§9.2 常见的简谐振动
阻尼振动

一、简谐振动的判断

满足下列条件之一的振动即为**简谐振动**:

▲ $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

▲ $F = -kx$

▲ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

F 为合外力，x 为离开平衡位置的位移，k 为常数。

二、常见的简谐振动

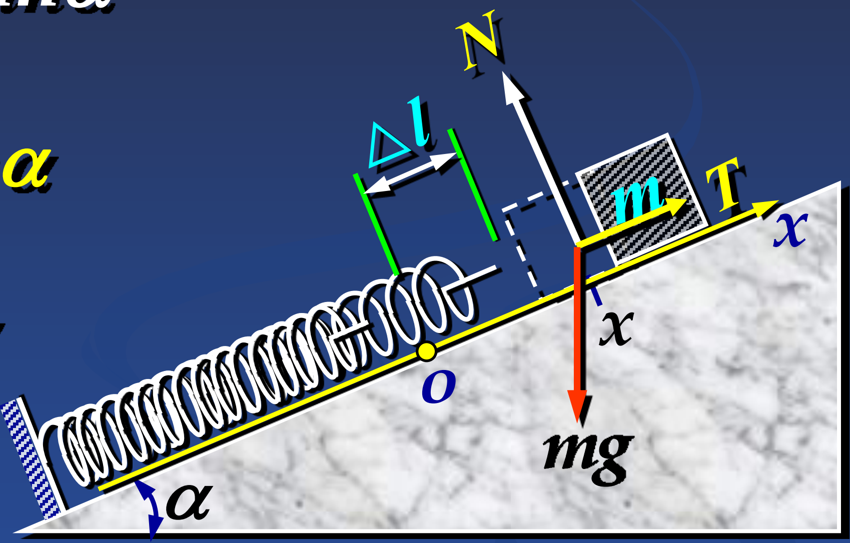
1. 光滑斜面上的弹簧振子：

平衡位置 o 处： $k\cdot\Delta l = mg\cdot\sin\alpha$

在 x 处：合力 $F = T - mg\cdot\sin\alpha$

$$T = -k(x-\Delta l) = -kx + mg\cdot\sin\alpha$$

$$\therefore \quad F = -kx$$



▲ $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ ▲ $F = -kx$ ▲ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

