



SIGNALS AND SYSTEMS

信号与系统

第三章 离散时间信号与系统的 时域分析

南京邮电大学

通信与信息工程学院



第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

概述

3.1.1 复指数序列

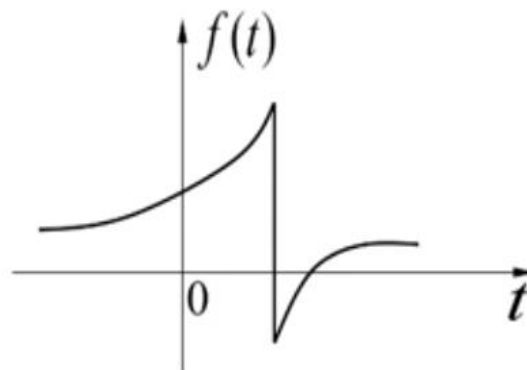
3.1.2 单位脉冲序列

3.1.3 单位阶跃序列



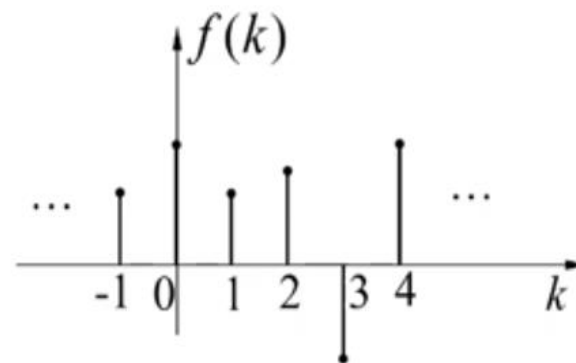
连续时间信号:

除若干个不连续点外, 其它时刻都有定义, 通常用 $f(t)$ 表示。



离散时间信号:

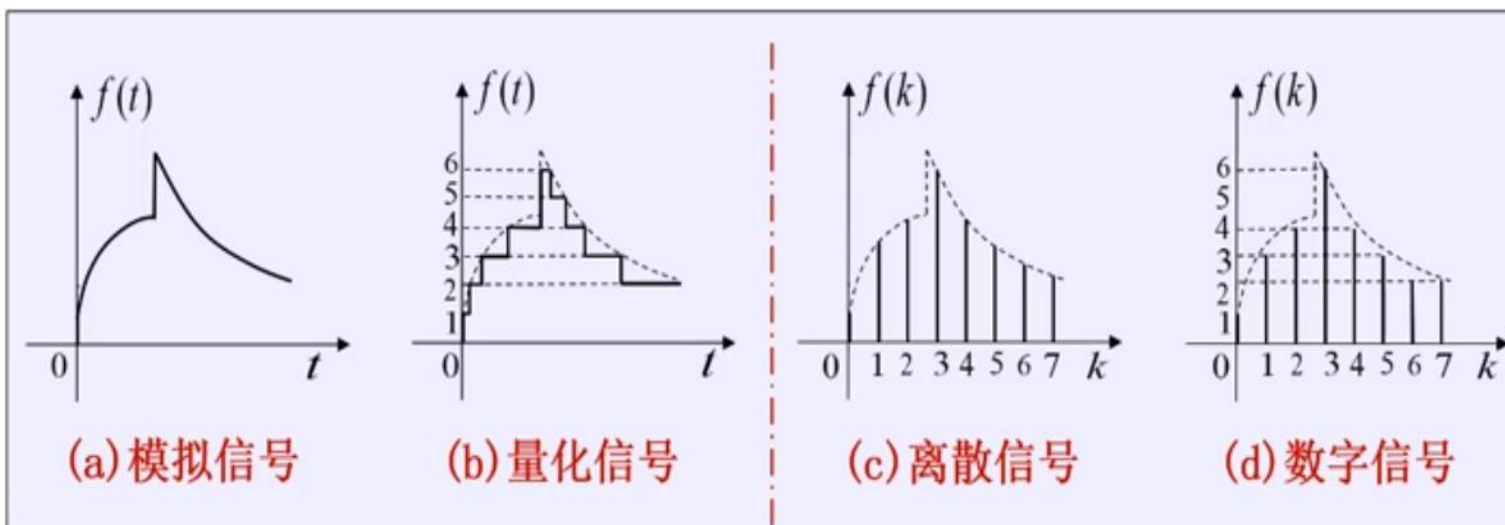
仅在离散时刻有定义, 通常用 $f(t_k)$, $f(kT)$, $f(k)$ 表示。



$$f(t_k) = f(kT)$$



信号的分类



时间取值: 连续

连续

不连续

不连续

幅度取值: 连续

不连续

连续

不连续

3.1 典型的离散时间信号

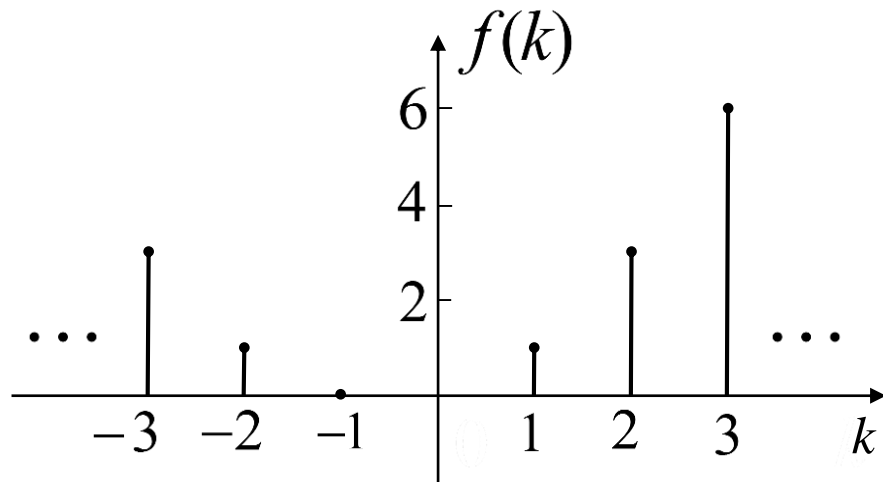
概述

离散信号的表示方法:

