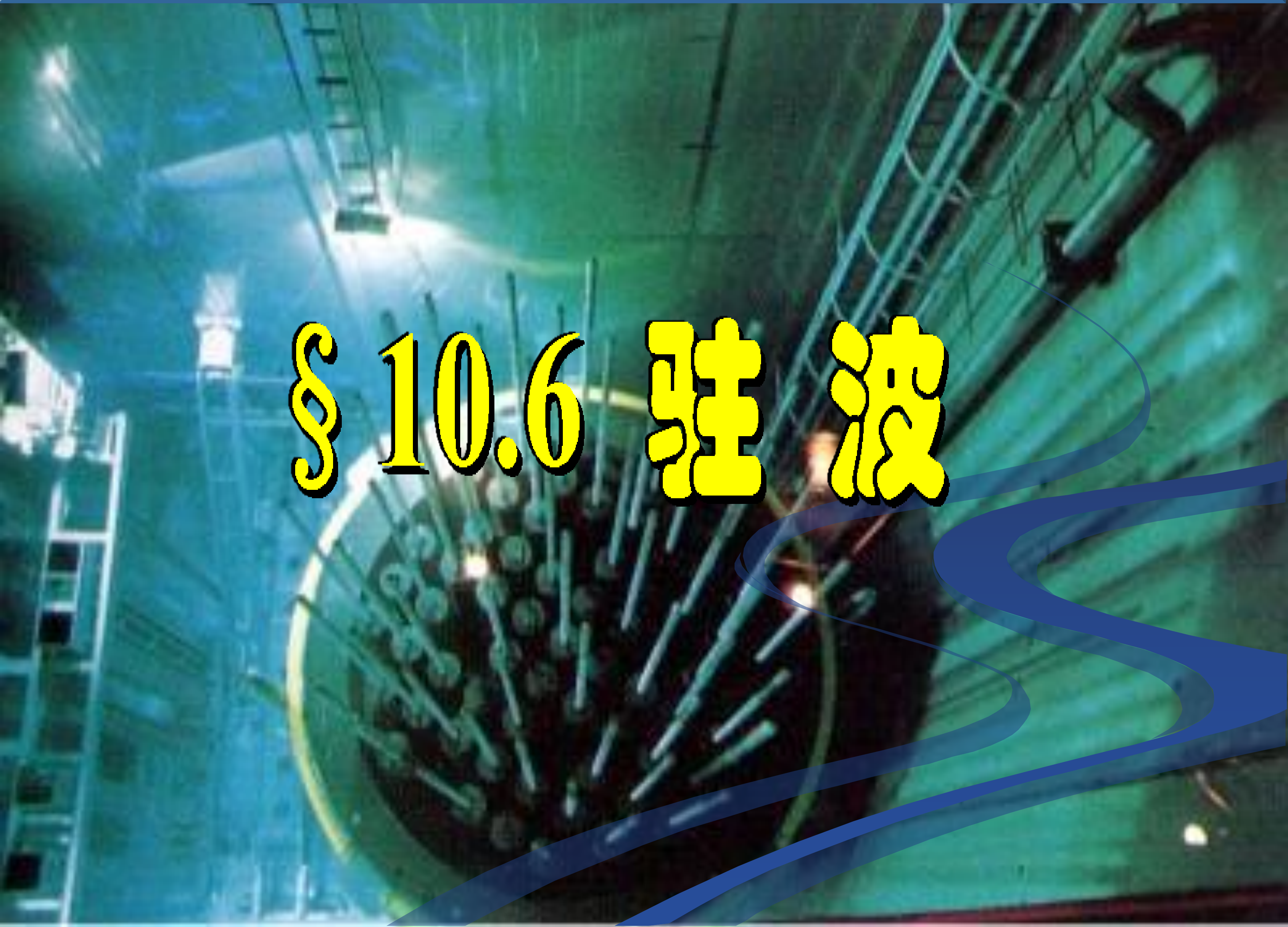
§ 10.6 驻波

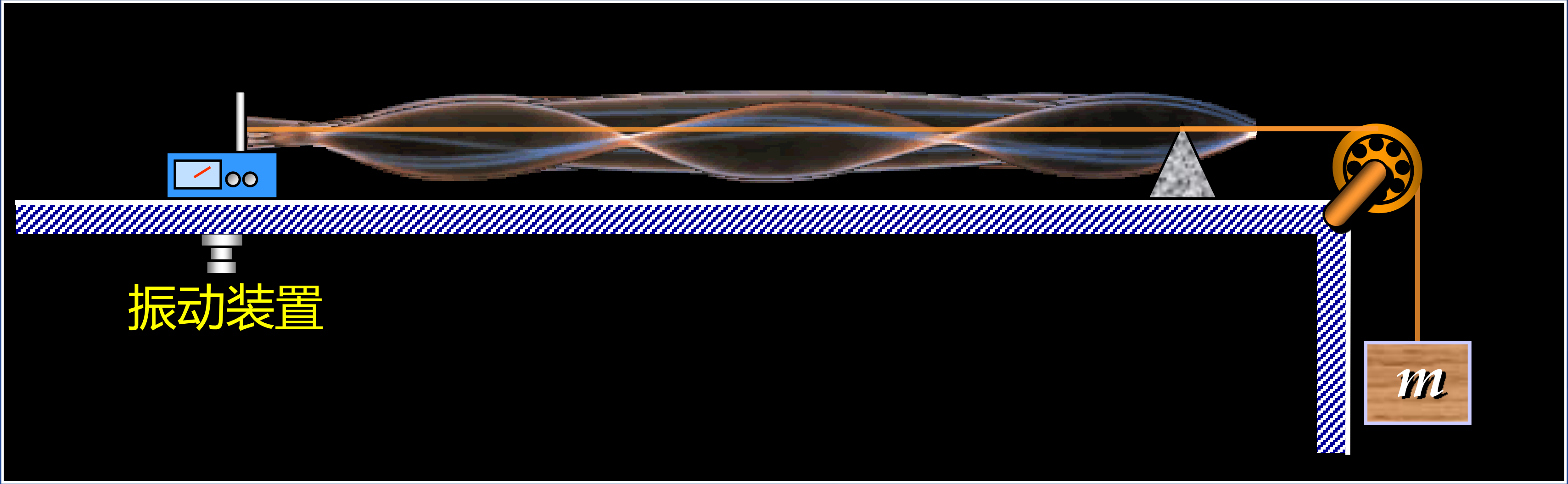


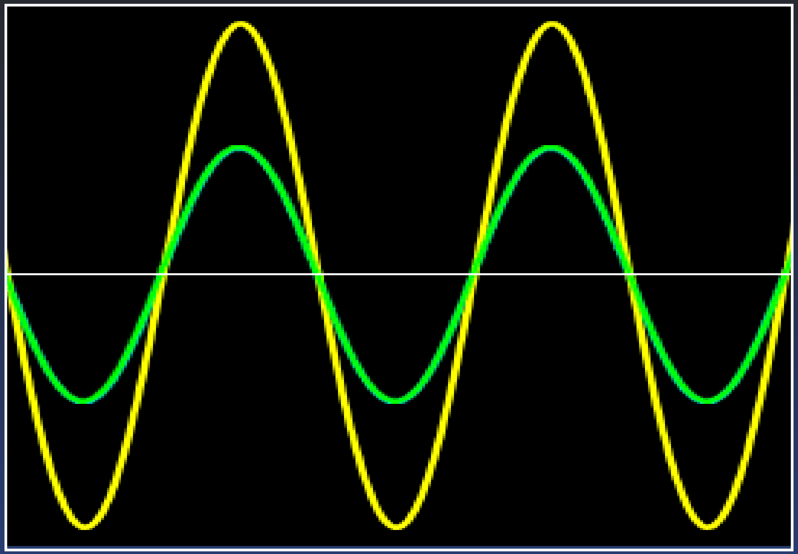
一、驻波的形成

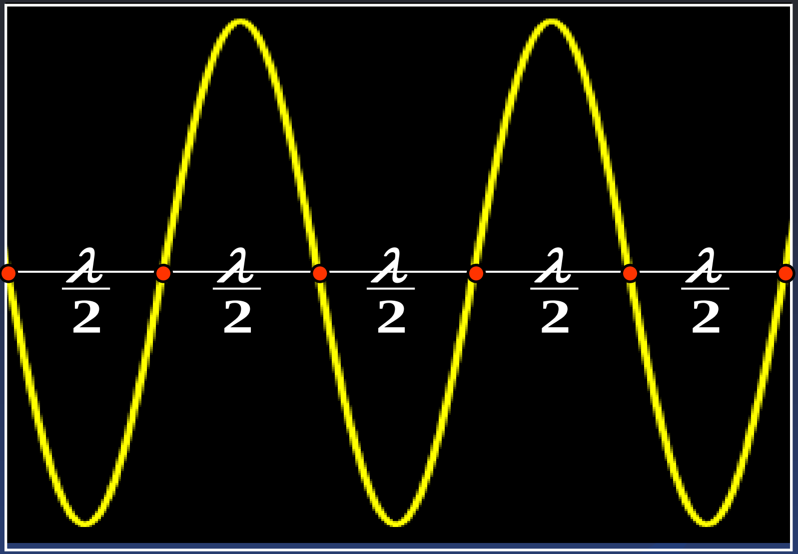
形成条件：两列相干波沿相反方向传播并相遇。

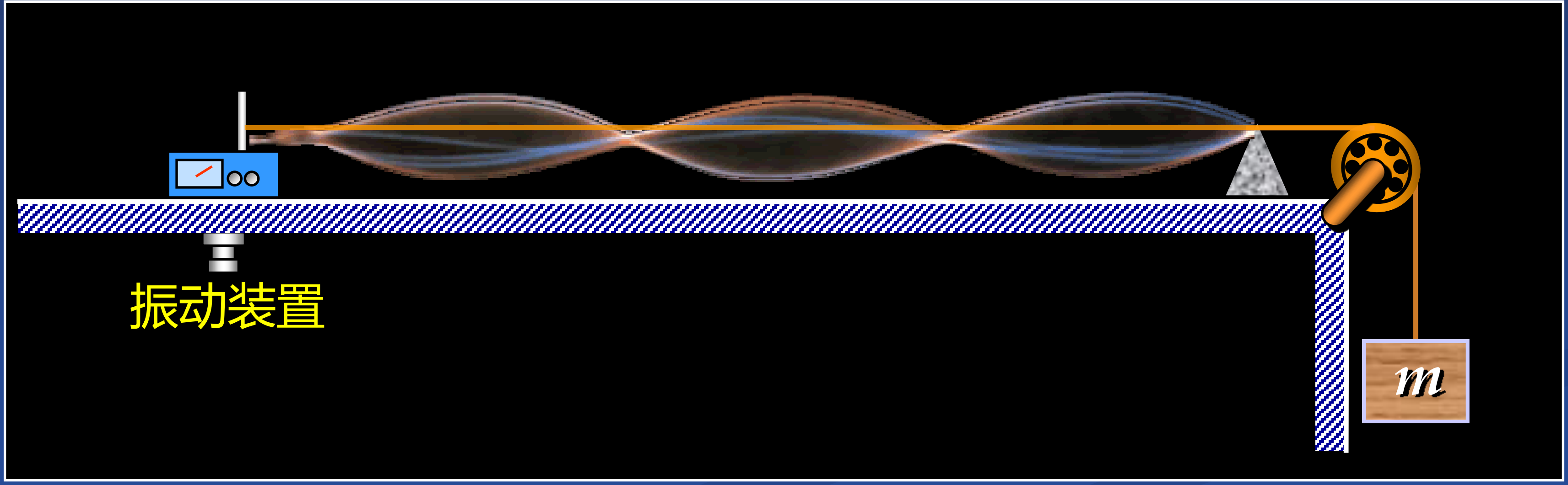
现象：叠加区域各点振幅不同，但不随时间变化；

出现 **波节点**(振幅为零) 和 **波腹点**(振幅最大) 。






$\frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{2}$

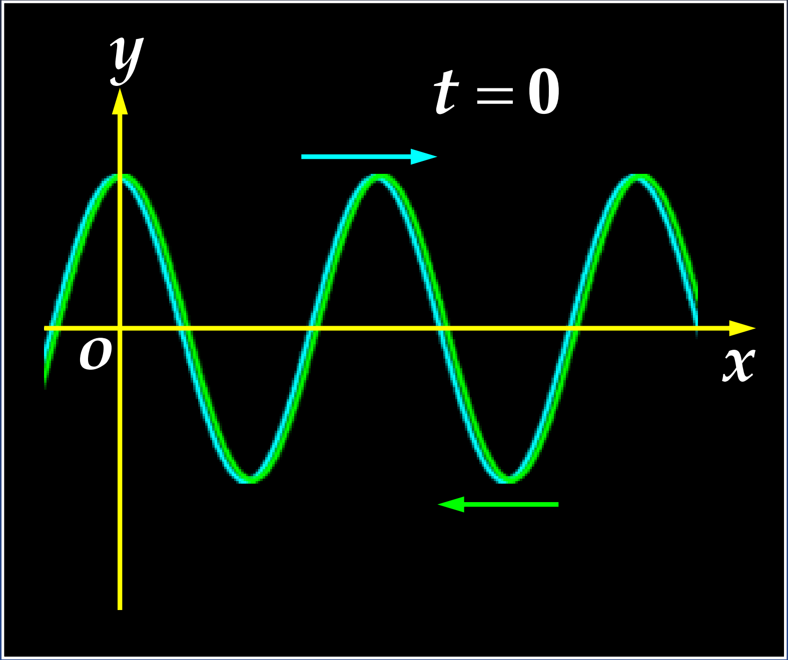

