SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

南京邮电大学

通信与信息工程学院

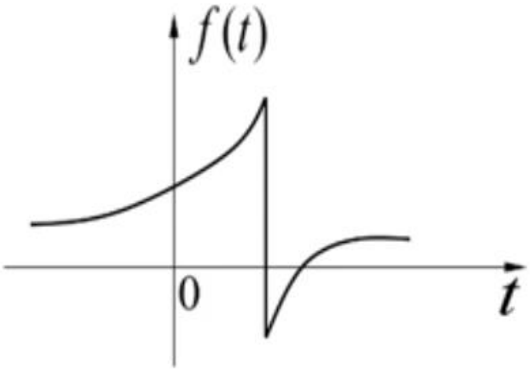
第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

概述
3.1.1 复指数序列
3.1.2 单位脉冲序列
3.1.3 单位阶跃序列

连续时间信号：

除若干个不连续点外，其它时刻都有定义，通常用 $f(t)$ 表示。

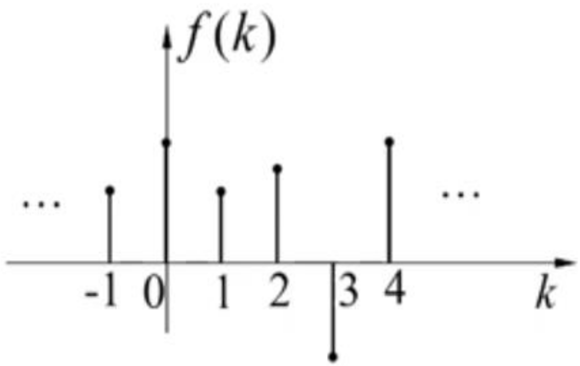


离散时间信号：

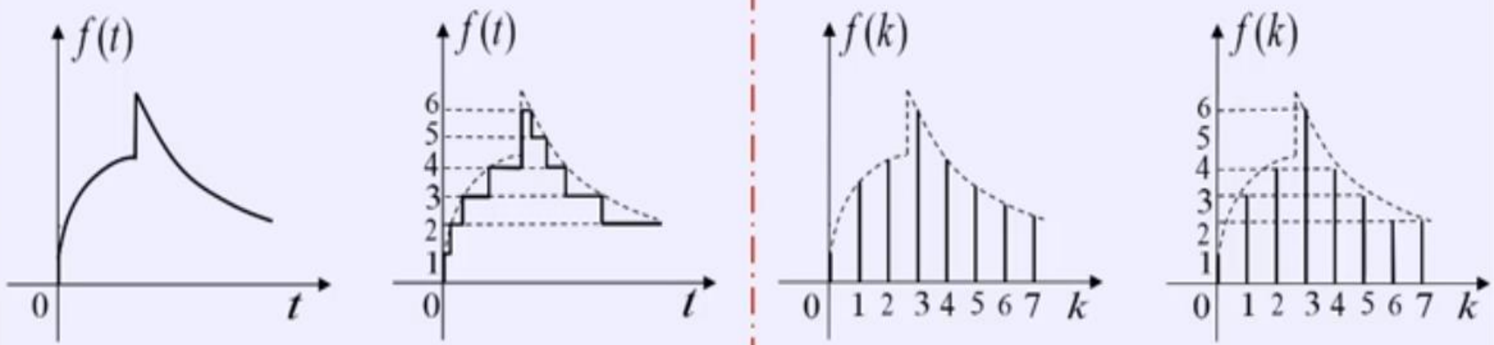
仅在离散时刻有定义，通常用

$f(t_k), f(kT), f(k)$ 表示。

$$f(t_k) = f(kT)$$



信号的分类



(a) 模拟信号　(b) 量化信号　(c) 离散信号　(d) 数字信号

	(a) 模拟信号	(b) 量化信号	(c) 离散信号	(d) 数字信号
时间取值：	连续	连续	不连续	不连续
幅度取值：	连续	不连续	连续	不连续

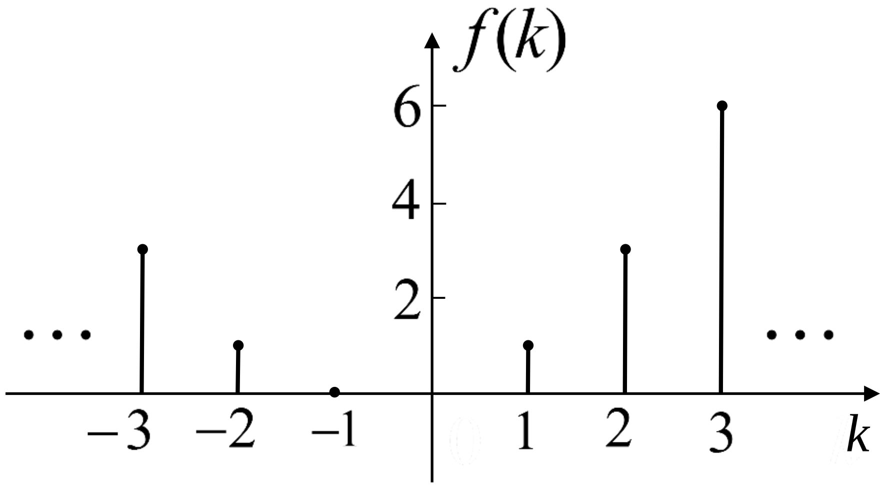
概述

离散信号的表示方法：

1. 解析式 $f(k)=\dfrac{k(k+1)}{2}, \quad k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$

2. 序列形式 $f(k)=\{\cdots 3,1,0,\underline{0},1,3,6,\cdots\}$

3. 图形



- 序列的分类

1. 双边序列

序列 $f(k)$ 对所有的整数 k 都存在确定的非零值。

2. 单边序列

有始序列（右边序列）： 当$k \le k_1$时，$f(k)=0$

$k_1 \ge 0$的有始序列称为因果序列

有终序列（左边序列）： 当$k \ge k_2$时，$f(k)=0$

$k_2 \le 0$的有终序列称为反因果序列

3. 有限序列

序列 $f(k)$ 仅在 $k_1 \le k \le k_2$ 区间有非零确定值。

3.1.1 复指数序列

复指数序列 $f(k) = Ae^{\beta k}$

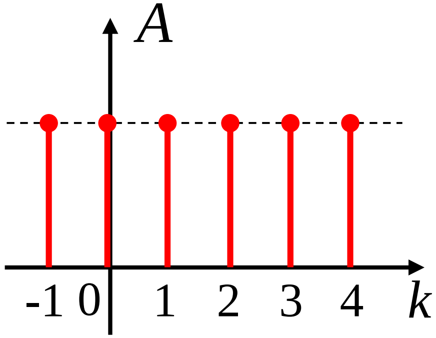
其中，A 和 β 可以是实常数，也可以是复数。$A = |A|e^{j\phi}$

