



# Fahrzeugregelung - Übung (Antriebsleistung und Fahrwiderstände)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

# Fahrwiderstände in Matlab

## Motivation

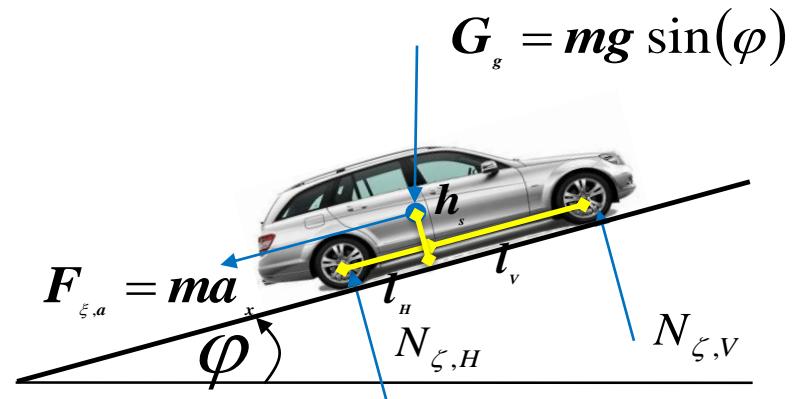
- Zum Vergleichen unterschiedlicher Fahrzeuge hinsichtlich ihrer Fahrleistungen bietet es sich an, ein numerisches Programm auf Basis der Fahrwiderstandsgleichungen zu erstellen.

## Spezifikationen

- Wichtigste Fahrzeugparameter sollen enthalten sein.
- Einfache Parameteränderung soll ermöglicht werden.
- Reale Motorkennfeld soll eingelesen werden können.

# A: Zugkraftgleichungen

Summe aller Kräfte am Fahrzeug:



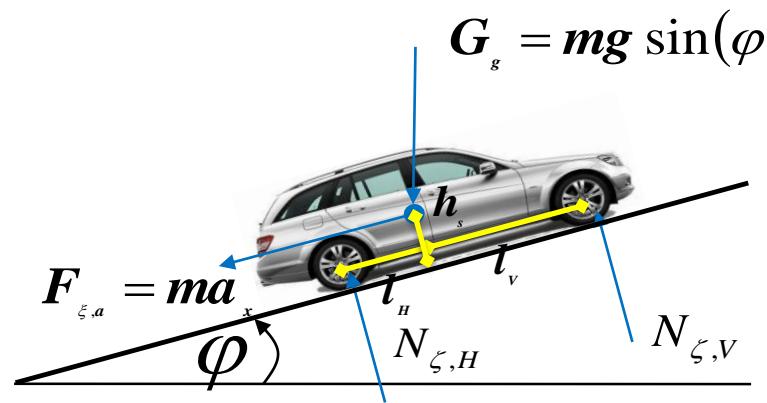
$$\begin{aligned}
 ma_x + \frac{J_{ers}}{r_R} \dot{\omega} &= \sum_i \frac{M_R^i}{r_R} - mg \sin(\varphi) - F_{Lx} - F_{roll} \\
 \Leftrightarrow \sum_i \frac{M_R^i}{r_R} &= ma_x + \frac{J_{ers}}{r_R} \dot{\omega} + mg \sin(\varphi) + F_{Lx} + F_{roll} = Z_B
 \end{aligned}$$

# A: Zugkraftgleichungen

mit Rollwiderstand:  $F_{roll}^{ges} = k_r mg$

Luftwiderstand:  $F_{Lx} = \frac{1}{2} c_x A \rho_L (v_x)^2$

Steigungswiderstand:  $F_{st} = mg \sin(\varphi)$



Beschleunigungswiderstand (siehe Vorlesungsfolien):

$$F_B = \left( m + \frac{J_v + J_h}{r_R^2} \right) a_x = \left( m + \frac{4J_R + (i_D)^2 J_G + (i_D i_G)^2 J_M}{r_R^2} \right) a_x$$

## B: Motorkennlinien

Reale Motorkennlinie eines VKM (ICE):

**Alternative:**

Approximation mittels Polynom:

$$P_{Mot} = P_0 + \sum_i^3 P_i \omega_{Mot}^{i-1} = P_0 + P_1 \omega_{Mot} + P_2 \omega_{Mot}^2 + P_3 \omega_{Mot}^3$$

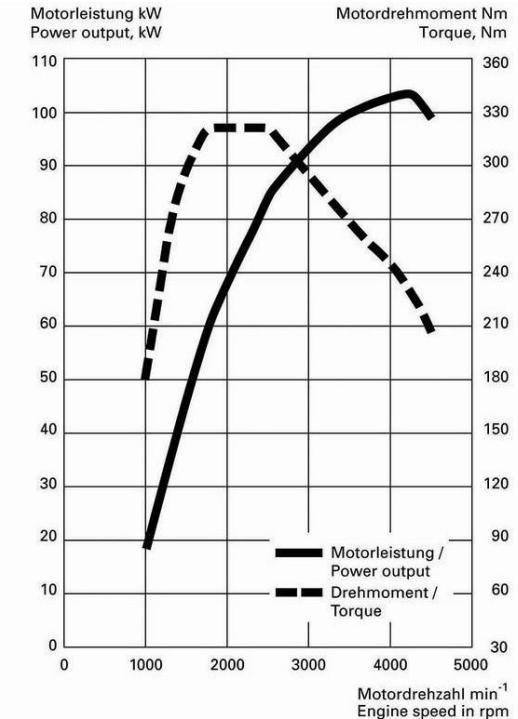
mit

$$P_0 = 0$$

$$P_2 = \frac{P_{max}}{\omega_{max}^2}$$

$$P_1 = \frac{P_{max}}{\omega_{max}}$$

$$P_3 = -\frac{P_{max}}{\omega_{max}^3}$$



und dem Motormoment:

$$M_{Mot} = \frac{P_{Mot}}{\omega_{Mot}}$$

## B: Motorkennlinien

Reale Motorkennlinie eines VKM (ICE):

**Alternative:**

Approximation mittels Polynom:

$$P_{Mot} = P_0 + \sum_i^3 P_i \omega_{Mot}^{i-1} = P_0 + P_1 \omega_{Mot} + P_2 \omega_{Mot}^2 + P_3 \omega_{Mot}^3$$

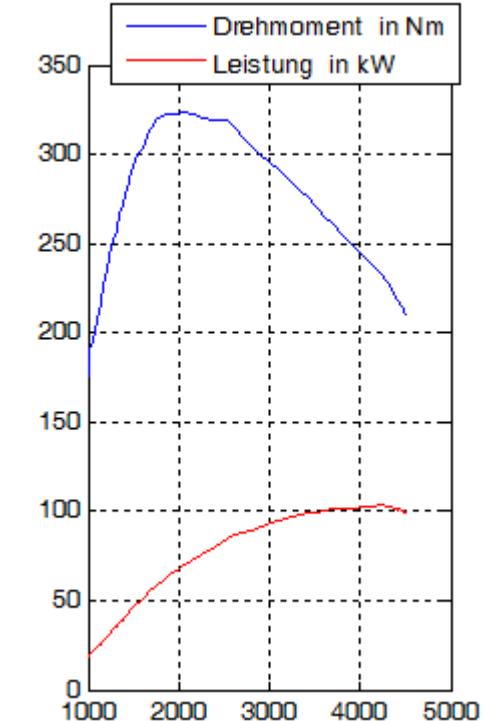
mit

$$P_0 = 0$$

$$P_2 = \frac{P_{max}}{\omega_{max}^2}$$

$$P_1 = \frac{P_{max}}{\omega_{max}}$$

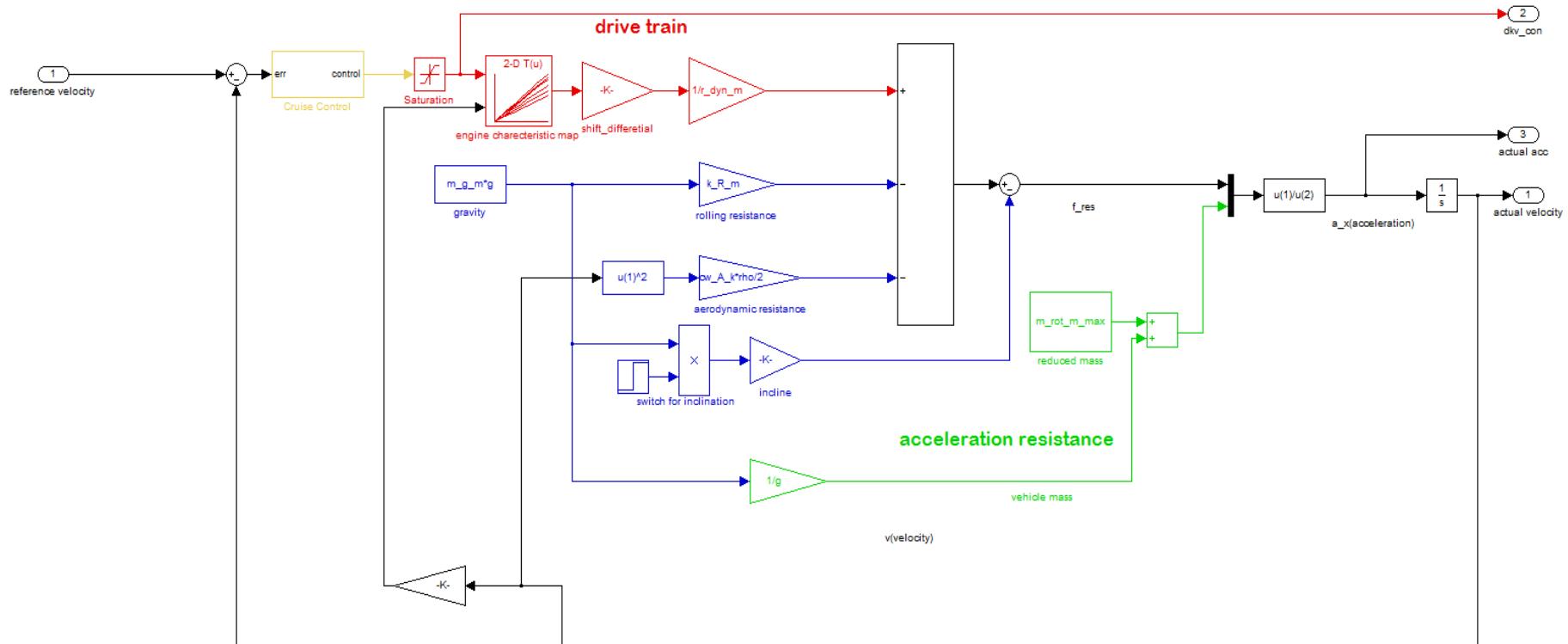
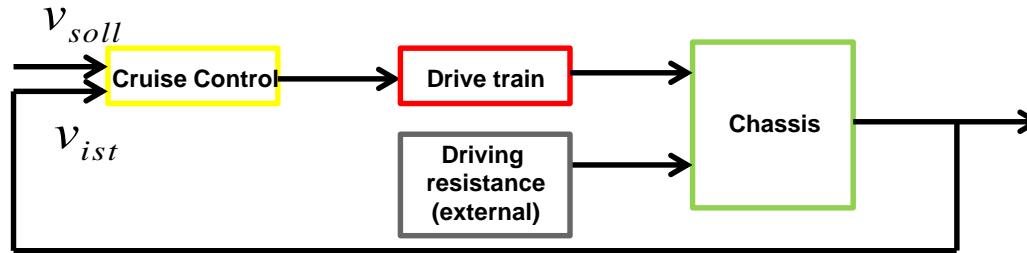
$$P_3 = -\frac{P_{max}}{\omega_{max}^3}$$



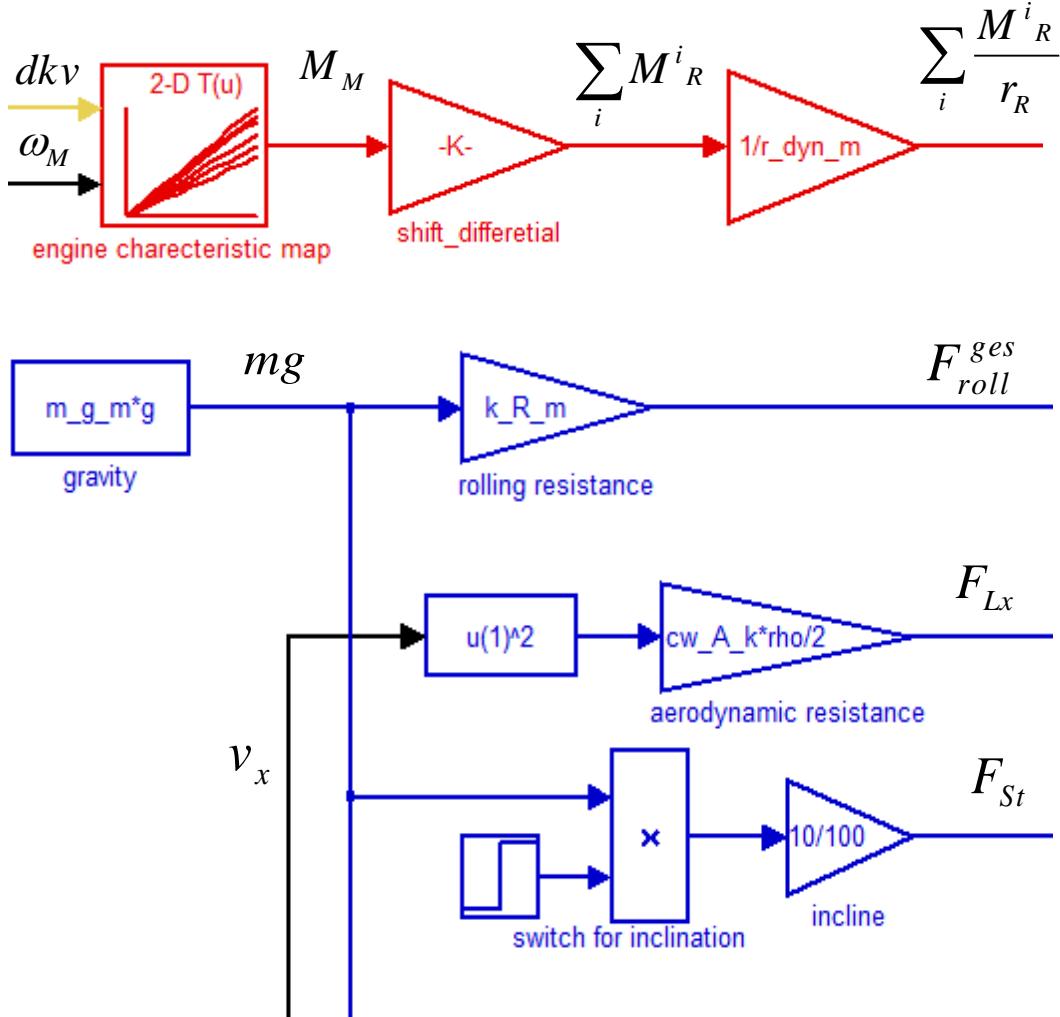
und dem Motormoment:

$$M_{Mot} = \frac{P_{Mot}}{\omega_{Mot}}$$

# Simulation der Geschwindigkeitsregelanlage



# Simulation der Geschwindigkeitsregelanlage



Antriebsmoment:

$$\sum_i \frac{M^i R}{r_R}$$

Fahrwiderstände (extern):