振动装置
m

二、驻波方程

右图：$\varphi_{1O}=\varphi_{2O}=0$

$$y_1=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})]$$

$$y_2=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})]$$



合振动:

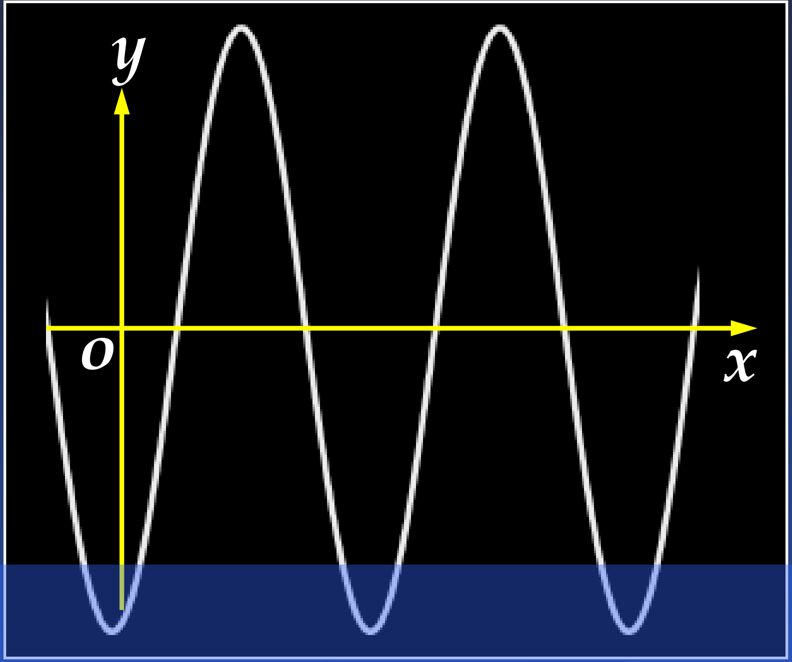
$$y=y_1+y_2=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})]+A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})]$$