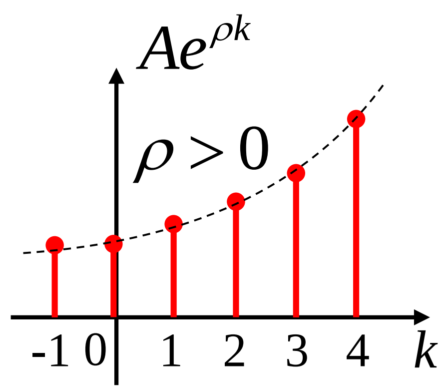
$\beta = \rho + j\Omega_0$

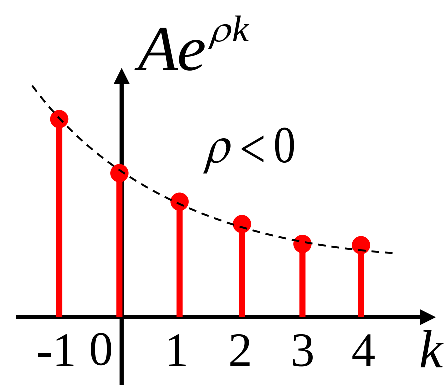
- 复指数序列可用来表示多种信号：

(1) 若 A 为实数，设 $\beta = 0$,则 $Ae^{\beta k} = A$ 为直流序列。

(2) 当 A 为实数，$\Omega_0 = 0$ 时，$Ae^{\beta k} = Ae^{\rho k}$ 为实指数序列。





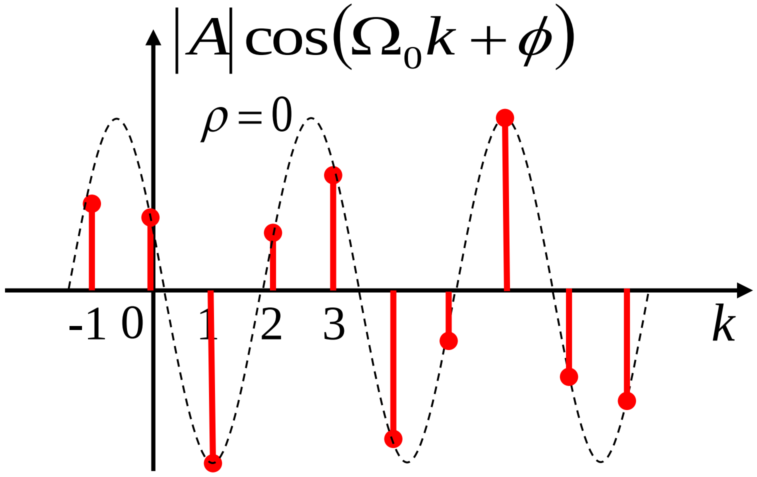


(3) 若 $A=1, \beta = j\Omega_0$,则 $Ae^{\beta k} = e^{j\Omega_0 k}$ 为**虚指数序列**。

根据欧拉公式，上式可写成

$$f(k) = e^{j\Omega_0 k} = \cos\Omega_0 k + j\sin\Omega_0 k$$

可见，虚指序列的实部和虚部都是正弦序列。当满足 $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ 为有理数时，虚指序列才是周期序列。



(4) 一般情况下，若 A, β 均为复数，则 $f(k) = Ae^{\beta k}$ 为复指数序列。

设 $A = |A|e^{j\phi}$， $\beta = \rho + j\Omega_0$,并记 $e^{\rho} = r$, 则有

$$f(k) = Ae^{\beta k} = |A|e^{j\phi}e^{(\rho + j\Omega_0)k}$$

$$= |A|e^{j\phi}\underline{e^{\rho k}}e^{j\Omega_0 k}$$

$$= |A|e^{j\phi}\underline{r^k}e^{j\Omega_0 k} = |A|r^k e^{j(\Omega_0 k + \phi)}$$

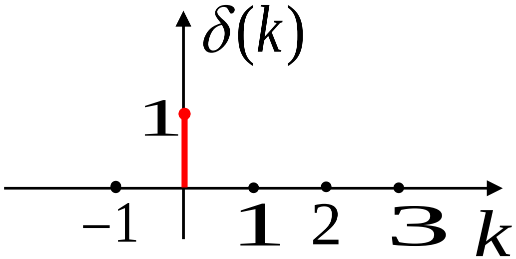
$$= |A|r^k[\cos(\Omega_0 k + \phi) + j\sin(\Omega_0 k + \phi)]$$

其实部和虚部均为变幅的正弦序列。

3.1.2 单位脉冲序列

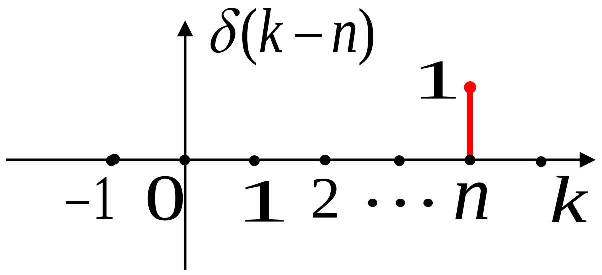
单位脉冲序列：

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$



延迟单位脉冲序列：

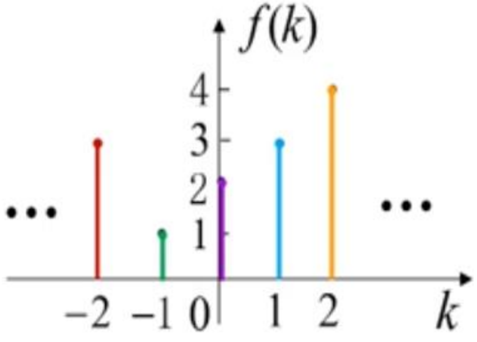
$$\delta(k-n)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$



(1) 筛选特性： $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-n)=f(n)$$

(2) 加权特性： $$f(k)\delta(k-n)=f(n)\delta(k-n)$$

应用加权特性，可以表示任意离散序列 $f(k)$：



$$f(k)=\cdots+3\delta(k+2)+\delta(k+1)+2\delta(k)+3\delta(k-1)+4\delta(k-2)+\cdots$$

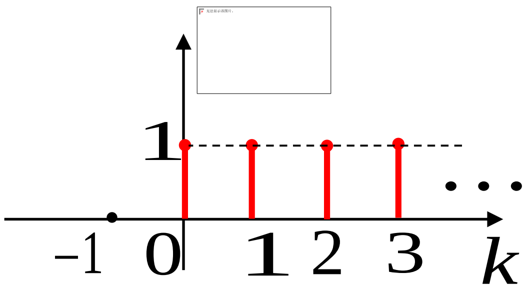
一般地，对于任意离散序列 $f(k)$，可表示为一系列延时单位冲激序列的加权和：

$$f(k)=\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+\cdots$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\delta(k-n)$$

3.1.3 单位阶跃序列

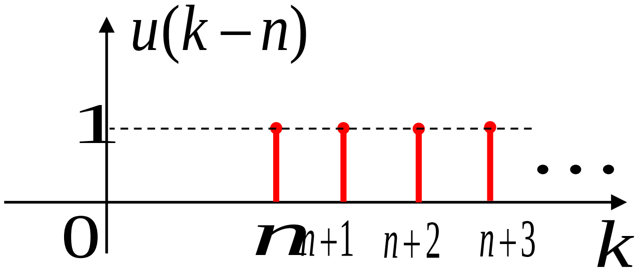
单位阶跃序列：

$$u(k)=\begin{cases}1 & k\ge 0\\ 0 & k<0\end{cases}$$



延迟单位阶跃序列：

$$u(k-n)=\begin{cases}1 & k\ge n\\ 0 & k<n\end{cases}$$



$u(k)$与$\delta(k)$的关系：

$$\delta(k)=\nabla u(k)=u(k)-u(k-1)$$

$$u(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}\delta(n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k-n)$$