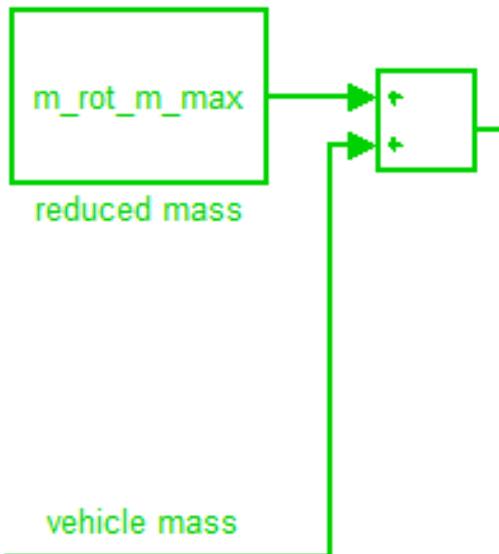
$$F_{roll}^i + F_{Lx} + mg \sin(\varphi)$$

$$F_{roll}^{ges} = k_r mg$$

$$F_{Lx} = \frac{1}{2} c_x A \rho_L (v_x)^2$$

$$F_{St} = mg \sin(\varphi)$$

# Simulation der Geschwindigkeitsregelanlage

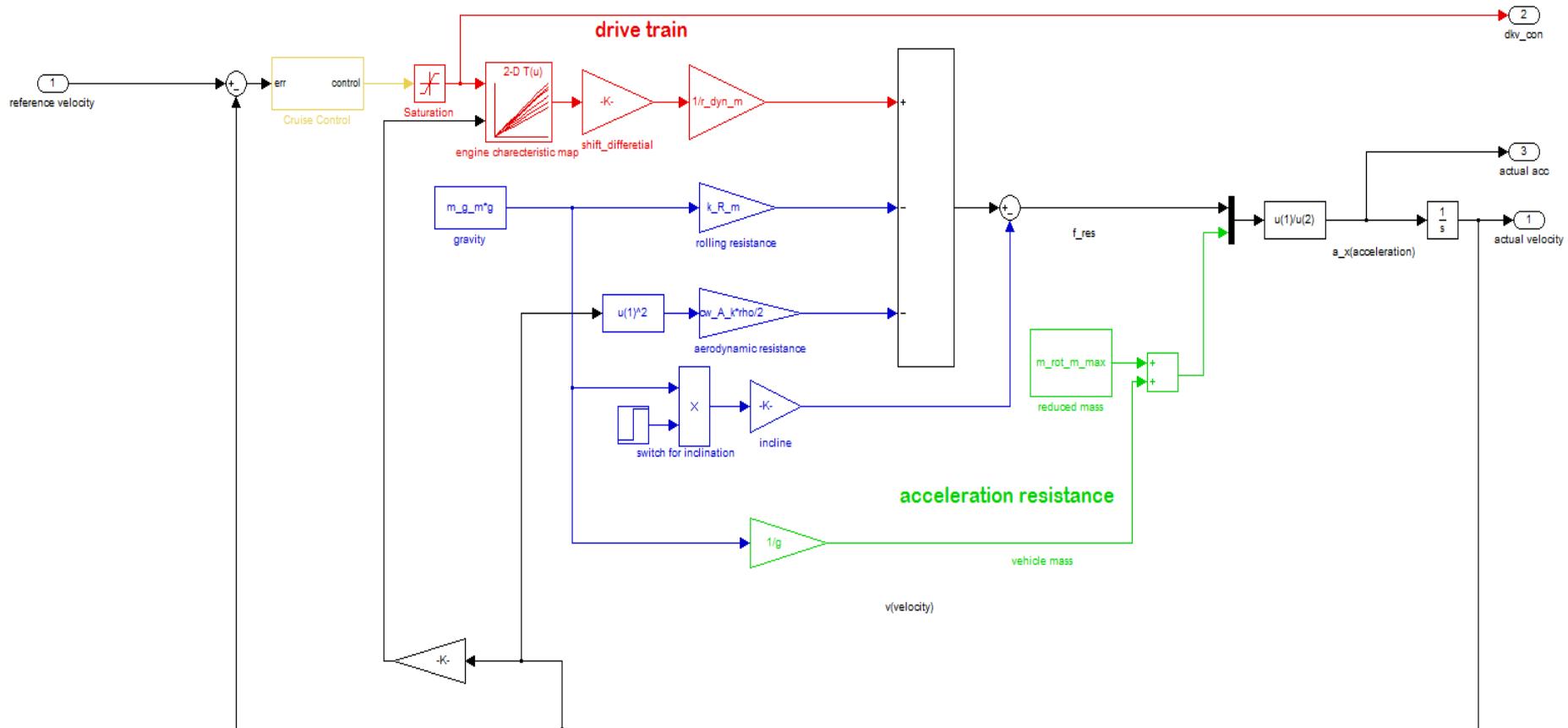


Beschleunigungswiderstand :

$$F_B = \left( m + \frac{J_v + J_h}{r_R^2} \right) a_x = \left( m + \frac{4J_R + (i_D)^2 J_G + (i_D i_G)^2 J_M}{r_R^2} \right) a_x$$

$$m_{ers} = \frac{4J_R + (i_D)^2 J_G + (i_D i_G)^2 J_M}{r_R^2}$$

# Simulation der Geschwindigkeitsregelanlage



$$v_x = \int a_x = \int \frac{\sum_i \frac{M^i}{r_R} - F_{roll}^i - F_{Lx} - mg \sin(\varphi)}{m + m_{ers}}$$

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



# Fahrzeugregelung - Übung (Antriebs und Antriebsregelung)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

## Motivation

- Maximal übertragbare Reifenkraft gibt Hinweise auf eine sinnvolle Antriebsauslegung.
- Statische Zugkraftgleichungen können genutzt werden, um Näherungswerte für die Antriebsauslegung zu finden.

## Berücksichtigung der wichtigsten Effekte, wie z.B.

- Steigung
- Reifen-Fahrbahnkontakt
- Fahrzeugmerkmale

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (1): Benötigt folgendes Fahrzeug auf trockener Fahrbahn ein System zur ASR?

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{rad} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

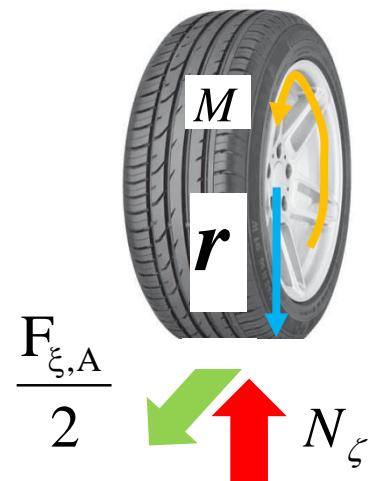
$$h_{sp} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

a) Berechnung der maximalen Antriebskraft:

$$F_{\xi,A} = \frac{M_{m,\max} \eta_G i_D i_G}{r_{rad}} \approx 4,5 kN$$



# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (1): Benötigt folgendes Fahrzeug auf trockener Fahrbahn ein System zur ASR?

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Da die Geschwindigkeit beim Anfahren sehr gering ist und die Fahrt in die Ebene stattfindet, erfolgt eine Reduktion der Antriebskraft nur durch den Rollwiderstand um:

$$F_{R,\text{roll}} = k_r mg = k_r F_\zeta \approx 0,12 kN$$

und es ergibt sich die Zugkraft des Fahrzeugs zu:

$$Z_{R,A} = F_{R,A} - F_{R,\text{roll}} \approx 4,38 kN$$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (1): Benötigt folgendes Fahrzeug auf trockener Fahrbahn ein System zur ASR?

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

Als mögliche Beschleunigung ergibt sich bei voller Ausnutzung der Zugkraft die Fahrzeugbeschleunigung zu:

$$a_{x,\max} = \frac{Z_{R,A}}{m} \approx 4,33 \frac{m}{s^2}$$

Zur Berechnung der durch Reifeneigenschaften maximal möglichen Antriebskraft wird die Radlast an der Antriebsachse benötigt.

# Verlagerung von Achslasten bei Beschleunigung

➤ Fahrzeug wird mit  $a_x$  beschleunigt

➤ Momentengleichgewicht um

Aufstandspunkt der Vorderachse (**A**):

$$N_{\zeta,H}l - h_s F_{\xi,a} - mgl_v = 0$$

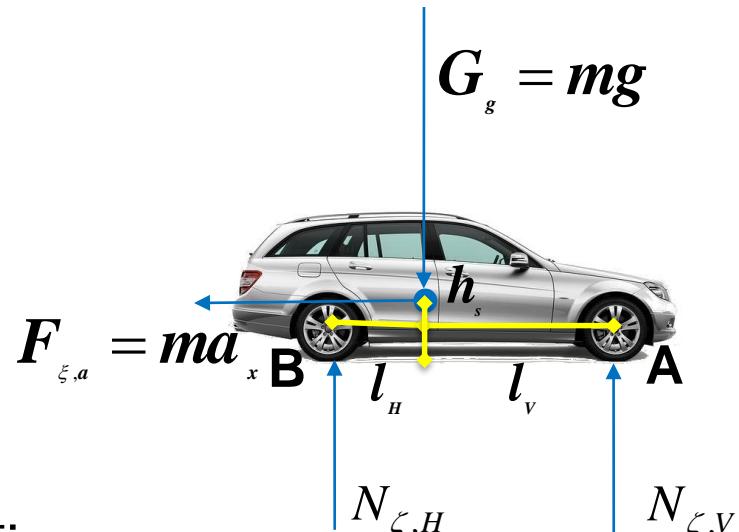
und der Hinterachse (**B**):

$$-N_{\zeta,V}l - h_s F_{\xi,a} + mgl_H = 0$$

Auflösen nach den Aufstandskräften ergibt:

$$N_{\zeta,V} = \frac{mgl_H}{l} - \frac{h_s}{l} ma_x = \frac{m}{l} (gl_H - h_s a_x)$$

$$N_{\zeta,H} = \frac{mgl_v}{l} + \frac{h_s}{l} ma_x = \frac{m}{l} (gl_v + h_s a_x)$$



# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (1): Benötigt folgendes Fahrzeug auf trockener Fahrbahn ein System zur ASR?

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{rad} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{sp} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

Bei der angenommenen Beschleunigung berechnet sich die Radlasten an den Achsen wie folgt:

$$N_{\zeta,H,stat} = G \frac{l_v}{l} = 4132N$$



$$N_{\zeta,V,stat} = G \frac{l_H}{l} = 5785N$$

$$N_{\zeta,H,dyn} = N_{\zeta,H,stat} + ma_x \frac{h_s}{l} \approx 5082N$$

$$N_{\zeta,V,dyn} = N_{\zeta,V,stat} - ma_x \frac{h_s}{l} \approx 4826N$$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (1): Benötigt folgendes Fahrzeug auf trockener Fahrbahn ein System zur ASR?

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Da die maximal übertragbare Reifenkraft vom Reifen-Fahrbahnkontakt abhängt, ergeben sich die übertragbaren Reifenkräfte zu:

$$F_{\xi,\max 1} = \mu_{H,1} N_{\zeta,V} = 5064 \text{ N}$$

$$F_{\xi,\max 2} = \mu_{H,2} N_{\zeta,V} = 2413 \text{ N}$$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (1): Benötigt folgendes Fahrzeug auf trockener Fahrbahn ein System zur ASR?

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

Da die Zugkraft des Fahrzeugs mit  $Z = 4,38 \text{ kN}$  im ersten Fall ( $\mu=1,05$ ) geringer ist als die absetzbare Kraft, ist kein Regelung notwendig.

Im Fall  $\mu = 0,5$  hingegen kann die volle Beschleunigung nur erreicht werden, wenn die Antriebskraft kontrolliert an die Antriebsachse abgegeben wird, ansonsten wird die Beschleunigung durch eine Reduzierung der Antriebskraft bei durchdrehenden Rädern weiter abgesenkt.

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

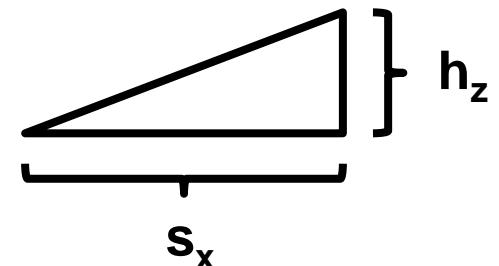
$$h_{sp} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

Berechnung der theoretischen Steigfähigkeit eines Fahrzeuges am Berg mit der Steigung:

$$q = \frac{h_z}{s_x} \cdot 100\%$$



und der vorher berechneten max. Zugkraft des Fahrzeuges von  
 $Z = 4,38 \text{ kN}$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

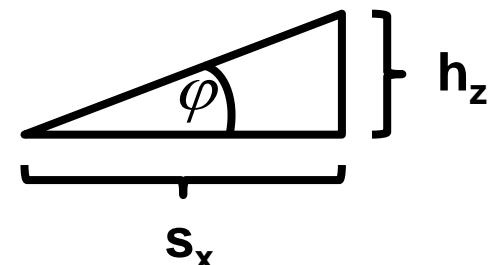
$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

Gleichsetzen liefert:

$$Z = F_{st} = F_z \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \varphi = \sin^{-1} \left( \frac{Z}{mg} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_i = \sin^{-1} \left( \frac{4380}{1011 \cdot 9.81} \right) = 26.20^\circ$$



# Antriebsschlupfregelung (ASR)

## Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Überprüfung der realen Steigfähigkeit:

Nach der Vorlesung „Antriebskraftverteilung“ berechnet sich die maximale Beschleunigung an einer Steigung für Fahrzeuge mit Vorderradantrieb zu:

$$a_x^{\max} = g \left( \frac{\mu_h \left( l \left( 1 - \frac{l}{l} \right) - h_s \varphi \right) - l \varphi}{l + \mu_h h_s} \right)$$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Die maximale Steigfähigkeit wird erreicht, wenn die Fahrzeugsbeschleunigung gerade die maximal mögliche Beschleunigung an einer Steigung kompensiert, das Fahrzeug also gerade nicht rückwärts rollt:

$$0 = g \left( \frac{\mu_h \left( l \left( 1 - \frac{l}{l} \right) - h_s \varphi \right) - l \varphi}{l + \mu_h h_s} \right)$$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{sp} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

Auflösen nach der Steigung liefert die reale Steigfähigkeit:

$$l\varphi + \mu_h h_s \varphi = \mu_h l \left( 1 - \frac{l_v}{l} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(l + \mu_h h_s) = \mu_h l \left( 1 - \frac{l_v}{l} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \mu_h \frac{l \left( 1 - \frac{l_v}{l} \right)}{(l + \mu_h h_s)}$$

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Einsetzen der Fahrzeugkennwerte liefert:

$$\varphi_r = \mu_h \frac{l \left( 1 - \frac{l_v}{l} \right)}{(l + \mu_h h_s)} = 28.58^\circ$$

**Ergebnis:** Da die ideale Steigung geringer als die Reale ist, kann das Fahrzeug aufgrund mangelnder Antriebskraft lediglich die ideale Steigung bewältigen.

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

## Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Aufgabe: Berechnen Sie die reale Steigfähigkeit für ein Fahrzeug

- (a) mit Allradantrieb und
- (b) mit Heckantrieb.