$$=[2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)]\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

令：$A(x) = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)$

则，驻波方程：

$$y = A(x)\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$



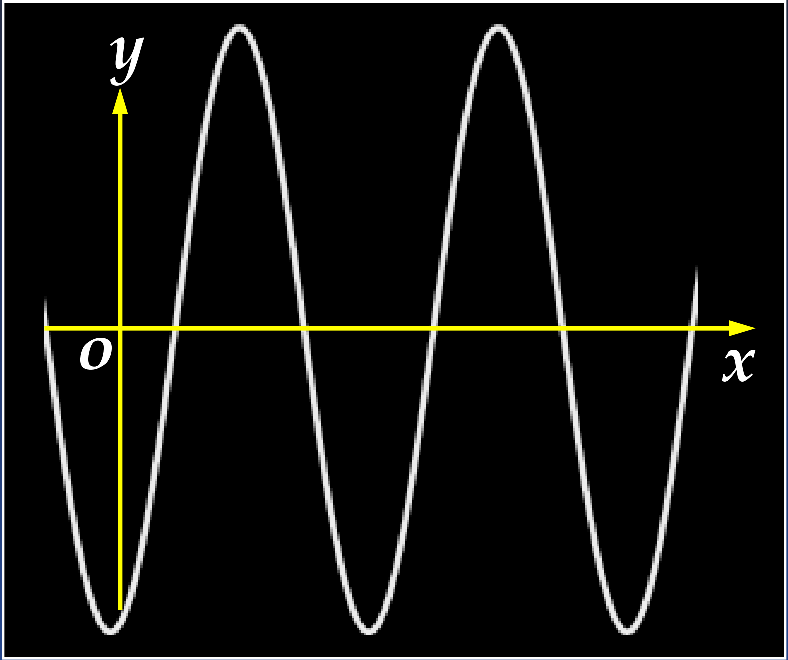
合振动:

$$y = y_1 + y_2 = [2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)]\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

