SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第七章 连续时间系统的状态变量分析法

南京邮电大学
通信与信息工程学院

第七章 状态变量分析

- 7. 1状态变量分析法概述
- 7.2 连续系统状态方程的建立
- 7.3 连续系统状态方程的复频域求解
- 本章要点
- 作业

7.1状态变量分析概述

- 系统的描述方法
  - 输入—输出描述法（端口分析法、外部法）
    - 用系统的输入—输出变量之间的关系来描述系统的特性；
    - 数学模型是 n 阶微分（或差分）方程。
  - 状态变量描述法(内部法)
    - 用状态变量描述系统内部变量的特性；
    - 通过状态变量将系统的输入和输出变量联系起来，进而描述系统的外部特性。

7.1状态变量分析概述

- 状态变量分析法的优点
  - 可以有效地提供系统内部的信息，便于处理与系统内部情况有关的分析、设计问题；
  - 不仅适用于线性时不变的单输入—单输出系统，也适用于非线性、时变、多输入—多输出系统；
  - 便于应用计算机技术解决复杂系统的分析计算；
  - 当系统的输出变量改换时，无需重新列写状态方程（微分或差分方程），只要调整输出方程（代数方程）即可。

7.1 状态与状态空间

1. **系统的状态：**是指系统过去、现在和未来的状况，其本质是指**系统的储能状态**。

2. **状态变量：**完全描述系统状态的数目最少的一组变量。常用 $x_1(t)$， $x_2(t)$， …， $x_n(t)$ 来表示。

起始时刻 $t=t_0$ 的状态称为初始状态，用 $x_1(t_0)$， $x_2(t_0)$， …， $x_n(t_0)$ 来表示。

3. **状态矢量：**一组状态变量可以用一个矢量来表示：

$$\mathbf{x}(t)=\left[x_1(t),\ x_2(t),\cdots x_n(t)\right]^T$$

4. 状态空间：状态矢量所描述的空间

状态矢量所包含的状态变量的个数称为状态空间的维数，也称系统的复杂度阶数，简称系统的阶数。

5. 状态轨迹：状态矢量的端点随时间变化而描述的路径

状态变量分析法：用状态变量来描述和分析系统的方法

状态变量分析法的步骤

（**1**）选定状态变量；

（**2**）建立状态方程：描述状态变量与激励之间关系的一阶微分或差分方程组；

（**3**）建立输出方程：描述输出与输入关系的一组代数方程；

（**4**）求解状态方程和输出方程。

系统阶数的确定

当已知电路时，习惯上将电感的电流和电容的电压选为状态变量，因为它们直接与系统的储能状态相联系。

也可以选取磁链和电荷作为状态变量，还可以选取间接反映系统储能状态的物理量，甚至有时可以选用不是系统中真实存在的物理量。

但是一个系统的状态变量必须是一组独立并且完备的变量，变量的数目即系统复杂度的阶数 **n** 由系统本身的结构所决定，与所选的状态变量无关。

由于受 KCL 和 KVL 的约束，n 的一般计算公式为

$$n = b_{LC} - n_C - n_L$$

式中，b_{LC} 为电路中储能元件的个数

n_C 为全电容回路（仅由电容或电压源组成的独立回路）的个数

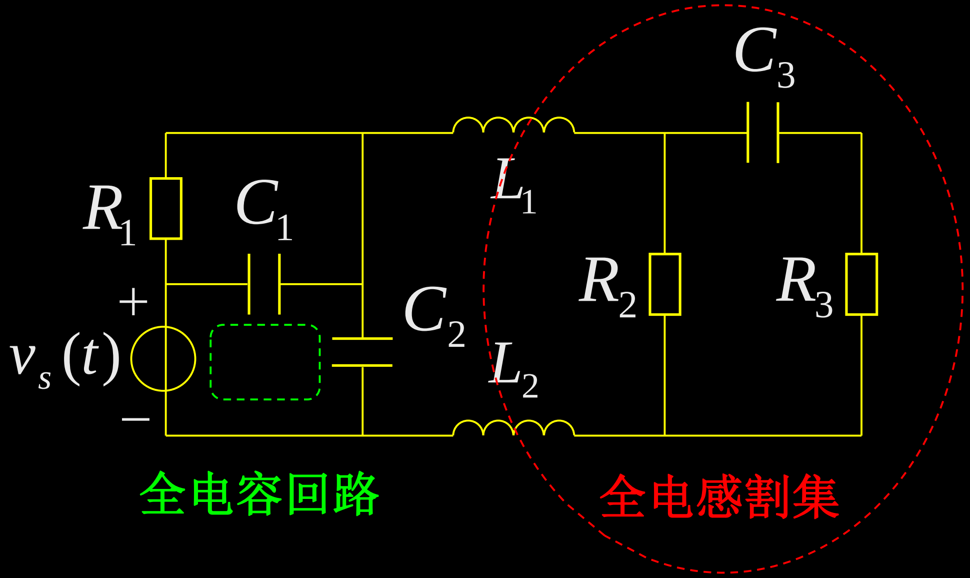
n_L 为全电感割集（仅由电感或电流源组成的独立割集）的个数

