$$pV^{\gamma}=p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}=C_1$$

$$W_Q=\int_{V_1}^{V_2}pdV=\int_{V_1}^{V_2}C_1V^{-\gamma}dV$$




- $p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}=\cdots=C_1$ ，同样可求出 $C_2$、$C_3$。
- 上述三个绝热方程仅适应于准静态绝热过程。

## 1. 绝热过程的功 $W_Q$:

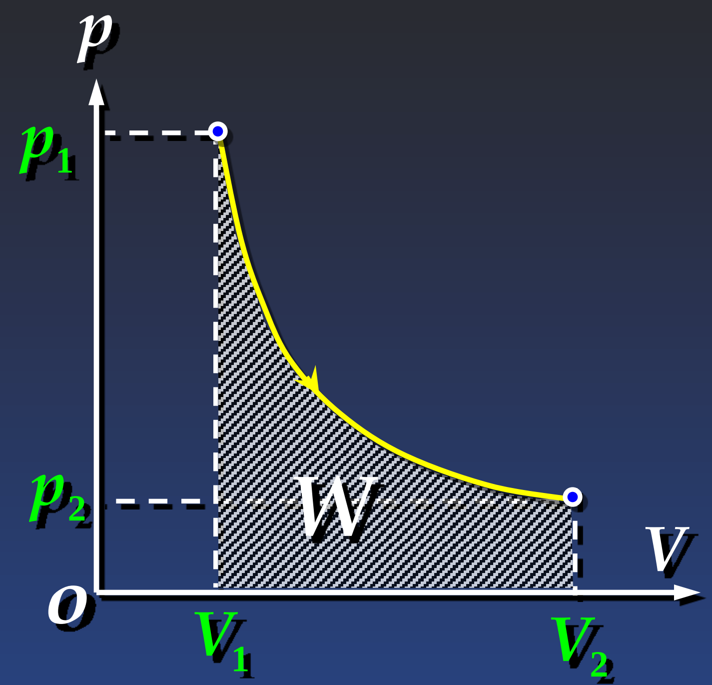
$$pV^{\gamma}=C_1 \qquad p\propto V^{-\gamma}$$

$$pV^{\gamma}=p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma}=C_1$$

$$W_Q=\int_{V_1}^{V_2}p\,dV=\int_{V_1}^{V_2}C_1V^{-\gamma}dV$$

$$=\frac{1}{1-\gamma}(C_1V_2^{1-\gamma}-C_1V_1^{1-\gamma})$$

$$W_Q=\frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2-p_1V_1)$$

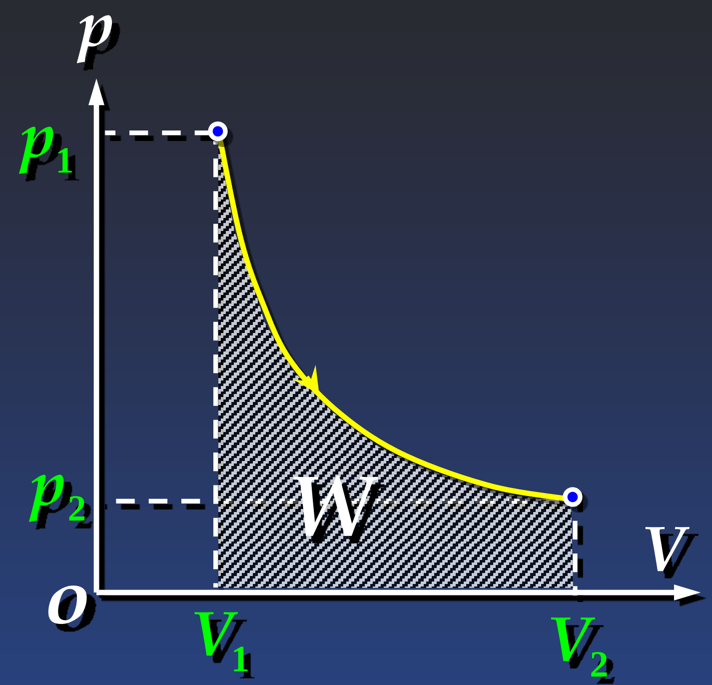


或根据热力学第一定律：

$$Q = \Delta E + W_Q = 0$$

$$W_Q = -\Delta E = -\nu C_{V,m} \Delta T$$

$$\therefore \quad W_Q = -\nu C_{V,m}(T_2 - T_1)$$




可以证明：

$$W_Q = \frac{1}{1-\gamma}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = -\nu C_{V,m}(T_2 - T_1)$$