二、常见的简谐振动

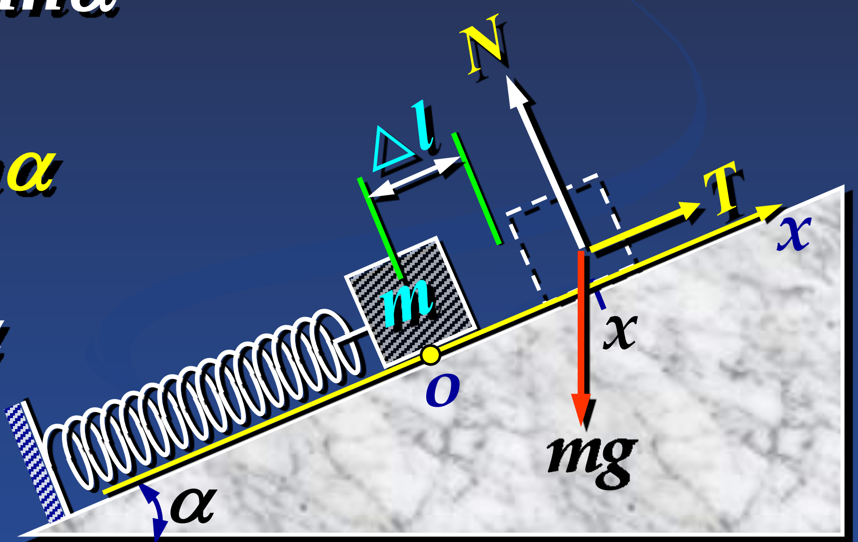
1. 光滑斜面上的弹簧振子：

平衡位置 o 处： $k\cdot\Delta l = mg\cdot\sin\alpha$

在 x 处：合力 $F = T - mg\cdot\sin\alpha$

$$T = -k(x-\Delta l) = -kx + mg\cdot\sin\alpha$$

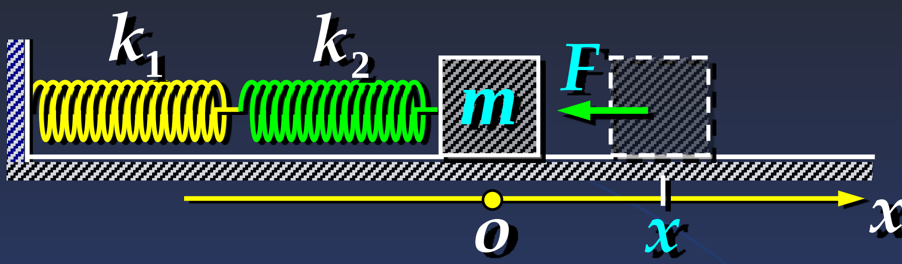
$$\therefore \quad F = -kx$$



即作简谐运动： $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$， $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

2. 光滑平面上的复合弹簧:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{cases}$$



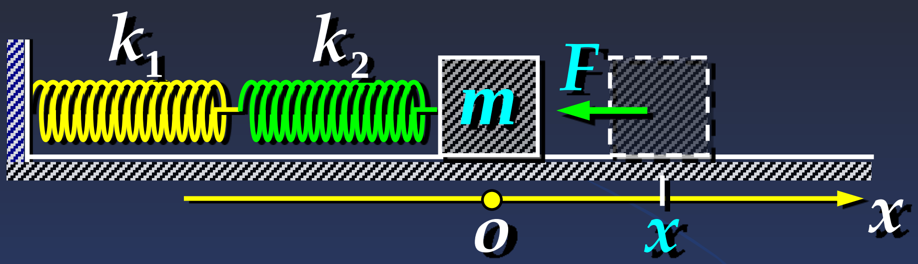
$$F = -k_2 x_2 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = -kx \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

$$\therefore \quad F = -kx$$

即作简谐运动: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

2. 光滑平面上的复合弹簧:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{cases}$$



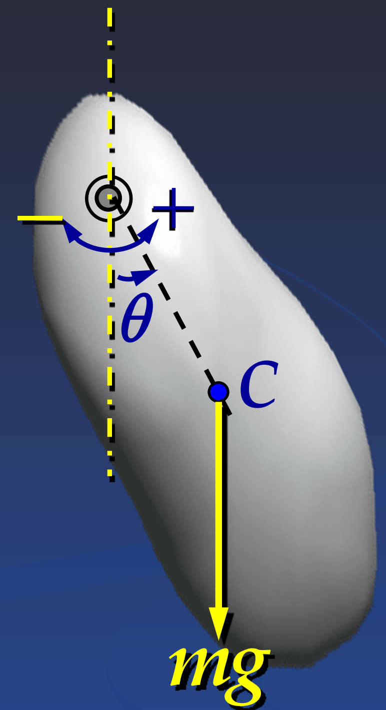
$$F = -k_2 x_2 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = -kx \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

试证明下图中系统角频率为:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad ?$$

3. 复摆与单摆:

设 复摆作小角度摆动。



$$M = J\alpha = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = J\ddot{\theta}$$ （M 为重力矩）

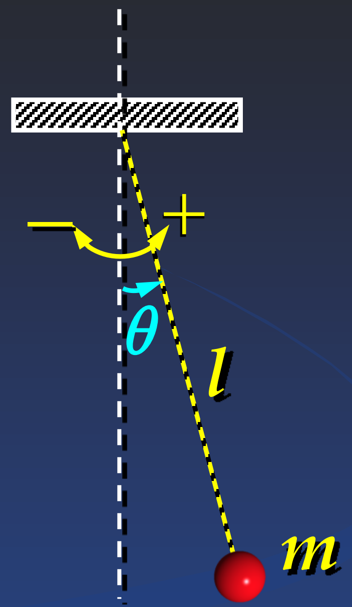
$$M = -mgl\cdot\sin\theta \approx -mgl\theta$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\theta = 0 \qquad \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}}$$

对作**小角度**摆动的单摆：　$J = ml^2$



$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\theta = 0 \qquad \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

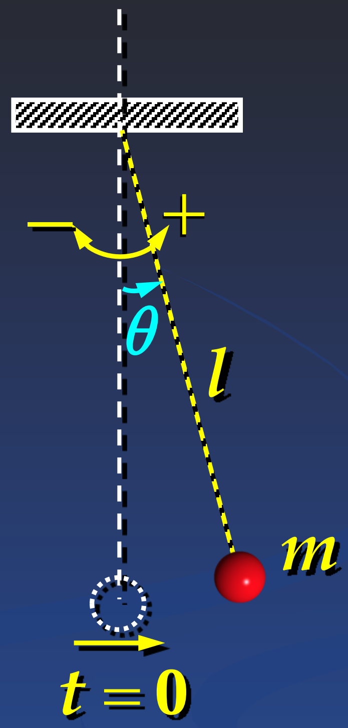
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