例如　图示电路

$$b_{LC}=5, n_C=1, n_L=1$$

$$n=b_{LC}-n_C-n_L$$

$$=5-1-1=3$$



可见此电路只有 3 个状态变量是独立的，只须用 3 个状态变量来描述系统就可以了。

状态变量可以选为 (v_{C1}, v_{C3}, i_{L1}) 或 (v_{C2}, v_{C3}, i_{L2}) 等等。

7.2 连续时间系统状态方程的建立

建立状态方程的两类方法

1. 直接法

直观编写法（依据给定的系统结构直接编写）

系统编写法（借助计算机自动编写）

2. 间接法

由系统的输入—输出方程编写法

由系统的模拟图编写法

7.2.1 连续系统状态方程的一般形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f} & \text{状态方程} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{f} & \text{输出方程} \end{cases}$$

式中，$\boldsymbol{x}$为n维列矢量，表示系统的n个状态变量；

$\dot{\boldsymbol{x}}$为n维列矢量，表示状态变量的一阶导数；

$\boldsymbol{y}$为r维列矢量，表示系统的r个输出信号；

$\boldsymbol{f}$为m维列矢量，表示系统的m个输入信号；

系数矩阵$\boldsymbol{A}$为$n \times n$方阵，称为系统矩阵；

系数矩阵$\boldsymbol{B}$为$n \times m$矩阵，称为控制矩阵；

系数矩阵$\boldsymbol{C}$为$r \times n$矩阵，称为输出矩阵；

系数矩阵$\boldsymbol{D}$为$r \times m$矩阵。

7.2.2 由电路图建立状态方程

步骤

（1）选择独立的电容电压和电感电流作为状态变量；

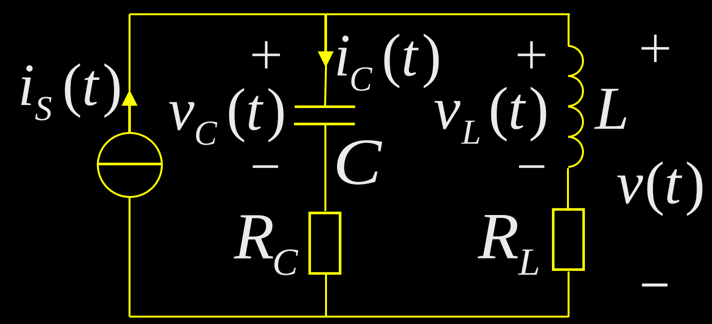
（2）对于含有独立电容支路的节点列写 KCL 方程，

对于含有独立电感的回路列写 KVL 方程；

（3）消除非状态变量（中间变量）

（4）整理成状态方程和输出方程的标准形式。

例7-2-1 电路如图所示，试列写该系统的状态方程和输出方程。



解　选取 $v_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 为状态变量，它们都是独立的状态变量。

由KCL，得 $i_S(t)=i_C(t)+i_L(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}+i_L(t)$

由KVL，得 $v_C(t)+R_C C\dfrac{dv_C(t)}{dt}=L\dfrac{di_L(t)}{dt}+R_L i_L(t)$

整理，得
$$\begin{cases}\dfrac{dv_C(t)}{dt}= & -\dfrac{1}{C}i_L(t)+\dfrac{1}{C}i_S(t)\\[2ex] \dfrac{di_L(t)}{dt}=\dfrac{1}{L}v_C(t)-\dfrac{R_C+R_L}{L}i_L(t)+\dfrac{R_C}{L}i_S(t)\end{cases}$$