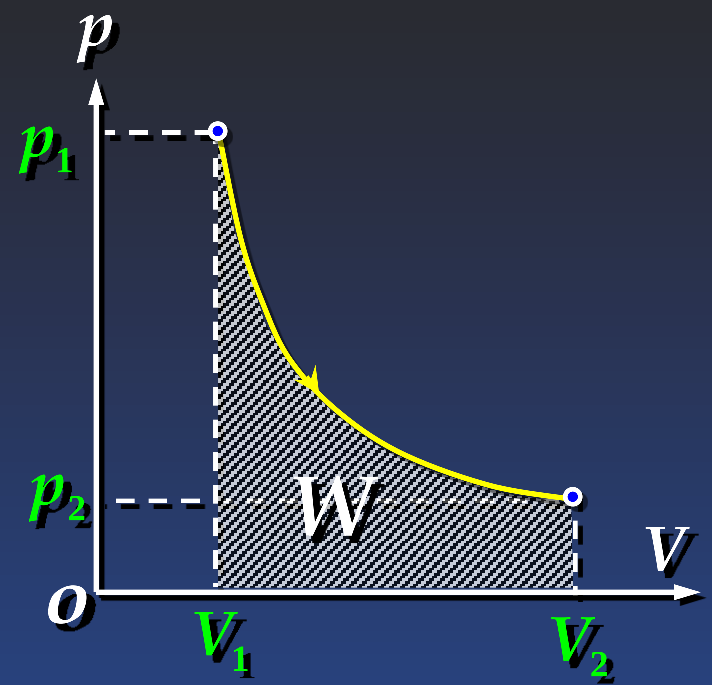
$$W_Q = \frac{1}{1-\gamma}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

**或根据热力学第一定律：**

$$Q = \Delta E + W_Q = 0$$

$$W_Q = -\Delta E = -\nu C_{V,m} \Delta T$$

$$\therefore \quad W_Q = -\nu C_{V,m}(T_2 - T_1)$$




**可以证明：**

$$W_Q = \frac{1}{1-\gamma}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = -\nu C_{V,m}(T_2 - T_1)$$