1. 解析式 $f(k) = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

2. 序列形式 $f(k) = \{\dots 3, 1, 0, \underline{0}, 1, 3, 6, \dots\}$

3. 图形



3.1 典型的离散时间信号

- 序列的分类

1. 双边序列

序列 $f(k)$ 对所有的整数 k 都存在确定的非零值。

2. 单边序列

有始序列（右边序列）：当 $k \leq k_1$ 时， $f(k) = 0$

$k_1 \geq 0$ 的有始序列称为因果序列

有终序列（左边序列）：当 $k \geq k_2$ 时， $f(k) = 0$

$k_2 \leq 0$ 的有终序列称为反因果序列

3. 有限序列

序列 $f(k)$ 仅在 $k_1 \leq k \leq k_2$ 区间有非零确定值。

3.1.1 复指数序列

复指数序列 $f(k) = Ae^{\beta k}$

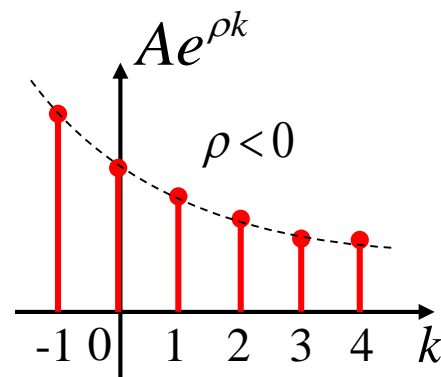
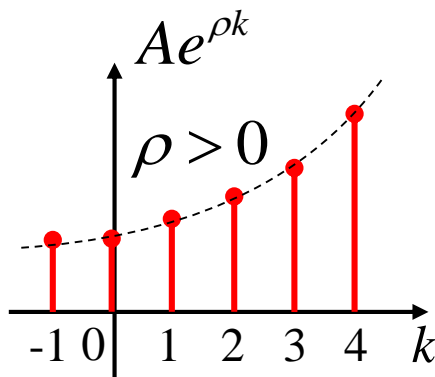
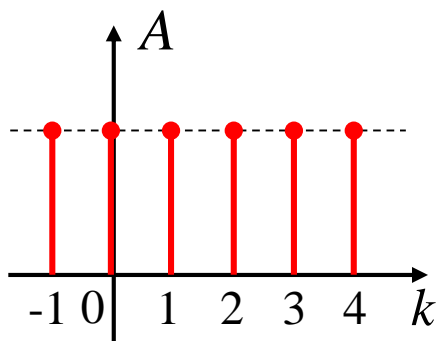
其中, A 和 β 可以是实常数, 也可以是复数。 $A = |A|e^{j\phi}$

$$\beta = \rho + j\Omega_0$$

• 复指数序列可用来表示多种信号:

(1) 若 A 为实数, 设 $\beta = 0$, 则 $Ae^{\beta k} = A$ 为**直流序列**。

(2) 当 A 为实数, $\Omega_0 = 0$ 时, $Ae^{\beta k} = Ae^{\rho k}$ 为**实指数序列**。



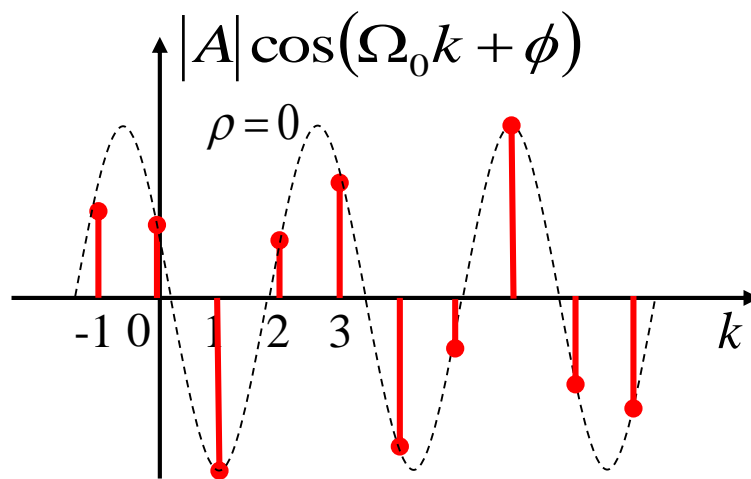
3.1.1 复指数序列

(3) 若 $A=1$, $\beta = j\Omega_0$, 则 $Ae^{\beta k} = e^{j\Omega_0 k}$ 为虚指数序列。

根据欧拉公式, 上式可写成

$$f(k) = e^{j\Omega_0 k} = \cos \Omega_0 k + j \sin \Omega_0 k$$

可见, 虚指序列的实部和虚部都是正弦序列。当满足 $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ 为有理数时, 虚指序列才是周期序列。



3.1.1 复指数序列

(4) 一般情况下, 若 A, β 均为复数, 则 $f(k) = Ae^{\beta k}$ 为复指数序列。

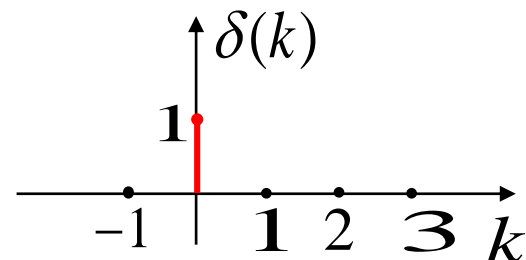
设 $A = |A|e^{j\phi}$, $\beta = \rho + j\Omega_0$, 并记 $e^\rho = r$, 则有

$$\begin{aligned} f(k) &= Ae^{\beta k} = |A|e^{j\phi} e^{(\rho + j\Omega_0)k} \\ &= |A|e^{j\phi} \underline{e^{\rho k}} e^{j\Omega_0 k} \\ &= |A|e^{j\phi} \underline{r^k} e^{j\Omega_0 k} = |A|r^k e^{j(\Omega_0 k + \phi)} \\ &= |A|r^k [\cos(\Omega_0 k + \phi) + j \sin(\Omega_0 k + \phi)] \end{aligned}$$

其实部和虚部均为变幅的正弦序列。

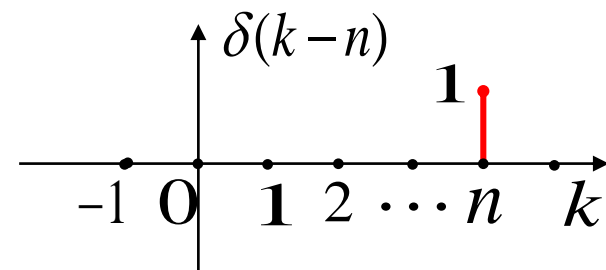
3.1.2 单位脉冲序列

单位脉冲序列: $\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$



延迟单位脉冲序列:

$$\delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

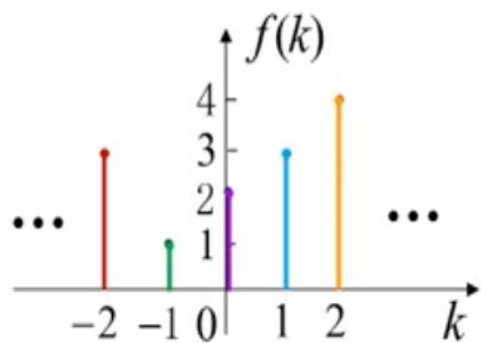


(1) 筛选特性: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-n) = f(n)$

(2) 加权特性: $f(k)\delta(k-n) = f(n)\delta(k-n)$



应用加权特性，可以表示任意离散序列 $f(k)$ ：



$$f(k) = \cdots + 3\delta(k+2) + \delta(k+1) + 2\delta(k) + 3\delta(k-1) + 4\delta(k-2) + \cdots$$

一般地，对于任意离散序列 $f(k)$ ，可表示为一系列延时单位冲激序列的加权和：

$$\begin{aligned} f(k) &= \cdots + f(-2)\delta(k+2) + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(k-n) \end{aligned}$$