若以电路中的电压$v(t)$和电流$i_C(t)$为输出，则输出方程为

$$\begin{cases} v(t) = v_C(t) - R_C i_L(t) + R_C i_S(t) \\ i_C(t) = \qquad\qquad -i_L(t) \quad + i_S(t) \end{cases}$$

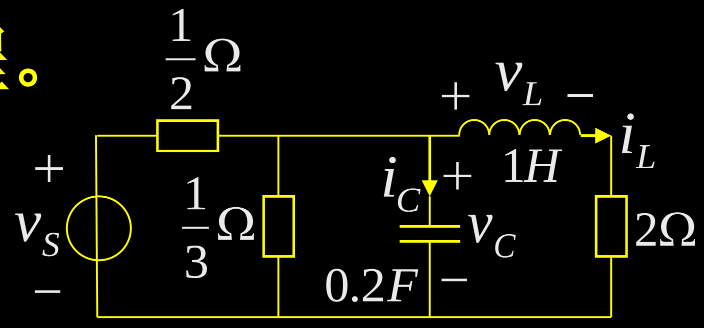
若令状态变量$v_C(t) = x_1(t)$，$i_L(t) = x_2(t)$，输入$i_S(t) = f(t)$，输出$v(t) = y_1(t)$，$i_C(t) = y_2(t)$，并写成矩阵的形式，即为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_C + R_L}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ \dfrac{R_C}{L} \end{bmatrix} \cdot \left[f(t) \right]$$

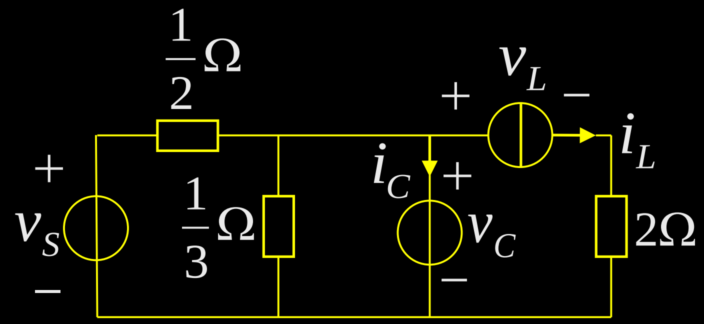
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_C \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_C \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left[f(t) \right]$$

对于一般的常态网络（不存在全电容回路和全电感割集）还可以应用直流电路的知识列写状态方程。

例：试求图示常态网络的状态方程。



解　设 $v_C(t)=x_1, i_L(t)=x_2$ 为状态变量，输入$v_S(t)=f$，将电容用电压源，电感用电流源替代，得电路如图所示。则



$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt}=i_C=\dfrac{v_S-v_C}{\frac{1}{2}}-\dfrac{v_C}{\frac{1}{3}}-i_L \\ L\dfrac{di_L}{dt}=v_L=v_C-2i_L \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt}=-25v_C-5i_L+10v_S \\ \dfrac{di_L}{dt}=\qquad v_C-2i_L \end{cases}$$

写出标准的矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(t) \end{bmatrix}$$

如假设输出$y = i_C$，则输出方程为

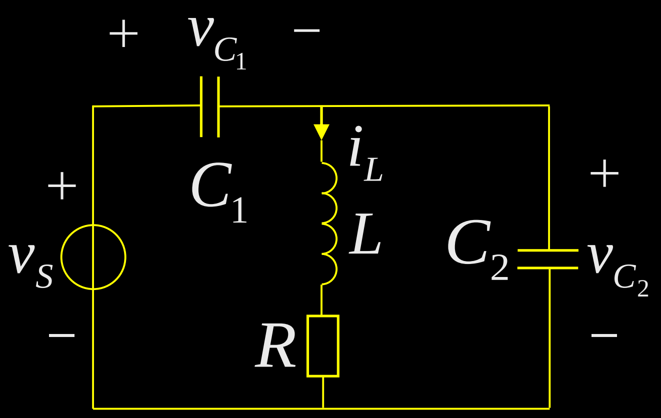
$$i_C(t) = \frac{v_S - v_C}{\frac{1}{2}} - \frac{v_S}{\frac{1}{3}} - i_L$$