☻ **绝热膨胀：** $W_Q > 0$，$\Delta E < 0$，即 $E\downarrow$，$T\downarrow$；

**绝热压缩：** $W_Q < 0$，$\Delta E > 0$，即 $E\uparrow$，$T\uparrow$；

## 2. 绝热过程曲线：

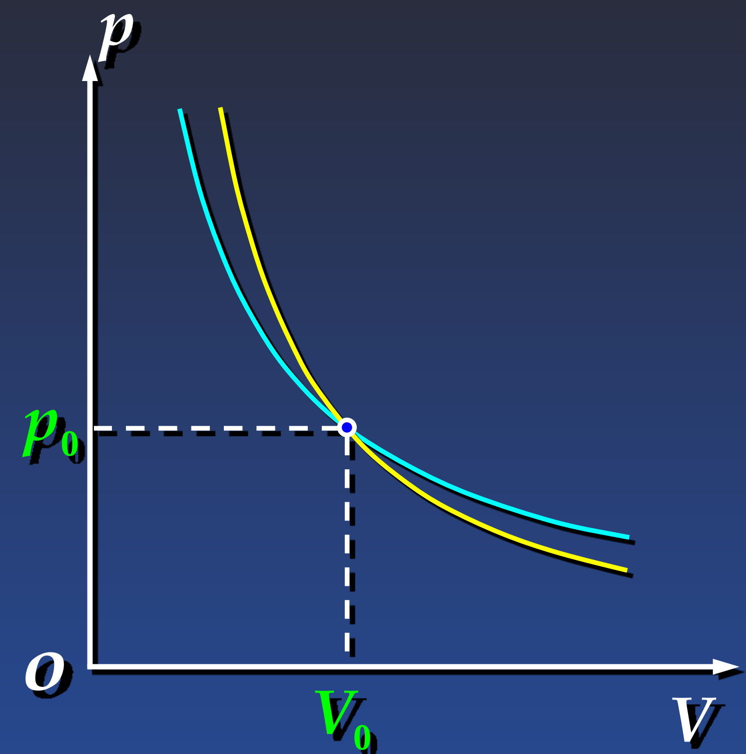
与等温线作一比较

$pV = p_0 V_0$

等温线： $k_T = \left.\dfrac{dp}{dV}\right|_{V=V_0} = -\dfrac{p_0}{V_0}$

$pV^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$

绝热线： $k_Q = \left.\dfrac{dp}{dV}\right|_{V=V_0} = -\gamma\dfrac{p_0}{V_0}$




- 绝热膨胀： $W_Q > 0$， $\Delta E < 0$， 即 $E\downarrow$， $T\downarrow$；

  绝热压缩： $W_Q < 0$， $\Delta E > 0$， 即 $E\uparrow$， $T\uparrow$；

## 2. 绝热过程曲线：

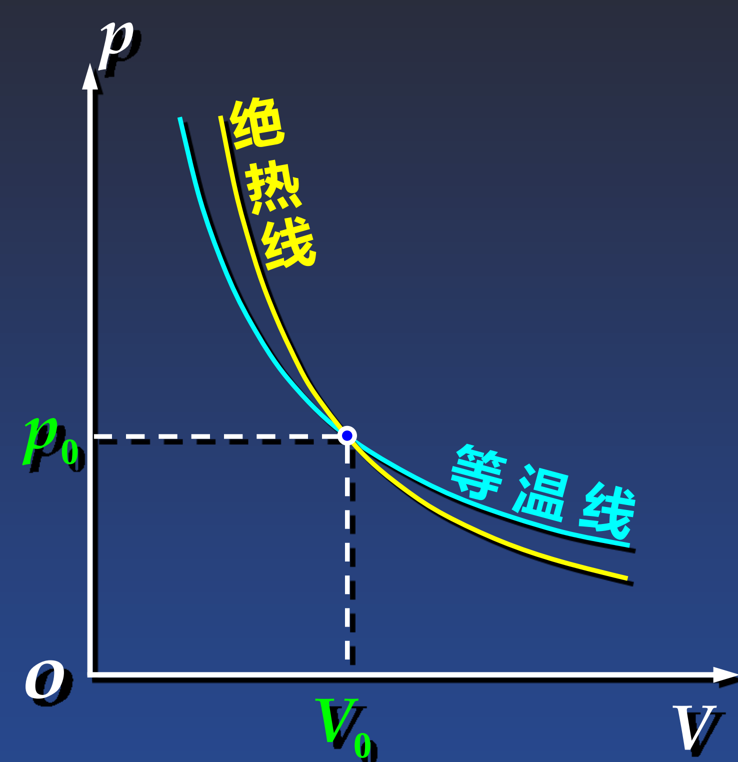