对比：

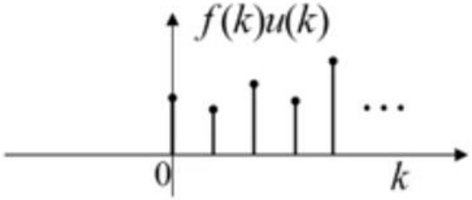
$$\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

- 阶跃序列的作用：

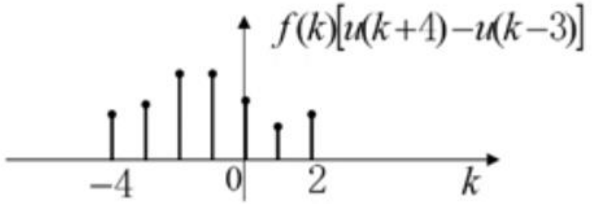
(1) 截断序列，使其成为单边序列

$$f(k)u(k)=\begin{cases} f(k), k\ge 0 \\ 0 \quad , k<0 \end{cases}$$



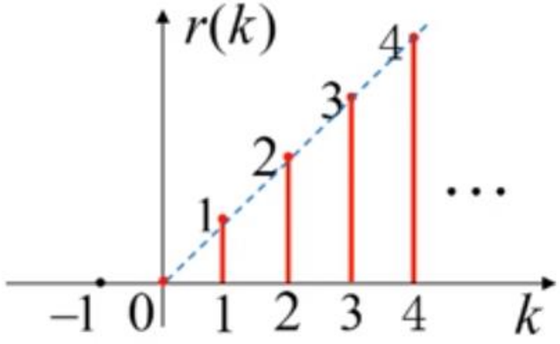
(2) 表示序列作用的区间

$$f(k)[u(k-n)-u(k-m)]=\begin{cases} f(k), n\le k<m \\ 0 \quad , \quad 其他 \end{cases}$$



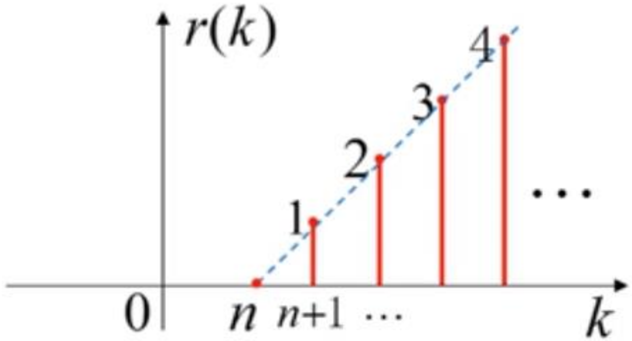
• 斜变序列

单位斜变序列： $r(k)=ku(k)$

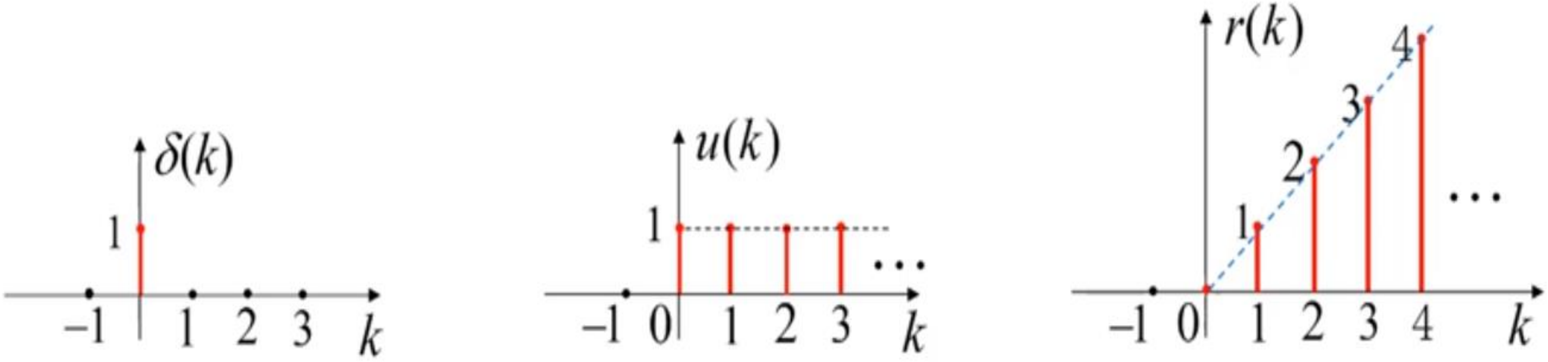


延迟单位斜变序列：

$$r(k-n)=(k-n)u(k-n)$$



$\delta(k)$、$u(k)$和$r(k)$的关系：



$$\delta(k)=\nabla u(k)=u(k)-u(k-1) \qquad u(k)=\nabla r(k+1)=r(k+1)-r(k)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{k}\delta(n)=\begin{cases}0 & k<0\\ 1 & k\geq 0\end{cases}=u(k) \qquad \sum_{n=-\infty}^{k}u(n)=\begin{cases}0 & k<0\\ k+1 & k\geq 0\end{cases}=(k+1)u(k)=r(k+1)$$

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

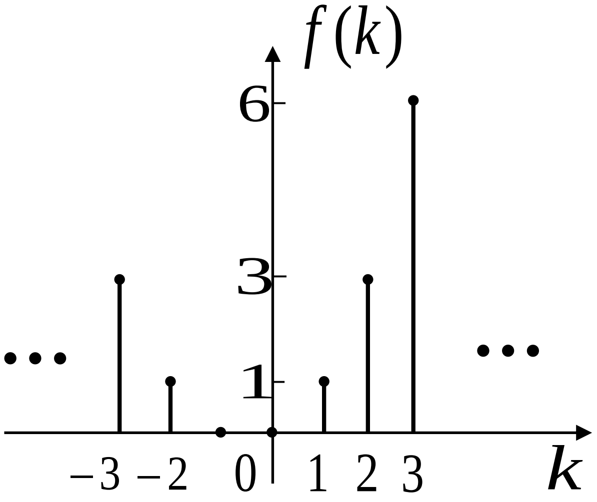
3.2.1 替换自变量的运算
3.2.2 相加与相乘
3.2.3 差分与累加
3.2.4 离散信号的时域分解