# Antriebsschlupfregelung (ASR)

Beispiel (2): Vergleich zwischen theoretischer und realer Steigfähigkeit

Fahrzeugmerkmale:

$$M_{m,\max} = 94 \text{ Nm}$$

$$i_G = 3,55$$

$$r_{\text{rad}} = 0,263 \text{ m}$$

$$k_r = 0,012$$

$$i_D = 3,94$$

$$\eta_G = 0,9$$

$$m = 1011 \text{ kg}$$

$$l = 2,52 \text{ m}$$

Antrieb: VA

$$h_{\text{sp}} = 0,546 \text{ m}$$

$$\mu_{H1} = 1,05, \mu_{H2} = 0,5$$

$$l_v = 1,05 \text{ m}$$

---

Ergebnis:

a)  $\varphi_r = \mu_h = 60.16^\circ$

b)  $\varphi_r = \mu_h \frac{l}{(l - \mu_h h_s)} = 32.44^\circ$

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



## Fahrzeugregelung: Übung (Reifenmodelle)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

# Motivation

- Stark nichtlinearer Reifen-Fahrbahnkontakt
- Mathematische Modelle des Fahrzeugverhaltens benötigen für eine reale Abbildung bestmögliche Reifennachbildungen
- Der Kontakt Straße-Fahrzeug ist, abgesehen von aerodynamischen Maßnahmen, die einzige Möglichkeit, die Bewegung des Fahrzeugs aktiv zu beeinflussen
- Moderne Regelalgorithmen nutzen Reifeninformationen zur Verbesserung der Regelgüte

## **Reifenmodelle zur Berechnung der Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn**

- Experimentelle Grundlage
- Physikalische Grundlage
- FE-Modelle

# Lineares Reifenmodell

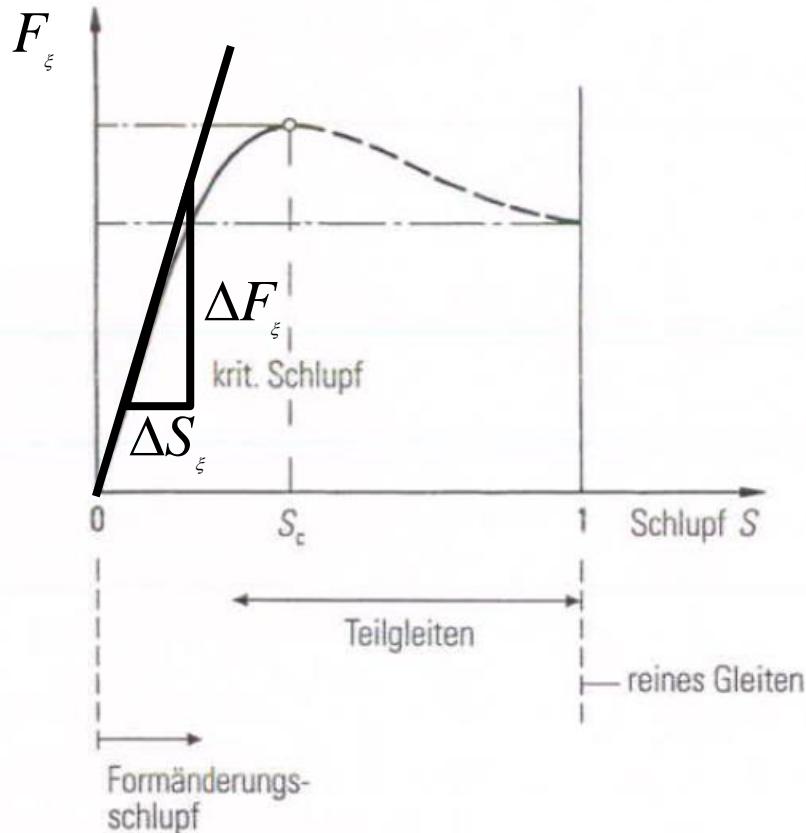
- Lineare Approximation der Reifeneigenschaften:

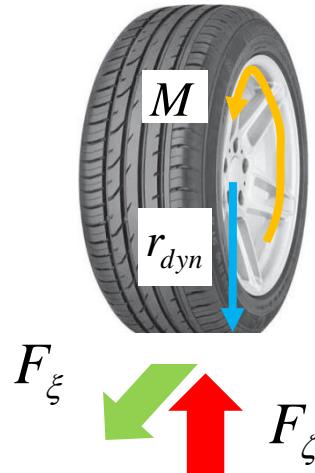
$$C_{\xi} = \frac{\Delta F_{\xi}}{\Delta S_{\xi}}$$

ergibt Längs- oder Querkraft:

$$F_{\xi, \eta} = C_{\xi, \eta} \cdot S_{\xi, \eta}$$

- Einsatzmöglichkeiten: lineares Einspurmodell
- Nachteil: Modell im Grenzbereich nicht anwendbar

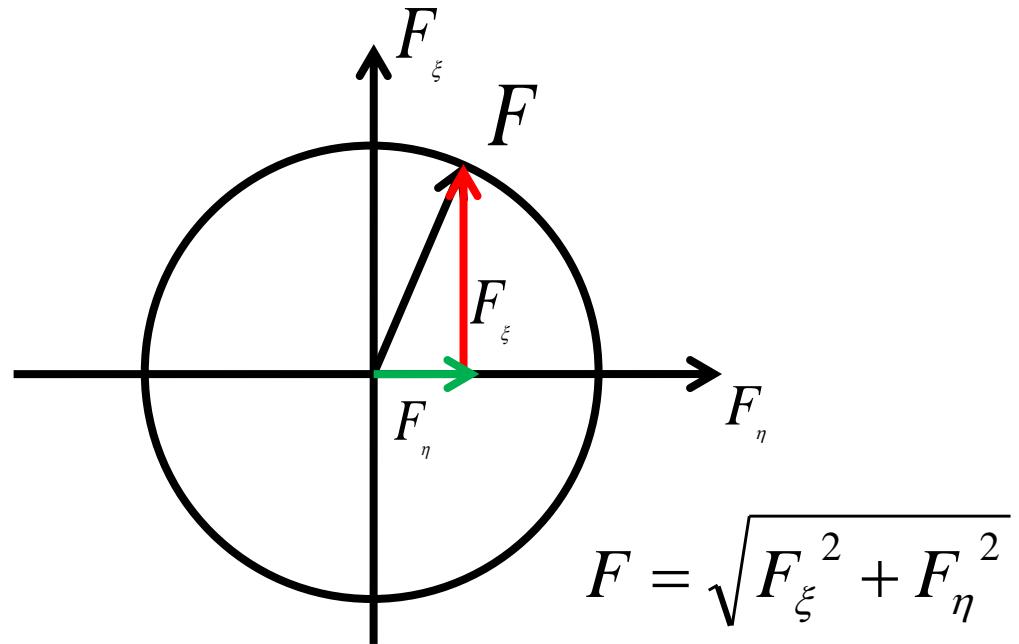




Maximal übertragbare Reifenkraft:

$$F_{\xi,\eta} = \mu_H \cdot N_\zeta$$

Aufteilung auf Längs- und Seitenkraft:

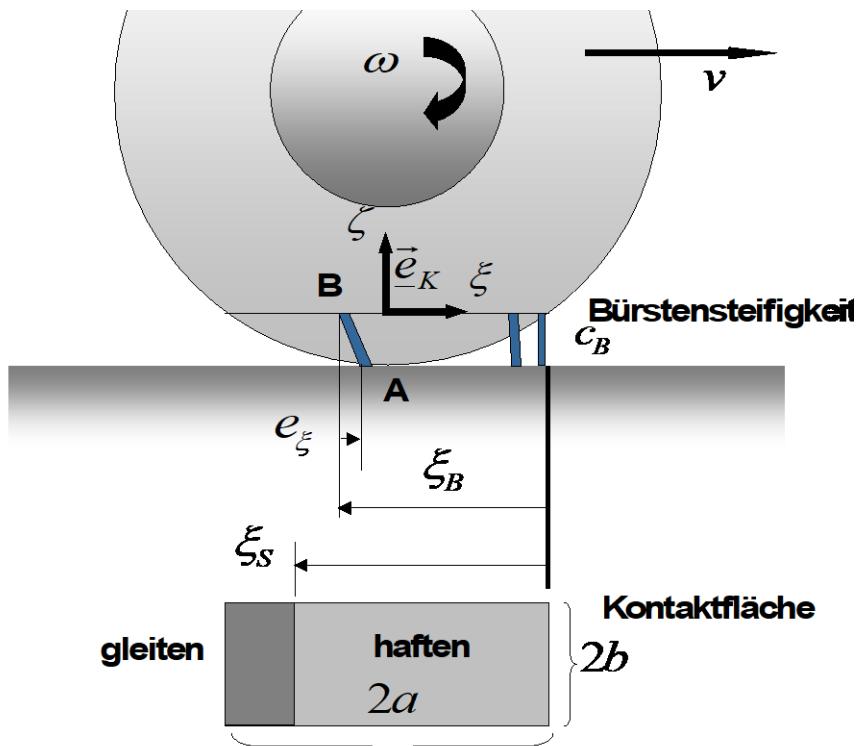


# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

- Analytisch physikalisches Reifenmodell
- Isotropes Modell mit Coulombscher Reibung zwischen Fahrweg und Reifen
- Idealisierung des Reifens im Kontaktgebiet (Latsch)
- Reifen wird durch in Längs- und Querrichtung in Reihe befindlicher, elastischer Zylinder abgebildet
- Rollt der Reifen kraftfrei, so wird angenommen, dass es keine Verformung der Elemente gibt
- Bei Längs- und Querkraft werden die Zylinder deformiert,
  - ➡ proportional zur Verformung entsteht eine Schubspannung
- Verformung wird dargestellt durch horizontalen Abstand zwischen Bürstenanbindung B am Reifen und Berührpunkt A

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

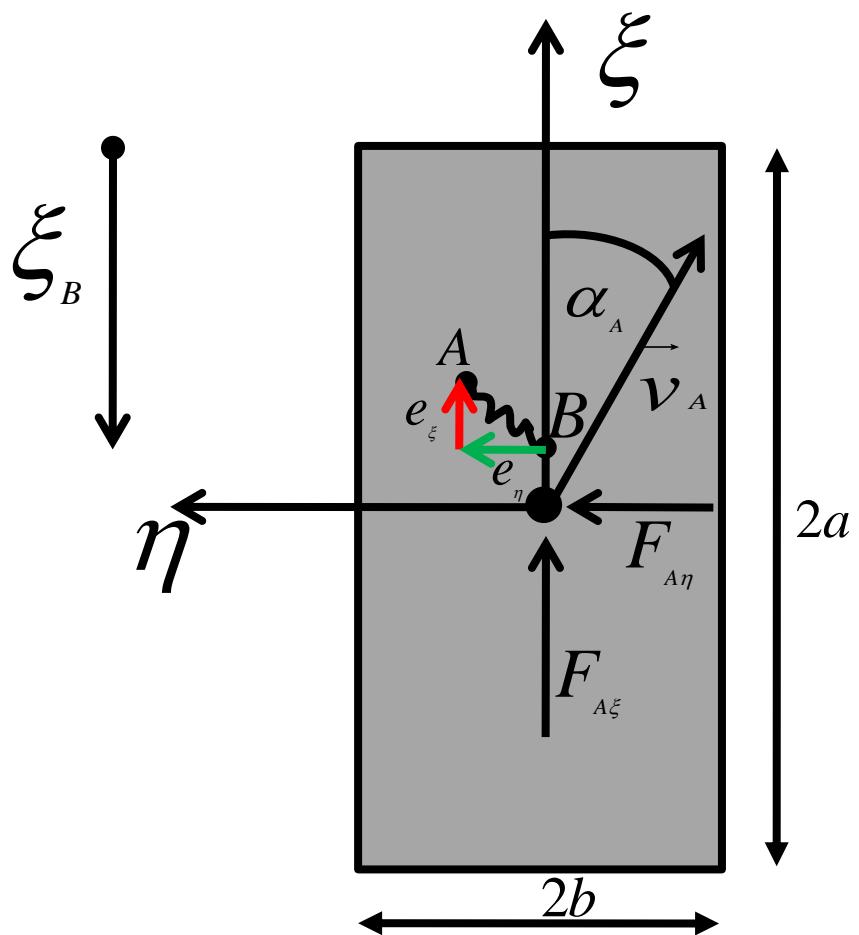
Geometrie des Reifenmodells:



Aus den **Integralen der Tangentialspannungen** über die Kontaktfläche folgen die Kraftschluss-Schlupf Beziehungen

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



Deformation in Reifenlängsrichtung:

$$e_\xi = (r \cdot \dot{\phi} - v \cdot \cos \alpha) \cdot \Delta t$$

Mit  $v$  und  $\dot{\phi}$  konstant im Zeitintervall  $\Delta t$  sind.

Deformation in Reifenquerrichtung:

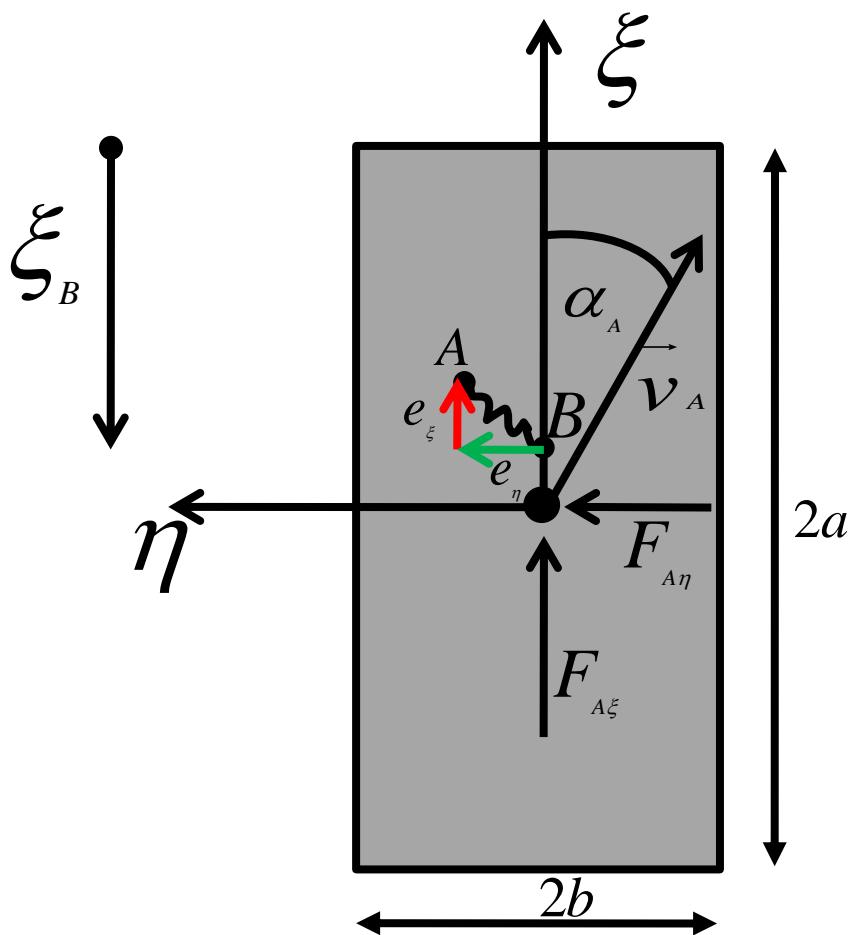
$$e_\eta = v \cdot \sin \alpha \cdot \Delta t$$

$\xi_B$  beschreibt die Längsposition des Anschlusspunktes  $B$  auf dem Reifengürtel:

$$\xi_B = r \cdot \dot{\phi} \cdot \Delta t$$

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



Umformen der letzten Gleichung zu

$$\Delta t = \frac{\xi_B}{r \cdot \dot{\phi}}$$

Einsetzen ergibt:

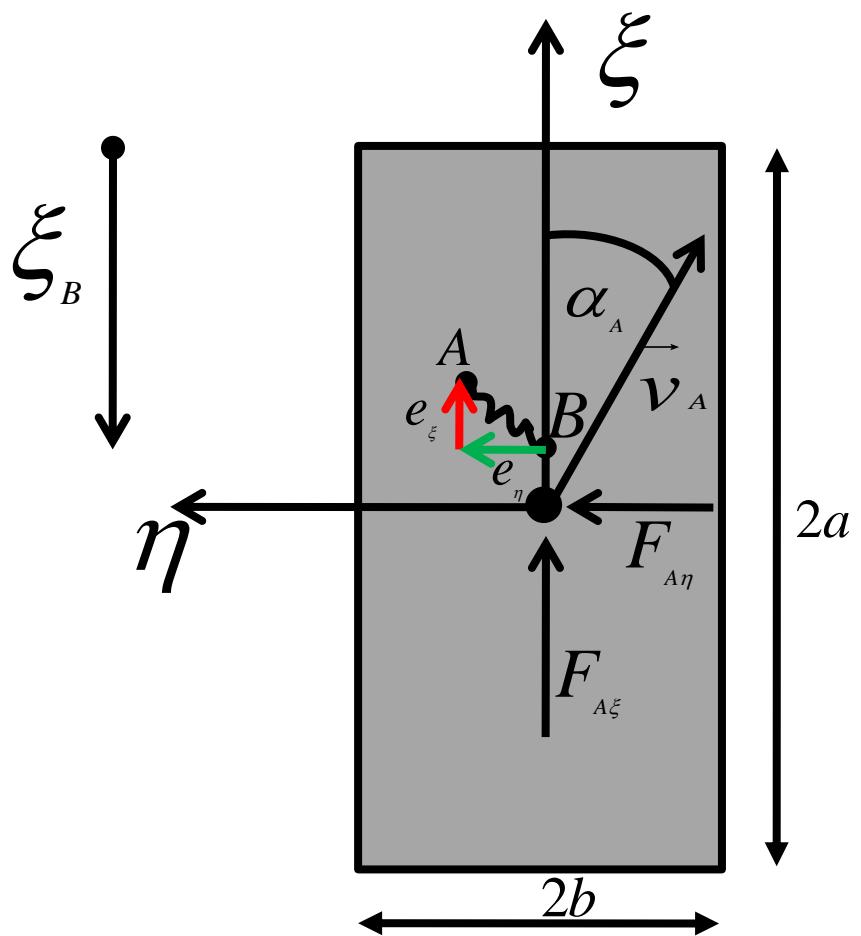
$$e_\xi = -s_\xi \xi_B$$

$$e_\eta = -s_\eta \xi_B$$

mit  $s_i$  wie in der VL deklariert.