整理，并写出标准的输出方程为

$$[y] = [-2 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [-1][f]$$

非常态网络的状态方程

例： 非常态网络如图所示，试列写其状态方程。



解 （1）由于存在全电容回路，故独立的状态变量的个数为 $n=3-1=2$，选取 v_{C_1} 和 i_L 为状态变量。

（2）对接有电容 C_1 的节点列写 KCL 方程，有

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}-i_L-C_2\frac{dv_{C_2}}{dt}=0$$

对含有电感 L 的网孔列写 KVL 方程，有

$$v_{C_1}+L\frac{di_L}{dt}+Ri_L(t)=v_s$$

（3）消除中间变量 v_{C_2}，将 $v_{C_2}=v_S-v_{C_1}$ 代入，得

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt}-i_L-C_2\frac{d(v_S-v_{C_1})}{dt}=0$$

（4）整理，得

$$\begin{cases}\dfrac{di_L}{dt}=-\dfrac{R}{L}i_L-\dfrac{1}{L}v_{C_1}+\dfrac{1}{L}v_S\\[2ex]\dfrac{dv_{C_1}}{dt}=\dfrac{1}{C_1+C_2}i_L+\dfrac{C_2}{C_1+C_2}\dfrac{dv_S}{dt}\end{cases}$$

写成矩阵形式，为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{di_L}{dt}\\[2ex]\dfrac{dv_{C_1}}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\[2ex]\dfrac{1}{C_1+C_2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L\\ v_{C_1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}\left[v_S\right]+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{C_2}{C_1+C_2}\end{bmatrix}\left[\dfrac{dv_S}{dt}\right]$$

当电路存在C-C回路或L-L割集时，直接列写得到的不是标准形式的状态方程，一般可表示为

$$\dot{x} = Ax + B_1 f + B_2 \dot{f}$$

若选取新的状态矢量 $x_D = x\text{-}B_2 f$ 代入上式，得

$$\dot{x}_D + B_2 \dot{f} = A(x_D + B_2 f) + B_1 f + B_2 \dot{f}$$

即 $$\dot{x}_D = Ax_D + (AB_2 + B_1) f$$

若设 $B = AB_2 + B_1$，则有 $\dot{x}_D = Ax_D + Bf$

仍然为标准的状态方程形式。

当然，此时的状态变量就不一定是电容电压或电感电流了。

结论

（1）状态变量的选取并不是唯一的，选取不同的状态变量，状态方程的形式会改变；

（2）一般情况下，消除非状态变量不太容易；

(3)仅有 R、L、C 组成的无受控源网络总能列写出标准的状态方程；

（4）如果电路含有受控源，由于多了一类约束关系，可能会使状态变量的个数减少，对于少数特定的电路甚至无法列写出标准的状态方程。

7.2.3 从输入－输出方程导出状态方程

1. 微分方程中无激励的导数项时

例　设某三阶系统的微分方程为

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=f(t)$$

试导出其状态方程和输出方程。

解　选取状态变量为　　　　即状态矢量为

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dx_1}{dt} \\ x_3=\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dx_2}{dt} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{bmatrix}$$

由微分方程得

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}=-4\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)+f(t)=\frac{dx_3}{dt}$$

所以，状态方程为　写成标准的矩阵形式，则为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3\\ \dfrac{dx_3}{dt}=-2x_1-3x_2-4x_3+f\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[f]$$

显然，输出方程为

$$[y]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+[0][f]$$

*2. 微分方程中有激励的导数项时

例7－2－6　设输入－输出方程为二阶微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_2\frac{d^2f(t)}{dt^2}+b_1\frac{df(t)}{dt}+b_0f(t)$$

试导出其状态方程和输出方程。

解　为消除方程右边的二阶导数项，取 $x_1=y-b_2f$

则有
$$\begin{cases} y=x_1+b_2f \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dx_1}{dt}+b_2\dfrac{df}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+b_2\dfrac{d^2f}{dt^2} \end{cases}$$