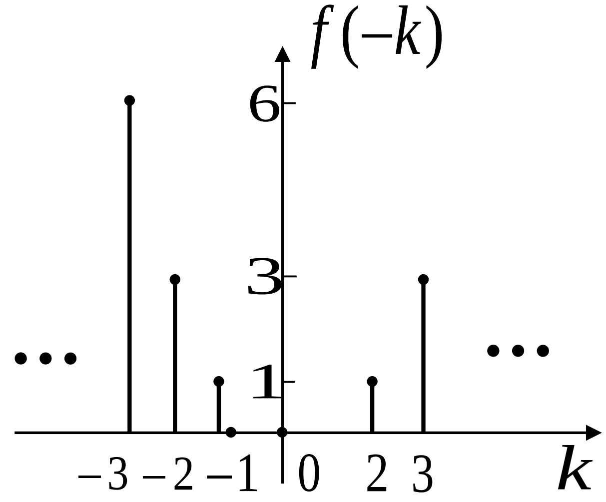
3.2.1 替换自变量的运算

1. 翻转：

$$f(k) \xrightarrow{k=-k} f(-k)$$

从波形上看，$f(k)$ 与 $f(-k)$关于坐标纵轴对称，或者说将 $f(k)$ 以纵轴为中心翻转180度即可得到 $f(-k)$。

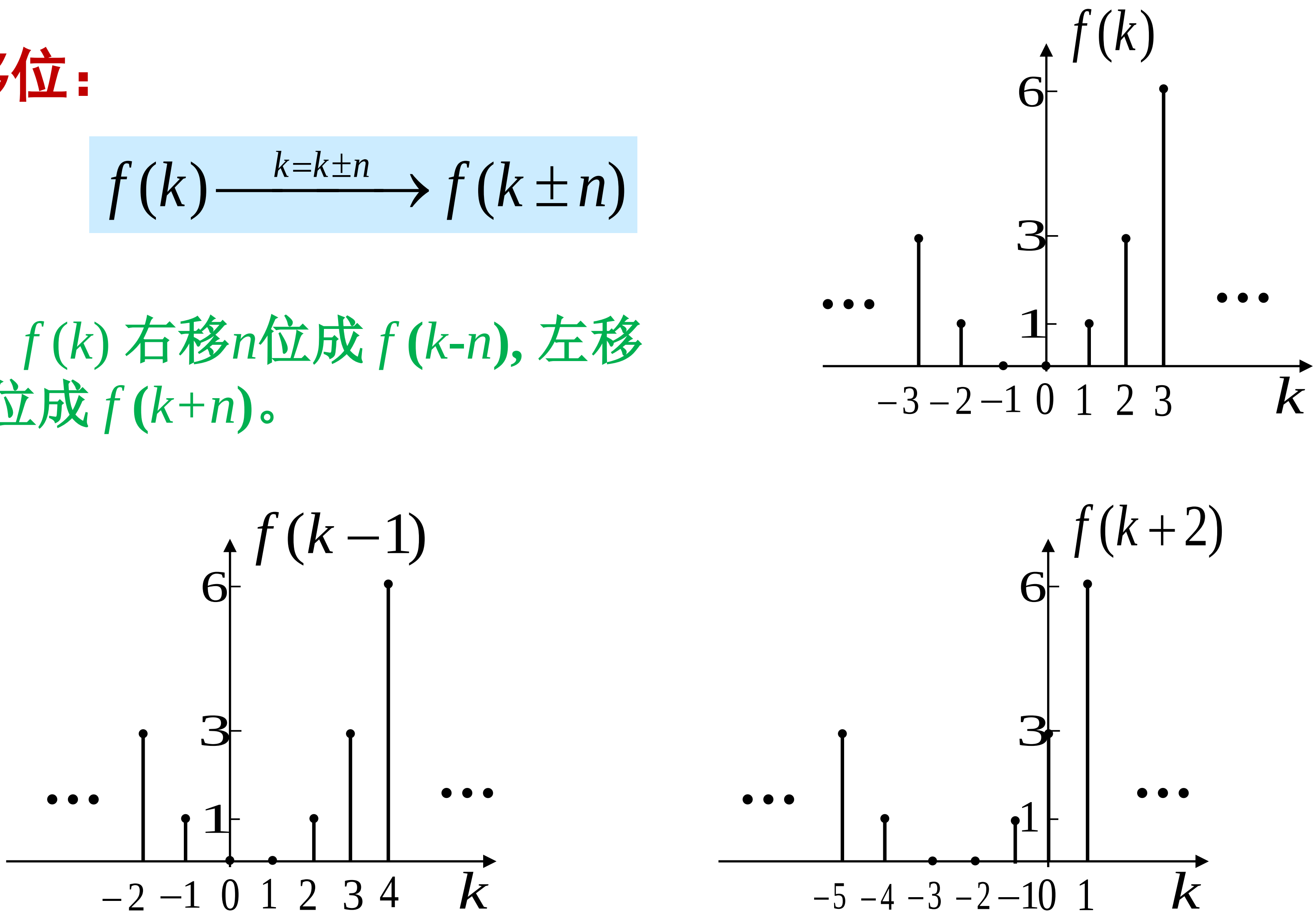




2. 移位：

$$f(k) \xrightarrow{k=k\pm n} f(k\pm n)$$

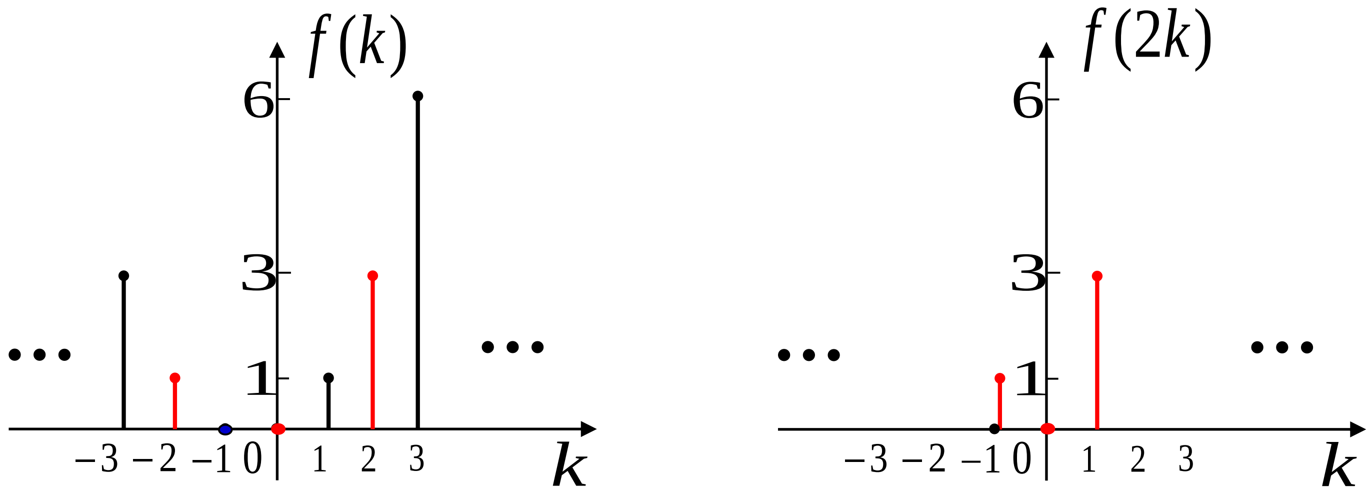
$f(k)$ 右移n位成 $f(k-n)$, 左移n位成 $f(k+n)$。



3. 尺度变换：

$$f(k) \xrightarrow{k=mk} f(mk)$$

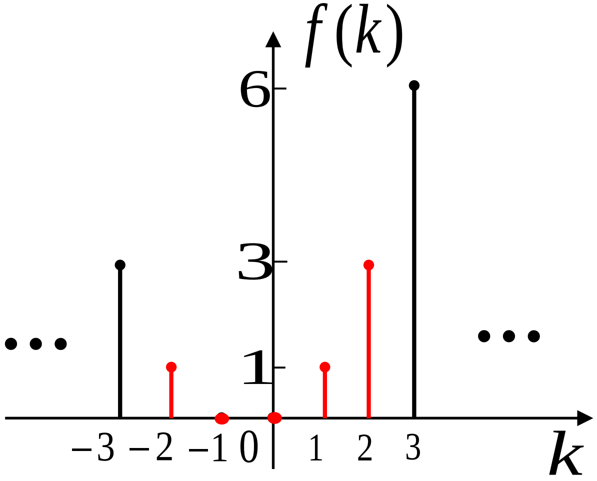
设 m 为正整数，从波形上看， $f(mk)$ 是将 $f(k)$ 的波形压缩，表示在序列 $f(k)$中每隔 m-1 点抽取一点，也称为序列 $f(k)$的 m 倍抽取。