3.1.3 单位阶跃序列

单位阶跃序列: $u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

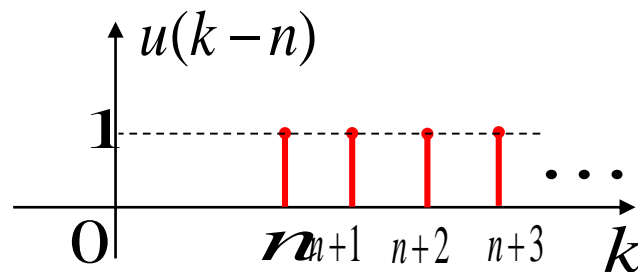
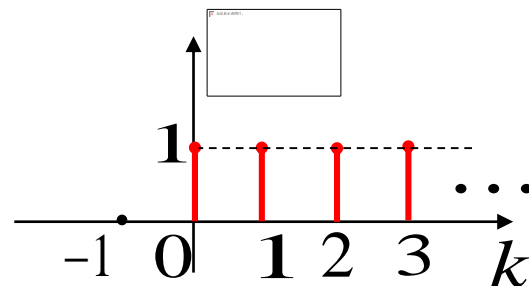
延迟单位阶跃序列:

$$u(k-n) = \begin{cases} 1 & k \geq n \\ 0 & k < n \end{cases}$$

$u(k)$ 与 $\delta(k)$ 的关系:

$$\delta(k) = \nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$\begin{aligned} u(k) &= \sum_{n=-\infty}^k \delta(n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n) \end{aligned}$$



对比:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

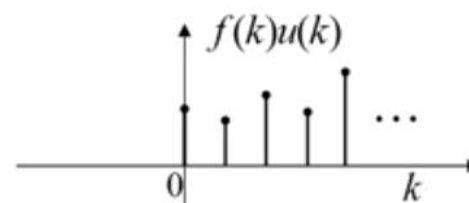
$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



- 阶跃序列的作用：

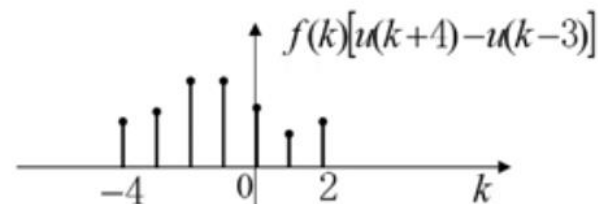
- (1) 截断序列，使其成为单边序列

$$f(k)u(k) = \begin{cases} f(k), & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



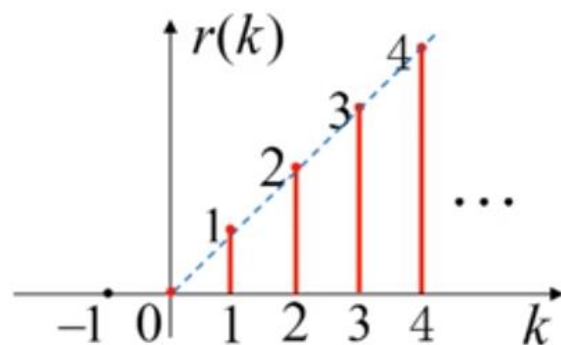
- (2) 表示序列作用的区间

$$f(k)[u(k-n)-u(k-m)] = \begin{cases} f(k), & n \leq k < m \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



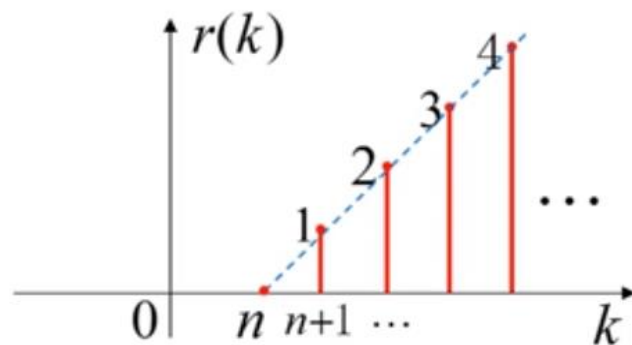
• 斜变序列

单位斜变序列: $r(k) = ku(k)$

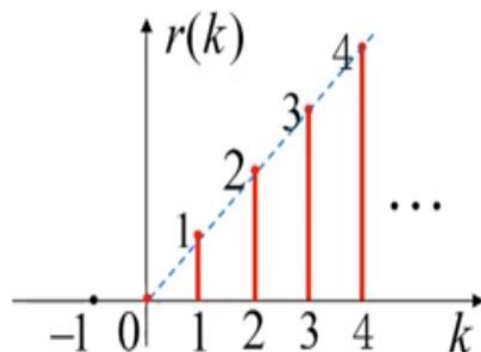
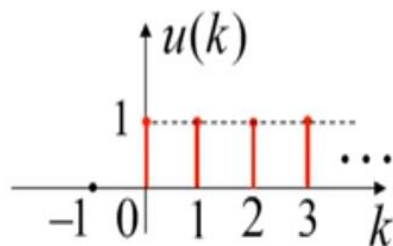
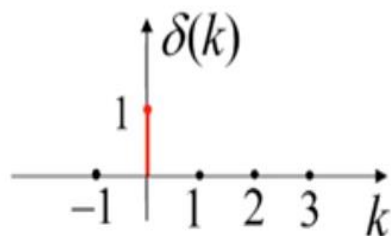


延迟单位斜变序列:

$$r(k-n) = (k-n)u(k-n)$$



$\delta(k)$ 、 $u(k)$ 和 $r(k)$ 的关系:



$$\delta(k) = \nabla u(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$u(k) = \nabla r(k+1) = r(k+1) - r(k)$$

$$\sum_{n=-\infty}^k \delta(n) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} = u(k)$$

$$\sum_{n=-\infty}^k u(n) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k+1 & k \geq 0 \end{cases} = (k+1)u(k) = r(k+1)$$

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

3.2.1 替换自变量的运算

3.2.2 相加与相乘

3.2.3 差分与累加

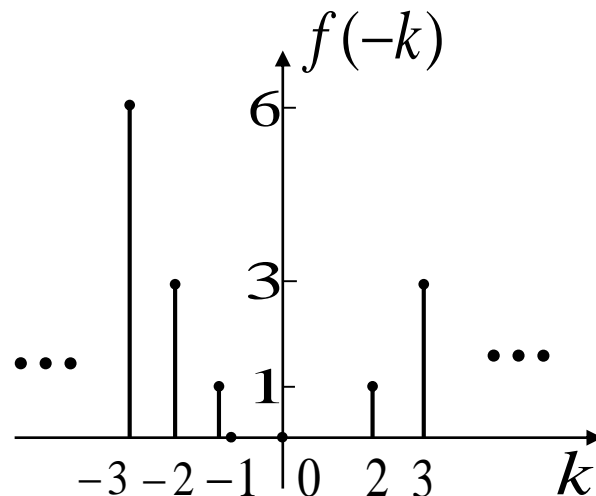
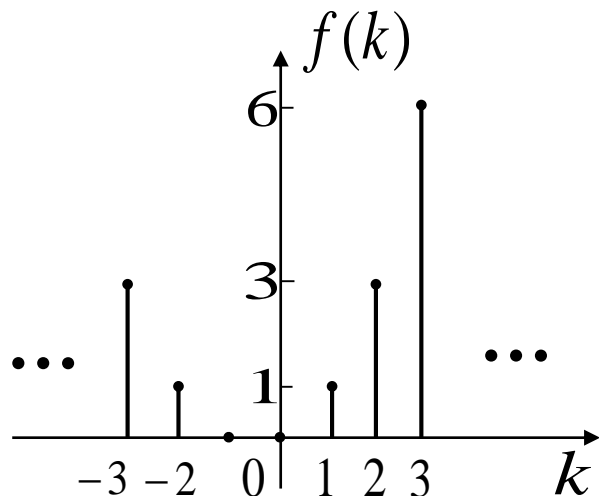
3.2.4 离散信号的时域分解