与等温线作一比较

等温线：$k_T = \left.\dfrac{dp}{dV}\right|_{V=V_0} = -\dfrac{p_0}{V_0}$

绝热线：$k_Q = \left.\dfrac{dp}{dV}\right|_{V=V_0} = -\gamma\dfrac{p_0}{V_0}$

可知：$|k_Q| > |k_T|$

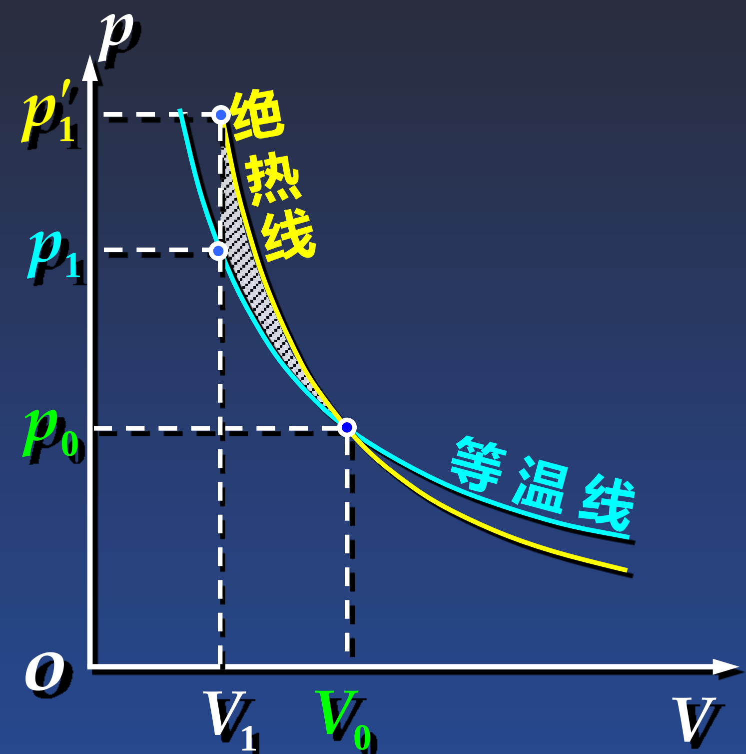
$\therefore$ 绝热线比等温线陡峭。



从分子动理论解释：$p=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_t$　　如图所示

等温压缩：$\bar{\varepsilon}_t=\frac{3}{2}kT$ 不变，$p$ 仅随 $n$ 的增加而增加。

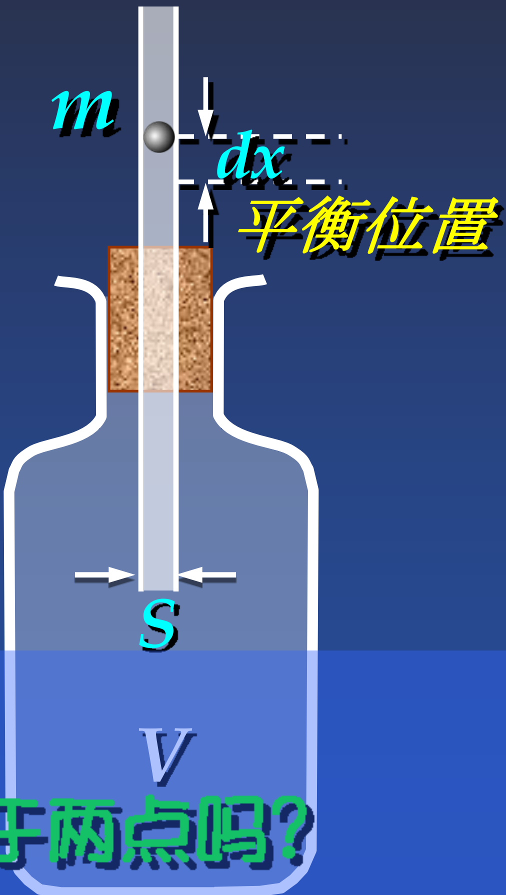
绝热压缩：$T\uparrow$，　$\bar{\varepsilon}_t=\frac{3}{2}kT\uparrow$，$p$ 随 $n$ 的增加而增加的同时还随着 $\bar{\varepsilon}_t$ 的增加而增加。




$\therefore$　$p_1'>p_1$　绝热线比等温线陡峭。

? 你能证明绝热线与等温线不能相交于两点吗?