令：$$A(x) = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

则，驻波方程：

$$y = A(x)\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$



讨论：

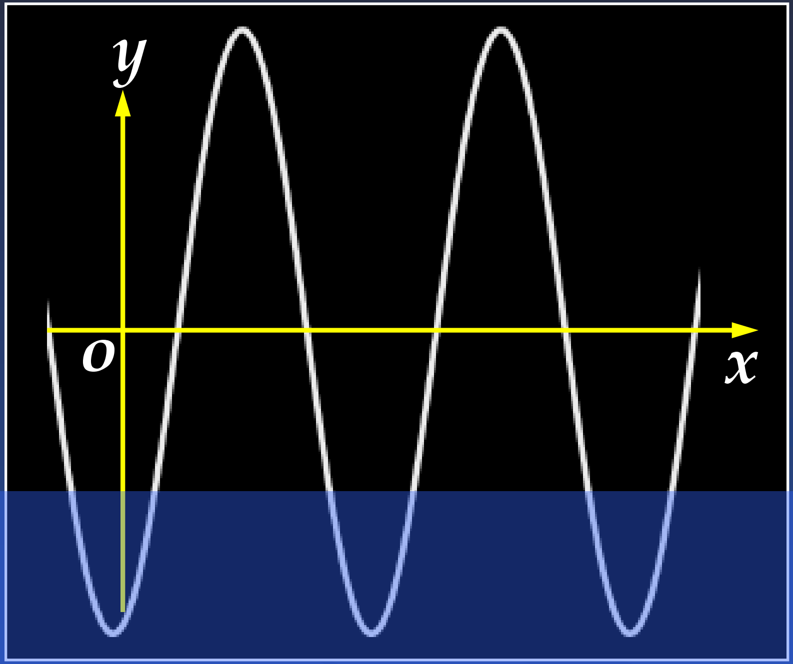
振幅分布：

驻波振幅：$$0 \le |A(x)| = \left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right| \le 2A$$

波腹点： $|A(x)| = 2A$ 本例中： $\left|2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right| = 2A$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_k = k\pi \quad x_k = k\frac{\lambda}{2}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$



波节点： $|A(x)| = 0$

讨论：

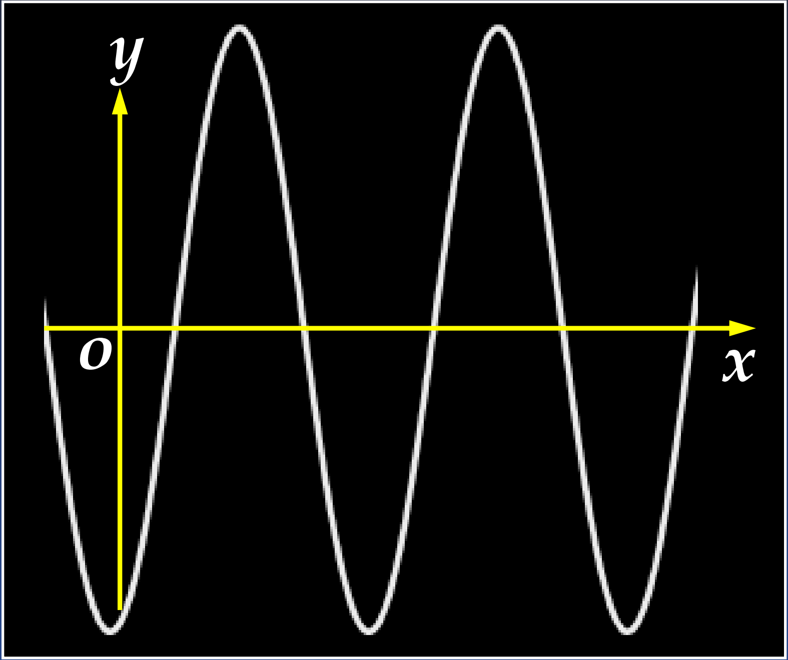
☻振幅分布：

驻波振幅： $0 \le |A(x)| = \left|2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right| \le 2A$

波腹点: $|A(x)| = 2A$　**本例中:** $\left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right| = 2A$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_k = k\pi \quad x_k = k\frac{\lambda}{2}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$



波节点: $|A(x)| = 0$

$$\left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right| = 0 \quad (\text{本例})$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_k = (k+\frac{1}{2})\pi, \quad x_k = (k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2},$$

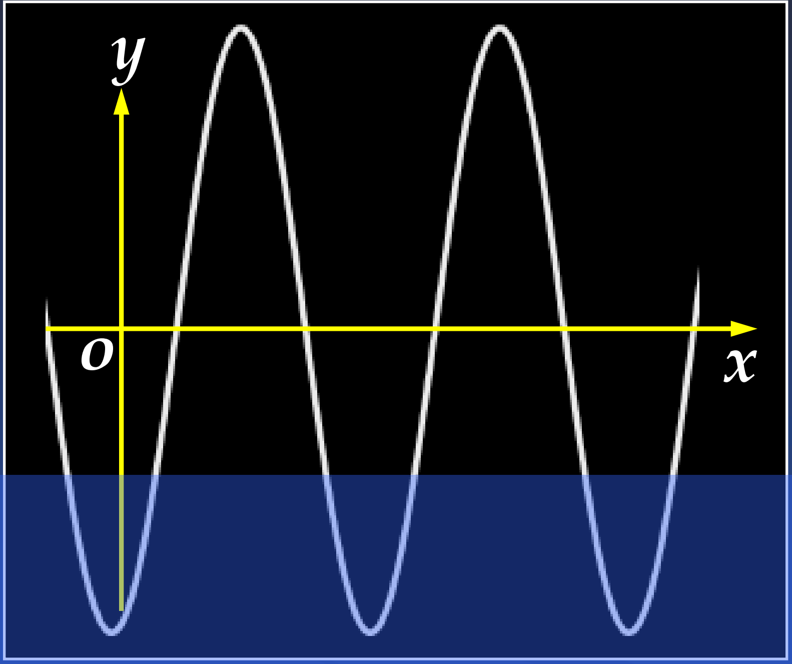
$$\boxed{x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}}$$

位相分布：

$$y = [2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)]\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x) > 0:\ \phi(t) = \frac{2\pi}{T}t$$

$$\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x) < 0:\ \phi(t) = \frac{2\pi}{T}t + \pi$$



$$\left|2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\right| = 0$$ （本例）

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_k = (k+\frac{1}{2})\pi\,,\quad x_k = (k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}\,,$$

