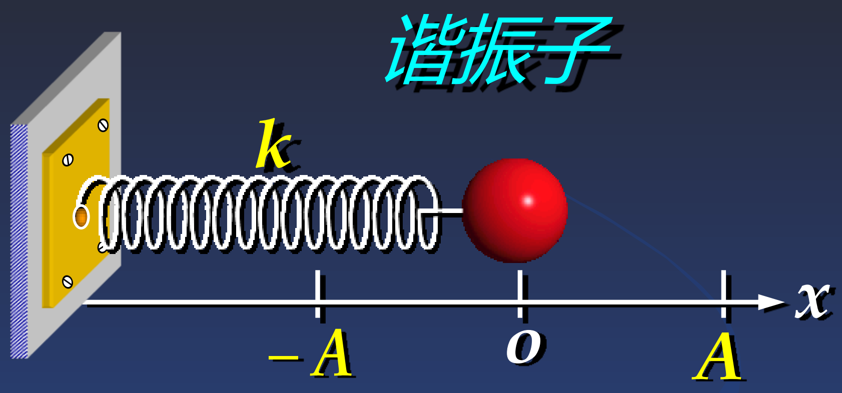
§9.3 简谐振动的能量

一、振动动能/势能/总能量

简谐振动：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$



振动动能：$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

振动势能：$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

振动总能量： $E = E_k + E_p = \boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2}$

$t=0$ 时： $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$$

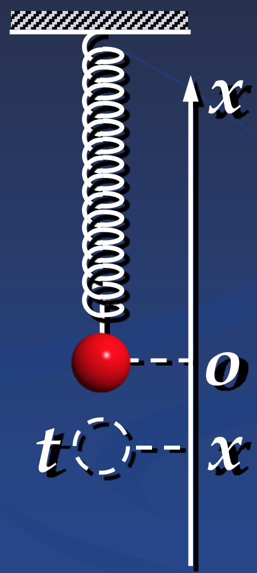
$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

振动势能： $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

振动总能量： $E = E_k + E_p = \boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2}$