**例** 如图，密封瓶的体积为$V$，瓶外大气压强为 $p_0$，竖直玻璃管截面积为$S$，小球质量为$m$，给小球一上下微小扰动，求其振动频率 $f$。（设瓶内气体的比热比为$\gamma$）




**解**：小球的振动过程近似为**绝热过程**。

平衡位置处：　$p' = p_0 + \dfrac{mg}{S}$

$dx$ 位置处：　$p = p' + dp$

合外力：　$dF = pS - p_0 S - mg = Sdp$

$\therefore$　$p_1' > p_1$　绝热线比等温线**陡峭**。

? 你能证明绝热线与等温线不能相交于两点吗？

**例** 如图，密封瓶的体积为$V$，瓶外大气压强为 $p_0$，竖直玻璃管截面积为$S$，小球质量为$m$，给小球一上下微小扰动，求其振动频率 $f$。（设瓶内气体的比热比为$\gamma$）

**解：** 小球的振动过程近似为**绝热过程**。

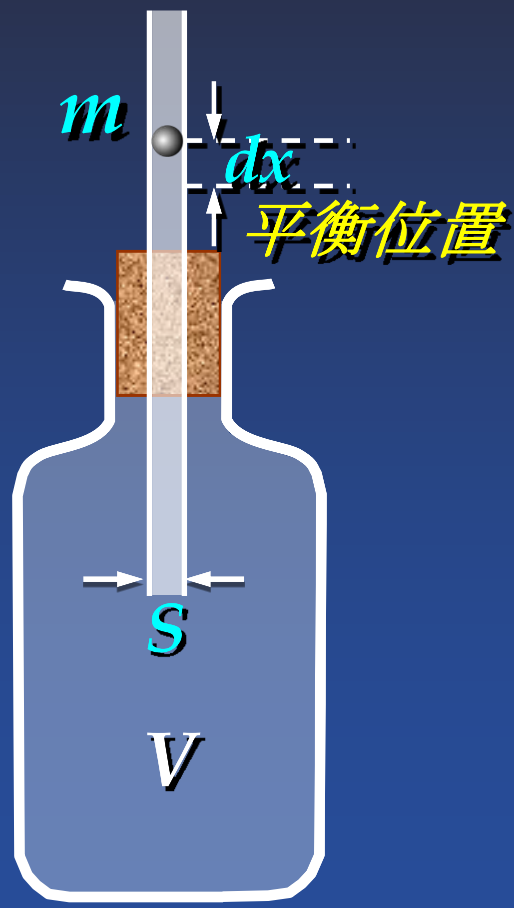
平衡位置处：　$p' = p_0 + \dfrac{mg}{S}$

$dx$ 位置处：　$p = p' + dp$

合外力：　$dF = pS - p_0 S - mg = Sdp$

$$pV^{\gamma} = C_1 \longrightarrow V^{\gamma} dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0$$

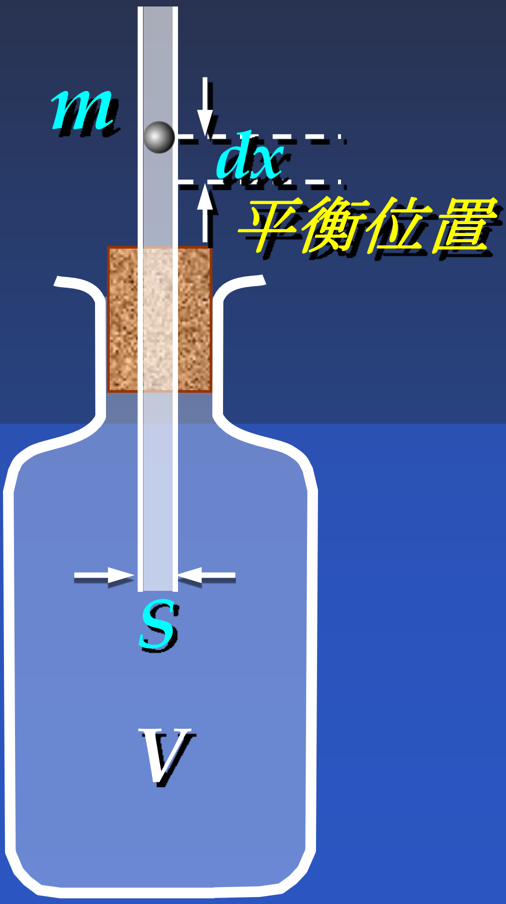
$$dp = -\gamma p V^{-1} dV = -\gamma p V^{-1} \cdot Sdx$$



