§ 10.3 波的能量与能流

一、波的动能与势能

x 处质元：原长 dx，质量 $dm=\rho Sdx$。

胡克定律：$\dfrac{dF}{S}=-Y\dfrac{dy}{dx}$

$$dF=-(\frac{YS}{dx})dy=-kdy$$

其中：$k=\dfrac{YS}{dx}$

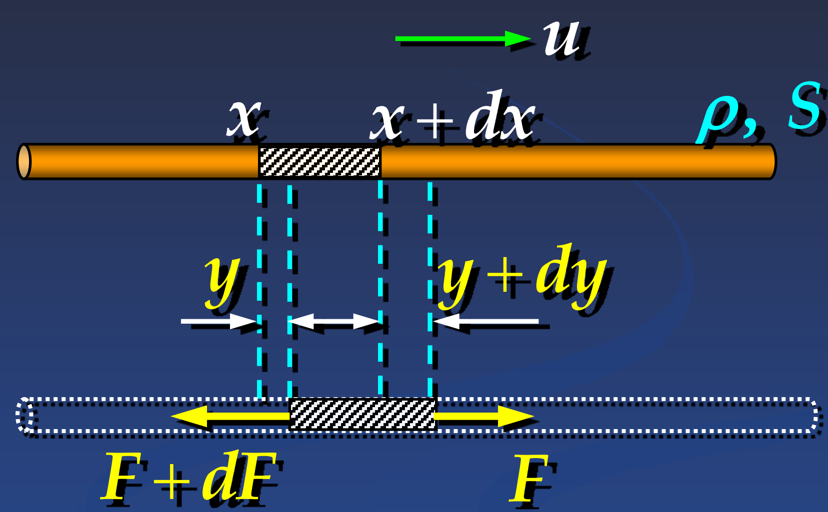


Fig. 声纵波在弹性棒中传播

质元 dx 的弹性势能：

$$dE_p=\frac{1}{2}k(dy)^2=\frac{1}{2}\frac{YS}{dx}(dy)^2=\frac{1}{2}Y\cdot dV\cdot(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

简谐声纵波：$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{u} A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \rightarrow Y = \rho u^2$$

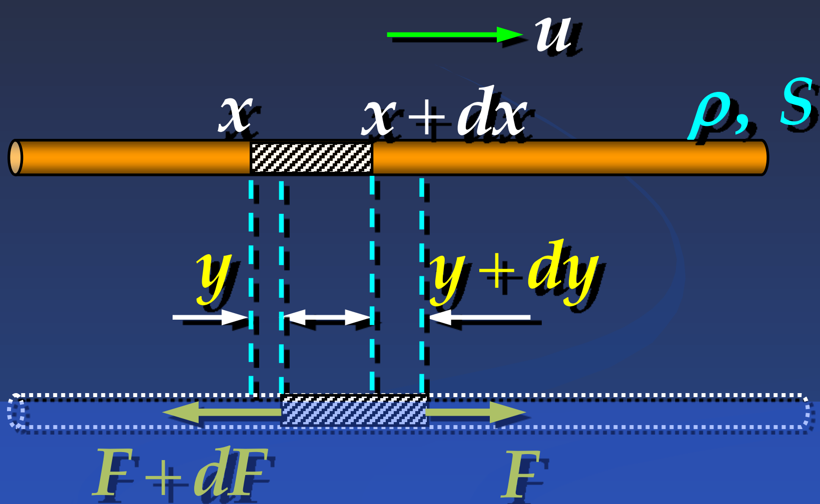


Fig. 声纵波在弹性棒中传播

其中：$k = \frac{YS}{dx}$

质元 dx 的弹性势能：

$$dE_p = \frac{1}{2}k(dy)^2 = \frac{1}{2}\frac{YS}{dx}(dy)^2 = \frac{1}{2}Y \cdot dV \cdot (\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