$t = 0$ 时： $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$$



注意：

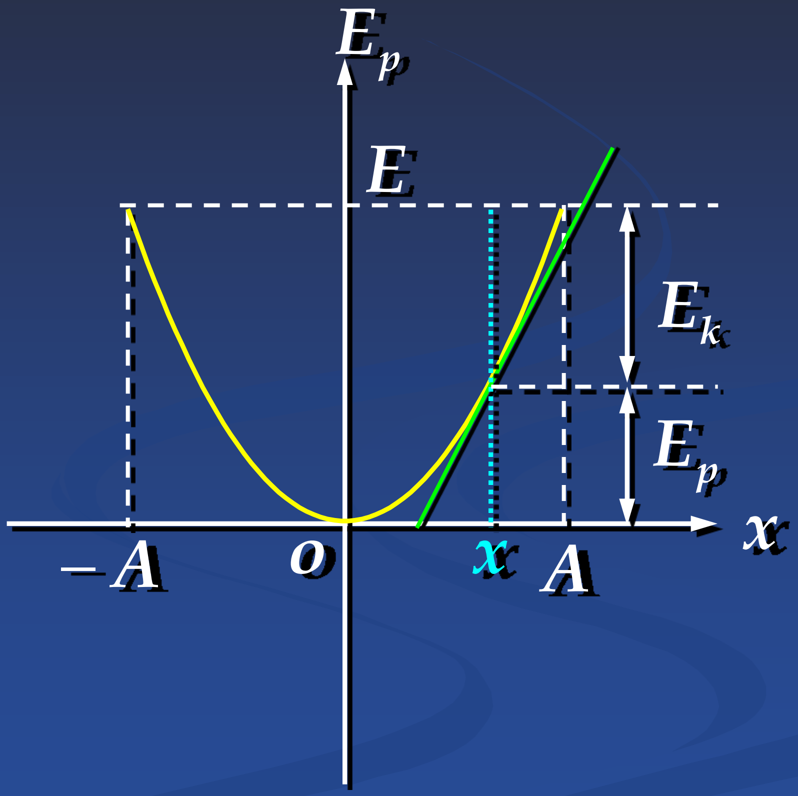
▲ 谐振子的振动势能不一定等于其弹性势能；

二、势能、能量曲线

谐振动势能曲线：

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

恢复力：$F = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$



二、势能、能量曲线

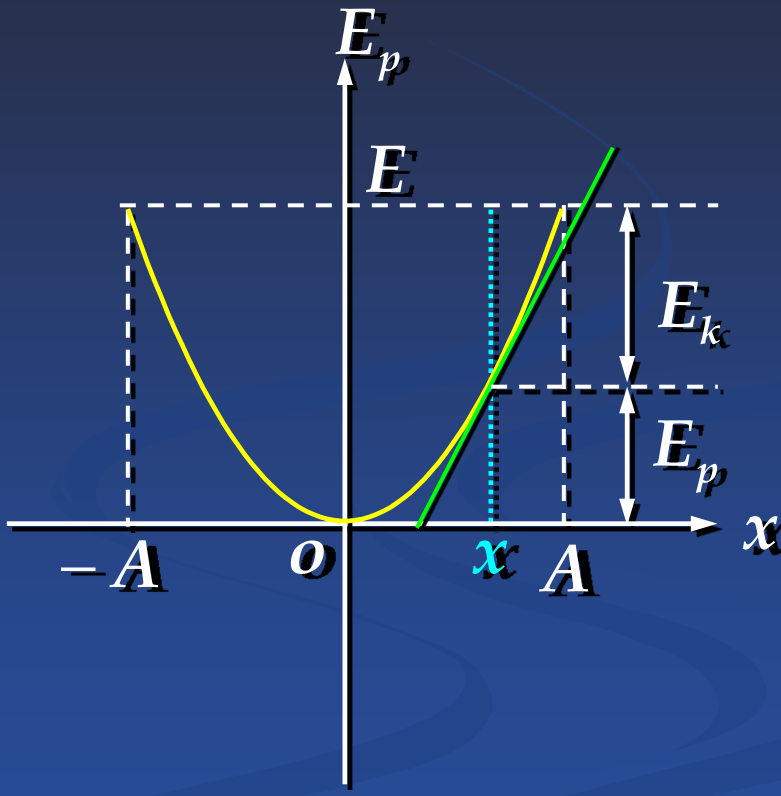
谐振动**势能曲线**：

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2$$

恢复力：$F=-\frac{dE_p}{dx}=-kx$

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$时：

$$E_p=E_k=\frac{1}{4}kA^2$$



谐振动能量曲线：