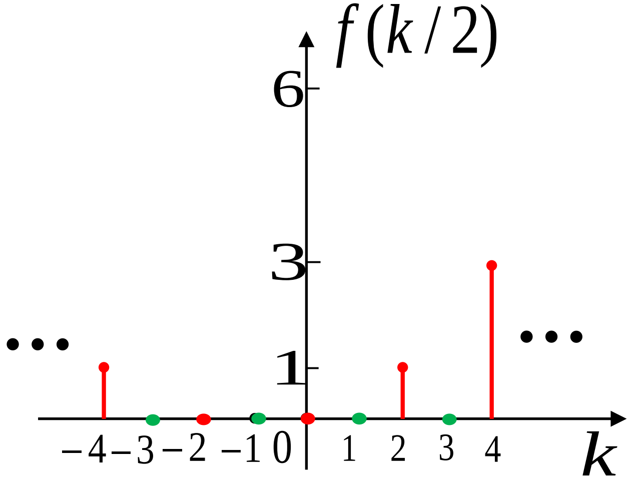


3.2.1 替换自变量的运算

$$f(k) \xrightarrow{k = k/m} f(k/m)$$

f(*k*/*m*)是将 *f*(*k*)的波形扩展，表示在序列 *f*(*k*)中每相邻两点之间插入 *m*-1个零值点，也称为序列 *f*(*k*) 的 ***m*倍内插**。





3.2.2 相加与相乘

序列相加（或相乘）：

两个序列同序号的数值逐项对应相加(或相乘)。

$$f(k) = f_1(k) + f_2(k)$$

$$f(k) = f_1(k) \cdot f_2(k)$$

注意在用基本定义解的时候，*k*的取值范围要一致！

例：已知序列

$$f_1(k)=\begin{cases}0 & k<-1\\ 2^{-k}+5 & k\ge -1\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}2^{k} & k<0\\ k+2 & k\ge 0\end{cases}$$

试求 $f_1(k)+f_2(k)$ 和 $f_1(k)\cdot f_2(k)$。

解：

$$f_1(k)=\begin{cases}0 & k<-1\\ 7 & k=-1\\ 2^{-k}+5 & k\ge 0\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}2^{k} & k<-1\\ 1/2 & k=-1\\ k+2 & k\ge 0\end{cases}$$

$$f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}2^{k} & k<-1\\ 15/2 & k=-1\\ 2^{-k}+k+7 & k\ge 0\end{cases}$$

$$f_1(k)\cdot f_2(k)=\begin{cases}0 & k<-1\\ 7/2 & k=-1\\ k2^{-k}+2^{-k+1}+5k+10 & k\ge 0\end{cases}$$

3.2.3 差分与累加

1. 序列的差分（对应于连续信号的微分）

一阶前向差分：$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

二阶前向差分：$$\Delta\left[\Delta f(k)\right] = \Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k)$$

$$= f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)$$

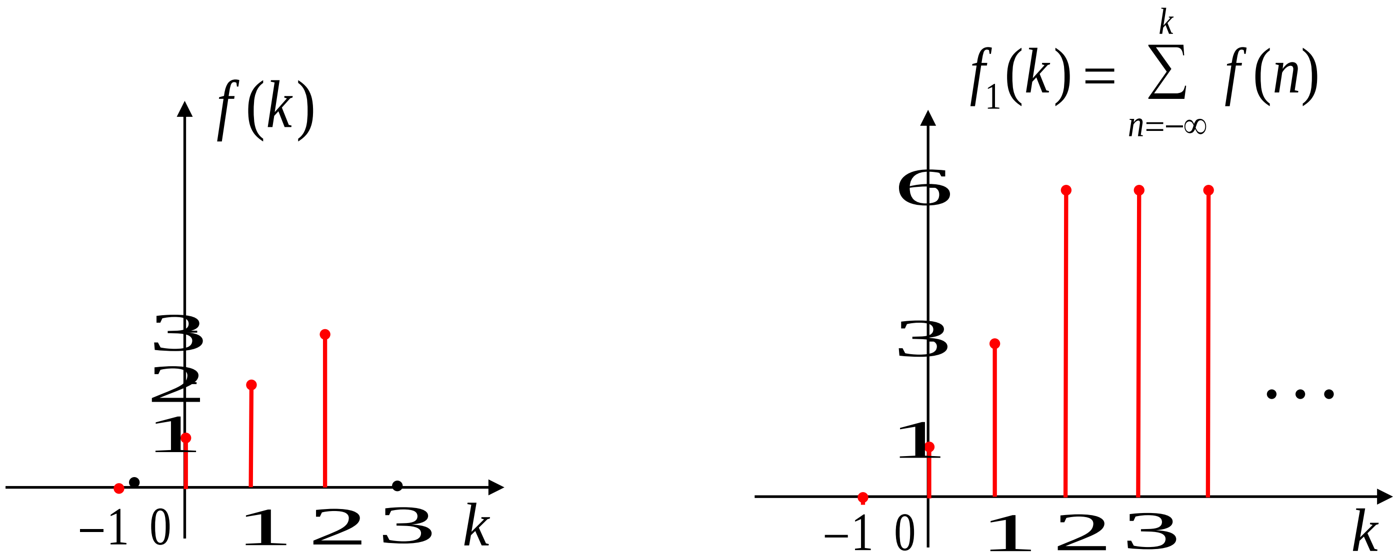
一阶后向差分：$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

二阶后向差分：$$\nabla\left[\nabla f(k)\right] = \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1)$$

$$= f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$$

2. 序列的累加（对应于连续信号的积分）

$$f_1(k)=\sum_{n=-\infty}^{k} f(n)$$



3.2.4 离散信号的时域分解

根据单位脉冲序列的加权特性 $f(k)\delta(k-n)=f(n)\delta(k-n)$

任意序列可以表示为延迟的单位脉冲序列的线性加权和，即

$$f(k)=\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+\cdots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\delta(k-n)$$

表明任意离散时间信号可以分解为单位脉冲序列的线性组合。

当求解序列 $f(k)$通过离散时间线性时不变系统产生的响应时，只需求解单位脉冲序列$\delta(k)$通过该系统产生的响应，然后利用线性时不变系统的特性，即可求得序列 $f(k)$产生的响应。

任意序列 $f(k)$分解为脉冲序列是离散时间系统时域分析的基础。

3.3 离散时间系统的零输入响应

当输入信号为零时，描述系统的差分方程为齐次差分方程，即

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0$$

此时只要根据零输入响应的n个初始条件求解齐次差分方程就可以了。

【例】 已知某线性时不变离散系统的差分方程为

$$y(k+2) - 0.5y(k+1) - y(k) = 3x(k+1) - 2x(k)$$

初始条件$y_{zi}(0) = 3$，$y_{zi}(1) = 0$

试求系统的零输入响应。

解：特征方程为　$r^2-0.5r-1=0$，

解得特征根　$r_1=1$、$r_2=-0.5$，

零输入响应的形式应为

$$y_{zi}(k)=c_1+c_2(-0.5)^k \quad (k\geqq 0)$$

代入初始条件，得

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=c_1+c_2=3 \\ y_{zi}(1)=c_1-0.5c_2=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} c_1=1 \\ c_2=2 \end{cases}$$