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



**Betrachte nun Haften aller Bürsten:**  
Mit der äquivalenten Tangential-Steifigkeit  $c_B$  in [N/m<sup>3</sup>] des elastischen Zylinders folgt:

$$\tau_\xi = -c_B s_\xi \zeta_B$$

$$\tau_\eta = -c_B s_\eta \zeta_B$$

Mit einer rechteckigen Kontaktfläche ergibt sich die Tangentialkraft zu:

$$F_\xi = -2bc_B \int_0^{2a} s_\xi \zeta_B d\xi_B$$

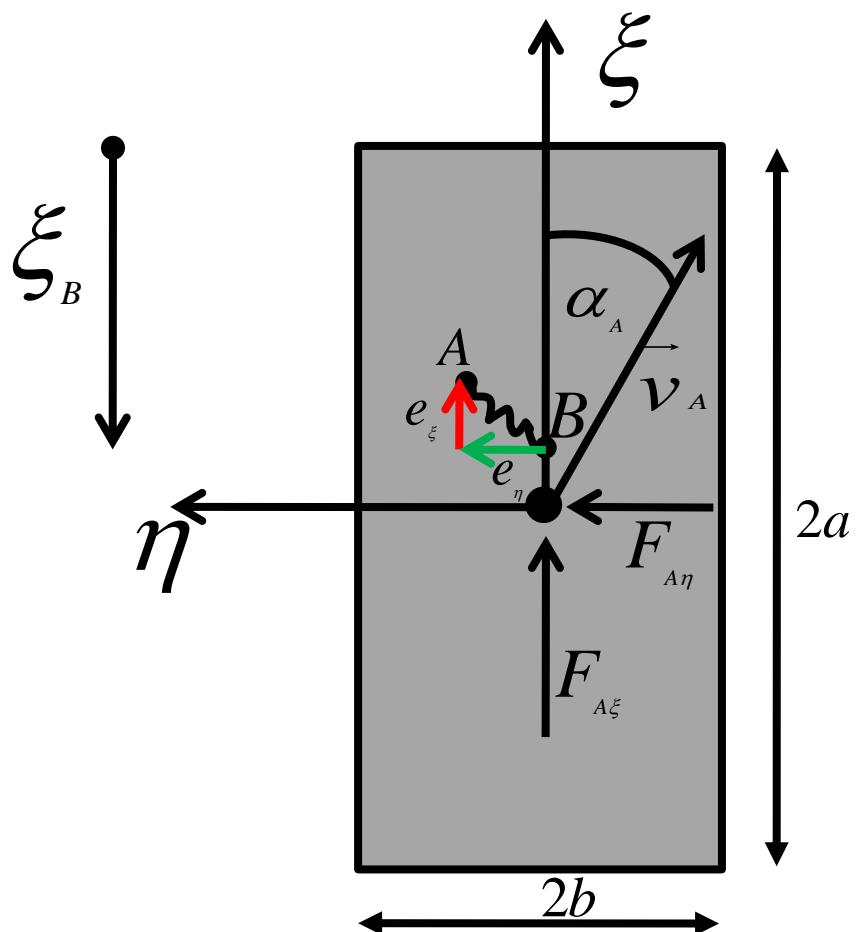
$$= -4ba^2 c_B s_\xi$$

$$F_\eta = -2bc_B \int_0^{2a} s_\eta \zeta_B d\xi_B$$

$$= -4ba^2 c_B s_\eta$$

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



Da die Tangentialspannungsverteilung nicht symmetrisch zur Reifenquerachse ist, erhalten wir ein sogenanntes Bohrmoment

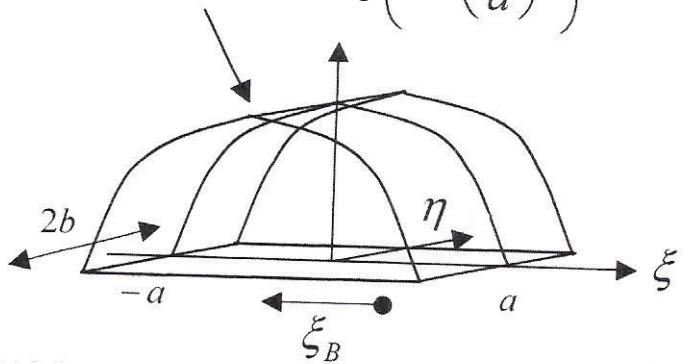
$$M_\xi = -2bc \int_0^{2a} s_\eta \underbrace{(a - \xi_B)}_{\text{Hebelarm}} \xi_B d\xi_B$$
$$= \frac{a}{3} (4ba^2 c_B) s_\eta$$

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass Gleiten auftritt, wobei der Normalspannungsverlauf parabolisch in Reifenlängs- und konstant in Reifenquerrichtung verläuft.

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Normalkraftverteilung:

$$p(\xi) = p_0 \left( 1 - \left( \frac{\xi}{a} \right)^2 \right)$$



Dabei berechnet sich  $p_0$  zu:

$$N_\xi = 2b \int_{-a}^a p_0 \left[ 1 - \left( \frac{\xi}{a} \right)^2 \right] d\xi_B$$

$$\rightarrow p_0 = \frac{3N_\xi}{8ab}$$

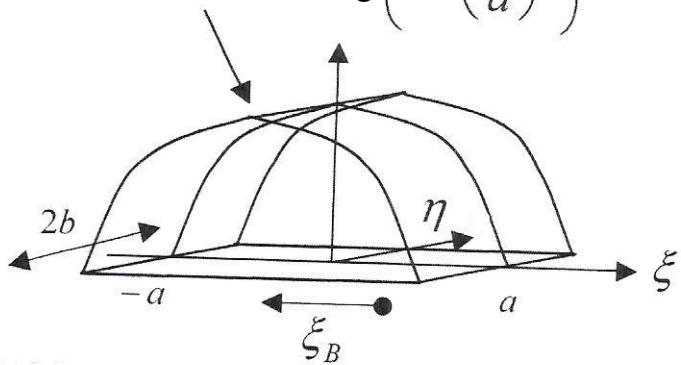
Die maximal mögliche Deformation  $|e_{max}|$  einer Bürste ist wegen des Verlaufs in Längsrichtung eine  $\xi$  Funktion von  $\xi_B$  bzw.

$$e_{max} = \frac{\mu_h p(\xi)}{c_B}$$

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Normalkraftverteilung:

$$p(\xi) = p_0 \left( 1 - \left( \frac{\xi}{a} \right)^2 \right)$$



bzw. mit:  $\xi = a - \xi_B$

$$e_{\max} = \frac{\xi_B (2a - \xi_B)}{2a \Theta_H}$$

wobei:

$$\Theta_H = \frac{4a^2 b c_B}{3\mu_H N_\xi}$$

Ein Zylinder beginnt zu Gleiten, wenn:

$$\sqrt{e_\xi^2 + e_\eta^2} = e_{\max}$$

bzw.

$$\sqrt{s_\xi^2 + s_\eta^2} \xi_B = e_{\max}$$

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Mit dem Gesamtschlupf  $s$

$$s \stackrel{def}{=} \sqrt{s_{\xi}^2 + s_{\eta}^2}$$

folgt für den Losbrechpunkt  
(aus Gl.  $e_{\max}$ ):

$$\xi_s = 2a(1 - \Theta_H s)$$

Es ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für das Haft- und Gleitgebiet:

$$\tau_{\xi}(\xi_B) = \begin{cases} -c_B s_{\xi} \xi_B \\ -c_B s_{\xi} \xi_S \end{cases}$$

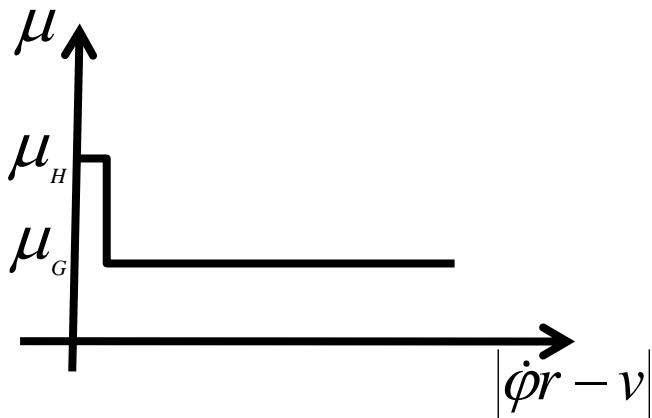
und

$$\tau_{\eta}(\xi_B) = \begin{cases} -c_B s_{\eta} \xi_B \\ -c_B s_{\eta} \xi_S \end{cases}$$

jeweils bis/ab dem Losbrechpunkt. Je mehr der Losbrechpunkt nun in Richtung Eintrittsbereich einer Bürste in den Latsch liegt, desto größer wird der Anteil an Bürsten, die in Gleiten übergehen. Dadurch verläuft die Reifenkraft degressiv.

# Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Haftwerte:



Für den Fall, dass:

$$\mu_H \neq \mu_G$$

ergibt sich mit  $\Theta_G$  statt  $\Theta_H$

$$\Theta_G = \frac{4a^2bc_B}{3\mu_G N_\xi}$$

Die resultierenden Kraftgleichungen ergeben:

$$F_\xi = -2bc_B \left[ \int_0^{\xi_S} s_\xi \xi_B d\xi_B + \int_{\xi_S}^{2a} s_\xi \xi_B d\xi_B \right]$$

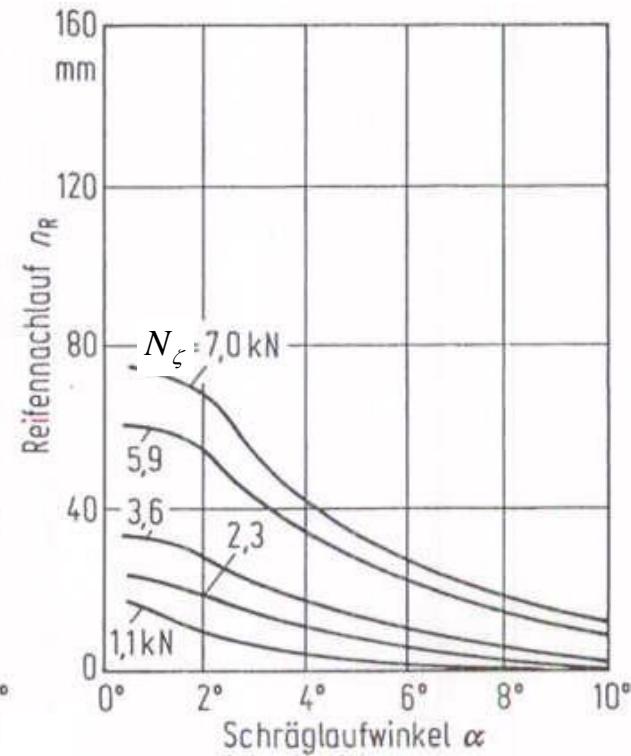
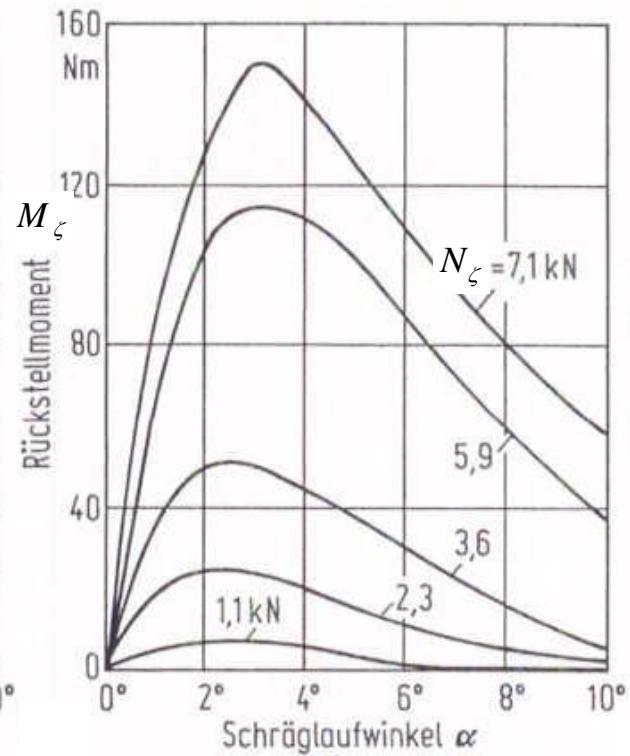
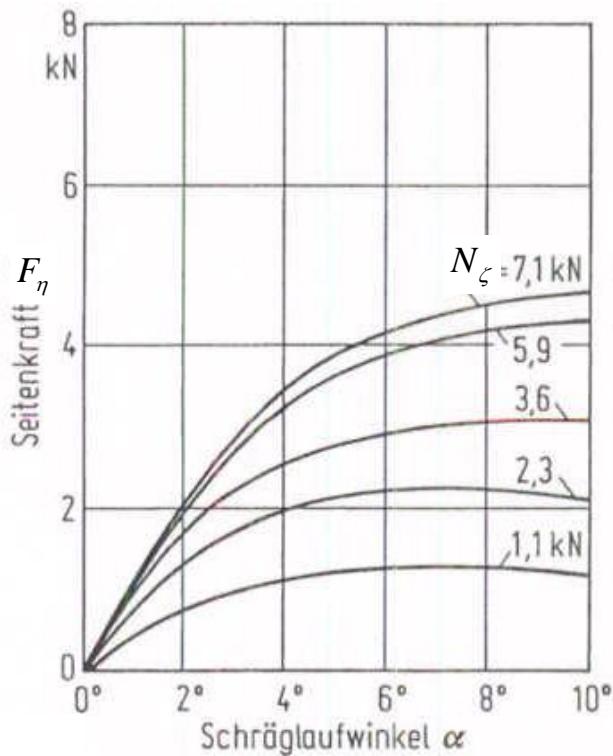
$$F_\eta = -2bc_B \left[ \int_0^{\xi_S} s_\eta \xi_B d\xi_B + \int_{\xi_S}^{2a} s_\eta \xi_B d\xi_B \right]$$