以此代入原微分方程，

即可消除 $b_2\dfrac{d^2f}{dt^2}$ 项，

再经整理，得

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+a_1\frac{dx_1}{dt}+a_0x_1=(b_1-a_1b_2)\frac{df}{dt}+(b_0-a_0b_2)f$$

进一步，为消除方程右边的一阶导数项，取

$$x_2=\frac{dx_1}{dt}-(b_1-a_1b_2)f$$

则有 $$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2+(b_1-a_1b_2)f\\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\dfrac{dx_2}{dt}+(b_1-a_1b_2)\dfrac{df}{dt}\end{cases}$$

以此代入前式，即可消除 $(b_1-a_1b_2)\dfrac{df}{dt}$ 项，再经整理，得

$$\frac{dx_2}{dt}=-a_1x_2-a_0x_1+[(b_0-a_0b_2)-a_1(b_1-a_1b_2)]f$$

因此，得到标准的形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_2 \\ (b_0 - a_0 b_2) - a_1(b_1 - a_1 b_2) \end{bmatrix} [f]$$

注意，这里的状态变量是激励 f、响应 y 及其导数的组合

为 $$x_1 = y - b_2 f$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} - (b_1 - a_1 b_2) f = \frac{dy}{dt} - b_2 \frac{df}{dt} - (b_1 - a_1 b_2) f$$

正如前面所述，状态变量的选取可以是多种形式的。

输出方程为 $y = x_1 + b_2 f$

写成矩阵形式，为 $[y] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [b_2][f]$

7.2.4 从模拟图建立状态方程

根据系统的输入—输出方程或系统函数可以作出系统的时域或复频域模拟图，然后选择每一个积分器的输出端信号作为状态变量，最后得到系统的状态方程和输出方程。

由于系统函数可以写成不同的形式，所以模拟图也可以有不同的结构，于是状态变量的选择也就不同，因而状态方程和输出方程就会有几种不同的形式。

例如，已知三阶系统的微分方程为

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+8\frac{d^2y(t)}{dt^2}+19\frac{dy(t)}{dt}+12y(t)=4\frac{df(t)}{dt}+10f(t)$$

该系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{4s+10}{s^3+8s^2+19s+12}$$