故　$y_{zi}(k)=1+2(-0.5)^k \quad (k\geq 0)$

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

3.4 离散系统的单位脉冲响应

求解描述系统的线性差分方程

1. 迭代法

2. 间接法

1. 迭代法

单位脉冲序列 $\delta(k)$ 只在 $k=0$ 时取非零值 $\delta(0)=1$，利用这一特点可以方便地用迭代法求出 $h(k)$ 。

例：若某离散时间系统的差分方程为 $y(k+1)+a_0 y(k)=b_0 x(k)$，求系统的单位脉冲响应 $h(k)$。

解：根据单位脉冲响应 $h(k)$的定义，它应满足方程：

$$h(k+1)+a_0 h(k)=b_0 \delta(k)$$

对于因果系统，由于 $\delta(-1)=0$，故 $h(-1)=0$

采用迭代法，将差分方程写成 $h(k+1)=b_0 \delta(k)-a_0 h(k)$

取k=−1代入，可求得： $h(0)=b_0 \delta(-1)-a_0 h(-1)=0$

取k=0代入，可求得： $h(1)=b_0 \delta(0)-a_o h(0)=b_0$

取k=1代入，可求得： $h(2)=b_0 \delta(1)-a_0 h(1)=-a_0 b_0$

取k=2代入，可求得： $h(3)=b_0 \delta(2)-a_0 h(2)=(-a_0)^2 b_0$

$$\vdots$$

用归纳法，可得： $h(k)=b_0 \delta(k-1)-a_0 h(k-1)=(-a_0)^{k-1} b_0$

一般情况下，用迭代法求系统的单位脉冲响应不易得出解析形式的解。

2. 间接法

结论：

- 对于 n 阶前向差分方程

$$a_n h_0(k+n)+a_{n-1}h_0(k+n-1)+\cdots+a_1h_0(k+1)+a_0h_0(k)=\delta(k)$$

初始条件为 $h_0(1)=h_0(2)=\cdots=h_0(n-1)=0$，而 $h_0(n)=\dfrac{1}{a_n}$

- 对于 n 阶后向差分方程

$$a_n h_0(k-n)+a_{n-1}h_0(k-n+1)+\cdots+a_1h_0(k-1)+a_0h_0(k)=\delta(k)$$

初始条件为 $h_0(-1)=h_0(-2)=\cdots=h_0(-n+1)=0$，而 $h_0(0)=\dfrac{1}{a_n}$

（后向差分方程可以转化为前向差分方程来求解）

（1）找出n个初始条件：

$$a_n h_0(k+n) + a_{n-1} h_0(k+n-1) + \cdots + a_1 h_0(k+1) + a_0 h_0(k) = \delta(k) \qquad (1)$$

令$k=-n$，方程(1)变为

$$a_n h_0(0) + \overbrace{a_{n-1} h_0(-1) + \cdots + a_1 h_0(-n+1) + a_0 h_0(-n)}^{=0} = \overbrace{\delta(-n)}^{=0} \quad \Rightarrow \quad h_0(0) = 0$$

令$k=-n+1$，方程(1)变为

$$a_n h_0(1) + \overbrace{a_{n-1} h_0(0) + \cdots + a_1 h_0(-n+2) + a_0 h_0(-n+1)}^{=0} = \overbrace{\delta(-n+1)}^{=0} \quad \Rightarrow \quad h_0(1) = 0$$

如此继续下去，可得

$$h_0(1) = h_0(2) = \cdots = h_0(n-1) = 0$$

令$k=0$，方程(1)变为

$$a_n h_0(n) + \overbrace{a_{n-1} h_0(n-1) + \cdots + a_1 h_0(1) + a_0 h_0(0)}^{=0} = \overbrace{\delta(0)}^{=1} \quad \Rightarrow \quad h_0(n) = \frac{1}{a_n}$$

初始条件为 $h_0(1) = h_0(2) = \cdots = h_0(n-1) = 0$，而 $h_0(n) = \dfrac{1}{a_n}$

3.4 离散系统的单位脉冲响应

- 对于 n 阶前向差分方程

$$a_n h_0(k+n)+a_{n-1}h_0(k+n-1)+\cdots+a_1 h_0(k+1)+a_0 h_0(k)=\delta(k)$$

根据特征根的不同类型，齐次解的通解形式有三种：

（1）特征根 r_i 均为单根

$$h_0(k)=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i r_i^{\,k}\right)u(k-1)$$

（2）特征根有p重根 r_1，则对应项为

$$h_0(k)=\left[\left(c_1+c_2 k+\cdots+c_p k^{p-1}\right)r_1^{\,k}\right]u(k-1)$$

（3）特征根中有共轭复根 $r_{1,2}=|r|e^{\pm j\varphi}$，则对应项为

$$h_0(k)=\left[|r|^k\left(c_1\cos k\varphi+c_2\sin k\varphi\right)\right]u(k-1)$$

例:某离散时间系统由下列差分方程描述:

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=x(k+2)-3x(k)$$

试求其单位函数响应。

解: 设 $h_0(k+2)-5h_0(k+1)+6h_0(k)=\delta(k)$

特征方程为 $\gamma^2-5\gamma+6=0$，特征根 $\gamma_1=2$，$\gamma_2=3$

则单位函数响应为 $h_0(k)=\left[A_1(2)^k+A_2(3)^k\right]u(k-1)$

代入初始条件$h_0(1)=0$, $h_0(2)=1$，可解得 $A_1=-\dfrac{1}{2}, A_2=\dfrac{1}{3}$

即 $h_0(k)=\left(3^{k-1}-2^{k-1}\right)u(k-1)$

所以 $h(k)=h_0(k+2)-3h_0(k)$

$$=(3^{k+1}-2^{k+1})\left[\delta(k+1)+\delta(k)+u(k-1)\right]-3(3^{k-1}-2^{k-1})u(k-1)$$

$$=\delta(k)+(9\times3^{k-1}-4\times2^{k-1})u(k-1)-3(3^{k-1}-2^{k-1})u(k-1)$$

$$=\delta(k)+(2\times3^k-2^{k-1})u(k-1)$$

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全
- 本章要点
- 作业

3.5.1 离散卷积的引出
3.5.2 离散卷积的性质
3.5.3 确定离散卷积求和限的公式
3.5.4 离散卷积的图解
3.5.5 离散卷积的列表计算

3.5.1 离散卷积的引出

线性时不变离散系统的数学模型：

线性常系数差分方程

- **时域分析**

  1. 计算零输入响应：求解齐次解

  2. 计算零状态响应：

  ①**经典法：求解非齐次解**

  ②**离散卷积分析法**

- **变换域分析（第6章介绍）**

3.5.1 离散卷积的引出

离散信号的分解

$$x(k) = \cdots + x(-2)\delta(k+2) + x(-1)\delta(k+1) + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