Das Bohrmoment ergibt sich zu:

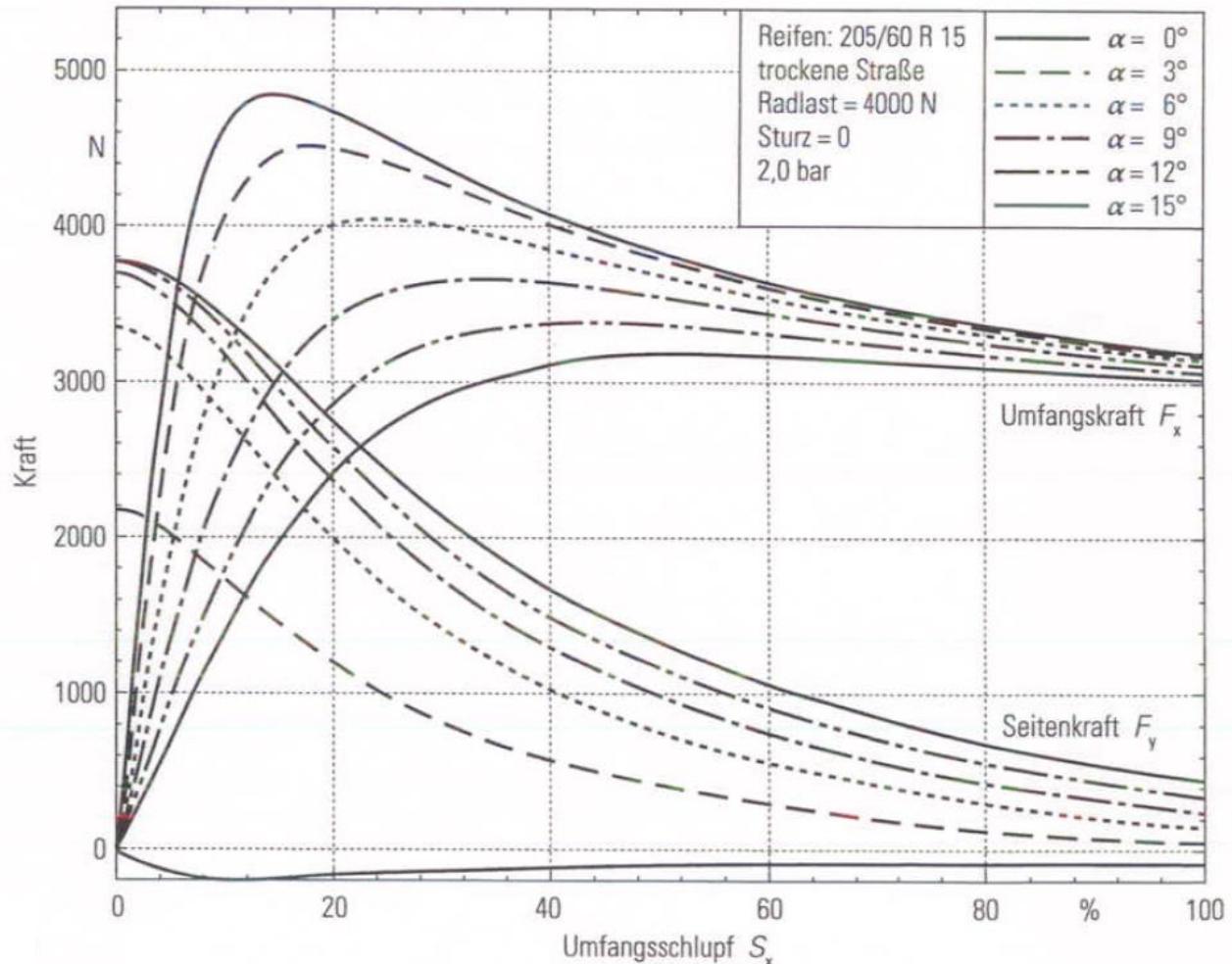
$$M_\xi = -2bc_B \int_0^{\xi_S} s_\eta (a - \xi_B) \xi_B d\xi_B + \int_{\xi_S}^{2a} s_\eta (a - \xi_B) \xi_B d\xi_B \\ = n_R(s) F_\eta$$

mit dem sog. Riefennachlauf  $n_R(s)$

# Seitenkraft und Rückstellmoment über $\alpha$



# f(Längsschlupf), Parameter Schräglauwinkel

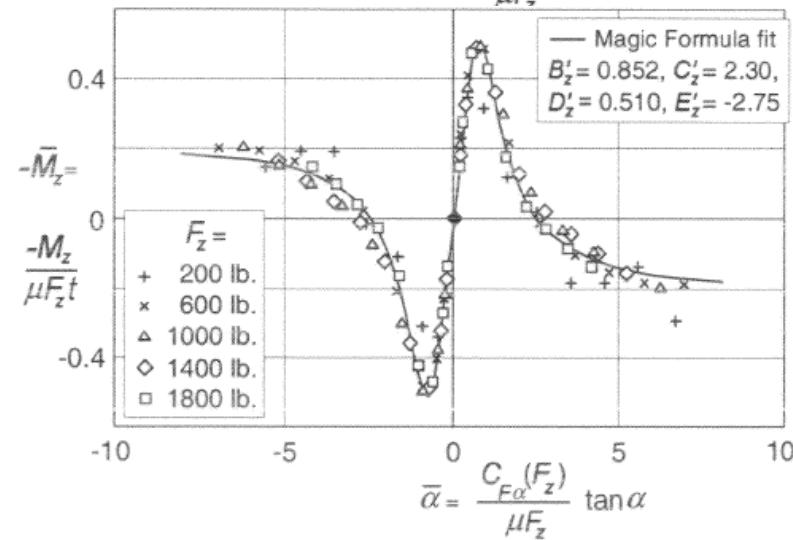
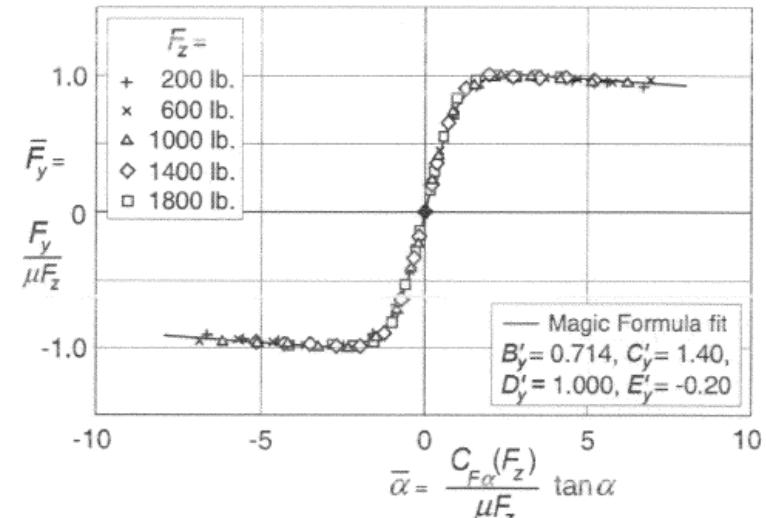


# Vereinfachte Pacejka Magic Tire Formular

- Nichtlineare Approximation der Reifen-eigenschaften
- Reifenmodell bildet die Kraftschluss-Schlupf-Beziehung analytisch ab, z.B. durch

$$Y = F_{\max} \cdot \sin(C \arctan(B \cdot \frac{s}{\mu}))$$

- Mit Hilfe der Optimierungsrechnung werden die freien Parameter so bestimmt, dass es zur optimalen Übereinstimmung der Messkurven und der Modellkurve kommt
- Nachteil: viele Messungen für verschiedene Betriebsbereiche notwendig



# Vereinfachte Pacejka Magic Tire Formular

Die einzelnen Parameter bedeuten:

- Kraftschlusspotential:

$$F_{\max} = \mu N_\zeta \cdot (1 + k_{F\zeta} \frac{N_{\zeta_0} - N_\zeta}{N_{\zeta_0}}) = D$$

- Parameterbedeutung:

$Y$  ...Quer- oder Längskraft, Bohrmoment

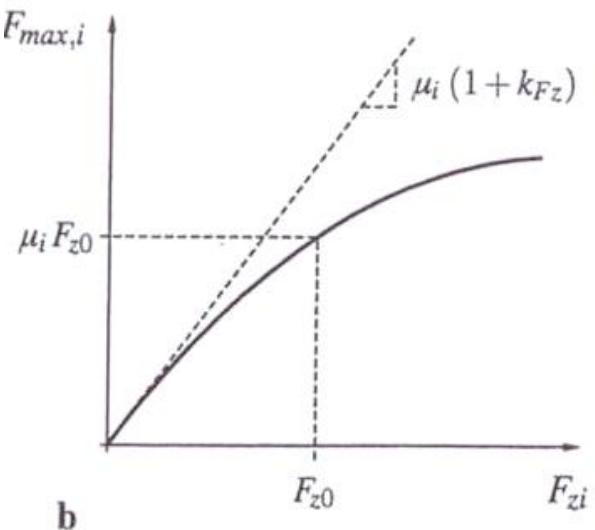
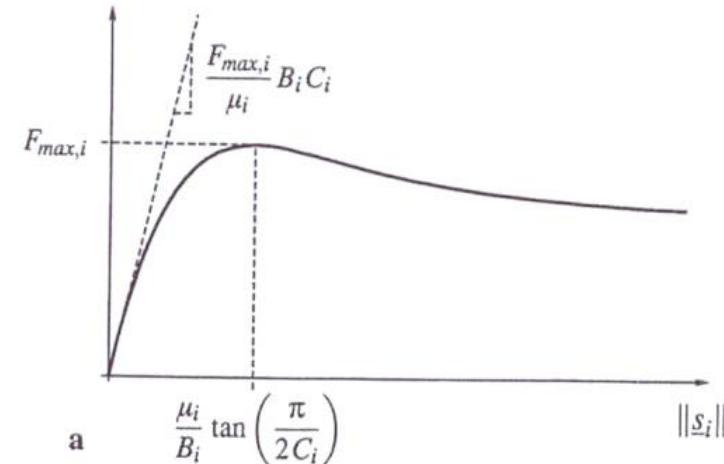
$C$  ...Wertebereich (1;2)

$B$  ...Wertebereich > 0

$\mu$  ...Haftbeiwert > 0

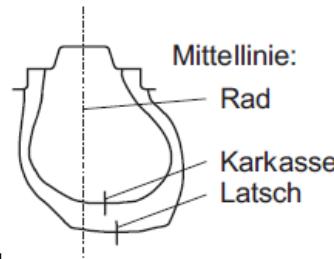
$k_{F\zeta}$  ...Degressivitätsfaktor  $\geq 0$

$N_{\zeta_0}$ ...Nominale Radlast > 0

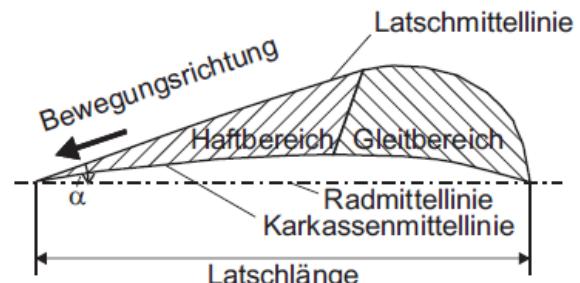


# HSRI Reifenmodell

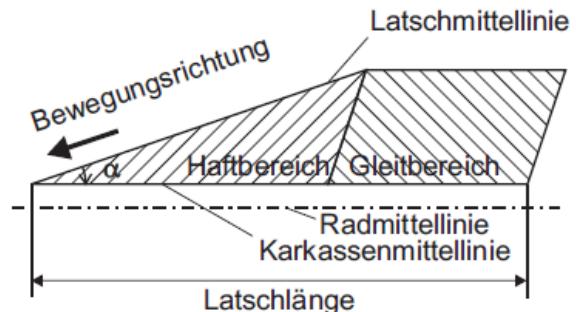
- HSRI = Highway Safety Research Institute der Universität in Michigan
- Modell berechnet die Reifenkräfte aufgrund der Verformungen durch im Reifen auftretende Spannungen
- Eingangsgrößen: Schräglaufwinkel, Radlast, Raddrehzahl, Fahrzeuggeschwindigkeit
- Reifensturz wird nicht berücksichtigt
- Konstante Flächenpressung im Latsch
- Mittellinie der Reifenkarkasse verschiebt sich durch die Seitenkraft parallel gegenüber der Radmittenebene
- physikalisches Modell



wirkliche Verformung:

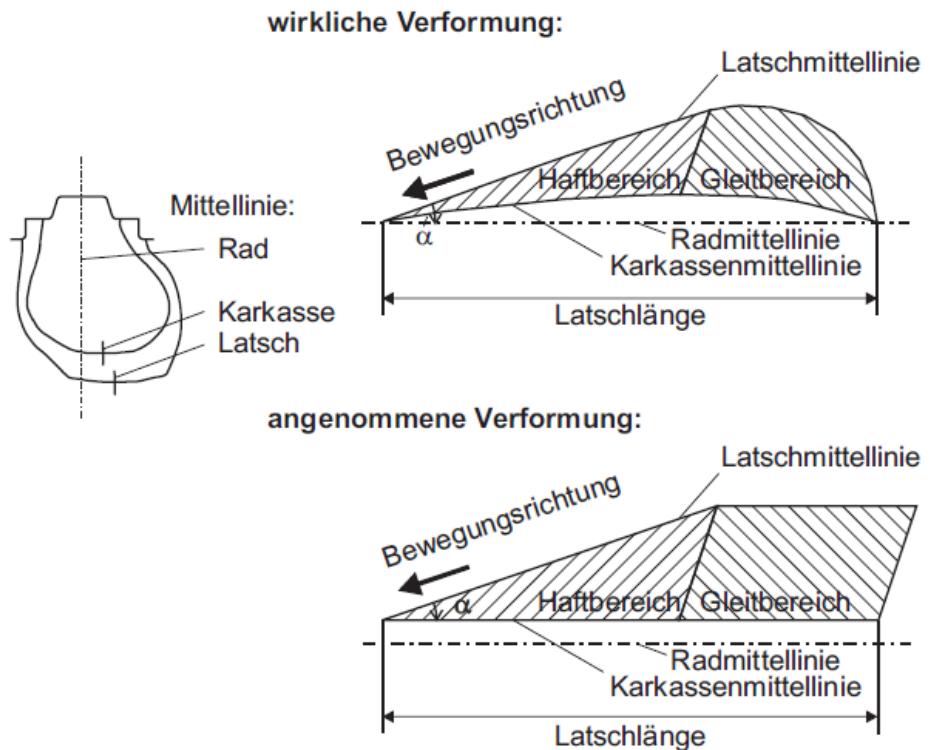


angenommene Verformung:



# HSRI Reifenmodell

- Es wird die Auslenkung der Protektorteilchen von der Karkassenmittellinie betrachtet
- linearer Schubspannungsverlauf bis zur Kraftschlussgrenze
- Anzahl der benötigten Parameter ist relativ gering