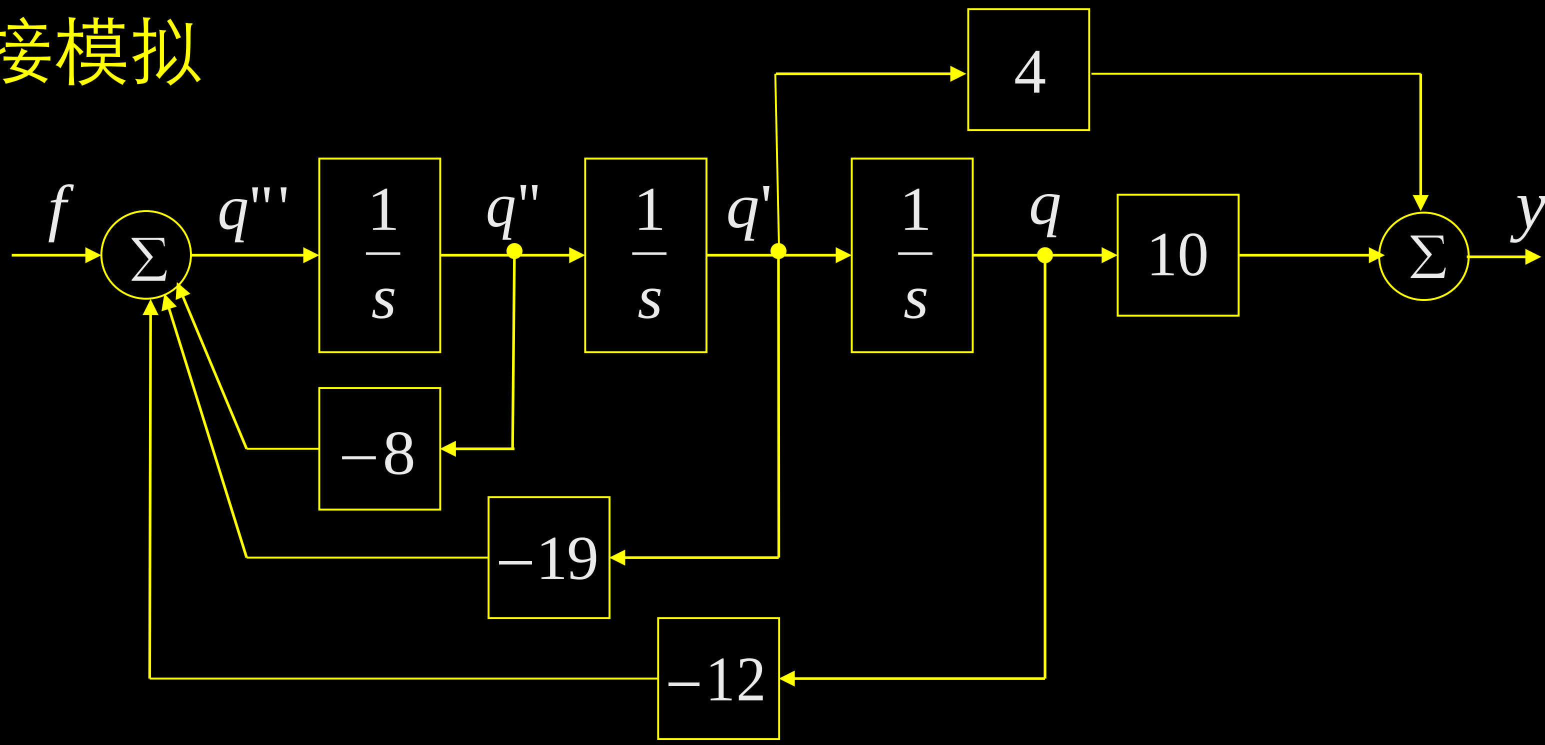
系统函数还可以写成

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}-\frac{2}{s+4}$$

或 $$H(s)=\frac{4}{s+1}\cdot\frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+\frac{5}{2}}{s+4}$$

所以，可以分别画出级联、并联和串联等三种形式的模拟图。

1. 直接模拟



选取状态变量 $x_1 = q$，$x_2 = q'$，$x_3 = q''$

则有 $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + f \end{cases}$$

$$y = 10x_1 + 4x_2$$

写成矩阵形式，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f]$$

输出方程为

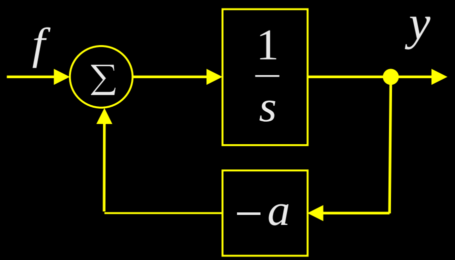
$$[y] = [10 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][f]$$