简谐声纵波：$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_o]$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{u}A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_o]$$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \longrightarrow Y = \rho u^2$$

$$dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\cdots]$$

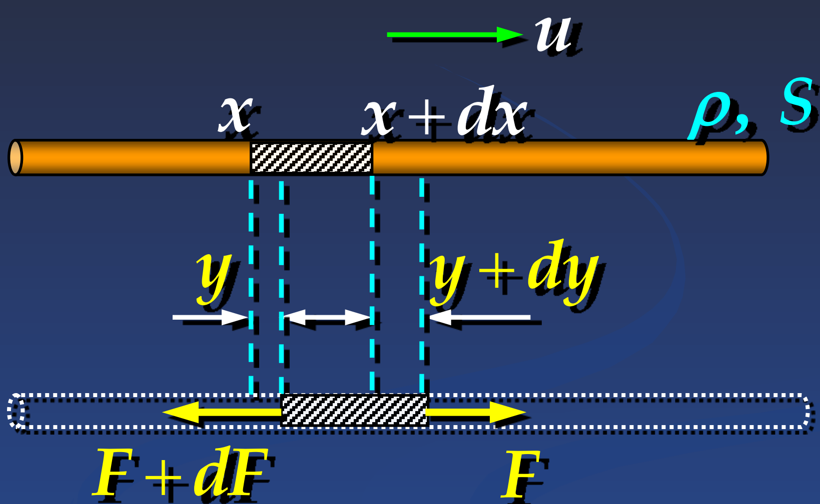


Fig. 声纵波在弹性棒中传播

质元 dx 的动能：

$$dE_k = \frac{1}{2}(\rho S dx)(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\cdots]$$

二、波的能量密度

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

能量密度： $w = \dfrac{dE}{dV} = \dfrac{dE_k + dE_p}{dV}$

二、波的能量密度

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

能量密度： $w = \frac{dE}{dV} = \frac{dE_k + dE_p}{dV}$

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0] = w(t)$$

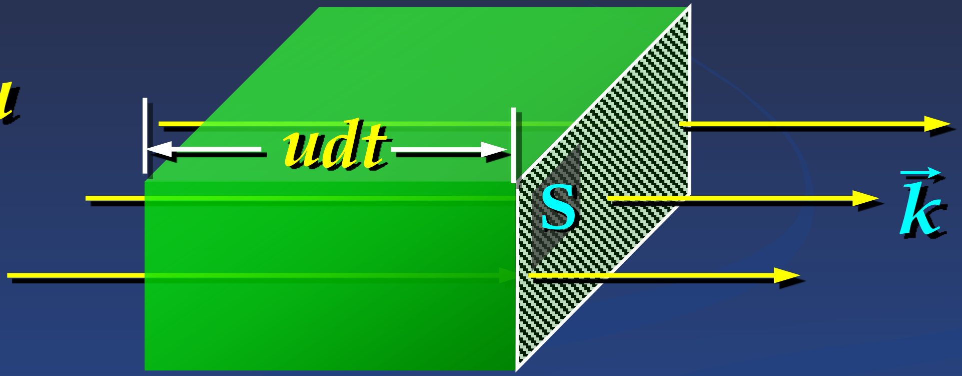
一个周期内能量密度平均值：

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \propto A^2$$

三、波的能流及能流密度

1、能流 P：单位时间内垂直通过某截面 S 的能量。

$$P=\frac{w\cdot Sudt}{dt}=w\cdot S\cdot u$$



平均能流：

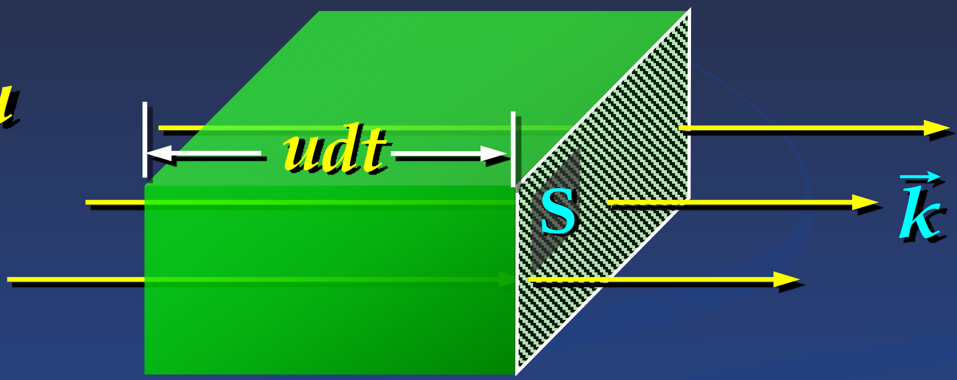
一个周期内能量密度平均值：

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\propto A^2$$

三、波的能流及能流密度

1、能流 P: 单位时间内垂直通过某截面 S 的能量。

$$P=\frac{w\cdot Sudt}{dt}=w\cdot S\cdot u$$



平均能流:

$$\overline{P}=\overline{w}\cdot S\cdot u=\frac{1}{2}\rho u\cdot\omega^2A^2\cdot S$$