3.2.1 替换自变量的运算

1. 翻转：

$$f(k) \xrightarrow{k=-k} f(-k)$$

从波形上看， $f(k)$ 与 $f(-k)$ 关于坐标纵轴对称，或者说将 $f(k)$ 以纵轴为中心翻转180度即可得到 $f(-k)$ 。

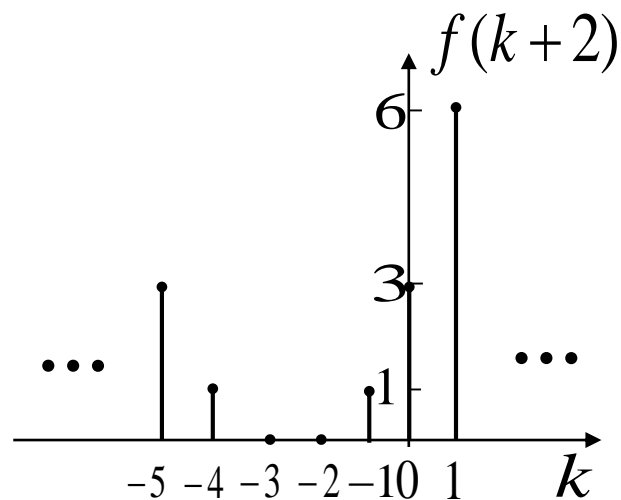
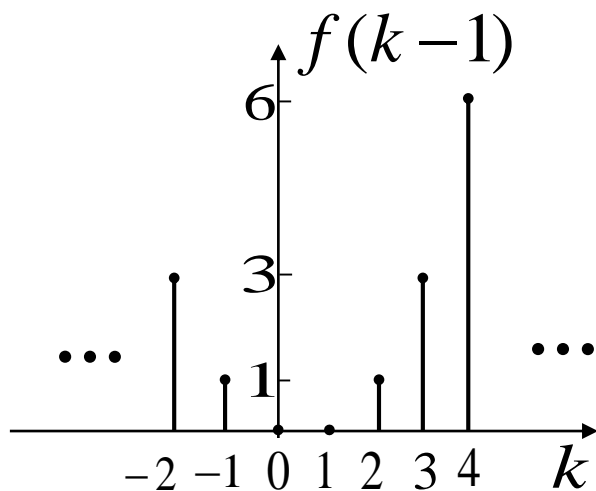
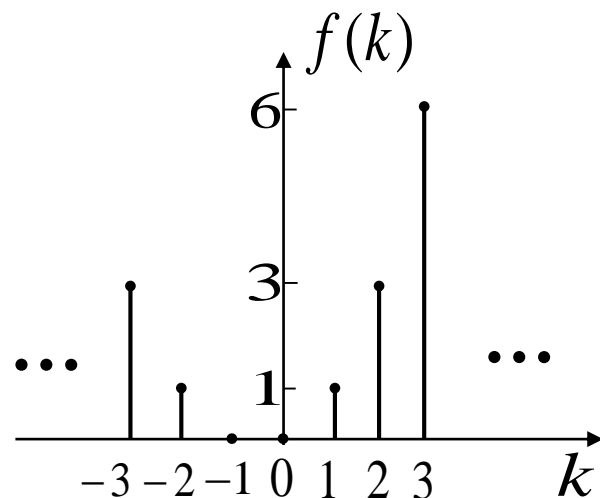


3.2.1 替换自变量的运算

2. 移位:

$$f(k) \xrightarrow{k=k \pm n} f(k \pm n)$$

$f(k)$ 右移 n 位成 $f(k-n)$, 左移 n 位成 $f(k+n)$ 。

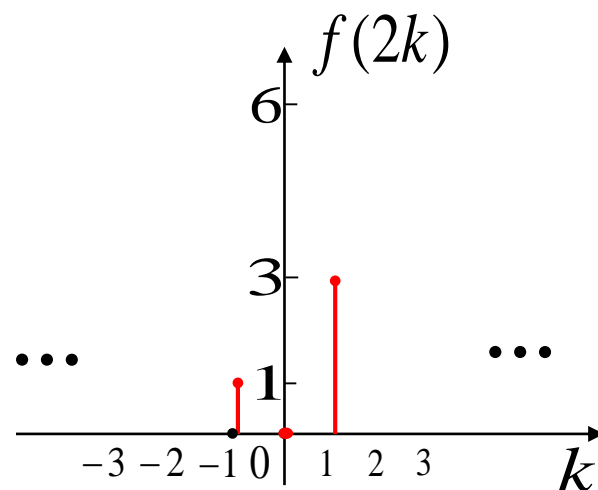
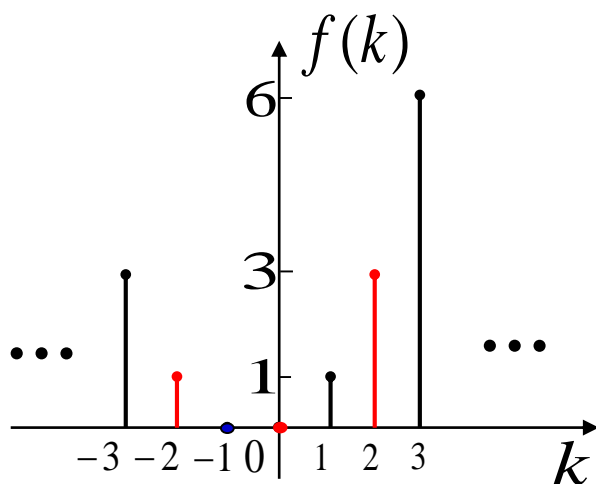


3.2.1 替换自变量的运算

3. 尺度变换:

$$f(k) \xrightarrow{k=mk} f(mk)$$

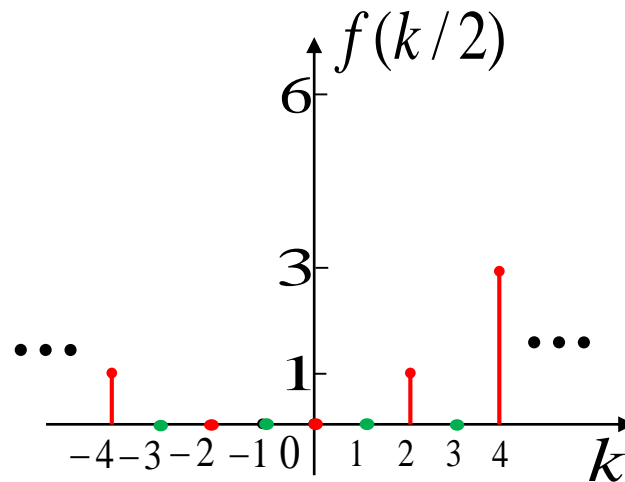
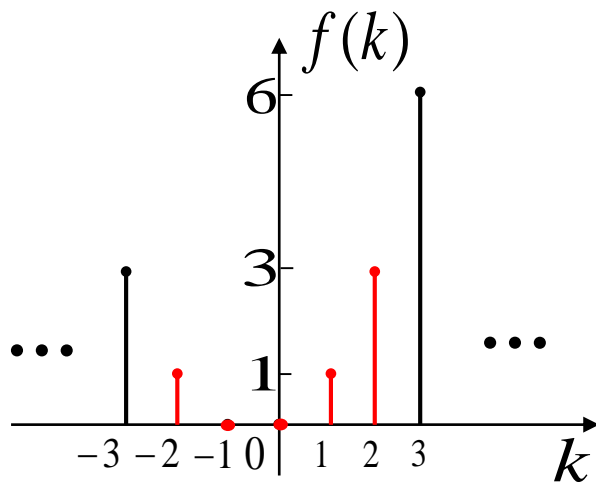
设 m 为正整数，从波形上看， $f(mk)$ 是将 $f(k)$ 的波形压缩，表示在序列 $f(k)$ 中每隔 $m-1$ 点抽取一点，也称为序列 $f(k)$ 的 m 倍抽取。



3.2.1 替换自变量的运算

$$f(k) \xrightarrow{k=k/m} f(k/m)$$

$f(k/m)$ 是将 $f(k)$ 的波形扩展，表示在序列 $f(k)$ 中每相邻两点之间插入 $m-1$ 个零值点，也称为序列 $f(k)$ 的 m 倍内插。





3.2.2 相加与相乘

序列相加(或相乘):

两个序列同序号的数值逐项对应相加(或相乘)。

$$f(k) = f_1(k) + f_2(k)$$

$$f(k) = f_1(k) \cdot f_2(k)$$

注意在用基本定义解的时候, k 的取值范围要一致!

例：已知序列

$$f_1(k) = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 2^{-k} + 5 & k \geq -1 \end{cases} \quad f_2(k) = \begin{cases} 2^k & k < 0 \\ k + 2 & k \geq 0 \end{cases}$$

试求 $f_1(k) + f_2(k)$ 和 $f_1(k) \cdot f_2(k)$ 。

解：

$$f_1(k) = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 7 & k = -1 \\ 2^{-k} + 5 & k \geq 0 \end{cases} \quad f_2(k) = \begin{cases} 2^k & k < -1 \\ 1/2 & k = -1 \\ k + 2 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$f_1(k) + f_2(k) = \begin{cases} 2^k & k < -1 \\ 15/2 & k = -1 \\ 2^{-k} + k + 7 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$f_1(k) \cdot f_2(k) = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 7/2 & k = -1 \\ k2^{-k} + 2^{-k+1} + 5k + 10 & k \geq 0 \end{cases}$$

3.2.3 差分与累加

1. 序列的差分 (对应于连续信号的微分)

一阶前向差分: $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

二阶前向差分:
$$\begin{aligned}\Delta[\Delta f(k)] &= \Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \\ &= f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)\end{aligned}$$

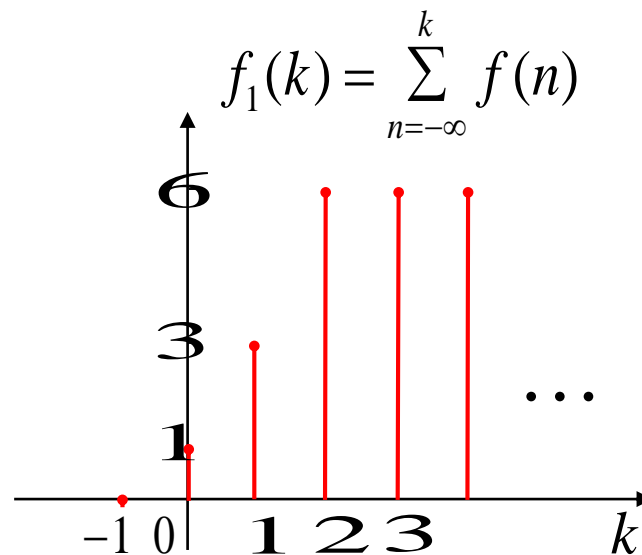
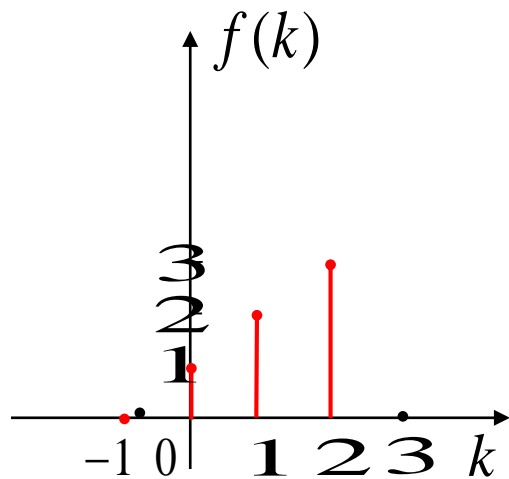
一阶后向差分: $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

二阶后向差分:
$$\begin{aligned}\nabla[\nabla f(k)] &= \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \\ &= f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)\end{aligned}$$

3.2.3 差分与累加

2. 序列的累加 (对应于连续信号的积分)

$$f_1(k) = \sum_{n=-\infty}^k f(n)$$



3.2.4 离散信号的时域分解

根据单位脉冲序列的加权特性 $f(k)\delta(k-n) = f(n)\delta(k-n)$

任意序列可以表示为延迟的单位脉冲序列的线性加权和，即

$$\begin{aligned} f(k) &= \cdots + f(-2)\delta(k+2) + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(k-n) \end{aligned}$$

表明任意离散时间信号可以分解为单位脉冲序列的线性组合。

当求解序列 $f(k)$ 通过离散时间线性时不变系统产生的响应时，只需求解单位脉冲序列 $\delta(k)$ 通过该系统产生的响应，然后利用线性时不变系统的特性，即可求得序列 $f(k)$ 产生的响应。

任意序列 $f(k)$ 分解为脉冲序列是离散时间系统时域分析的基础。



第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

3.3 离散时间系统的零输入响应

当输入信号为零时，描述系统的差分方程为齐次差分方程，即

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = 0$$

此时只要根据零输入响应的 n 个初始条件求解齐次差分方程就可以了。

【例】 已知某线性时不变离散系统的差分方程为

$$y(k+2) - 0.5y(k+1) - y(k) = 3x(k+1) - 2x(k)$$

初始条件 $y_{zi}(0)=3$ ， $y_{zi}(1)=0$

试求系统的零输入响应。



解：特征方程为 $r^2 - 0.5r - 1 = 0$,

解得特征根 $r_1 = 1$ 、 $r_2 = -0.5$,

零输入响应的形式应为

$$y_{zi}(k) = c_1 + c_2(-0.5)^k \quad (k \geq 0)$$

代入初始条件，得

$$\begin{cases} y_{zi}(0) = c_1 + c_2 = 3 \\ y_{zi}(1) = c_1 - 0.5c_2 = 0 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