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

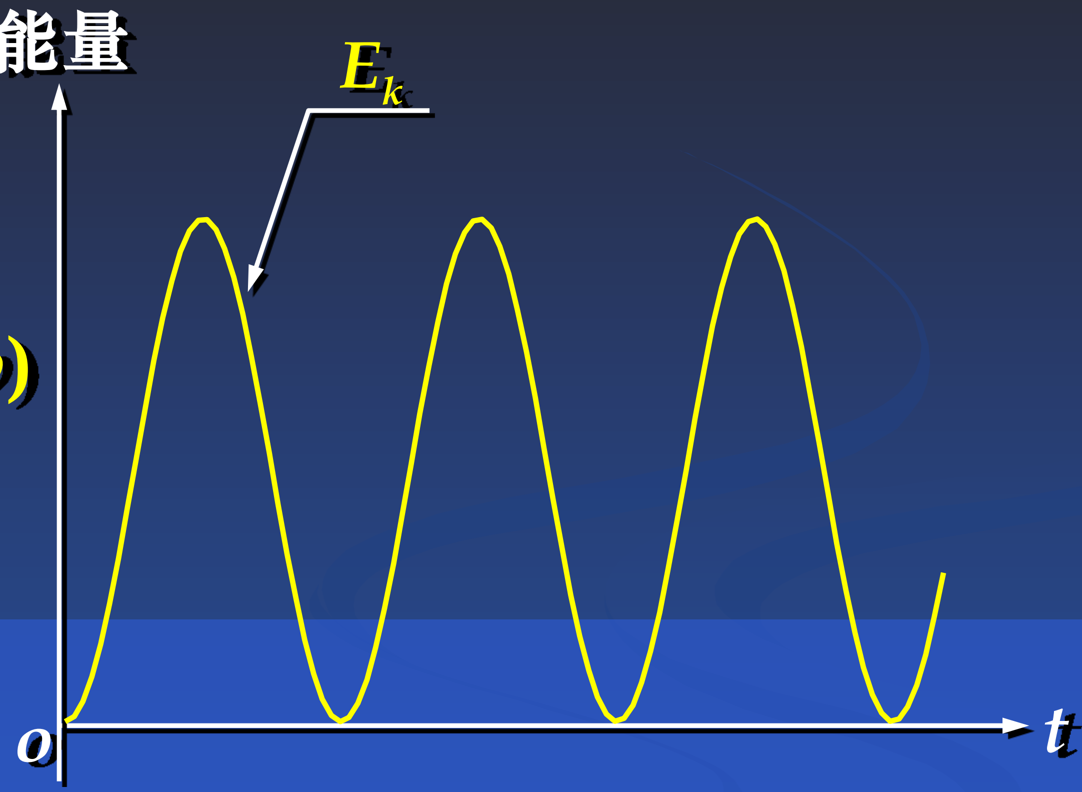


Fig. $\varphi=0$ 时的能量曲线

$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 时：

$$E_p=E_k=\frac{1}{4}kA^2$$

谐振动能量曲线：

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

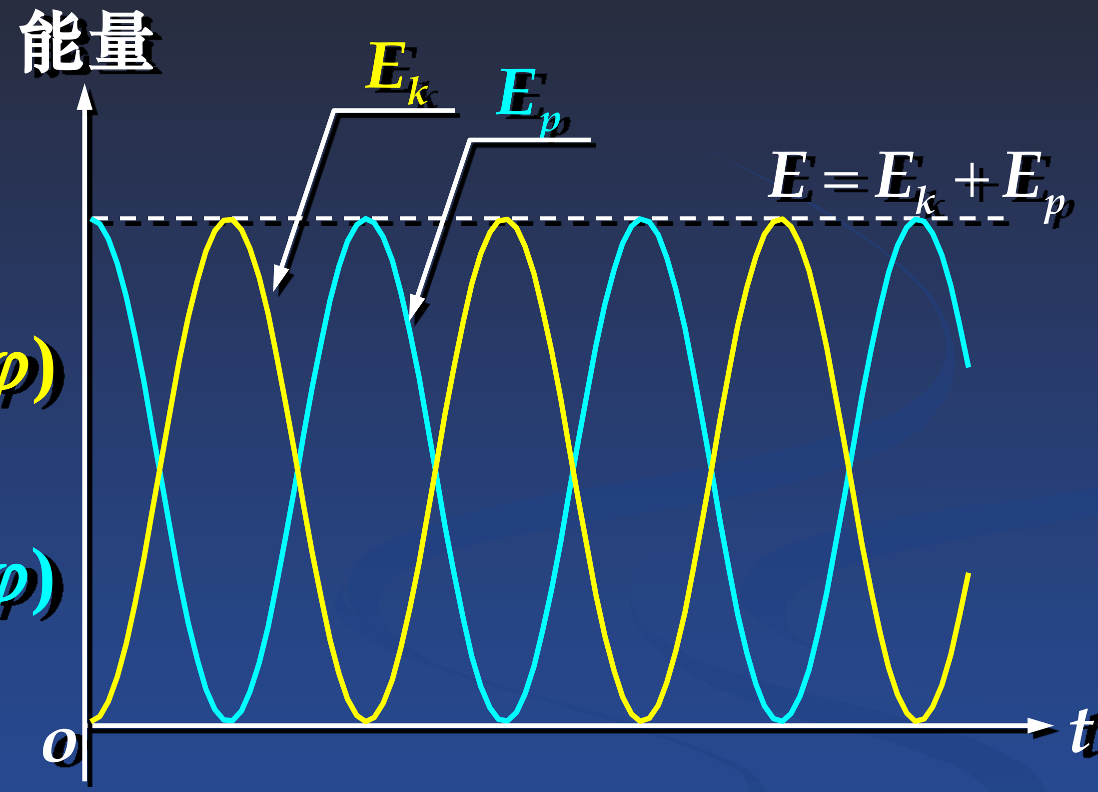


Fig. $\varphi = 0$ 时的能量曲线

例 质量为0.10kg的物体以振幅1.0×10^{-4}m作简谐振动，其最大加速度为4.0×10^{-2}m/s²，求T、v_{max}、总能量E。

解 $a_{max}=\omega^2 A$　　$\omega=\sqrt{\dfrac{a_{max}}{A}}=20\,\mathrm{s}^{-1}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\,\mathrm{s}$$