则： $dF = -\gamma \dfrac{pS^2}{V} dx = -kdx$　即 $m$ 作简谐振动！

其中　$k = \gamma \dfrac{pS^2}{V}$

则周期： $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{mV}{\gamma p S^2}}$




合外力： $dF = pS - p_0 S - mg = Sdp$

$pV^\gamma = C_1 \longrightarrow V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0$

$dp = -\gamma p V^{-1} dV = -\gamma p V^{-1} \cdot Sdx$

则： $dF = -\gamma \dfrac{pS^2}{V} dx = -kdx$　即 $m$ 作简谐振动！

其中　$k = \gamma \dfrac{pS^2}{V}$

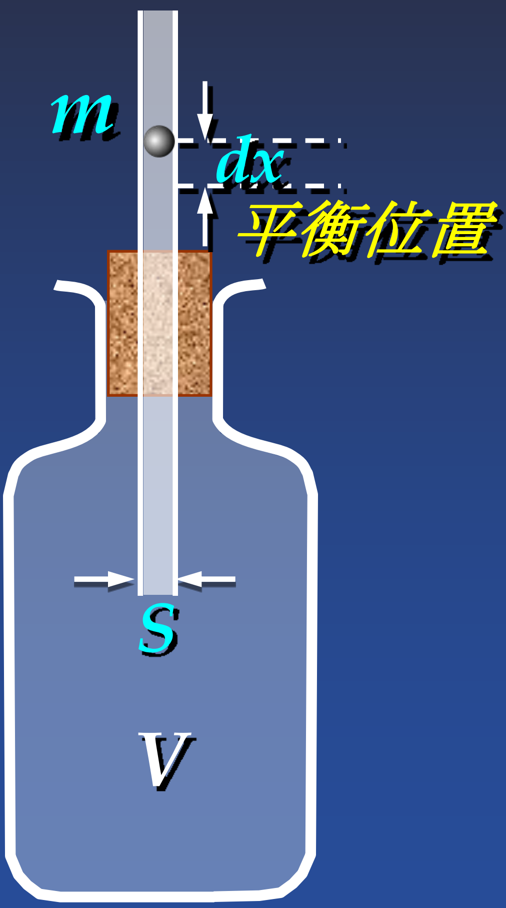
则周期： $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{mV}{\gamma p S^2}}$

振动频率： $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{\gamma p S^2}{mV}}$

$$\left( p \approx p_0 + \frac{mg}{S} \right)$$

(解毕)