故
$$y_{zi}(k) = 1 + 2(-0.5)^k \quad (k \geq 0)$$



第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业



3.4 离散系统的单位脉冲响应

求解描述系统的线性差分方程

1. 迭代法
2. 间接法

1. 迭代法

单位脉冲序列 $\delta(k)$ 只在 $k=0$ 时取非零值 $\delta(0)=1$ ，利用这一特点可以方便地用迭代法求出 $h(k)$ 。

例：若某离散时间系统的差分方程为 $y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 x(k)$ ，
求系统的单位脉冲响应 $h(k)$ 。

解：根据单位脉冲响应 $h(k)$ 的定义，它应满足方程：

$$h(k+1) + a_0 h(k) = b_0 \delta(k)$$

对于因果系统，由于 $\delta(-1) = 0$ ，故 $h(-1) = 0$

采用迭代法，将差分方程写成 $h(k+1) = b_0 \delta(k) - a_0 h(k)$

取 $k=-1$ 代入，可求得： $h(0) = b_0 \delta(-1) - a_0 h(-1) = 0$

取 $k=0$ 代入，可求得： $h(1) = b_0 \delta(0) - a_0 h(0) = b_0$

取 $k=1$ 代入，可求得： $h(2) = b_0 \delta(1) - a_0 h(1) = -a_0 b_0$

取 $k=2$ 代入，可求得： $h(3) = b_0 \delta(2) - a_0 h(2) = (-a_0)^2 b_0$

\vdots

用归纳法，可得： $h(k) = b_0 \delta(k-1) - a_0 h(k-1) = (-a_0)^{k-1} b_0$

一般情况下，用迭代法求系统的单位脉冲响应不易得出解析形式的解。

3.4 离散系统的单位脉冲响应

2. 间接法

结论:

- 对于 n 阶前向差分方程

$$a_n h_0(k+n) + a_{n-1} h_0(k+n-1) + \cdots + a_1 h_0(k+1) + a_0 h_0(k) = \delta(k)$$

初始条件为 $h_0(1) = h_0(2) = \cdots = h_0(n-1) = 0$, 而 $h_0(n) = \frac{1}{a_n}$

- 对于 n 阶后向差分方程

$$a_n h_0(k-n) + a_{n-1} h_0(k-n+1) + \cdots + a_1 h_0(k-1) + a_0 h_0(k) = \delta(k)$$

初始条件为 $h_0(-1) = h_0(-2) = \cdots = h_0(-n+1) = 0$, 而 $h_0(0) = \frac{1}{a_n}$

(后向差分方程可以转化为前向差分方程来求解)

(1) 找出n个初始条件:

$$a_n h_0(k+n) + a_{n-1} h_0(k+n-1) + \cdots + a_1 h_0(k+1) + a_0 h_0(k) = \delta(k) \quad (1)$$

令 $k = -n$, 方程(1)变为

$$a_n h_0(0) + \cancel{a_{n-1} h_0(-1)} + \cdots + \cancel{a_1 h_0(-n+1)} + \cancel{a_0 h_0(-n)} = \delta(-n) \quad \Rightarrow h_0(0) = 0$$

令 $k = -n+1$, 方程(1)变为

$$a_n h_0(1) + \cancel{a_{n-1} h_0(0)} + \cdots + \cancel{a_1 h_0(-n+2)} + \cancel{a_0 h_0(-n+1)} = \delta(-n+1) \quad \Rightarrow h_0(1) = 0$$

如此继续下去, 可得

$$h_0(1) = h_0(2) = \cdots = h_0(n-1) = 0$$

令 $k = 0$, 方程(1)变为

$$a_n h_0(n) + \cancel{a_{n-1} h_0(n-1)} + \cdots + \cancel{a_1 h_0(1)} + \cancel{a_0 h_0(0)} = \delta(0) \quad \Rightarrow h_0(n) = \frac{1}{a_n}$$

初始条件为 $h_0(1) = h_0(2) = \cdots = h_0(n-1) = 0$, 而 $h_0(n) = \frac{1}{a_n}$

3.4 离散系统的单位脉冲响应

- 对于 n 阶前向差分方程

$$a_n h_0(k+n) + a_{n-1} h_0(k+n-1) + \cdots + a_1 h_0(k+1) + a_0 h_0(k) = \delta(k)$$

根据特征根的不同类型，**齐次解的通解**形式有三种：

- (1) **特征根 r_i 均为单根**

$$h_0(k) = \left(\sum_{i=1}^n c_i r_i^k \right) u(k-1)$$

- (2) **特征根有 p 重根 r_1 ，则对应项为**

$$h_0(k) = \left[(c_1 + c_2 k + \cdots + c_p k^{p-1}) r_1^k \right] u(k-1)$$

- (3) **特征根中有共轭复根 $r_{1,2} = |r| e^{\pm j\varphi}$ ，则对应项为**

$$h_0(k) = \left[|r|^k (c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi) \right] u(k-1)$$

例：某离散时间系统由下列差分方程描述：

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = x(k+2) - 3x(k)$$

试求其单位函数响应。

解： 设 $h_0(k+2) - 5h_0(k+1) + 6h_0(k) = \delta(k)$

特征方程为 $\gamma^2 - 5\gamma + 6 = 0$ ，特征根 $\gamma_1 = 2$ ， $\gamma_2 = 3$

则单位函数响应为 $h_0(k) = [A_1(2)^k + A_2(3)^k]u(k-1)$

代入初始条件 $h_0(1)=0$, $h_0(2)=1$ ，可解得 $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{3}$

即 $h_0(k) = (3^{k-1} - 2^{k-1})u(k-1)$

所以 $h(k) = h_0(k+2) - 3h_0(k)$

$$= (3^{k+1} - 2^{k+1})[\delta(k+1) + \delta(k) + u(k-1)] - 3(3^{k-1} - 2^{k-1})u(k-1)$$

$$= \delta(k) + (9 \times 3^{k-1} - 4 \times 2^{k-1})u(k-1) - 3(3^{k-1} - 2^{k-1})u(k-1)$$

$$= \delta(k) + (2 \times 3^k - 2^{k-1})u(k-1)$$

第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应

- 本章要点
- 作业

3.5.1 离散卷积的引出

3.5.2 离散卷积的性质

3.5.3 确定离散卷积求和限的公式

3.5.4 离散卷积的图解

3.5.5 离散卷积的列表计算



3.5.1 离散卷积的引出

线性时不变离散系统的数学模型： 线性常系数差分方程

- 时域分析
 1. 计算零输入响应：求解齐次解
 2. 计算零状态响应：
 - ①经典法：求解非齐次解
 - ②离散卷积分析法
- 变换域分析（第6章介绍）

3.5.1 离散卷积的引出

离散信号的分解

$$x(k) = \cdots + x(-2)\delta(k+2) + x(-1)\delta(k+1) + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

设单位函数响应为 $h(k)$



根据线性和时不变性，有

$$x(n)\delta(k-n) \longrightarrow x(n)h(k-n)$$

$$\therefore y_{zs}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n) \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

用卷积符号记为

$$y_{zs}(k) = x(k) * h(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

称为卷积和或离散卷积

3.5.2 离散卷积的性质

1. 代数运算

- (1) **交换律** $x(k) * h(k) = h(k) * x(k)$
- (2) **分配律** $x(k) * [h_1(k) + h_2(k)] = x(k) * h_1(k) + x(k) * h_2(k)$
- (3) **结合律** $[x(k) * h_1(k)] * h_2(k) = x(k) * [h_1(k) * h_2(k)]$