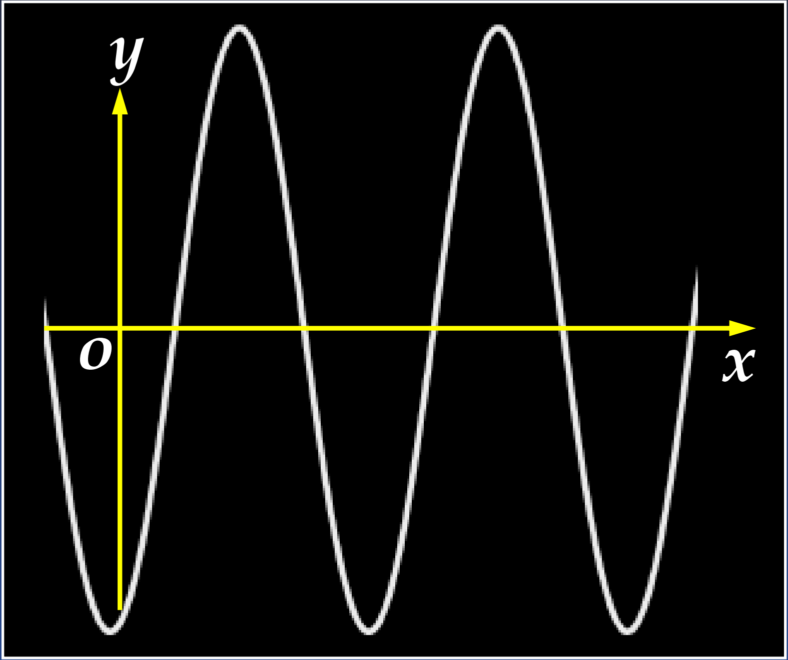
$$\boxed{x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}}$$

☻位相分布：

$$y = [2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)]\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

$$\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x) > 0:\ \phi(t) = \frac{2\pi}{T}t$$

$$\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x) < 0:\ \phi(t) = \frac{2\pi}{T}t + \pi$$



结论：

1. 相邻两个波节点间各点**位相相同**，运动同向；

2. 关于波节点对称的两点**位相相差 π**，运动反向！

结论：

1. 相邻两个波节点间各点位相相同，运动同向；

2. 关于波节点对称的两点位相相差 π ，运动反向！

能量分布：

最大位移处：$y=\pm 2A$ ，波节处静止，处势能最大；

平衡位置处：$y=0$ ，波腹处动能最大；

波腹点 $\xleftrightarrow{\text{波的能量}}$ 波节点

不传播能量

例 已知：t 时刻行波和驻波曲线上某点的运动方向或运动趋势，试画出此刻各点运动方向或趋势及T/4和T/2后各自波形。

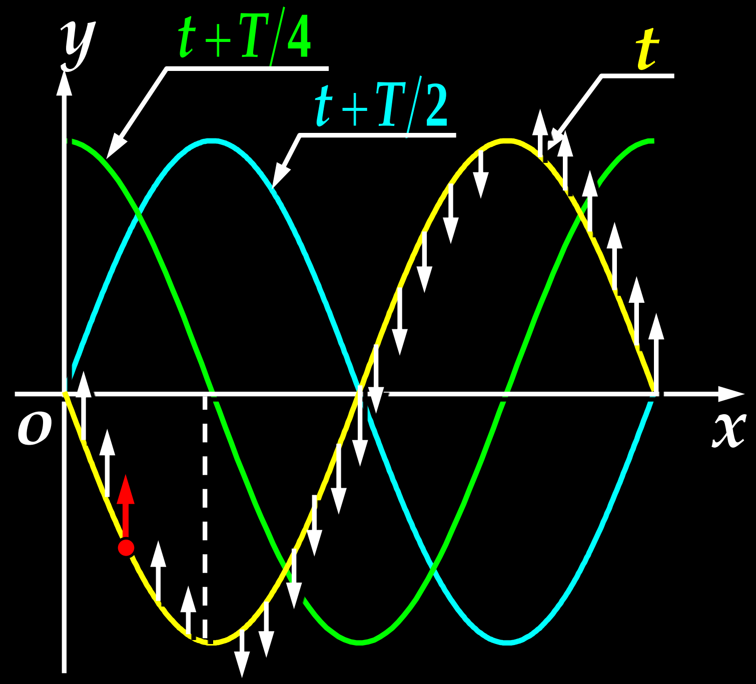


Fig. 1 t 时刻行波波形曲线

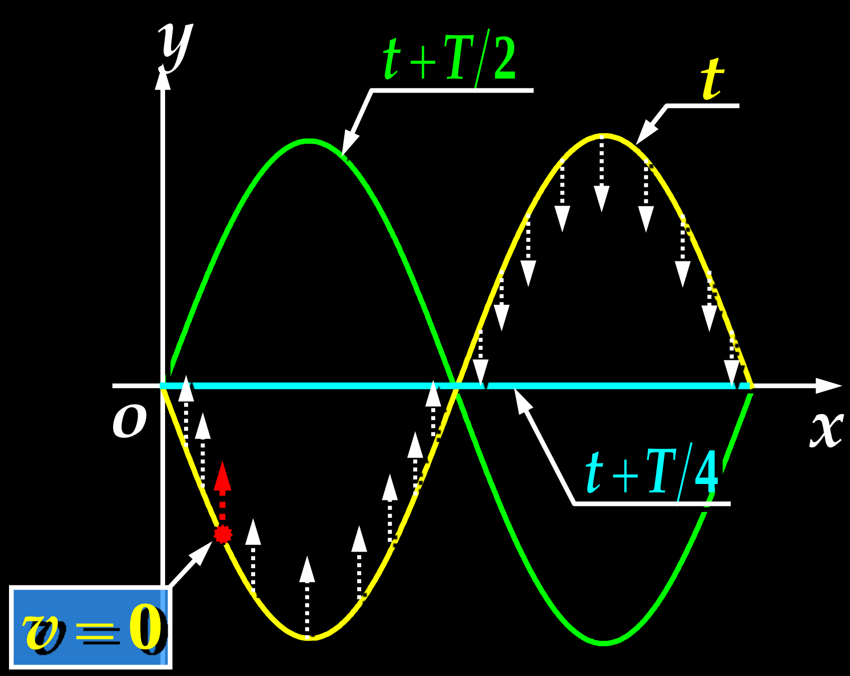
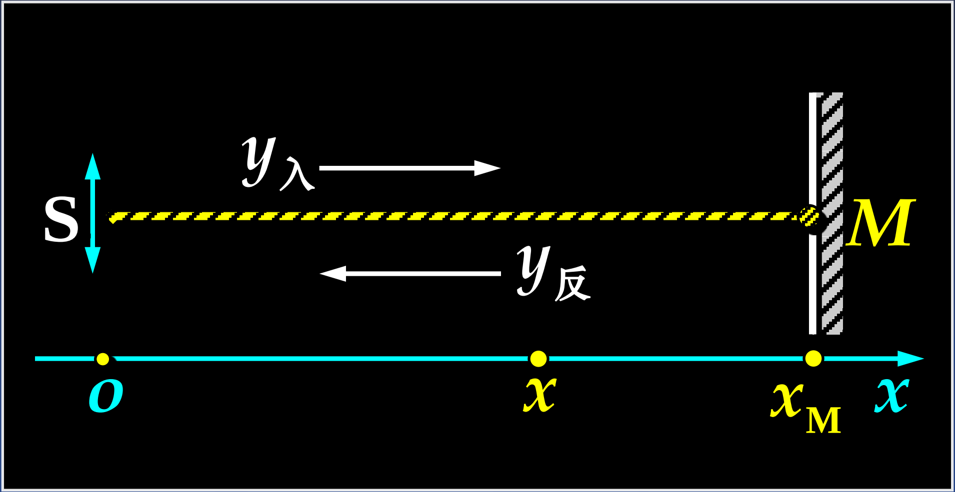