直接模拟的优点是不必求出系统函数的极点，状态方程和输出方程的列写有规律可循。

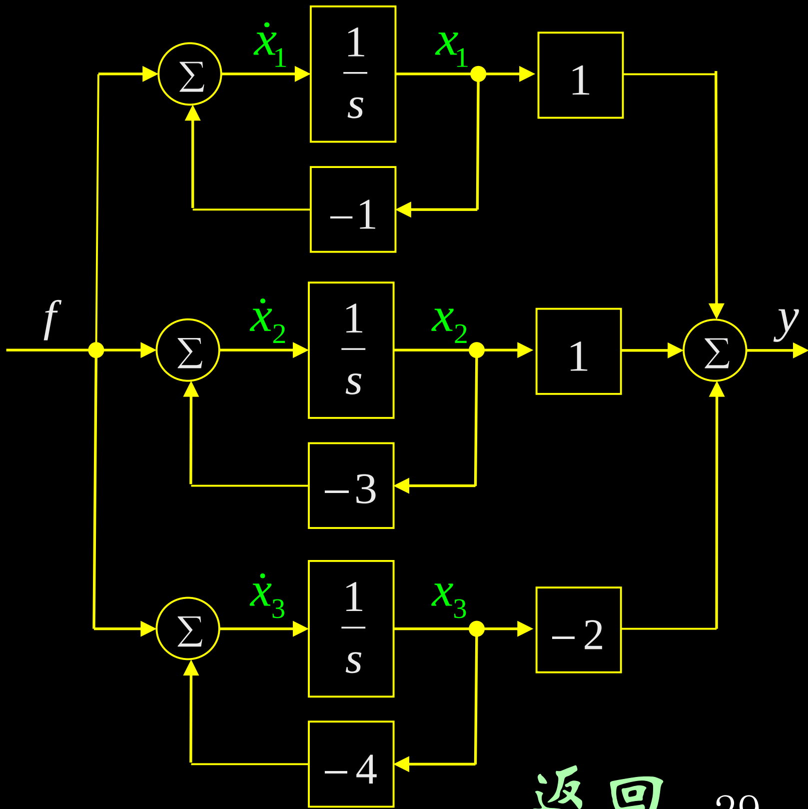
2. 并联模拟

本系统也可以用三个子系统的并联来表示，其中每一个

子系统 $\dfrac{1}{s+a}=\dfrac{\frac{1}{s}}{1+\frac{a}{s}}$ 的模拟图为



于是整个系统的模拟图为



选取状态变量 x_1，x_2，x_3 为每一个积分器的输出

则有 $\begin{cases} \dot{x}_1=-x_1+f \\ \dot{x}_2=-3x_2+f \\ \dot{x}_3=-4x_3+f \end{cases}$

$$y=x_1+x_2-2x_3$$

返回

写成矩阵形式，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [f]$$

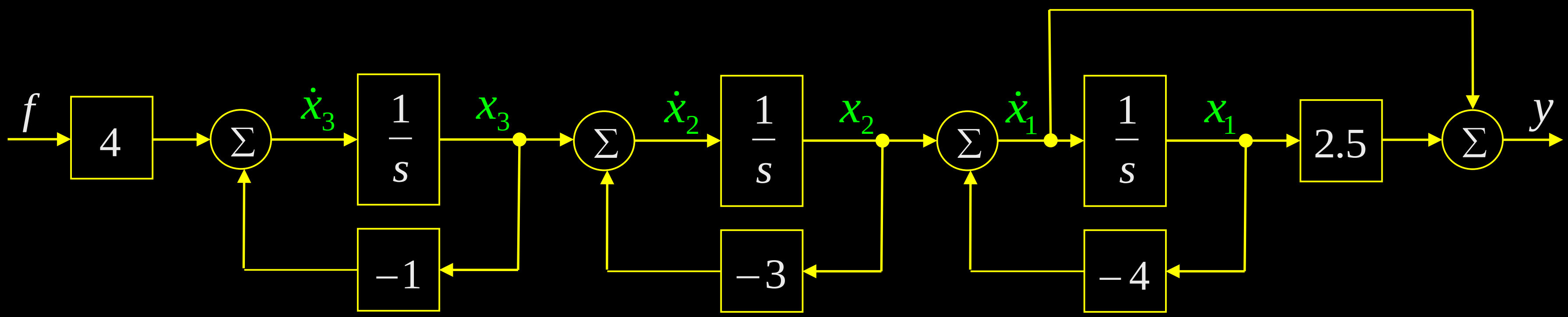
输出方程为

$$[y] = [1 \quad 1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][f]$$

并联模拟的特点是，系数矩阵是由系统的特征根所构成的对角阵。所以，也称这种状态变量为对角线状态变量。

3. 串联模拟

本系统还可以用三个子系统的串联来表示，其模拟图为



选取状态变量 x_1，x_2，x_3 为每一个积分器的输出

则有 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 4f \end{cases}$

$$y = 2.5x_1 + \dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2$$

写成矩阵形式，状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} [f]$$

输出方程为

$$[y] = [-1.5 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0][f]$$

串联模拟的特点是，系数矩阵是一个上三角阵。

结论

1. 上述三类通过模拟图列写状态方程的方法均可以推广到 n 阶系统的一般情况。

2. 状态变量可以在系统内部选取，也可以人为地虚拟。

3. 对于同一个系统，状态变量的选取不同，系统的状态方程和输出方程也将不同，但它们所描述的系统的输入－输出关系没有改变。

4. 由于同一系统的特征方程相同，所以各状态方程的系数矩阵 A 是相似的。

5. 当系统的输入和输出都不止一个时，只要分别画出其相应的模拟图，按照上述方法仍然能方便地列写出状态方程和输出方程。

7.3 连续系统状态方程的解

求解状态方程的两类方法

1. 复频域求解

2. 时域求解（略）

7.3.1 状态方程的复频域解

连续系统状态方程的标准形式 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(t)$ 为一阶常系数线性矢量微分方程；