2. 差分与求和

设 $y(k) = x(k) * h(k)$, 有

- (1) **差分** $\Delta y(k) = \Delta x(k) * h(k) = x(k) * \Delta h(k)$
 $\nabla y(k) = \nabla x(k) * h(k) = x(k) * \nabla h(k)$

- (2) **求和** $\sum_{n=-\infty}^k y(n) = x(k) * \sum_{n=-\infty}^k h(n) = \left[\sum_{n=-\infty}^k x(n) \right] * h(k)$

二. 离散卷积的性质

1. 交换律 $x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

令 $m = n - k$

$n - m = k$

证明:
$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(n-k) x_2(k) = x_2(n) * x_1(n)$$

2. 结合律 $x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)$

证明:
$$[x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(k-m) \right] x_3(n-k)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k-m) x_3(n-k)$$

令 $r = k - m$
 $k = m + r$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(r) x_3(n-m-r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) [x_2(n-m) * x_3(n-m)]$$
$$= x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)]$$

3. 分配律 $x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$

证明:
$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) [x_2(n-m) + x_3(n-m)]$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_3(n-m)$$
$$= x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$$

3.5.2 离散卷积的性质

3. 移位

$$x(k) = x(k) * \delta(k)$$

推广 $x(k) * \delta(k - k_1) = x(k - k_1)$

$$x(k - k_1) * \delta(k - k_2) = x(k - k_1 - k_2)$$

$$x(k - k_1) * h(k - k_2) = y(k - k_1 - k_2)$$

3.5.3 确定离散卷积求和限的公式

若 $k < k_1$ 时, $x(k) = 0$; $k < k_2$ 时, $h(k) = 0$; 确定求和限的一般公式为

$$y_{zs}(k) = \sum_{n=k_1}^{k-k_2} x(n)h(k-n) \cdot u(k-k_1-k_2)$$

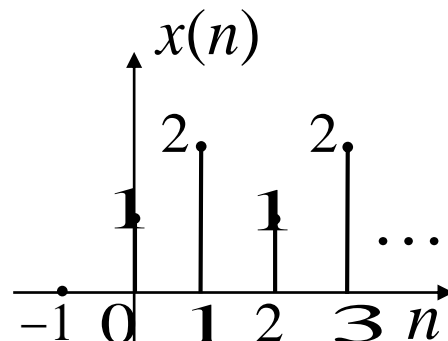
等比级数求和公式:

$$\sum_{n_1}^{n_2} q^n = \begin{cases} \frac{q^{n_1} - q^{n_2+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n_2 - n_1 + 1 & q = 1 \end{cases} \quad (n_1 < n_2)$$

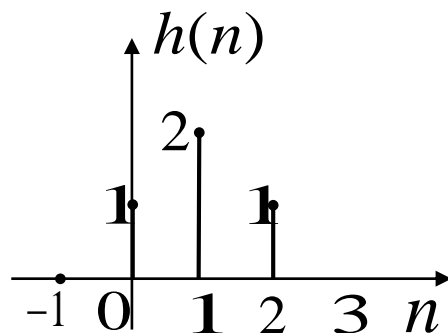
3.5.4 离散卷积的图解

步骤:

1. 换元; 2. 折叠 $h(-n)$; 3. 移位 $h(k-n)$;
4. 相乘 $x(n)h(k-n)$; 5. 求和。



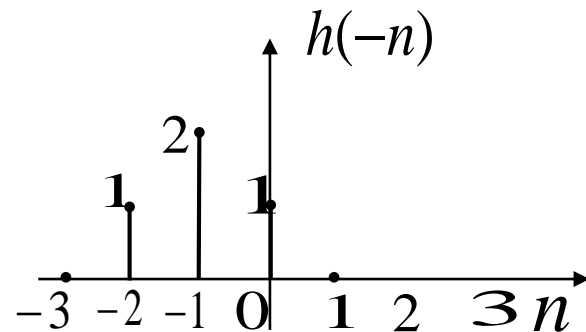
例3-5-2: 设激励信号 $x(k) = \{1, 2, 1, 2, \dots\}$
单位函数响应 $h(k) = \{1, 2, 1\}$, 求零状态响应 $y_{zs}(k)$



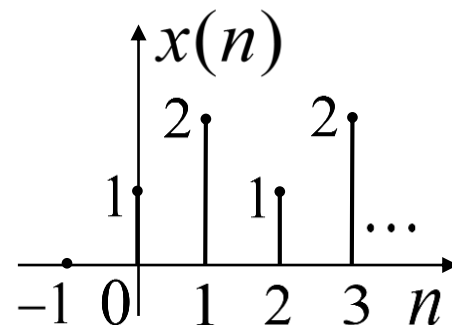
$$\text{解: } y_{zs}(k) = \sum_{n=0}^k x(n)h(k-n)$$

当 $k < 0$ 时, $y_{zs}(k) = 0$

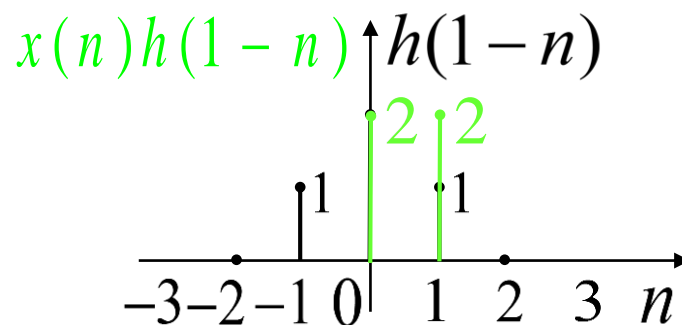
$$y_{zs}(0) = \sum_{n=0}^0 x(n)h(0-n) = x(0)h(0) = 1 \times 1 = 1$$



$$y_{zs}(1) = \sum_{n=0}^1 x(n)h(1-n) = x(0)h(1) + x(1)h(0) \\ = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 4$$

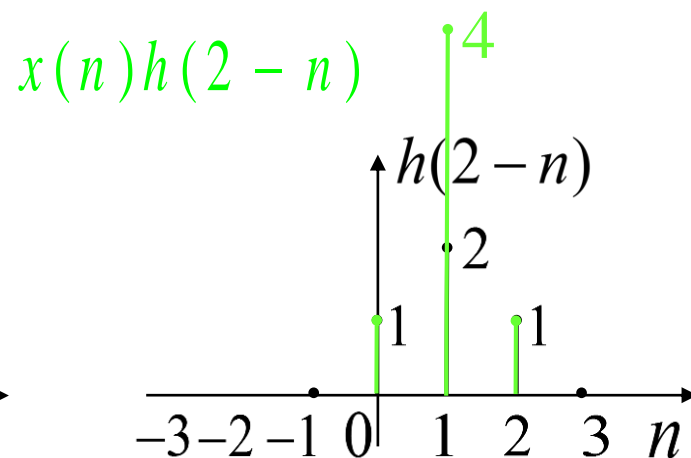
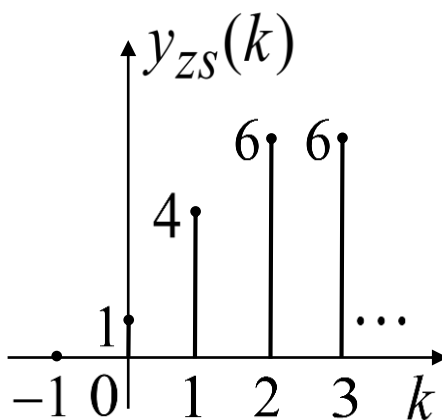


$$y_{zs}(2) = \sum_{n=0}^2 x(n)h(2-n) \\ = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) \\ = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 6$$