对作**小角度**摆动的单摆： $J = ml^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$$



例 若单摆最大摆角为5°，起始状态如图， 则由旋转矢量图可知：

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{36}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_{\max} = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

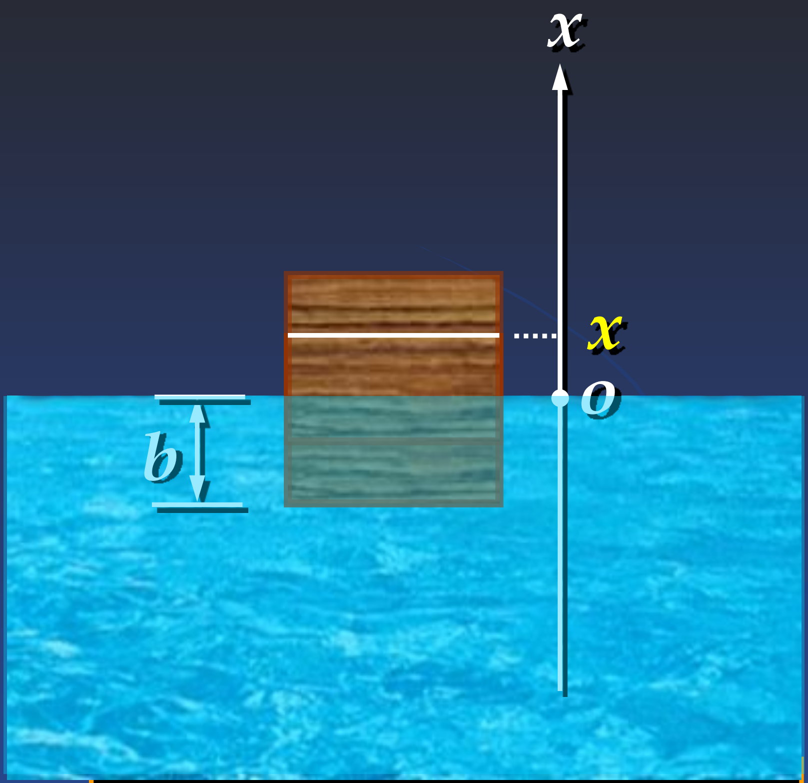
4. 水中浮块:

忽略水的阻力，设:

木块: m, ρ, S; 水: ρ'

平衡时: $mg = Sb\rho' g$

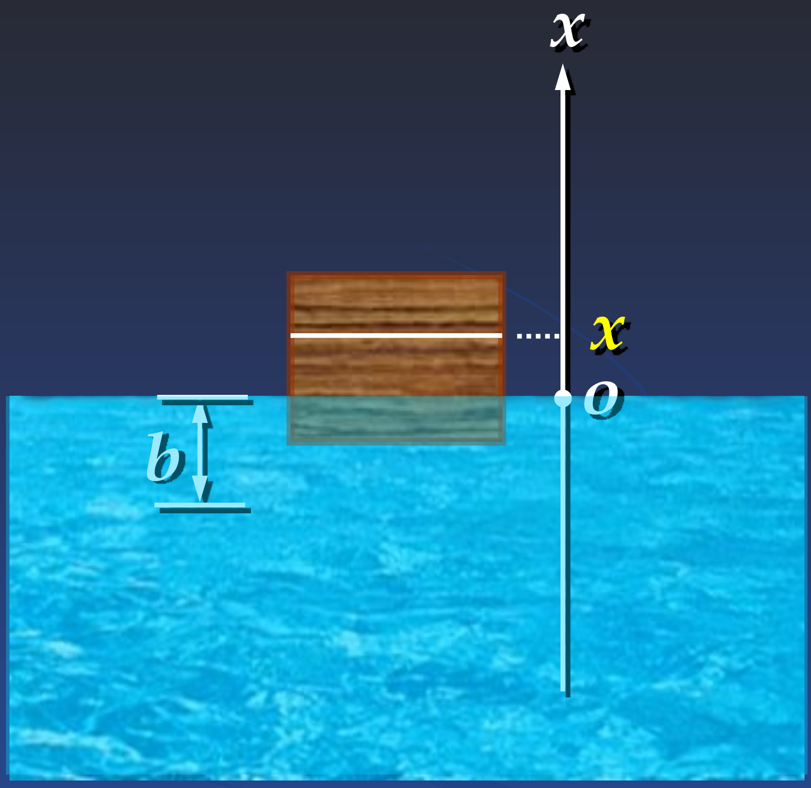
x 处所受合力:



$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{36}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta_{\max} = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

4. 水中浮块：



忽略水的阻力，设：

木块：m，ρ，S；水：ρ'

平衡时：$mg = Sb\rho' g$

x 处所受合力：

$$F = F_{浮} - mg$$

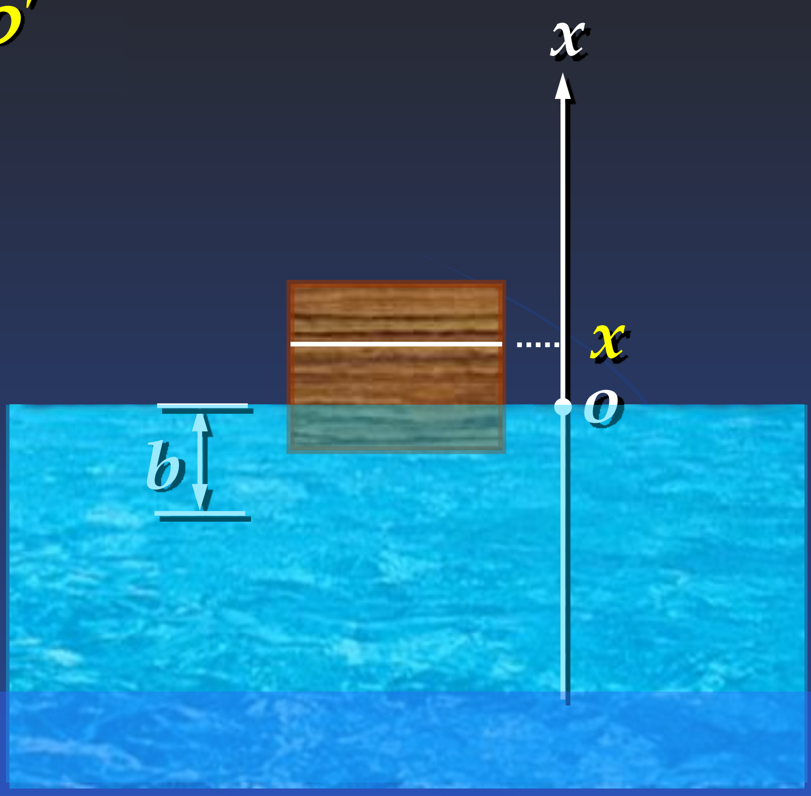
$$= S(b-x)\rho' g - mg$$

$$= -S\rho' g \cdot x = -kx \quad (k = S\rho' g)$$ 作简谐振动！

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{S\rho' g}{m}} \qquad m=Sb\rho'$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{b}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\,t+\varphi\right)$$