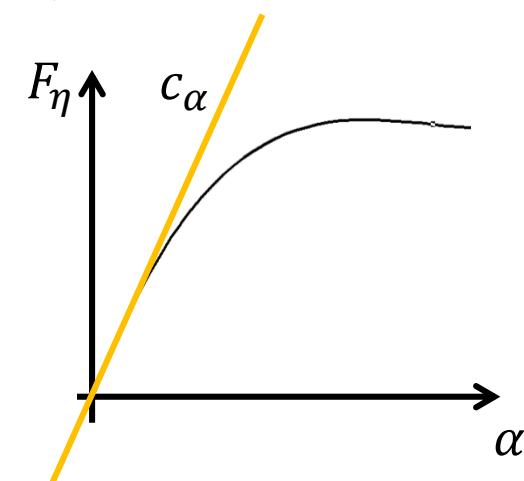
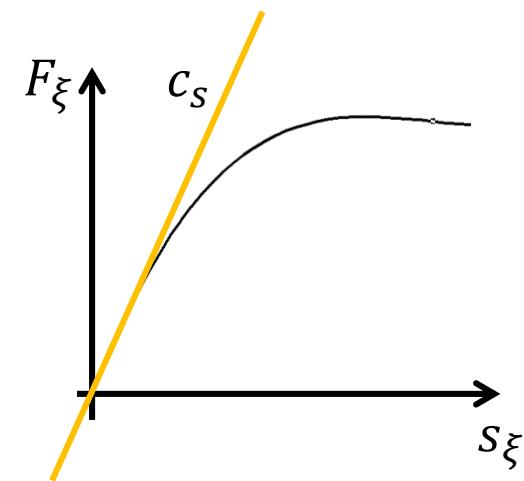
# HSRI - Mathematische Modellierung

- Längsschlupfsteifigkeit  $c_s$  als Anstieg der Längskraft-Schlupf-Kurve im Ursprung

$$c_s = \left. \frac{\partial F_\xi}{\partial s_\xi} \right|_{\alpha=0}$$

- Seitenschlupfsteifigkeit  $c_\alpha$  als Anstieg der Seitenkraft-Schräglaufwinkel-Kurve im Ursprung

$$c_\alpha = \left. \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha} \right|_{s=0}$$



- Die Definition des Antriebs- und Bremsschlupfs kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$s_i = \frac{|v - r_{dyn} \cdot \omega|}{\max(v, r_{dyn} \cdot \omega)}$$

- Die Gleitgeschwindigkeit ergibt sich aus:

$$v_G = v_{G,\xi} \sqrt{s_i^2 + \tan^2 \alpha}$$

- Mit der Gleitgeschwindigkeit in Latschlängsrichtung  $v_{G,\xi}$  :

$$v_{G,\xi} = v - r_{dyn} \cdot \omega$$

- Die Gleitgeschwindigkeit wird genutzt, um den Haftreibbeiwert zu berechnen:

$$v_G < 80 \text{ km/h}: \quad \mu_i = f_{0,i} (1 - k_R v_G)$$

$$v_G \geq 80 \text{ km/h}: \quad \mu_i = f_{0,i} (1 - k_R \tanh(v_G)^2)$$

- Mit den Parametern  $f_0$  und  $k_R$  welche die Kraftschlussabnahme bei zunehmender Geschwindigkeit beschreiben:

$$f_0 = f_{0,1} + f_{0,2} N_\zeta \quad k_R = k_{R,1} + k_{R,2} N_\zeta$$

- Die Funktion  $\bar{s}_R$  dient zur Bestimmung der Haftbereiche (Gleiten, Haften):

$$\bar{s}_R = \frac{\sqrt{(c_s s_i)^2 + (c_\alpha \tan(\alpha))^2}}{\mu_i N_\zeta (1 - s_i)}$$

- Kombiniert man diese Gleichungen ergeben sich die Reifenkräfte zu:

$\bar{s}_R \leq 0,5$ :

$$F_\xi = c_s s_i$$

**(Haftbereich,  
linear)**

$$F_\eta = c_\alpha \tan(\alpha)$$

$\bar{s}_R > 0,5$ :

**(Gleitbereich,  
nichtlinear)**

$$F_\xi = c_s \left( \frac{s_i}{1 - s_i} \right) \left( \frac{\bar{s}_R - 0,25}{\bar{s}_R^2} \right)$$

$$F_\eta = c_\alpha \left( \frac{\tan(\alpha)}{1 - s_i} \right) \left( \frac{\bar{s}_R - 0,25}{\bar{s}_R^2} \right)$$

# HSRI - Mathematische Modellierung

- Zur Berechnung des Rückstellmoments wird der Reifennachlauf in Längs-  $n_\xi$  und Seitenrichtung  $n_\eta$  benötigt. Für  $n_\xi$  gilt:

$$\bar{s}_R \leq 0,5:$$

**(Haftbereich,  
linear)**

$$n_\xi = \frac{4}{3} l \tan(\alpha) + \frac{F_\eta}{c_\alpha}$$

$\bar{s}_R > 0,5:$   
**(Gleitbereich,  
nichtlinear)**

$$n_\xi = l \tan(\alpha) \left( \frac{\bar{s}_R - \frac{1}{3}}{\bar{s}_R \left( \bar{s}_R - \frac{1}{4} \right)} + \frac{F_\eta}{c_\alpha} \right)$$

- Mit der halben Latschlänge  $l$  und der Reifensubtangente  $s_1$ :

$$l = \sqrt{2 r_{dyn} s_1}$$

- Für den Reifennachlauf in Seitenrichtung  $n_\eta$  erhält man:

$\bar{s}_R \leq 0,5$ :

**(Haftbereich,  
linear)**

$\bar{s}_R > 0,5$ :

**(Gleitbereich,  
nichtlinear)**

$$n_\eta = \frac{1}{3} l \left[ 1 + 2\bar{s}_R \left( \frac{1}{2} - \bar{s}_R \right) \right]$$

$$n_\eta = l \left( \frac{12 - \frac{1}{\bar{s}_R^2}}{12 - \frac{3}{\bar{s}_R}} - 1 \right) \left( \frac{1 - (\bar{s}_R - 0,5)}{k_{Kor}} \right) \quad k_{Kor}: \text{Korrekturwert}$$

- Über das Momentengleichgewicht ergibt sich damit das Rückstellmoment zu:

$$M_\zeta = F_\eta n_\eta - F_\xi n_\xi$$

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



## Fahrzeugregelung: Übung (Einspurmodell)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

# Einleitung

Wir betrachten hauptsächlich **Punktmodelle**, da diese zur Beschreibung der **Fahrdynamik** und der Fahrdynamik-Regelung eine **ausreichend hohe Genauigkeit** aufweisen.

Man unterscheidet hier zwischen:

- Viertelfahrzeugmodell
- Einspurmodell
- Zweispurmodell

Diese Modelltypen unterscheiden sich nochmals in ihrer Modellierungstiefe. So kann ein Zweispurmodell die Vertikaldynamik des Fahrzeugaufbaues berücksichtigen, oder als „ebenes“ Modell ausgeführt sein und so die Rückwirkungen der Aufbaubewegung auf die horizontale Fahrzeugbewegung vernachlässigen.

# Einspurmodell

Das nachfolgend hergeleitete Einspurmodell **beschreibt** die **Querdynamik** als differential-algebraische Gleichungen (**DAE**).

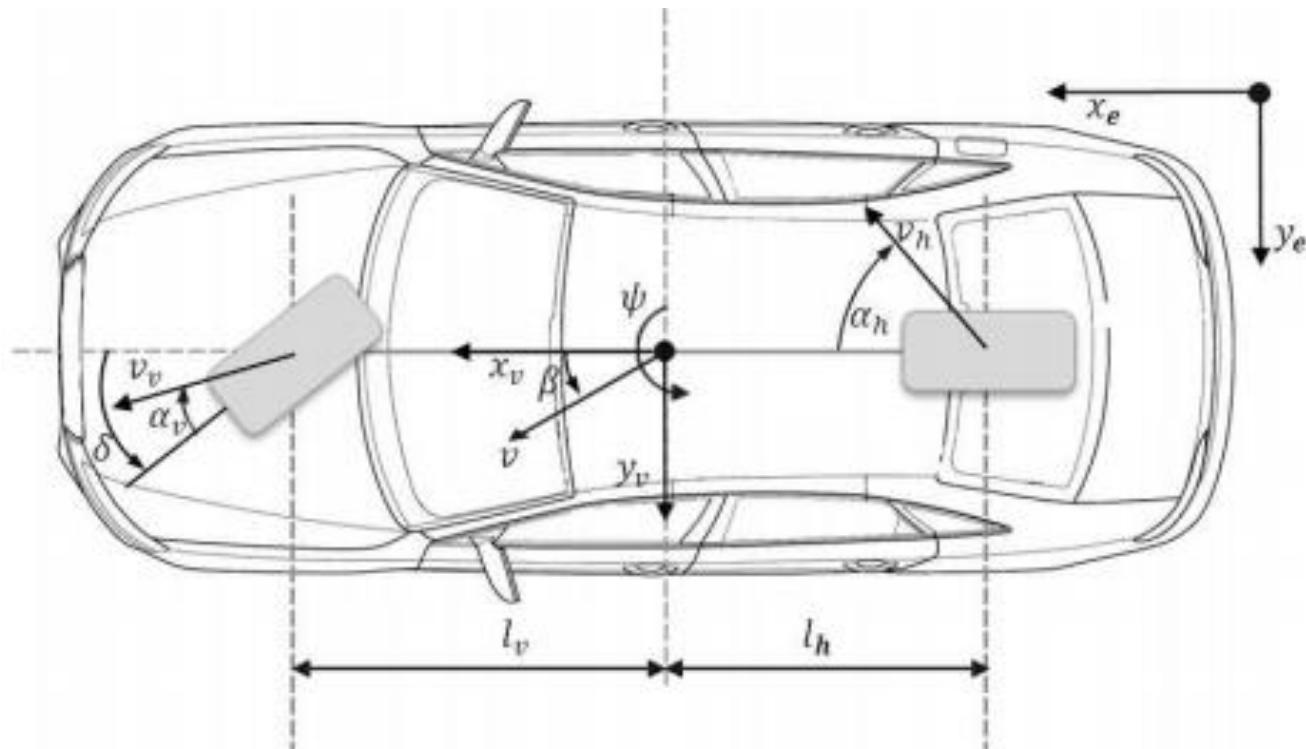
Folgende **Vereinfachungen** werden getroffen:

- Fahrzeugschwerpunkt befindet sich auf Fahrbahnhöhe (ebenes Modell)
- Räder einer Achse werden als masseloses Ersatzrad in der Fahrzeuglängsachse zusammengefasst
- Die Fahrzeuggeschwindigkeit wird als Konstant angenommen

Weiter nehmen wir an, dass die **folgenden Werte bekannt** sind:

- Fahrzeugmasse
- Trägheitsmoment um Schwerpunkt SP
- Schwerpunktlage und Radstand
- Geschwindigkeit des Schwerpunktes in der Ebene

# Reduktion zu Einspurmodell



# Kinematik des Fahrzeuges

- Geschwindigkeit des Fahrzeugschwerpunktes  $v_s$

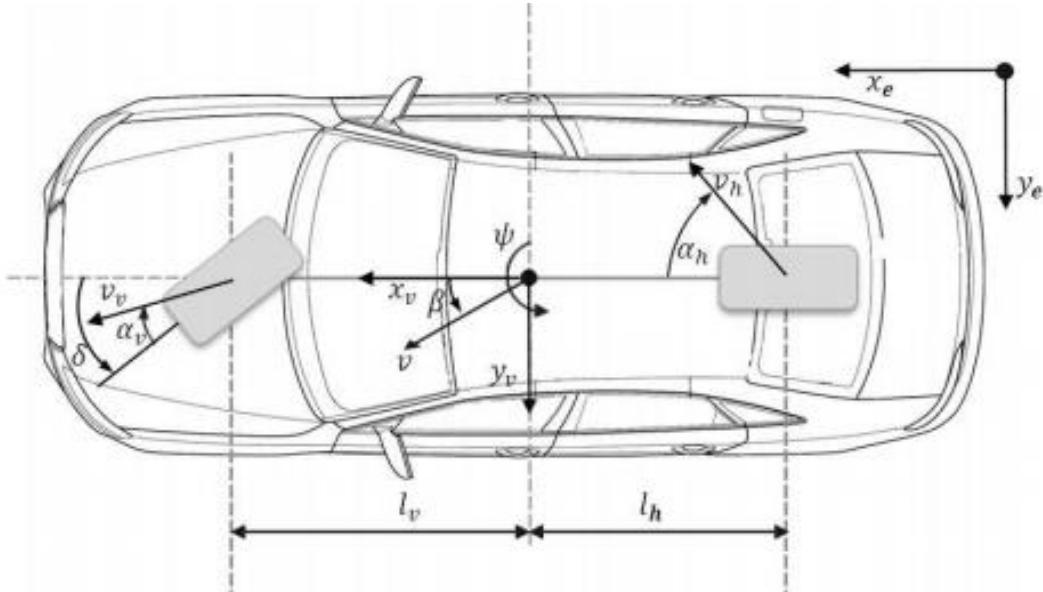
$$v_s = \begin{bmatrix} v \cdot \cos(\beta) \\ v \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } v = \text{const.}$$

- Beschleunigung des Fahrzeugschwerpunktes  $a_s$

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} + \omega \times v_s = \begin{bmatrix} -v \cdot \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \\ v \cdot \cos(\beta) \cdot \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \cdot \cos(\beta) \\ v \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -v \cdot \sin(\beta) \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) \\ v \cdot \cos(\beta) \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) \\ 0 \end{bmatrix}}$$

- Querbeschleunigung des Fahrzeuges

$$a_y = v \cdot \cos(\beta) \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi})$$



# Kinematik des Fahrzeuges

- Geschwindigkeit des Vorderrades  $v_v$

$$v_v = v_s + \omega \times r = \begin{bmatrix} v \cdot \cos(\beta) \\ v \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot \cos(\beta) \\ v \cdot \sin(\beta) + l_v \cdot \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Geschwindigkeit des Hinterrades  $v_h$

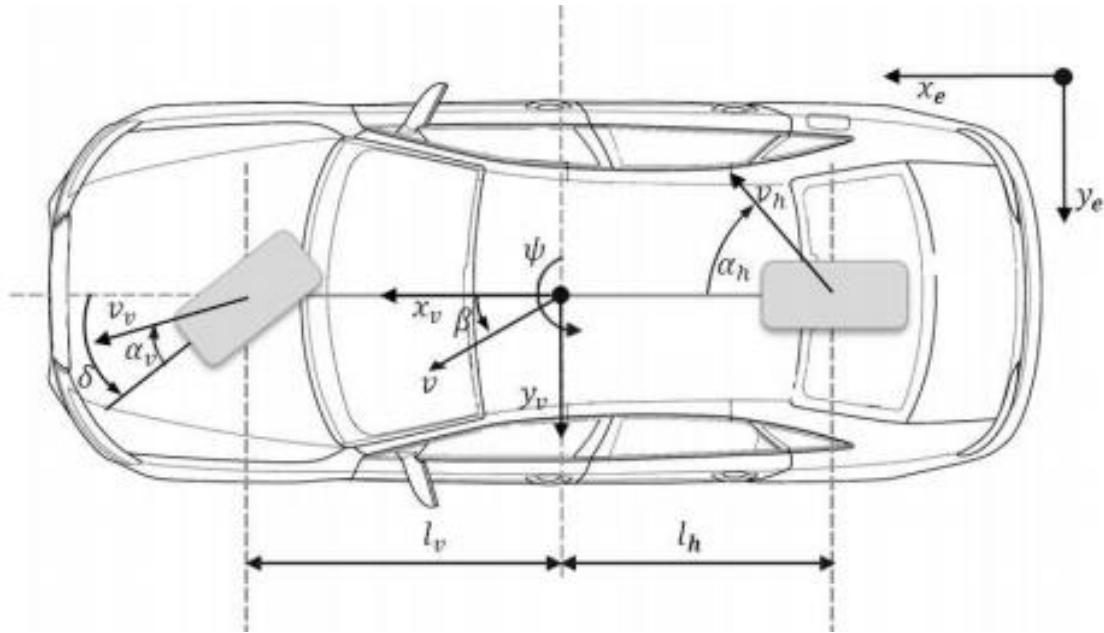
$$v_h = v_s + \omega \times r = \begin{bmatrix} v \cdot \cos(\beta) \\ v \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot \cos(\beta) \\ v \cdot \sin(\beta) - l_h \cdot \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Schräglauwinkel Vorderachse

$$\tan(\delta - \alpha_v) = \frac{v \cdot \sin(\beta) + l_v \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)}$$