类此，可得

$$y_{zs}(k) = \{1, 4, 6, 6, \dots\}$$



3.5.5 离散卷积的列表计算

例：离散时间系统的激励信号 $x(k) = \{2, 1, 5\}$ ，单位函数响应 $h(k) = \{3, 1, 4, 2\}$ ，试求其零状态响应。

· 序列阵表格法

$h(k) \backslash x(k)$	<u>2</u>	1	5
<u>3</u>	<u>6</u>	3	15
1	2	1	5
4	8	4	20
2	4	2	10

· 不进位乘法

			<u>3</u>	1	4	2
		×		<u>2</u>	1	5
<hr/>						
			15	5	20	10
		3	1	4	2	
+	<u>6</u>	2	8	4		
<hr/>						
	<u>6</u>	5	24	13	22	10

$$\therefore y_{zs}(k) = \{\underline{6}, 5, 24, 13, 22, 10\}$$

排成乘法

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 f_1(1), & f_1(2), & f_1(3) \\
 & f_2(0), & f_2(1)
 \end{array} \\
 \times \hline
 f_1(1)f_2(1), & f_1(2)f_2(1), & f_1(3)f_2(1) \\
 + \hline
 f_1(1)f_2(0), & f_1(2)f_2(0), & f_1(3)f_2(0) \\
 \hline
 f_1(1)f_2(0), & f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0), & f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0), & f_1(3)f_2(1)
 \end{array}$$

$$f(k) = \{ 0, \quad f_1(1)f_2(0), \quad f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0), \\
 f_1(2)f_2(1)+f_1(3)f_2(0), \quad f_1(3)f_2(1), \quad 0 \}$$



第三章 离散时间信号与系统的时域分析

- 3.1 典型的离散时间信号
- 3.2 离散时间信号的基本运算
- 3.3 离散系统的零输入响应
- 3.4 离散系统的单位脉冲响应
- 3.5 离散系统的零状态响应
- 3.6 离散时间系统的全响应
- 本章要点
- 作业

3.6 离散时间系统的全响应

系统的全响应分解为：

- 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应
- 全响应 = 自然(固有)响应(通解) + 强制响应(特解)

自然响应：齐次微分(差分)方程的通解

强制响应：非齐次微分(差分)方程的特解，是与激励同模式的部分。

- 全响应 = 暂态响应 + 稳态响应

暂态响应： $t \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) 时衰减为0的部分

稳态响应： $t \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) 时依然存在的部分

例： 某离散时间系统由下列差分方程描述

$$y(k+2) - 0.7y(k+1) + 0.1y(k) = 7x(k+2) - 2x(k+1)$$

已知 $y_{zi}(0) = 2$, $y_{zi}(1) = 4$, $x(k) = u(k)$, 试求该系统的全响应。

解 先求零输入响应 $y_{zi}(k)$:

特征方程为 $r^2 - 0.7r + 0.1 = 0$, 特征根 $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.2$

故
$$y_{zi}(k) = A_1(0.5)^k + A_2(0.2)^k$$

代入初始条件 $y_{zi}(0) = 2 = A_1 + A_2$

$$y_{zi}(1) = 4 = 0.5A_1 + 0.2A_2$$

解得 $A_1 = 12$, $A_2 = -10$

$$\therefore y_{zi}(k) = 12(0.5)^k - 10(0.2)^k \quad k \geq 0$$

再求零状态响应 $y_{zs}(k)$:

$$h_0(k) = [B_1(0.5)^k + B_2(0.2)^k]u(k-1)$$

代入初始条件 $h_0(1) = 0, h_0(2) = 1$, 解得 $B_1 = \frac{20}{3}, B_2 = \frac{-50}{3}$

$$\therefore h_0(k) = \left[\frac{20}{3}(0.5)^k - \frac{50}{3}(0.2)^k \right] u(k-1)$$

故 $h(k) = 7h_0(k+2) - 2h_0(k+1)$

$$= 7 \left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+2} - \frac{50}{3}(0.2)^{k+2} \right] u(k+1)$$

$$- 2 \left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+1} - \frac{50}{3}(0.2)^{k+1} \right] u(k)$$

$$= 7 \left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+2} - \frac{50}{3}(0.2)^{k+2} \right] \delta(k+1) + 7 \left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+2} - \frac{50}{3}(0.2)^{k+2} \right] u(k)$$

$$- 2 \left[\frac{20}{3}(0.5)^{k+1} - \frac{50}{3}(0.2)^{k+1} \right] u(k)$$

$$= [5(0.5)^k + 2(0.2)^k] u(k)$$

$$\begin{aligned}
\therefore y_{zs}(k) &= x(k) * h(k) = u(k) * [5(0.5)^k + 2(0.2)^k] u(k) \\
&= u(k) * 5(0.5)^k u(k) + u(k) * 2(0.2)^k u(k) \\
&= \left[\sum_{n=0}^k 5(0.5)^n + \sum_{n=0}^k 2(0.2)^n \right] u(k) \\
&= \left[5 \frac{1 - (0.5)^{k+1}}{1 - 0.5} + 2 \frac{1 - (0.2)^{k+1}}{1 - 0.2} \right] u(k) \\
&= \{ 10[1 - (0.5)^{k+1}] + 2.5[1 - (0.2)^{k+1}] \} u(k) \\
&= [12.5 - 5(0.5)^k - 0.5(0.2)^k] u(k)
\end{aligned}$$

所以，全响应 $y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$

$$= 12.5 + 7(0.5)^k - 10.5(0.2)^k \quad k \geq 0$$

注意：若初始条件为 $y(0) = 9$ 和 $y(1) = 13.9$ ，应先求 $y_{zs}(k)$ ，得 $y_{zs}(0) = 7$ 和 $y_{zs}(1) = 9.9$ ；于是 $y_{zi}(0) = 2$ ， $y_{zi}(1) = 4$ ；再求 $y_{zi}(k)$ 。



本章要点

- 1.常用的离散信号及其表示方法
 - 单位函数的性质以及与单位阶跃序列的关系 z 序列
- 2.离散信号的基本运算
 - 相加 相乘 移位 折叠 差分 求和
- 3.离散系统的零输入响应
 - 经典法求解齐次差分方程
- 4.离散系统的单位脉冲态响应
 - 直接法 间接法
- 5.离散系统的零状态响应（离散卷积）
 - 图解法 不进位乘法 解析法
- 6.离散系统的全响应



作业

3-2 (a, b), 3-6, 3-10

离散卷积 3-12 (2、5), 3-13

3-16 (1), 3-17 (4), 3-18