Fig. 2 t 时刻驻波波形曲线

三、入射波与反射波形成的驻波

设 波源 S 的振动方程为：$y_o = A\cos(\omega t)$

$$y_{入} = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$



$$y_{入M} = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_M)$$

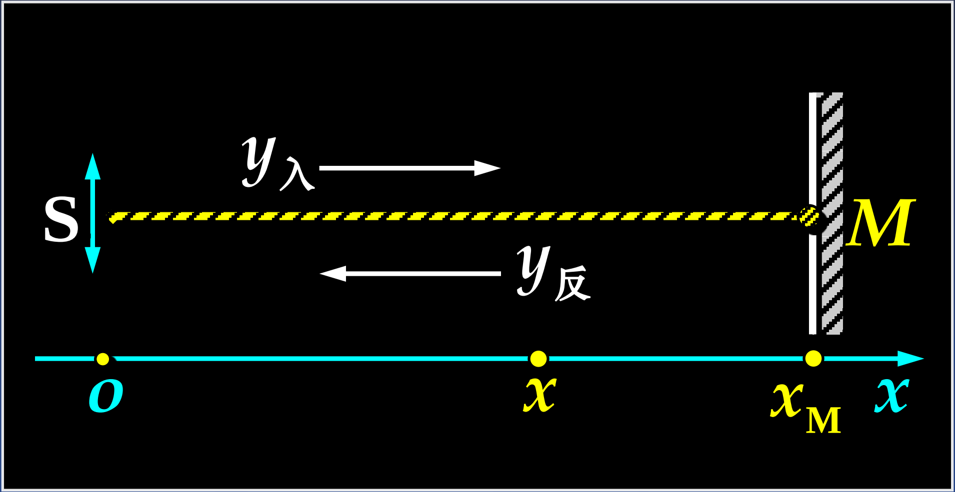
M点位移大小： $y_M = y_{入M} + y_{反M} = 0$

$y_{反M} = -y_{入M}$ $\longrightarrow$ $y_{反M} = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_M + \pi)$

半波损失：波由**波疏**媒质入射到**波密**媒质在反射时，反射波**在反射点**与入射波有 π 位相突变！

M端可看成反射波源：

$$y_{反} = A\cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_M + \pi$$

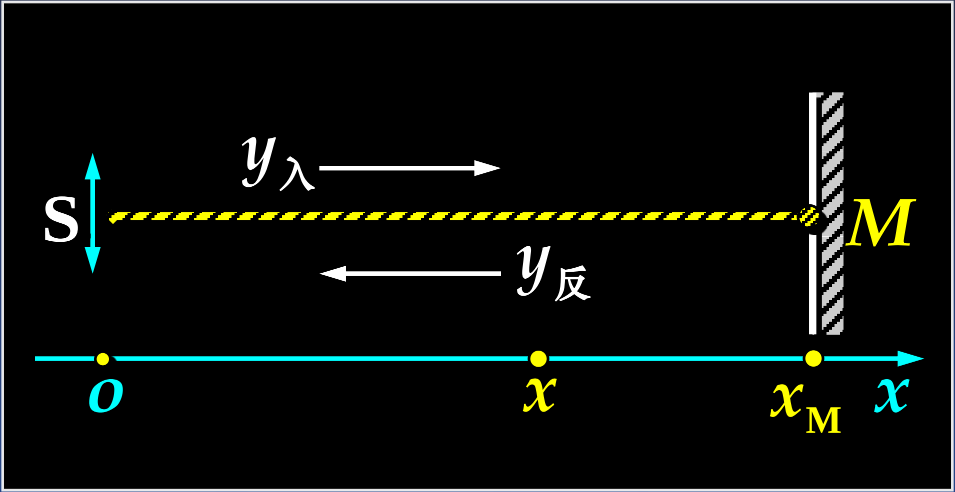


M点位移大小：　$y_M = y_{入M} + y_{反M} = 0$

$$y_{反M} = -y_{入M} \longrightarrow y_{反M} = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_M + \pi)$$