- Schräglauwinkel Hinterachse

$$\tan(\alpha_h) = -\frac{v \cdot \sin(\beta) - l_h \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)}$$



# Kinematik des Fahrzeuges

- Für kleine Schräglaufwinkel ( $\alpha < 5^\circ$ ) kann eine Linearisierung vorgenommen werden

$$\alpha_v = \delta - \frac{v \cdot \sin(\beta) + l_v \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)}$$

$$\alpha_h = - \frac{v \cdot \sin(\beta) - l_h \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)}$$

# Kinetik des Fahrzeuges

- Kräftegleichgewicht in y-Richtung des fahrzeugfesten Koordinaten Systems

$$\begin{aligned}\sum F_y &= m \cdot a_y = \cos(\delta) \cdot F_{\eta,v} + F_{\eta,h} + \sin(\delta) \cdot F_{\xi,v} \\ \Rightarrow m \cdot v \cdot \cos(\beta) \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) &= \cos(\delta) \cdot F_{\eta,v} + F_{\eta,h} + \sin(\delta) \cdot F_{\xi,v}\end{aligned}$$

- Momentengleichgewicht um den Schwerpunkt des Fahrzeugs

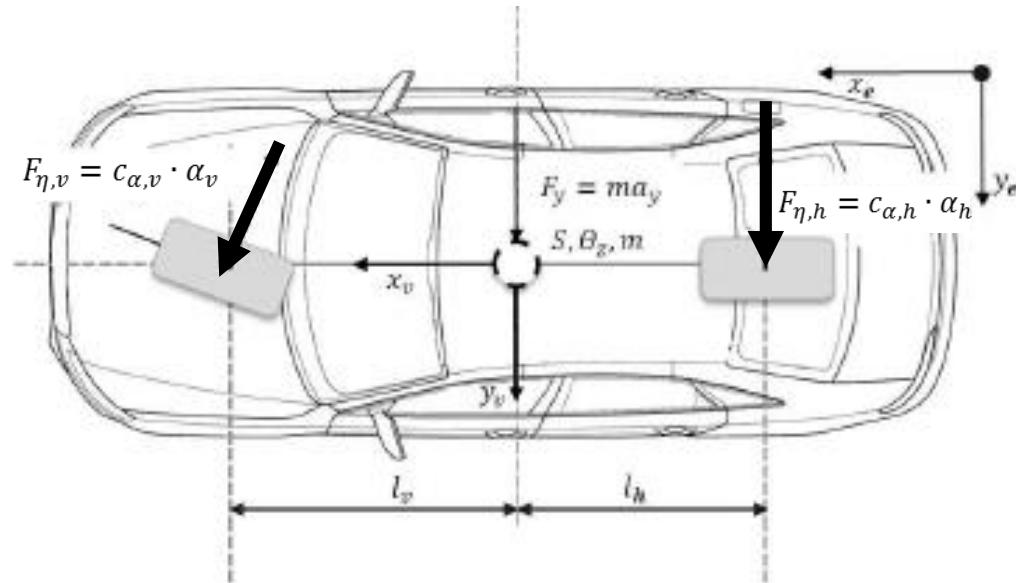
$$\sum M_z = \Theta_z \cdot \ddot{\psi} = \cos(\delta) \cdot F_{\eta,v} \cdot l_v - F_{\eta,h} \cdot l_h + \sin(\delta) \cdot F_{\xi,v} \cdot l_v$$

- Zur Beschreibung der Reifenkontaktkräfte wird das lineare Reifenmodell verwendet mit:

$$F_{\eta,v} = c_{\alpha,v} \cdot \alpha_v$$

$$F_{\eta,h} = c_{\alpha,h} \cdot \alpha_h$$

$$F_{\xi,v} = c_{s,v} \cdot s_v$$



# Bewegungsgleichungen des Fahrzeuges

- Mit Hilfe der hergeleiteten Zusammenhänge lassen sich die nichtlineare Bewegungsgleichungen wie folgt formulieren

$$m \cdot v \cdot \cos(\beta) \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi})$$

$$= \cos(\delta) \cdot c_{\alpha,v} \cdot \left( \delta - \frac{v \cdot \sin(\beta) + l_v \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)} \right) + c_{\alpha,h} \cdot \left( -\frac{v \cdot \sin(\beta) - l_h \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)} \right) + \sin(\delta) \cdot c_{s,v} \cdot s_v$$

$$J_z \cdot \ddot{\psi} = \cos(\delta) \cdot c_{\alpha,v} \cdot \left( \delta - \frac{v \cdot \sin(\beta) + l_v \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)} \right) \cdot l_v - c_{\alpha,h} \cdot \left( -\frac{v \cdot \sin(\beta) - l_h \cdot \dot{\psi}}{v \cdot \cos(\beta)} \right) \cdot l_h + \sin(\delta) \cdot c_{s,v} \cdot s_v \cdot l_v$$

- Für kleine  $\delta$  und  $\beta$  ergeben sich die lineare Bewegungsgleichungen

$$m \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) = c_{\alpha,v} \cdot \left( \delta - \beta - \frac{l_v \cdot \dot{\psi}}{v} \right) + c_{\alpha,h} \cdot \left( -\beta + \frac{l_h \cdot \dot{\psi}}{v} \right)$$

$$J_z \cdot \ddot{\psi} = c_{\alpha,v} \cdot \left( \delta - \beta - \frac{l_v \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \cdot l_v - c_{\alpha,h} \cdot \left( -\beta + \frac{l_h \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \cdot l_h$$

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

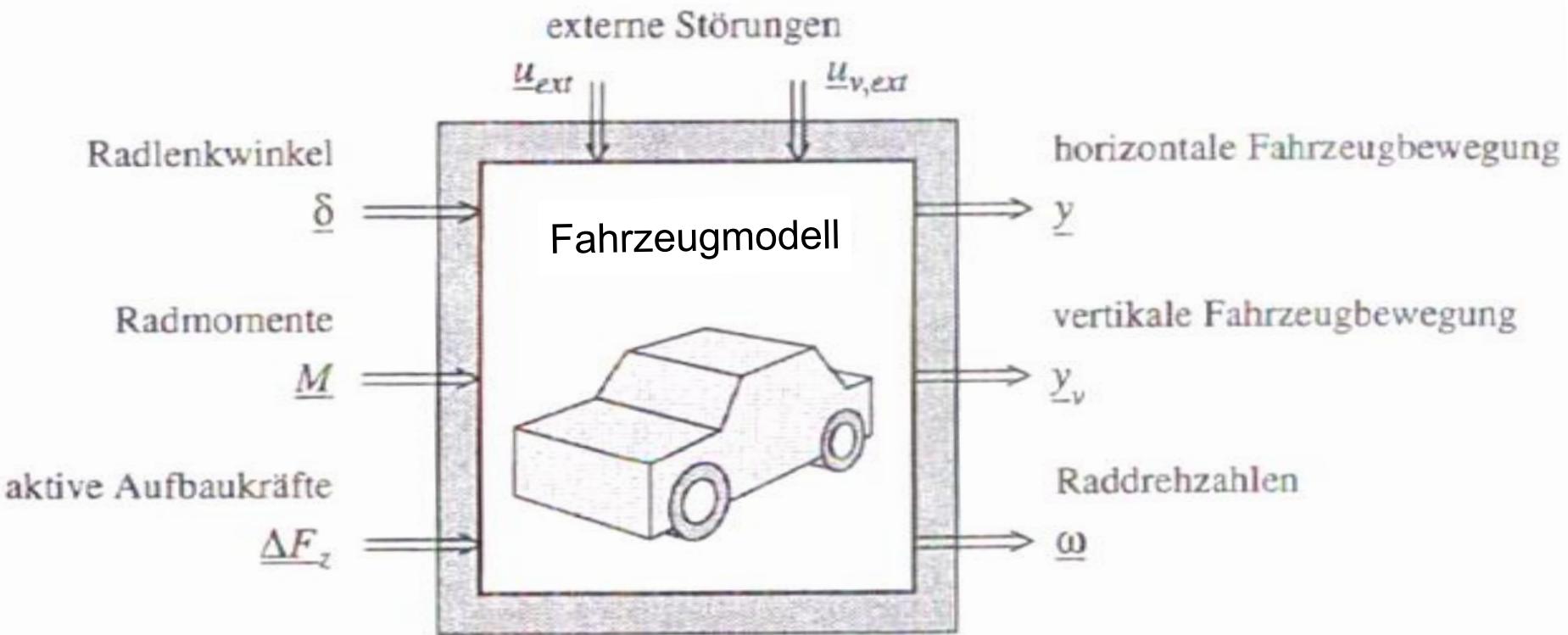


## Fahrzeugregelung: Übung (Zweispurmodell)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

# Wechselwirkung Fahrzeug - Umwelt



# Annahmen und Vereinfachungen

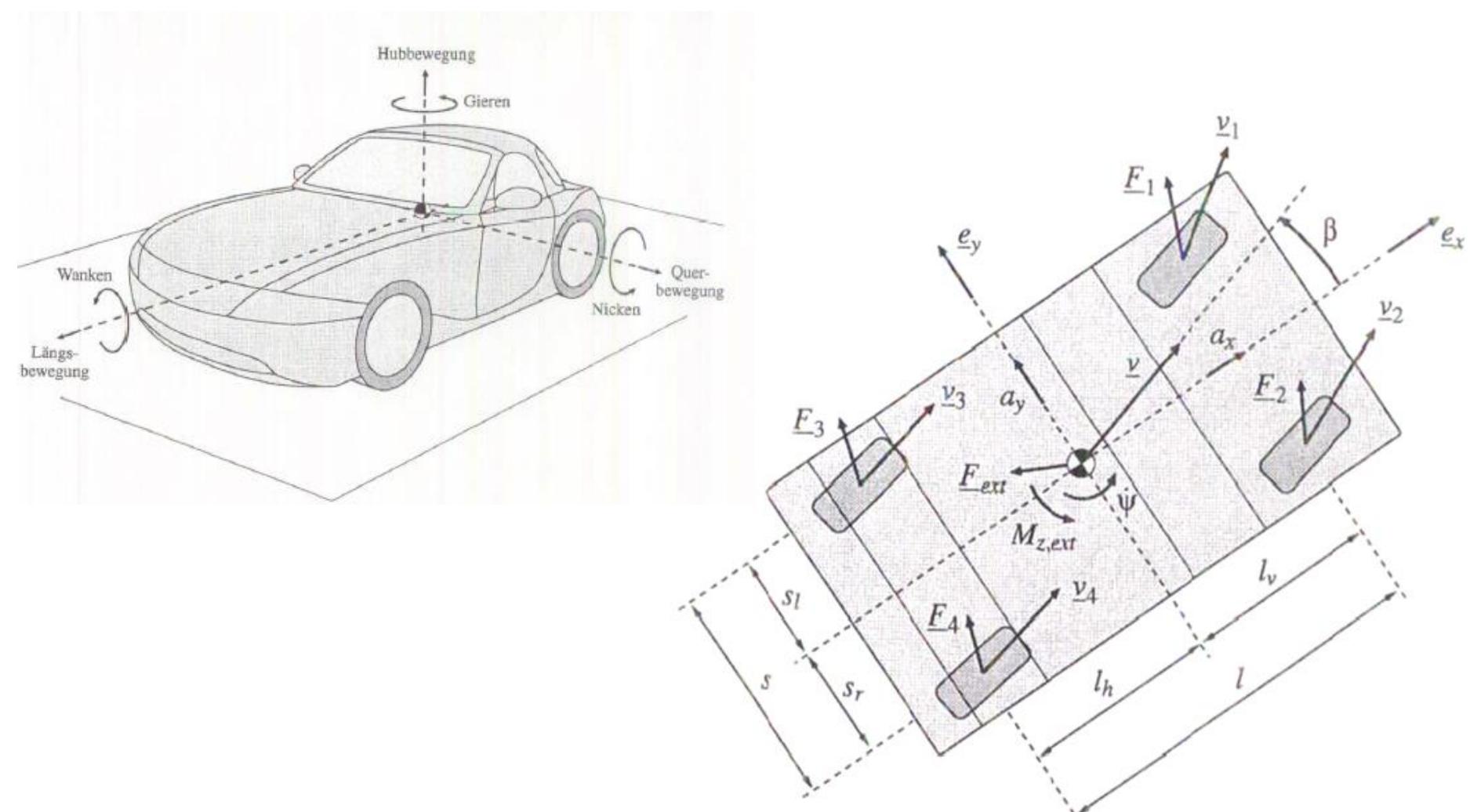
## Annahmen

- Aerodynamik, Fahrbahnneigungen und Änderungen der Reibverhältnisse zwischen Reifen und Fahrbahn werden als externe Störungen und Parameterschwankungen dargestellt
- Fahrzeug besitzt Einzelradaktorik (Lenken, Antriebsmoment, Aktive Aufbaukräfte)
- Vernachlässigung von Kinematik und Elastokinematik der Radaufhängungen
- Lineares Verhalten der Aufbaufedern und -dämpfer
- Isotrope Reifencharakteristik

## Vereinfachungen

- Vernachlässigbar kleine Abstützwinkel der Radaufhängung
- Vernachlässigung von Reifensturz

# Ebene Fahrzeugbewegung



# Ebene Fahrzeugbewegung

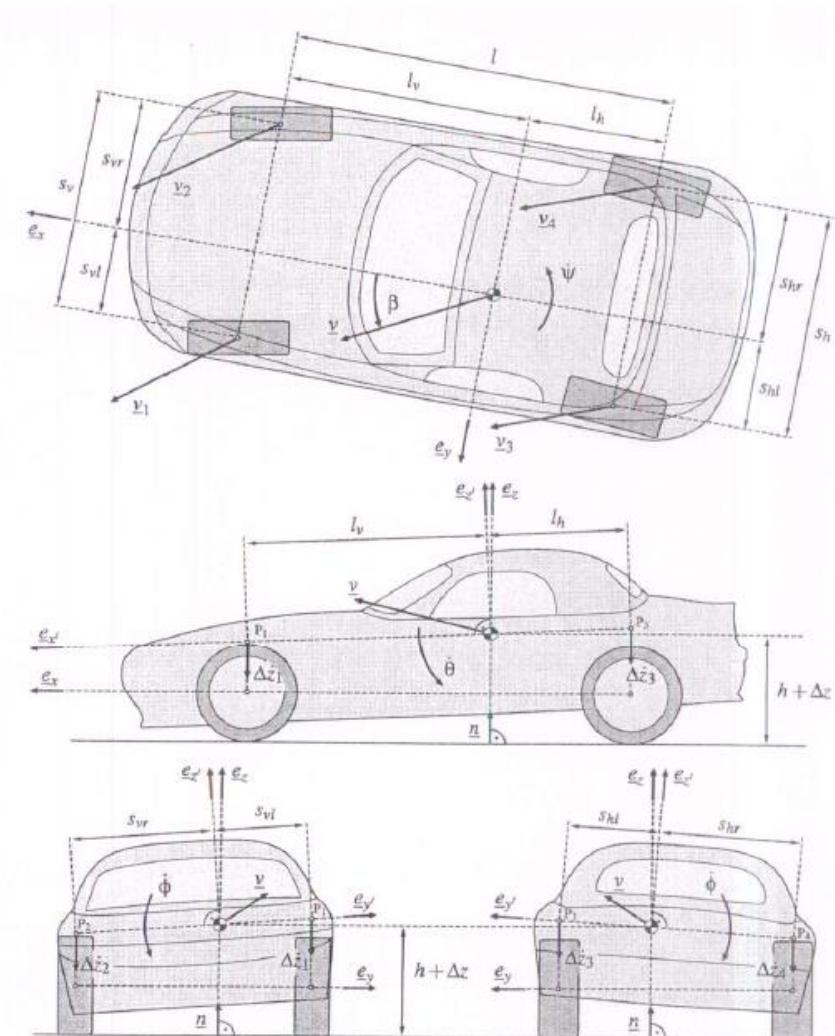
Fahrzeugaufbau besitzt

- drei miteinander verkoppelte translatorische Freiheitsgrade
- drei miteinander verkoppelte rotatorische Freiheitsgrade
- Kopplung zwischen der horizontalen und vertikalen Bewegung ist schwach