设单位函数响应为 $h(k)$

$$\delta(k) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow h(k)$$

根据线性和时不变性，有

$$x(n)\delta(k-n) \longrightarrow x(n)h(k-n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n) \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

$$\therefore y_{zs}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

用卷积符号记为

$$y_{zs}(k) = x(k) * h(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

称为卷积和或离散卷积

3.5.2 离散卷积的性质

1. 代数运算

(1) 交换律 $x(k)*h(k)=h(k)*x(k)$

(2) 分配律 $x(k)*[h_1(k)+h_2(k)]=x(k)*h_1(k)+x(k)*h_2(k)$

(3) 结合律 $\left[x(k)*h_1(k)\right]*h_2(k)=x(k)*\left[h_1(k)*h_2(k)\right]$

2. 差分与求和

设 $y(k)=x(k)*h(k)$，有

(1) 差分

$$\Delta y(k)=\Delta x(k)*h(k)=x(k)*\Delta h(k)$$

$$\nabla y(k)=\nabla x(k)*h(k)=x(k)*\nabla h(k)$$

(2) 求和

$$\sum_{n=-\infty}^{k}y(n)=x(k)*\sum_{n=-\infty}^{k}h(n)=\left[\sum_{n=-\infty}^{k}x(n)\right]*h(k)$$

二. 离散卷积的性质

1. 交换律 $x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

令 $m=n-k$
$n-m=k$

证明： $x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n-k) x_2(k) = x_2(n) * x_1(n)$$

2. 结合律 $x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)$

证明： $[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(k-m) \right] x_3(n-k)$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k-m) x_3(n-k)$$

令 $r=k-m$
$k=m+r$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(r) x_3(n-m-r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) Q(n-m)$$

$$= x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)]$$

3. 分配律 $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$

证明： $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) [x_2(n-m) + x_3(n-m)]$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_3(n-m)$$

$$= x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$$

www.docin.com

3. 移位

$$x(k) = x(k) * \delta(k)$$

推广 $$x(k) * \delta(k - k_1) = x(k - k_1)$$

$$x(k - k_1) * \delta(k - k_2) = x(k - k_1 - k_2)$$

$$x(k - k_1) * h(k - k_2) = y(k - k_1 - k_2)$$

3.5.3 确定离散卷积求和限的公式

若 $k<k_1$ **时，** $x(k)=0$; $k<k_2$ **时，** $h(k)=0$; **确定求和限的一般公式为**

$$y_{zs}(k)=\sum_{n=k_1}^{k-k_2}x(n)h(k-n)\cdot u(k-k_1-k_2)$$

等比级数求和公式：

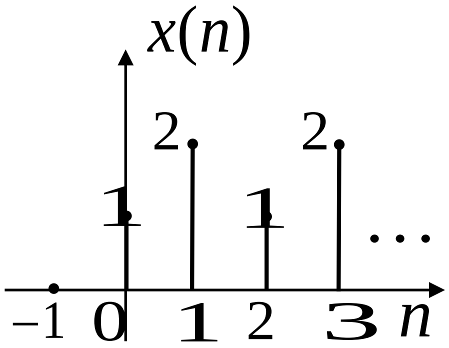
$$\sum_{n_1}^{n_2}q^n=\begin{cases}\dfrac{q^{n_1}-q^{n_2+1}}{1-q}, & q\neq 1\\ n_2-n_1+1 & q=1\end{cases}\qquad (n_1<n_2)$$

3.5.4 离散卷积的图解

步骤：

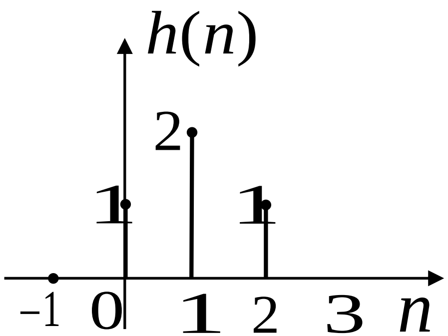
1. 换元；2. 折叠 $h(-n)$；3. 移位 $h(k-n)$；

4. 相乘 $x(n)h(k-n)$； 5. 求和。



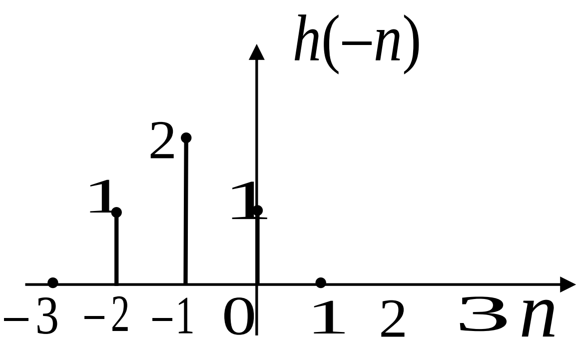
例3−5−2：设激励信号 $x(k)=\{\underline{1},2,1,2\cdots\}$

单位函数响应 $h(k)=\{\underline{1},2,1\}$，求零状态响应$y_{ZS}(k)$



$$解:y_{zs}(k)=\sum_{n=0}^{k}x(n)h(k-n)$$

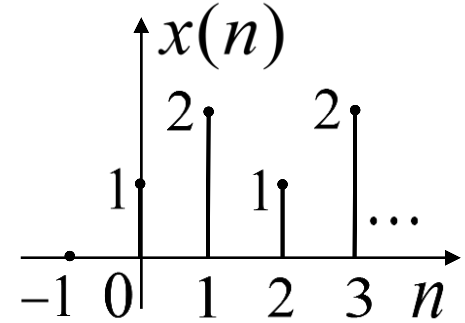
当$k<0$时，$y_{zs}(k)=0$



$$y_{zs}(0)=\sum_{n=0}^{0}x(n)h(0-n)=x(0)h(0)=1\times1=1$$

$$y_{zs}(1)=\sum_{n=0}^{1}x(n)h(1-n)=x(0)h(1)+x(1)h(0)$$

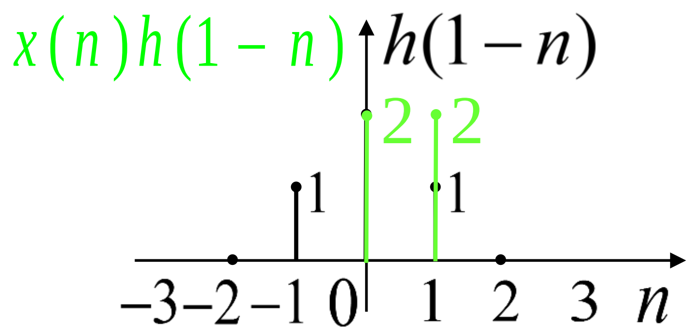
$$=1\times 2+2\times 1=4$$



$$y_{zs}(2)=\sum_{n=0}^{2}x(n)h(2-n)$$

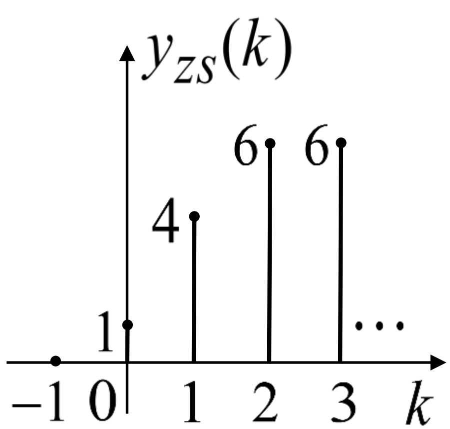
$$=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)$$