半波损失：波由**波疏**媒质入射到**波密**媒质在反射时，反射波**在反射点**与入射波有 π 位相突变！

M端可看成反射波源：

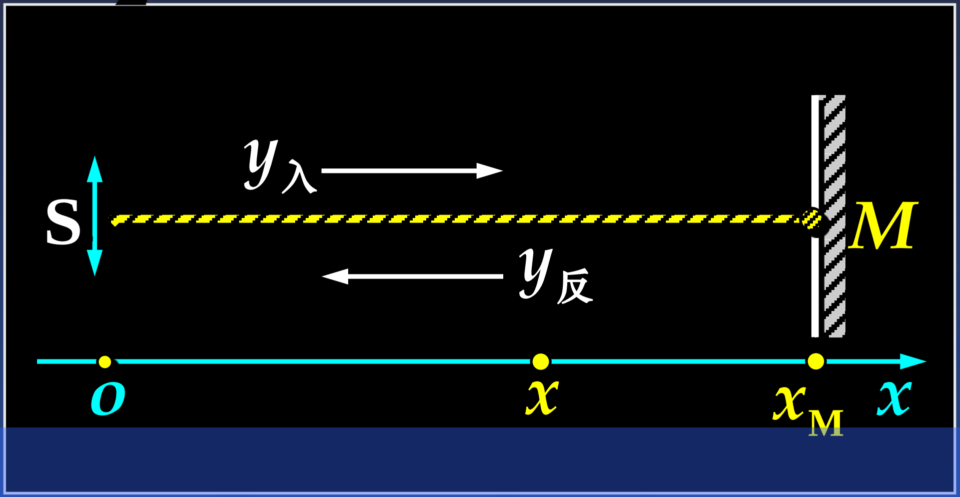


$$y_{反} = A\cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_M + \pi - \frac{2\pi}{\lambda}(x_M - x)]$$

$$y_{反} = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{4\pi}{\lambda}x_M + \pi)$$ （反射波波函数）

驻波： $y = y_{入} + y_{反} = A(x)\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_M + \frac{\pi}{2})$

$$A(x) = 2A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x - x_M) + \frac{\pi}{2}]$$



波节点： $A(x) = 0$

$$x_k = x_M - k\frac{\lambda}{2}$$

$$-\frac{2\pi}{\lambda}(x_M - x)]$$

$y_{反} = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{4\pi}{\lambda}x_M + \pi)$ （反射波波函数）

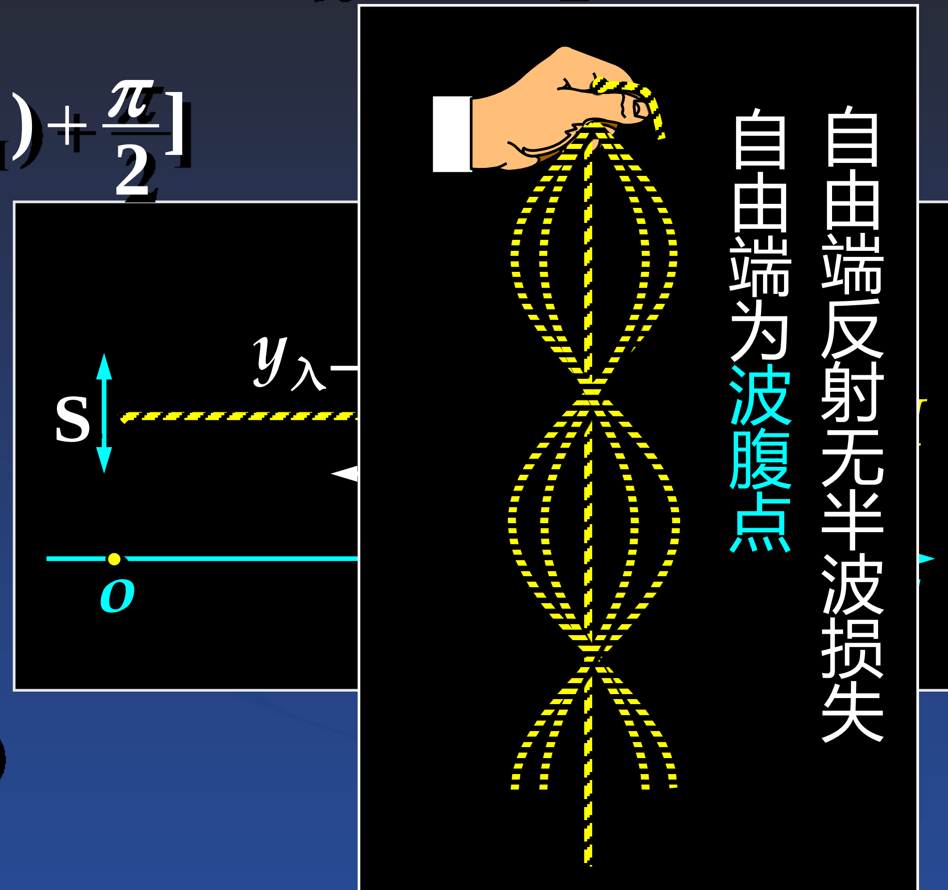
驻波： $y=y_{\text{入}}+y_{\text{反}}=A(x)\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x_{\mathrm{M}}+\frac{\pi}{2})$

$$A(x)=2A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-x_{\mathrm{M}})+\frac{\pi}{2}]$$

波节点： $A(x)=0$

$$x_k=x_{\mathrm{M}}-k\frac{\lambda}{2}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,[\frac{2x_{\mathrm{M}}}{\lambda}])$$



波腹点： $\left|A(x)\right|=2A \longrightarrow x_k=x_{\mathrm{M}}-(k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

驻波：$y = y_{入} + y_{反} = A(x)\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x_{\mathrm{M}} + \frac{\pi}{2})$

$$A(x) = 2A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x - x_{\mathrm{M}}) + \frac{\pi}{2}]$$

波节点： $A(x) = 0$

$$x_k = x_{\mathrm{M}} - k\frac{\lambda}{2}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, [\frac{2x_{\mathrm{M}}}{\lambda}])$$

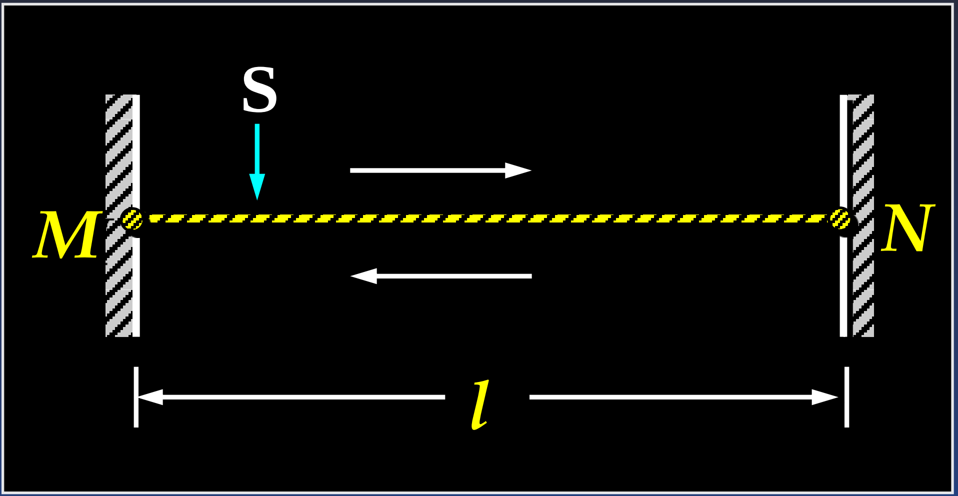
波腹点： $|A(x)| = 2A \longrightarrow x_k = x_{\mathrm{M}} - (k + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