$\gamma = \dfrac{(2\pi f)^2}{pS^2} mV$ 测量比热比的一种方法。



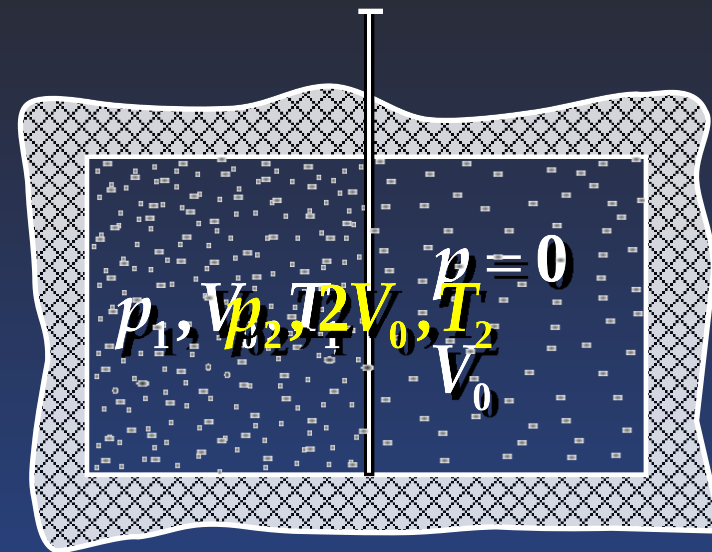
## 二、绝热自由膨胀

**特点：** $Q=0$ ， $W=0$

起始平衡态： $p_1, V_0, T_1$

↓ 自由膨胀

末了平衡态： $p_2, 2V_0, T_2$




- 自由膨胀过程为非准静态过程，绝热方程不适应！
- 虽为非准静态过程，但仍可应用**热力学第一定律**；

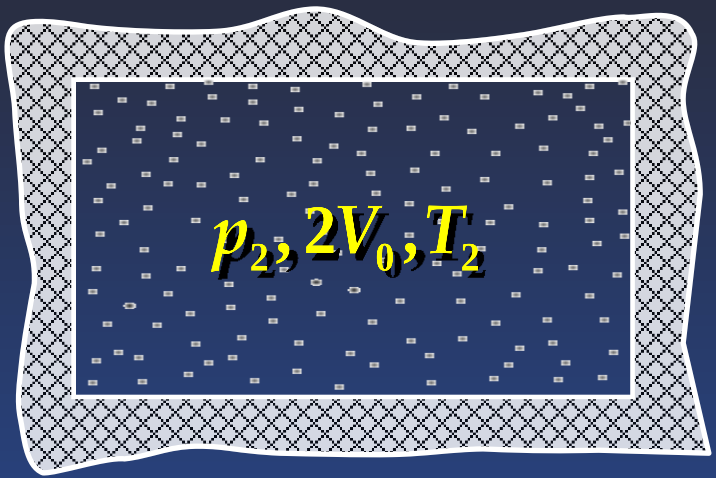
  对始、末两平衡态可用气体**状态方程**。

**自由膨胀过程：** $Q = \Delta E + W$　　$Q = 0$ ， $W = 0$

$\longrightarrow \Delta E = 0$

$\therefore \quad T_1 = T_2$

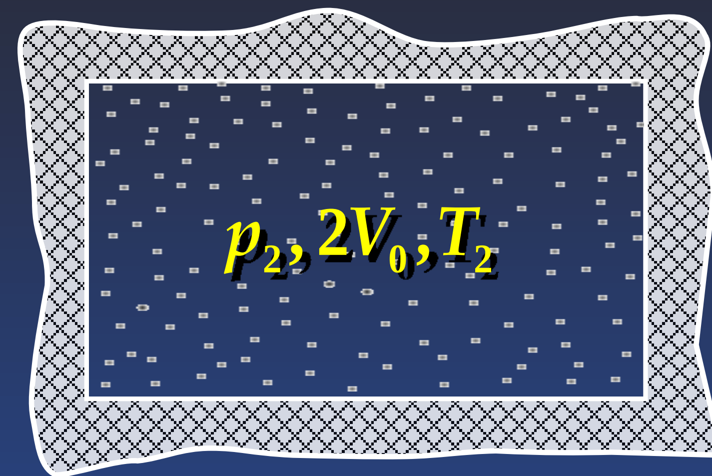
**初态：** $p_1 V_0 = \nu R T_1$




- 自由膨胀过程为非准静态过程，绝热方程不适应！
- 虽为非准静态过程，但仍可应用**热力学第一定律**；对始、末两平衡态可用气体**状态方程**。

自由膨胀过程：　$Q = \Delta E + W$　　$Q = 0$ ，$W = 0$

$\longrightarrow \Delta E = 0$




$\therefore \quad T_1 = T_2$

$$\begin{cases} \text{初态：} & p_1 V_0 = \nu R T_1 \\ \text{末态：} & p_2 \cdot 2V_0 = \nu R T_2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{1}{2} p_1$$