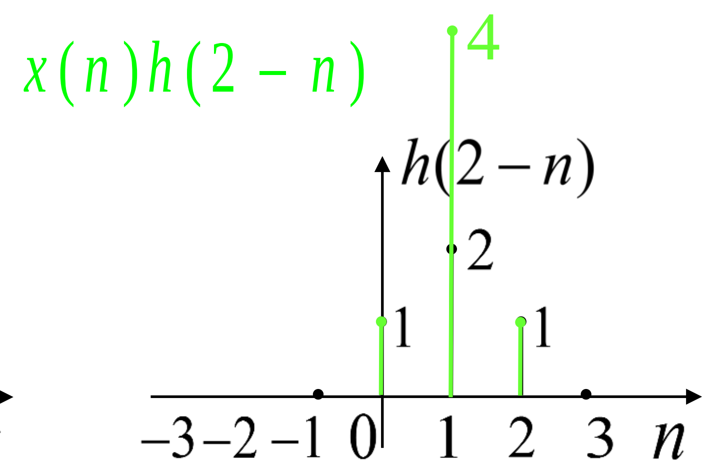
$$=1\times 1+2\times 2+1\times 1=6$$



类此，可得

$$y_{zs}(k)=\{\underline{1},4,6,6\cdots\}$$





3.5.5 离散卷积的列表计算

例： 离散时间系统的激励信号 $x(k)=\{\underline{2},1,5\}$，单位函数响应 $h(k)=\{\underline{3},1,4,2\}$，试求其零状态响应。

· 序列阵表格法

$h(k)$ \ $x(k)$	$\underline{2}$	1	5
$\underline{3}$	$\underline{6}$	3	15
1	2	1	5
4	8	4	20
2	4	2	10

· 不进位乘法

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & \underline{3} & 1 & 4 & 2 \\
\times & & & & \underline{2} & 1 & 5 \\
\hline
 & & & 15 & 5 & 20 & 10 \\
 & & 3 & 1 & 4 & 2 & \\
+ & \underline{6} & 2 & 8 & 4 & & \\
\hline
 & \underline{6} & 5 & 24 & 13 & 22 & 10
\end{array}
$$

$$\therefore \quad y_{zs}(k)=\{\underline{6},5,24,13,22,10\}$$

排成乘法

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & f_1(1)\,, & f_1(2)\,, & f_1(3) & \\
\times & & & f_2(0)\,, & f_2(1) & \\
\hline
 & & f_1(1)f_2(1)\,, & f_1(2)\,f_2(1)\,, & f_1(3)\,f_2(1) & \\
+ & f_1(1)\,f_2(0)\,, & f_1(2)\,f_2(0)\,, & f_1(3)\,f_2(0) & & \\
\hline
 & f_1(1)\,f_2(0) & f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0) & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0) & f_1(3)\,f_2(1) &
\end{array}
$$

$$
f(k)=\{\,0,\quad f_1(1)\,f_2(0),\quad f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0),\quad f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0)\,,\quad f_1(3)\,f_2(1)\,,\quad 0\,\}
$$

www.docin.com

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

3.6 离散时间系统的全响应

系统的全响应分解为：

- 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应
- 全响应 = 自然(固有)响应(通解)+ 强制响应(特解)

  自然响应：齐次微分(差分)方程的通解

  强制响应：非齐次微分(差分)方程的特解，是与激励同模式的部分。

- 全响应 = 暂态响应 + 稳态响应

  暂态响应：$t \to \infty \left(k \to \infty\right)$时衰减为0的部分

  稳态响应：$t \to \infty \left(k \to \infty\right)$时依然存在的部分

例：某离散时间系统由下列差分方程描述

$$y(k+2)-0.7y(k+1)+0.1y(k)=7x(k+2)-2x(k+1)$$

已知 $y_{zi}(0)=2$，$y_{zi}(1)=4$，$x(k)=u(k)$，试求该系统的全响应。

解 先求零输入响应 $y_{zi}(k)$：

特征方程为 $r^2-0.7r+0.1=0$，特征根 $r_1=0.5$，$r_2=0.2$

故 $y_{zi}(k)=A_1(0.5)^k+A_2(0.2)^k$

代入初始条件 $y_{zi}(0)=2=A_1+A_2$

$$y_{zi}(1)=4=0.5A_1+0.2A_2$$

解得 $A_1=12$，$A_2=-10$

$$\therefore\quad y_{zi}(k)=12(0.5)^k-10(0.2)^k \qquad k\ge 0$$

再求零状态响应 $y_{zs}(k)$:

$$h_0(k)=\left[B_1(0.5)^k+B_2(0.2)^k\right]u(k-1)$$

代入初始条件 $h_0(1)=0$，$h_0(2)=1$， 解得 $B_1=\dfrac{20}{3}$，$B_2=\dfrac{-50}{3}$

$$\therefore\quad h_0(k)=\left[\frac{20}{3}(0.5)^k-\frac{50}{3}(0.2)^k\right]u(k-1)$$

故 $h(k)=7h_0(k+2)-2h_0(k+1)$

$$=7[\frac{20}{3}(0.5)^{k+2}-\frac{50}{3}(0.2)^{k+2}]u(k+1)$$

$$-2[\frac{20}{3}(0.5)^{k+1}-\frac{50}{3}(0.2)^{k+1}]u(k)$$

$$=7\left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+2}-\frac{50}{3}(0.2)^{k+2}\right]\delta(k+1)+7\left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+2}-\frac{50}{3}(0.2)^{k+2}\right]u(k)$$

$$-2\left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+1}-\frac{50}{3}(0.2)^{k+1}\right]u(k)$$

$$=\left[5(0.5)^k+2(0.2)^k\right]u(k)$$

$$\therefore \quad y_{zs}(k) = x(k) * h(k) = u(k) * [5(0.5)^k + 2(0.2)^k]u(k)$$

$$= u(k) * 5(0.5)^k u(k) + u(k) * 2(0.2)^k u(k)$$

$$= [\sum_{n=0}^{k} 5(0.5)^n + \sum_{n=0}^{k} 2(0.2)^n]u(k)$$

$$= [5\frac{1-(0.5)^{k+1}}{1-0.5} + 2\frac{1-(0.2)^{k+1}}{1-0.2}]u(k)$$

$$= \{10[1-(0.5)^{k+1}] + 2.5[1-(0.2)^{k+1}]\}u(k)$$

$$= [12.5 - 5(0.5)^k - 0.5(0.2)^k]u(k)$$

所以，全响应 $y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$

$$= 12.5 + 7(0.5)^k - 10.5(0.2)^k] \quad k \geq 0$$

注意：若初始条件为 $y(0) = 9$ 和 $y(1) = 13.9$，应先求 $y_{zs}(k)$,得 $y_{zs}(0) = 7$ 和 $y_{zs}(1) = 9.9$；于是 $y_{zi}(0) = 2$，$y_{zi}(1) = 4$；再求$y_{zi}(k)$。

本章要点

- 1.常用的离散信号及其表示方法
  - **单位函数的性质以及与单位阶跃序列的关系　Z 序列**
- 2.离散信号的基本运算
  - **相加 相乘 移位 折叠 差分 求和**
- 3.离散系统的零输入响应
  - **经典法求解齐次差分方程**
- 4.离散系统的单位脉冲态响应
  - **直接法　间接法**
- 5.离散系统的零状态响应（离散卷积）
  - **图解法　不进位乘法　解析法**

6.离散系统的全响应

作 业

3-2(a,b),3-6, 3-10

离散卷积 3-12(2、5), 3-13

3-16(1), 3-17(4), 3-18