- ▲ 声驻波
- ▲ 光驻波

四、振动的简正模式

形成稳定的驻波条件：

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad \lambda_n = \frac{2l}{n}$$



频率需满足：

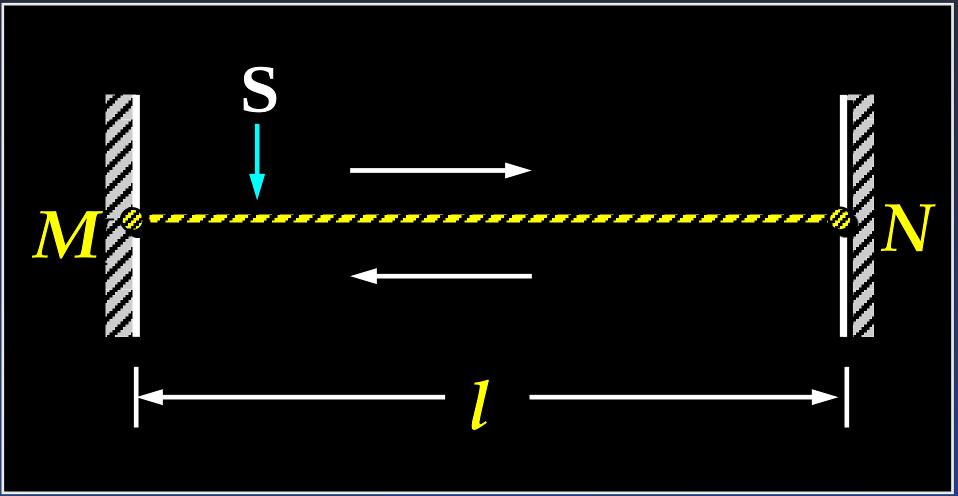
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, [\frac{2x_M}{\lambda}])$$

波腹点： $|A(x)| = 2A \longrightarrow x_k = x_M - (k + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

四、振动的简正模式

形成稳定的驻波条件:

$$l = n\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

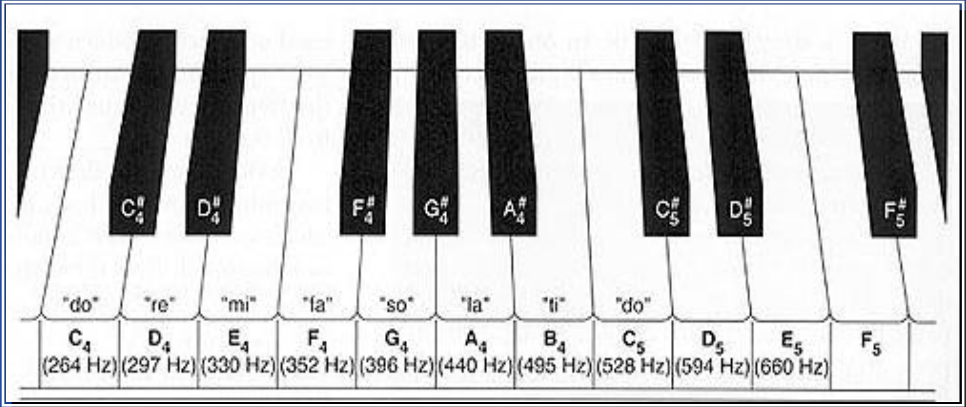


频率需满足:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda} = n\frac{u}{2l}$$

基频: $\nu_1 = \frac{u}{2l}$ **(音调)**

谐频: $\nu_2, \nu_3, \cdots$ **(音色)**



归纳:

1. 驻波形成条件： 两相干波反向相遇。

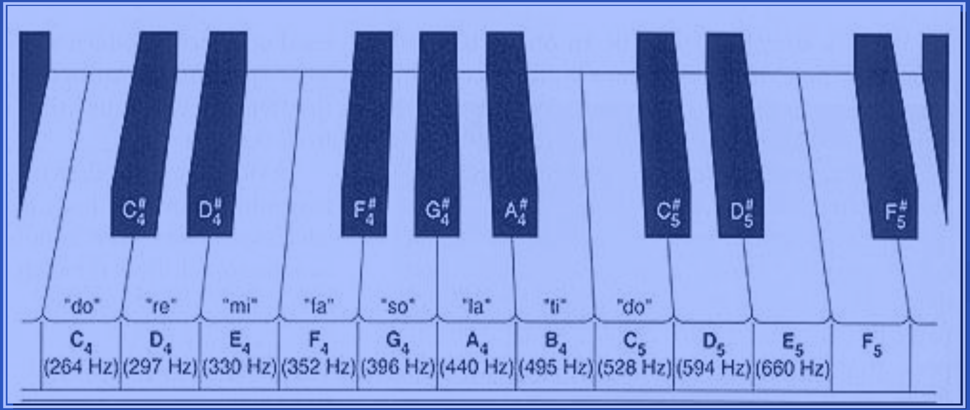
2. 驻波特点：

振幅分布： 波腹点与波节点的位置

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda} = n\frac{u}{2l}$$

基频: $\nu_1 = \dfrac{u}{2l}$ (音调)

谐频: $\nu_2, \nu_3, \cdots$ (音色)



归纳:

1. 驻波形成条件：两相干波反向相遇。

2. 驻波特点:

振幅分布：波腹点与波节点的位置

相位分布：相邻两个波节点间各点位相相同;

关于波节点对称的两点位相相差 π !

3. 两端固定弦线上的振动模式