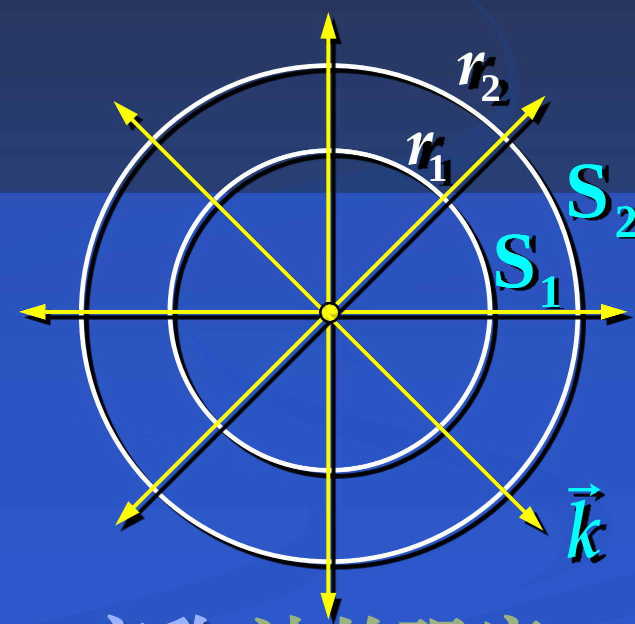
2、能流密度 I :

$$I=\overline{P}/S=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho u\cdot\omega^2A^2\propto A^2$$ 亦称 波的强度。

例 不考虑波的吸收，证明球面波的振幅 $A \propto \dfrac{1}{r}$， r 为离开波源的距离 。

解 通过两个面的平均**能流**相等： $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$



$$\overline{P} = \overline{w} \cdot S \cdot u = \frac{1}{2} \rho u \cdot \omega^2 A^2 \cdot S$$

2、**能流密度** I :

$$I = \overline{P}/S = \overline{w} u = \frac{1}{2} \rho u \cdot \omega^2 A^2 \propto A^2$$

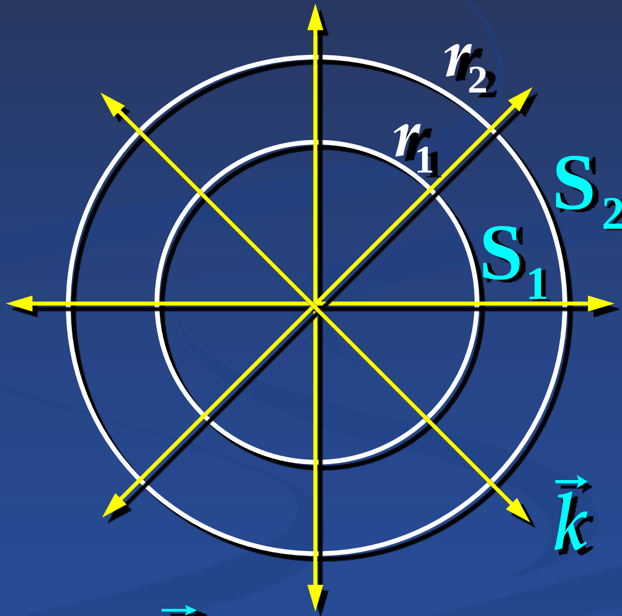
亦称 波的强度。

例 不考虑波的吸收，证明球面波的振幅 $A \propto \dfrac{1}{r}$， r 为离开波源的距离 。

解 通过两个面的平均能流相等： $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$

$$I_1 S_1 = I_2 S_2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\rho u} \cdot \cancel{\omega^2} A_1^2 \cdot \cancel{4\pi} r_1^2 = \cancel{\frac{1}{2}\rho u} \cdot \cancel{\omega^2} A_2^2 \cdot \cancel{4\pi} r_2^2$$



$$A_1 r_1 = A_2 r_2 = Ar \xlongequal{\text{令}} A_0$$

$$A = \frac{A_0}{r} \propto \frac{1}{r}$$

例如： $\psi(\vec{r}) = \dfrac{A_0}{r}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

(the end)

归纳：

1. 简谐波的动能与势能：

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

2. 波的能量密度、能流及能流密度：

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

归纳:

1. 简谐波的动能与势能:

$$dE_k = dE_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cdot dV \cdot \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

2. 波的能量密度、能流及能流密度:

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$P = w \cdot S \cdot u$$

$$I = wu = \frac{1}{2}\rho u \cdot \omega^2 A^2$$

(The end)