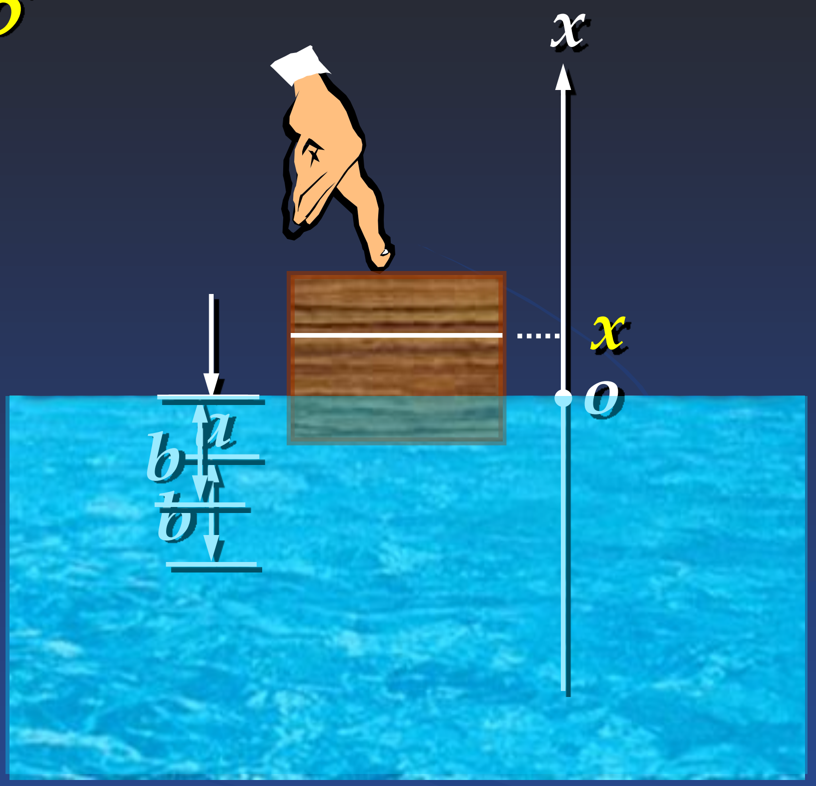


$$F=F_{浮}-mg$$

$$=S(b-x)\rho' g-mg$$

$$=-S\rho' g\cdot x=-kx \qquad (k=S\rho' g)$$ 作简谐振动！

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{S\rho' g}{m}}\qquad m=Sb\rho'$$

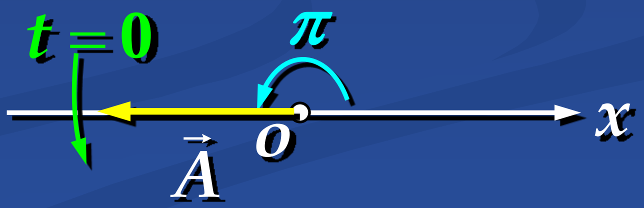


$$\omega=\sqrt{\frac{g}{b}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$$

$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\,t+\varphi\right)$$

若$t=0$时按住木块恰使其完全浸在水中，在由**静止**释放，则:

$$A=a,\ \varphi=\pi\qquad x=a\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\,t+\pi\right)$$



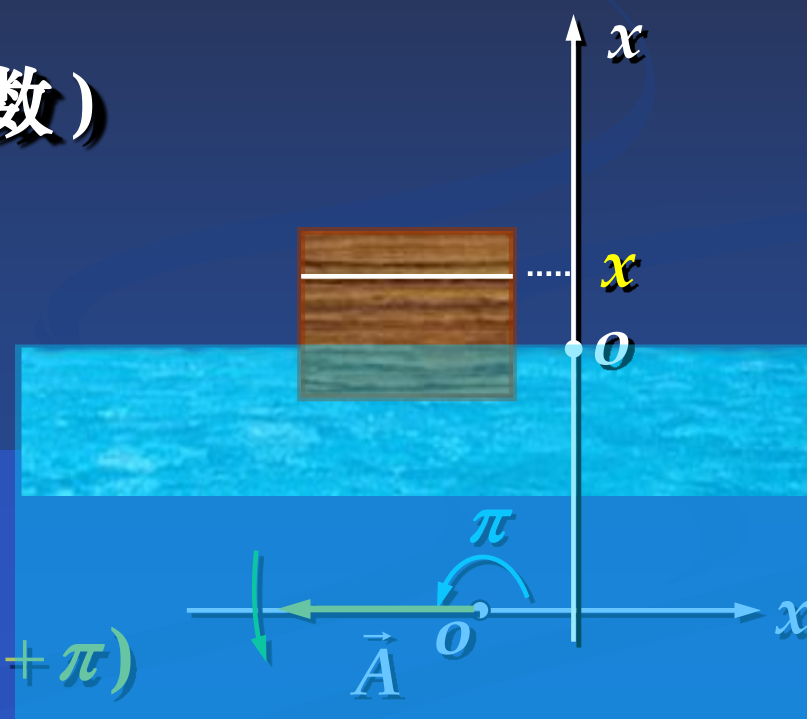
三、阻尼振动 *

阻尼振动：振幅随时间而减小的振动。

在粘性的介质中，物体速度较小时，阻力有下列关系：

$$F_r = -Cv \qquad （C\text{ 为阻力常数}）$$

$$F = -kx + F_r = -kx - Cv = ma$$



$$A = a\,,\ \varphi = \pi \quad x = a\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\,t + \pi\right)$$