输出方程的标准形式 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(t)$ 为矢量代数方程。

对状态方程两边取拉氏变换，根据时域微分性得

$$sX(s)-x(0^-)=AX(s)+BF(s)$$

即 $(sI-A)X(s)=x(0^-)+BF(s)$

式中 I 为 $n\times n$ 单位矩阵。

定义 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\dfrac{adj(sI-A)}{|sI-A|}$ 为分解矩阵。

则状态矢量的复频域解为

$$X(s)=\Phi(s)\left[x(0^-)+BF(s)\right]$$

取拉氏反变换，得状态矢量的时域解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\Phi}(s)x(0^{-})\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{BF}(s)\right]$$

零输入响应　　零状态响应

输出方程的拉氏变换式为 $\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{CX}(s) + \boldsymbol{DF}(s)$

代入 $\boldsymbol{X}(s)$ 的表达式，得

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C\Phi}(s)\left[x(0^{-}) + \boldsymbol{BF}(s)\right] + \boldsymbol{DF}(s)$$

取拉氏反变换，得响应的时域解为

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{C\Phi}(s)x(0^{-})\right] + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{F}(s)\right\}$$

零输入响应　　零状态响应

例7-3-1 已知某连续系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

其初始状态和输入分别为

$$\begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

试求该系统的状态和输出。

解 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-2 & -3\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$

1. 分解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 3\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$$

2. 输入的拉氏变换为 $\boldsymbol{F}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & 1\end{bmatrix}^T$

3. 由 $\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)\left[x(0^-)+\boldsymbol{BF}(s)\right]$，有

$$\begin{bmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 3\\ 0 & s-2\end{bmatrix}\cdot\left\{\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

即 $$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

4.由输出方程的拉氏变换，得

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

5. 取拉氏反变换，得系统的状态和输出分别为

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{2t} + e^{-t} - \frac{3}{2} \\ 1 - e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{2t} + 2e^{-t} - \frac{3}{2} \\ 1 - 2e^{-t} \end{bmatrix} \quad t > 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{1}{2} \\ e^{-t} \end{bmatrix}}_{\text{零状态响应}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{1}{2} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}}_{\text{全响应}} \quad t > 0$$

系统函数矩阵 $\boldsymbol{H}(s)$

$$Y_{zs}(s)=\left[\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{F}(s)=\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{F}(s)$$

$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$ 称为系统函数矩阵或转移函数

说明：

1. 系统函数矩阵 $\boldsymbol{H}(s)$ 仅由系统的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 矩阵确定；
2. 它是 $r\times m$ 矩阵（r 为输出的数目，m 为激励的数目）；
3. 矩阵元素 H_{ij} 建立了输出方程中第 i 个输出 $y_i(t)$ 与第 j 个输入 $f_j(t)$ 之间的联系。
4. $\boldsymbol{H}(s)$ 与 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ 具有相同的分母 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$,
   特征方程 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 的根 （或称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根）
   是 $\boldsymbol{H}(s)$ 的极点，即系统的固有频率。

状态矢量零输入响应的拉氏变换为

$$\boldsymbol{X}_{zi}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)x(0^-)$$

取拉氏反变换，得状态矢量的零输入响应为

$$\boldsymbol{x}_{zi}(t)=x(0^-)\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\Phi}(s)\right]=x(0^-)\cdot\varphi(t)$$

表明零输入系统在 $t=0^-$ 时的状态与矩阵 $\varphi(t)$ 相乘而转变到任意 $t\geq 0$ 时的状态。

式中 $\varphi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{\Phi}(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{ddj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\left|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|}\right]$

称为状态过渡矩阵或状态转移矩阵，

在状态方程的时域求解中将会起到重要的作用。

本章要点

- 1. 系统复杂度阶数的确定
- 2. 常态网络状态方程的建立
- 3. 从微分方程建立状态方程（无激励的导数项）
- 4. 从模拟图建立状态方程
  - 直接模拟
  - 并联模拟
  - 串联模拟

作业

- **7.2：**
  - 7-2， 7-4(1) ， 7−7， 7-8(1)