☻上述结论只对初末两状态而言！不能说成等温过程。

☻对真实气体绝热自由膨胀，上述结论不成立。

# *三、多方过程

气体实际过程往往既非等温，也非绝热，称为多方过程，用多方过程方程描述：

$$pV^n = C'$$

$n$：多方指数，为一常数。

$$\therefore \quad p_2 = \frac{1}{2} p_1$$

- 上述结论只对初末两状态而言！不能说成等温过程。
- 对真实气体绝热自由膨胀，上述结论不成立。

# *三、多方过程

气体实际过程往往既非等温，也非绝热，称为多方过程，用多方过程方程描述：

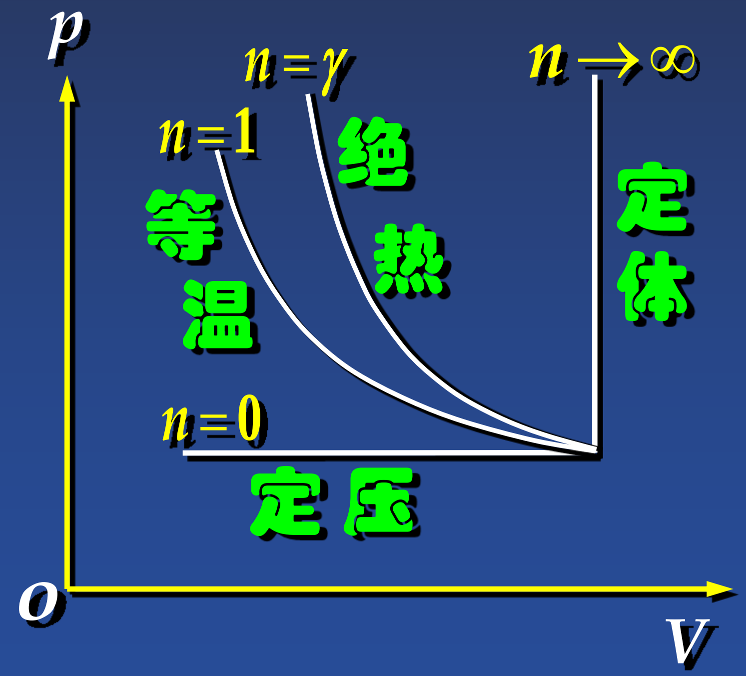
$$pV^n = C'$$

$n$：多方指数，为一常数。

利用 $pV = \nu RT$ 亦可得到：

$$TV^{n-1} = C''$$

$$p^{n-1}T^{-n} = C'''$$



**多方过程的功**:

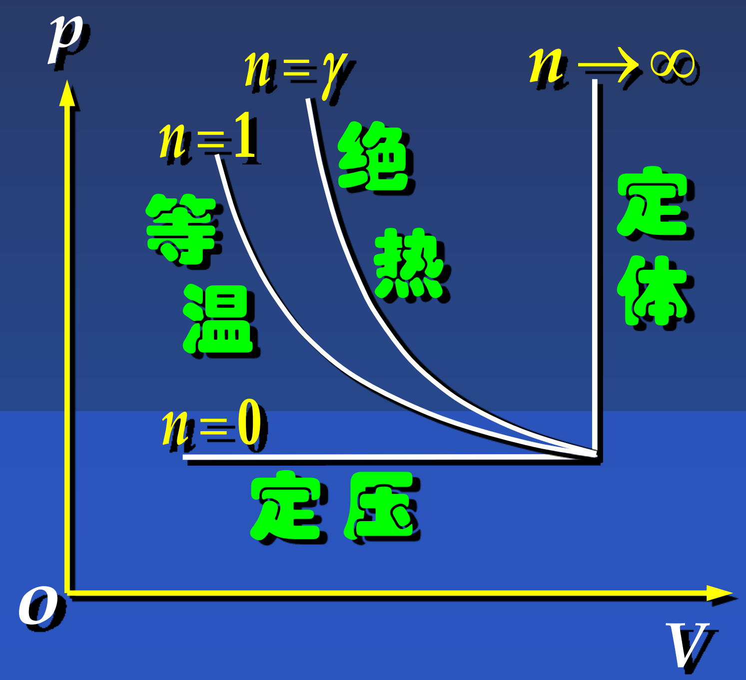
$$W=\frac{1}{1-n}(p_2V_2-p_1V_1)$$

**多方过程的摩尔热容量**:

$$C_n=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\frac{\gamma-n}{1-n}C_{V,m}$$

$$TV^{n-1}=C''$$

$$p^{n-1}T^{-n}=C'''$$



# 归纳

**1. 绝热方程:**

$$\begin{cases} pV^{\gamma} = C_1 \\ TV^{\gamma-1} = C_2 \\ p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3 \end{cases}$$

**2. 绝热过程的功:**

$$W_Q = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2 - p_1V_1) = -\nu C_{V,m}(T_2 - T_1)$$

**3. 多方过程:** $pV^n = C'$

*( The end )*