三、阻尼振动 *

阻尼振动：振幅随时间而减小的振动。

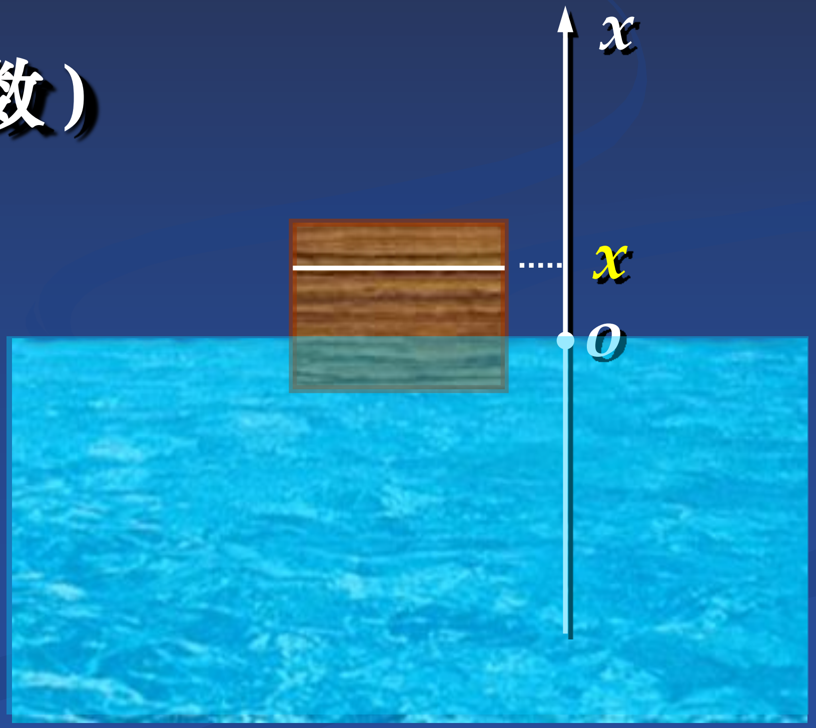
在粘性的介质中，物体速度较小时，阻力有下列关系：

$$F_r = -Cv \qquad (C\text{为阻力常数})$$

$$F = -kx + F_r = -kx - Cv = ma$$

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

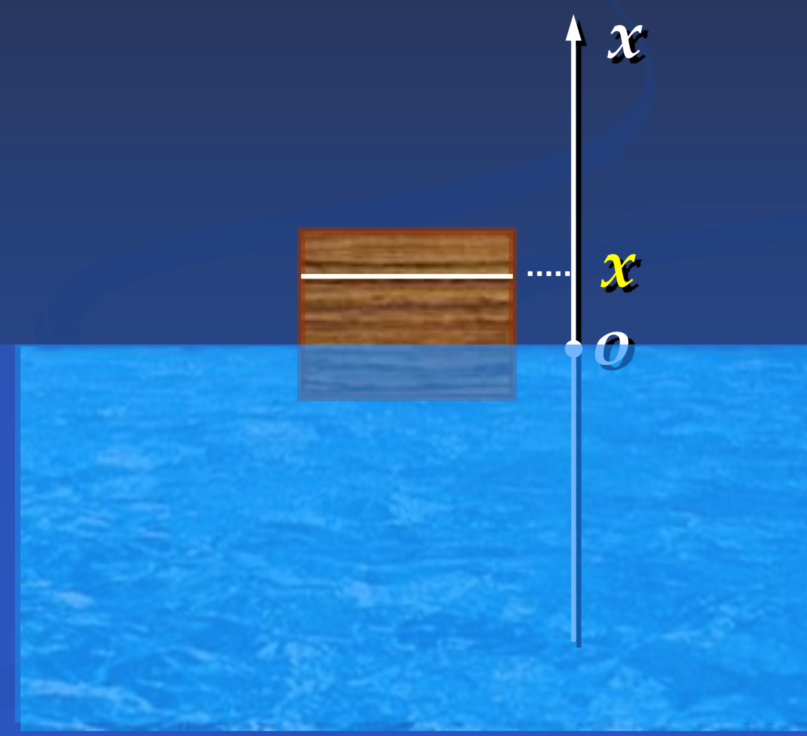


其中　$\delta = \dfrac{C}{2m}$ （阻尼系数）

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ （系统固有角频率）

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



$$m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

其中　$\delta = \dfrac{C}{2m}$ （阻尼系数）

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ （系统固有角频率）