在平衡位置处，$v=v_{\max}$：$v_{max}=\omega A=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{m/s}$

总能量：$E=E_k+E_p=E_{k\max}=E_{p\max}=\dfrac{1}{2}kA^2$

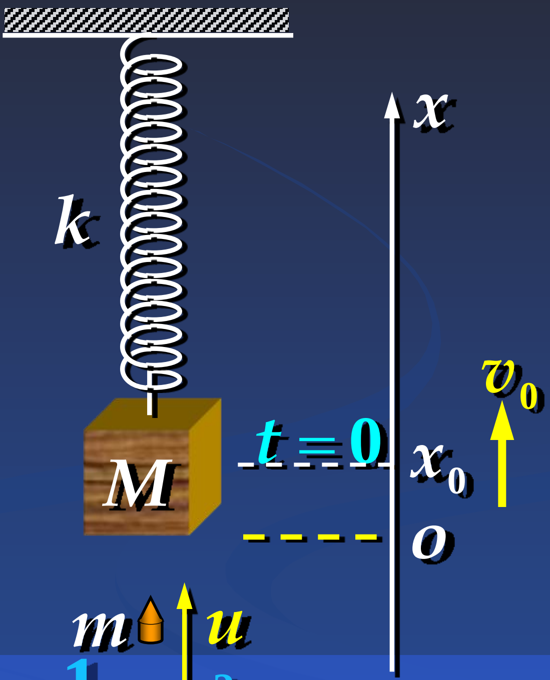
$$=\frac{1}{2}mv_{max}^2=2.0\times10^{-7}\ \mathrm{J}$$

课堂练习 如图，已知：k、m、M、u，子弹击中木块并留在其中，求碰撞后系统振动方程 。

提示 击中后，系统初始状态：

$$v_0 = \frac{mu}{M+m} \qquad x_0 = \frac{mg}{k}$$

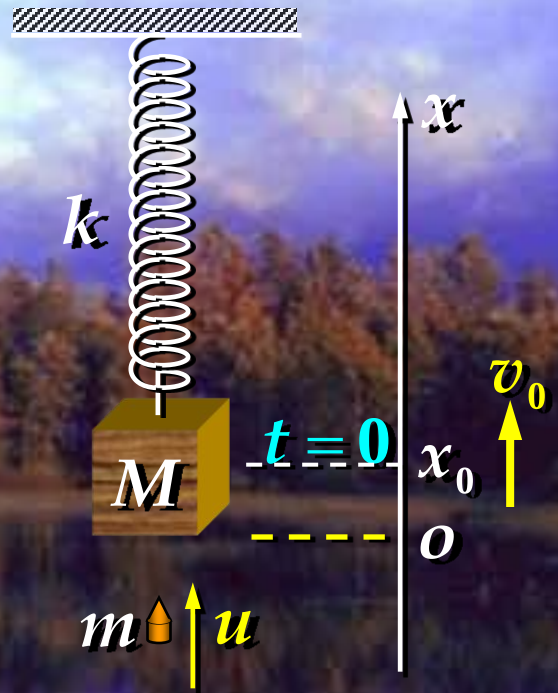
$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$



总能量： $E = E_k + E_p = E_{k\max} = E_{p\max} = \frac{1}{2}kA^2$

$$= \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

课堂练习 如图，已知：k、m、M、u，子弹击中木块并留在其中，求碰撞后系统振动方程。



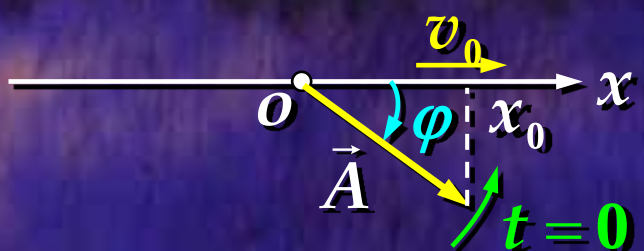
提示 击中后，系统初始状态：

$$v_0=\frac{mu}{M+m} \qquad x_0=\frac{mg}{k}$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$$

答案：$$x=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t+\varphi\right)$$

$$A=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{ku^2}{(M+m)g^2}}$$



(The end)