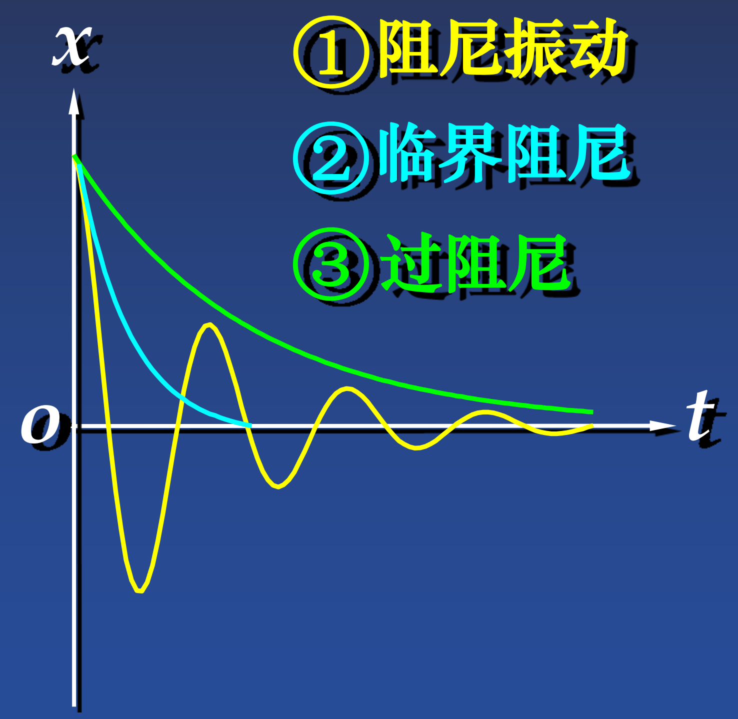
$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

① $\delta < \omega_0$：阻尼振动

② $\delta = \omega_0$：临界阻尼

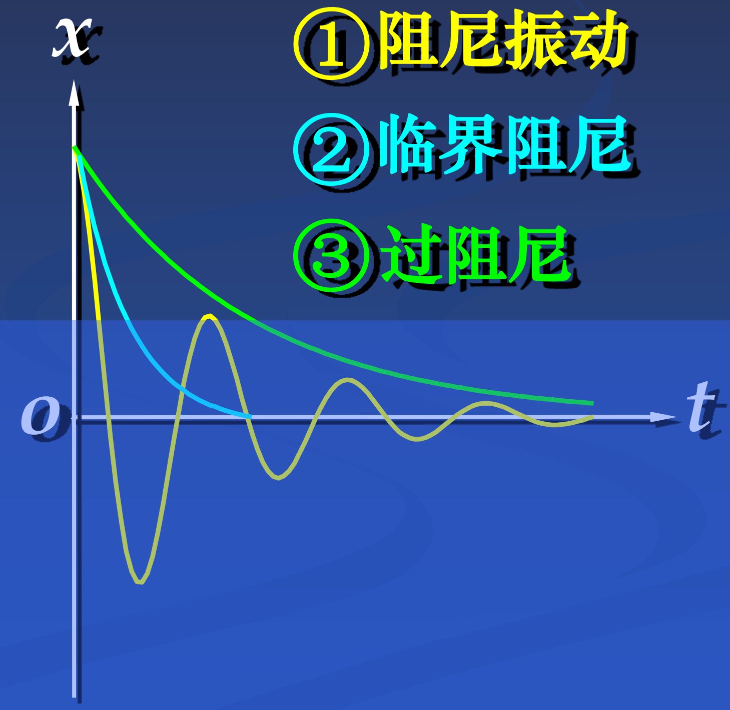
③ $\delta > \omega_0$：过阻尼



归纳:

1. 简谐振动满足:

- ▲ $x = A\cos(\omega t + \varphi)$
- ▲ $F = -kx$
- ▲ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$



① $\delta < \omega_0$: 阻尼振动

② $\delta = \omega_0$: 临界阻尼

③ $\delta > \omega_0$: 过阻尼

归纳:

1. 简谐振动满足:

▲ $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

▲ $F = -kx$

▲ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

*2. 阻尼振动的三种状态:

阻尼、临界阻尼、过阻尼

（请看录像）