**→ Vernachlässigung**

**Koordinatensysteme:**

- Fahrwerkfestes KOS ( $\underline{e}_i$ )
- KOS ( $\underline{e}_i$ ) rotiert mit  $\dot{\psi}$  um Normalenrichtung der  $\underline{n}$  Fahrbahnebene
- Aufbaufestes KOS ( $\underline{e}_{i'}$ )
- Alle Radmittelpunkte befinden sich in einer Ebene parallel zur Fahrbahn, und damit auch das Fahrwerk



# Dynamik des Fahrzeugaufbaus

## Horizontaldynamik

Es gilt:  $\dot{\underline{e}}_x = \dot{\psi} \underline{e}_y$       (1.1)

$$\dot{\underline{e}}_y = -\dot{\psi} \underline{e}_x$$

~~Es folgt mit (1.1):~~

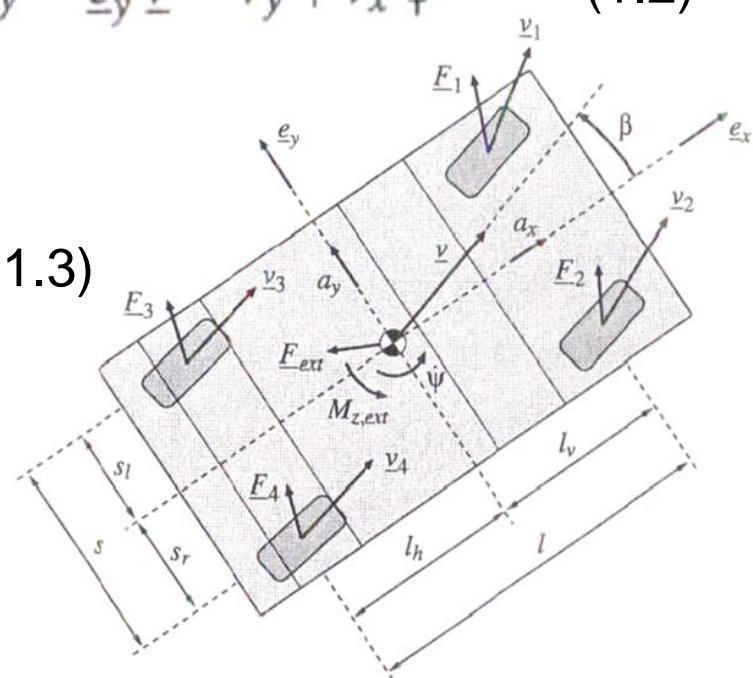
$\underline{v} = v_x \underline{e}_x + v_y \underline{e}_y, \quad a_x = \underline{e}_x^\top \dot{\underline{v}} = \dot{v}_x - v_y \dot{\psi}, \quad a_y = \underline{e}_y^\top \dot{\underline{v}} = \dot{v}_y + v_x \dot{\psi}$       (1.2)

Die Ausrichtung des Fahrzeugs wird durch den Schwimmwinkel berechnet:

$$\beta = \arctan \left( \frac{v_y}{v_x} \right), \quad v = \|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (1.3)$$

Die Komponenten der Fahrzeuggeschwindigkeit ergeben dann im Fahrzeug-KOS:

$$v_x = v \cos(\beta), \quad v_y = v \sin(\beta) \quad (1.4)$$



# Dynamik des Fahrzeugaufbaus

## Horizontaldynamik

Die Geschwindigkeit der Radmittelpunkte lautet:

$$\underline{v}_i = v_{xi} \underline{e}_x + v_{yi} \underline{e}_y, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.5)$$

Für die Radmittelpunkte mit den Fahrzeugabmessungen und Gl. (1.1) folgt :

$$\underline{v}_1 = \underline{v} + \frac{d}{dt} (l_v \underline{e}_x + s_l \underline{e}_y) = (v_x - \dot{\psi} s_l) \underline{e}_x + (v_y + \dot{\psi} l_v) \underline{e}_y, \quad (1.6)$$

$$\underline{v}_2 = \underline{v} + \frac{d}{dt} (l_v \underline{e}_x - s_r \underline{e}_y) = (v_x + \dot{\psi} s_r) \underline{e}_x + (v_y + \dot{\psi} l_v) \underline{e}_y, \quad (1.7)$$

$$\underline{v}_3 = \underline{v} + \frac{d}{dt} (-l_h \underline{e}_x + s_l \underline{e}_y) = (v_x - \dot{\psi} s_l) \underline{e}_x + (v_y - \dot{\psi} l_h) \underline{e}_y, \quad (1.8)$$

$$\underline{v}_4 = \underline{v} + \frac{d}{dt} (-l_h \underline{e}_x - s_r \underline{e}_y) = (v_x + \dot{\psi} s_r) \underline{e}_x + (v_y - \dot{\psi} l_h) \underline{e}_y. \quad (1.9)$$

# Dynamik des Fahrzeugaufbaus

## Horizontaldynamik

Als eingeprägte Kräfte wirken an der Fahrzeugmasse die Radkräfte:

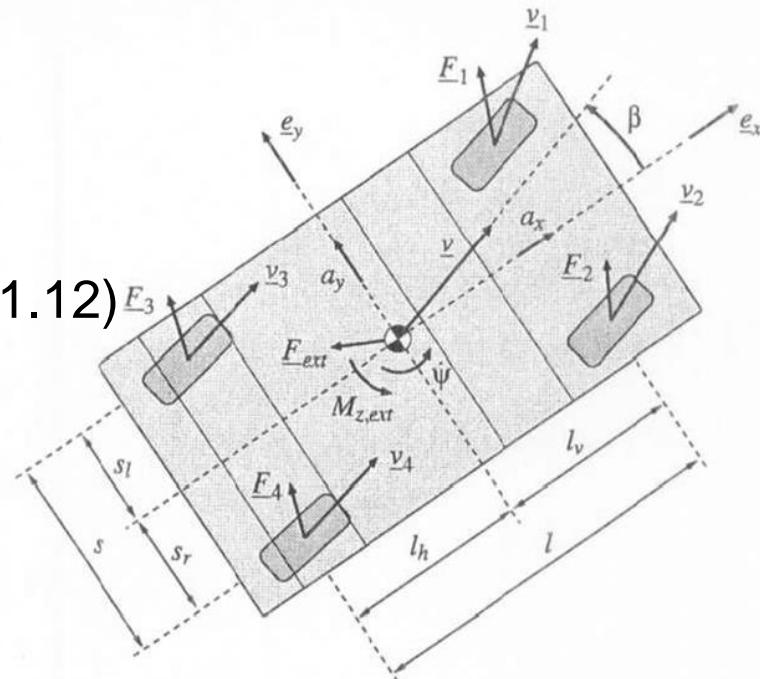
$$\underline{F}_i = F_{xi} \underline{e}_x + F_{yi} \underline{e}_y, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.10)$$

Die äußeren Einflüsse auf das Fahrzeug werden durch

$$\underline{F}_{ext} = F_{x,ext} \underline{e}_x + F_{y,ext} \underline{e}_y \quad (1.11)$$

vorgegeben. Aus dem SPS ergibt sich:

$$m \dot{\underline{v}} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + \underline{F}_{ext} \quad (1.12)$$



# Horizontaldynamik

Mit (1.2) und (1.12) ergeben sich die skalaren Gleichungen für die translatorische Bewegung:

$$\dot{v}_x = v_y \dot{\psi} + \frac{1}{m} (F_x + F_{x,ext}) , \quad (1.13)$$

$$\dot{v}_y = -v_x \dot{\psi} + \frac{1}{m} (F_y + F_{y,ext}) \quad (1.14)$$

mit den resultierenden Kräften aus den Rädern:

$$F_x = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4} , \quad F_y = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} \quad (1.15)$$

Die Momentenbilanz um die Hochachse führt zu

$$J_z \ddot{\psi} = M_z + M_{z,ext} \quad (1.16)$$

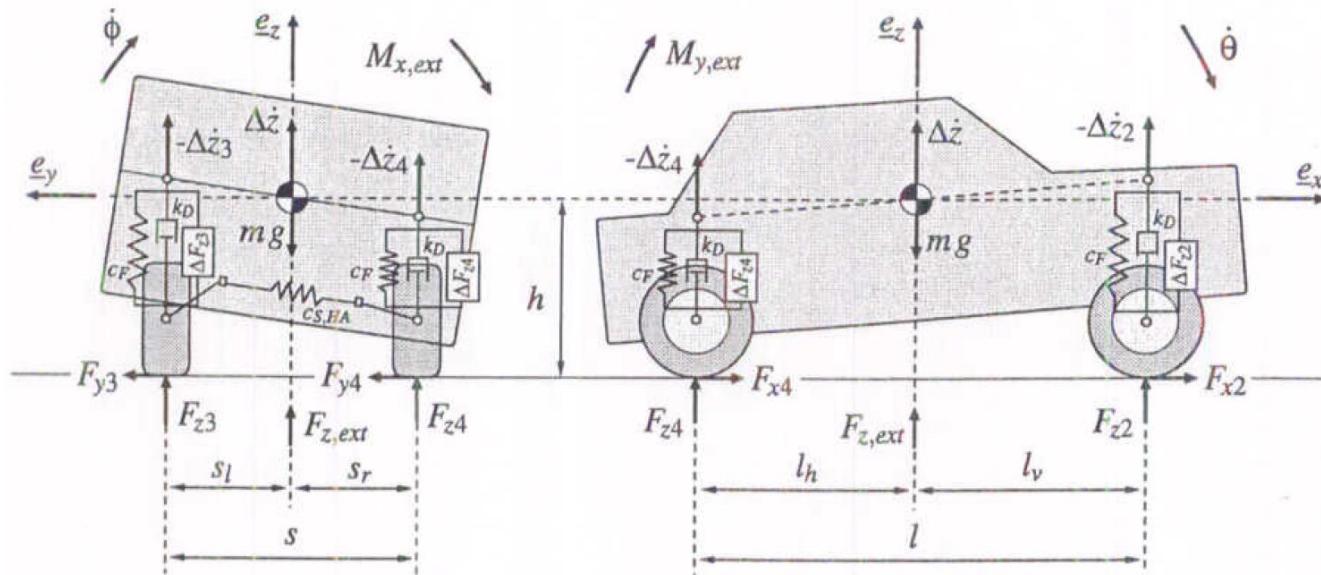
mit

$$M_z = -s_l F_{x1} + s_r F_{x2} - s_l F_{x3} + s_r F_{x4} + l_v F_{y1} + l_v F_{y2} - l_h F_{y3} - l_h F_{y4} \quad (1.17)$$

## Vertikaldynamik

Die Gleichungen (1.13), (1.14) und (1.16) beschreiben nun die horizontale Fahrzeughodynamik in der Ebene.

## Vertikaldynamik



## Vertikaldynamik

- Die Aufbaumasse ist über gefederte Radaufhängung mit den Rädern verbunden.
- Reifenkräfte sowie externe Kräfte/Momente verursachen Reaktionskräfte am Fahrzeugaufbau, welche vertikale Bewegungen (Wanken, Nicken, Hubbewegung) verursachen.
- Die Aufbaufedern und -dämpfer sind linear in ihrem Verhalten sowie durch das Fahrzeuggewicht bereits vorgespannt und an den Achsen befinden sich Stabilisatoren (Federsteifigkeiten).
- In der stat. Ruhelage sind alle Federwege sowie die Wank- und Nickwinkel null. Es stellen sich die Federvorspannkräfte und die Höhe  $h$  des Schwerpunktes ein.
- Da die Wank- und Nickwinkel meist  $<10^\circ$  sind, werden Kleinwinkel-näherungen genutzt, um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen.

Durch eine Kleinwinkelnäherung gilt für die Radhubdifferenz an jedem Rad die Beziehung

$$-\Delta \dot{z}_1 = \Delta \dot{z} + s_l \dot{\phi} - l_v \dot{\theta}, \quad -\Delta z_1 = \Delta z + s_l \phi - l_v \theta \quad (1.26)$$

$$-\Delta \dot{z}_2 = \Delta \dot{z} - s_r \dot{\phi} - l_v \dot{\theta}, \quad -\Delta z_2 = \Delta z - s_r \phi - l_v \theta \quad (1.27)$$

$$-\Delta \dot{z}_3 = \Delta \dot{z} + s_l \dot{\phi} + l_h \dot{\theta}, \quad -\Delta z_3 = \Delta z + s_l \phi + l_h \theta \quad (1.28)$$

$$-\Delta \dot{z}_4 = \Delta \dot{z} - s_r \dot{\phi} + l_h \dot{\theta}, \quad -\Delta z_4 = \Delta z - s_r \phi + l_h \theta \quad (1.29)$$

# Vertikaldynamik

Mit Berücksichtigung der externen Kräfte  $F_{z,ext}$ ,  $M_{x,ext}$ ,  $M_{y,ext}$  ergeben sich mit dem Wankträgheitsmoment  $J_x$  und dem Nickträgheitsmoment  $J_y$  des Aufbaus die BDGL der vertikalen Aufbaubewegungen zu:

$$m\Delta\ddot{z} = -mg + \sum_{i=1}^4 (c_F \Delta z_i + F_{z,F0,i}) + \sum_{i=1}^4 k_D \Delta \dot{z}_i + \sum_{i=1}^4 \Delta F_{zi} + F_{z,ext}, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\phi} &= s_l (c_F (\Delta z_1 + \Delta z_3) + F_{z,F0,1} + F_{z,F0,3}) - s_r (c_F (\Delta z_2 + \Delta z_4) + F_{z,F0,2} + F_{z,F0,4}) \\ &\quad + s_l k_D (\Delta \dot{z}_1 + \Delta \dot{z}_3) - s_r k_D (\Delta \dot{z}_2 + \Delta \dot{z}_4) - (c_{S,VA} + c_{S,HA}) \phi \\ &\quad + s_l (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z3}) - s_r (\Delta F_{z2} + \Delta F_{z4}) + h (F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4}) + M_{x,ext}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} J_y \ddot{\theta} &= l_h (c_F (\Delta z_3 + \Delta z_4) + F_{z,F0,3} + F_{z,F0,4}) - l_v (c_F (\Delta z_1 + \Delta z_2) + F_{z,F0,1} + F_{z,F0,2}) \\ &\quad + l_h k_D (\Delta \dot{z}_3 + \Delta \dot{z}_4) - l_v k_D (\Delta \dot{z}_1 + \Delta \dot{z}_2) \\ &\quad + l_h (\Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) - l_v (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2}) - h (F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4}) + M_{y,ext}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

# Vertikaldynamik

Da die Vorspannkräfte der Aufbaufedern die Summe der Gewichtskräfte kompensieren, entsteht durch sie kein Wank-/Nickmoment und mit (1.26) - (1.29) sowie (1.30) – (1.32) folgt:

$$m \ddot{\Delta z} = -4 c_F \Delta z - 4 k_D \dot{\Delta z} - 2 c_F (s_l - s_r) \phi - 2 k_D (s_l - s_r) \dot{\phi} \\ - 2 c_F (l_h - l_v) \theta - 2 k_D (l_h - l_v) \dot{\theta} + (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2} + \Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) + F_{z,ext}, \quad (1.33)$$

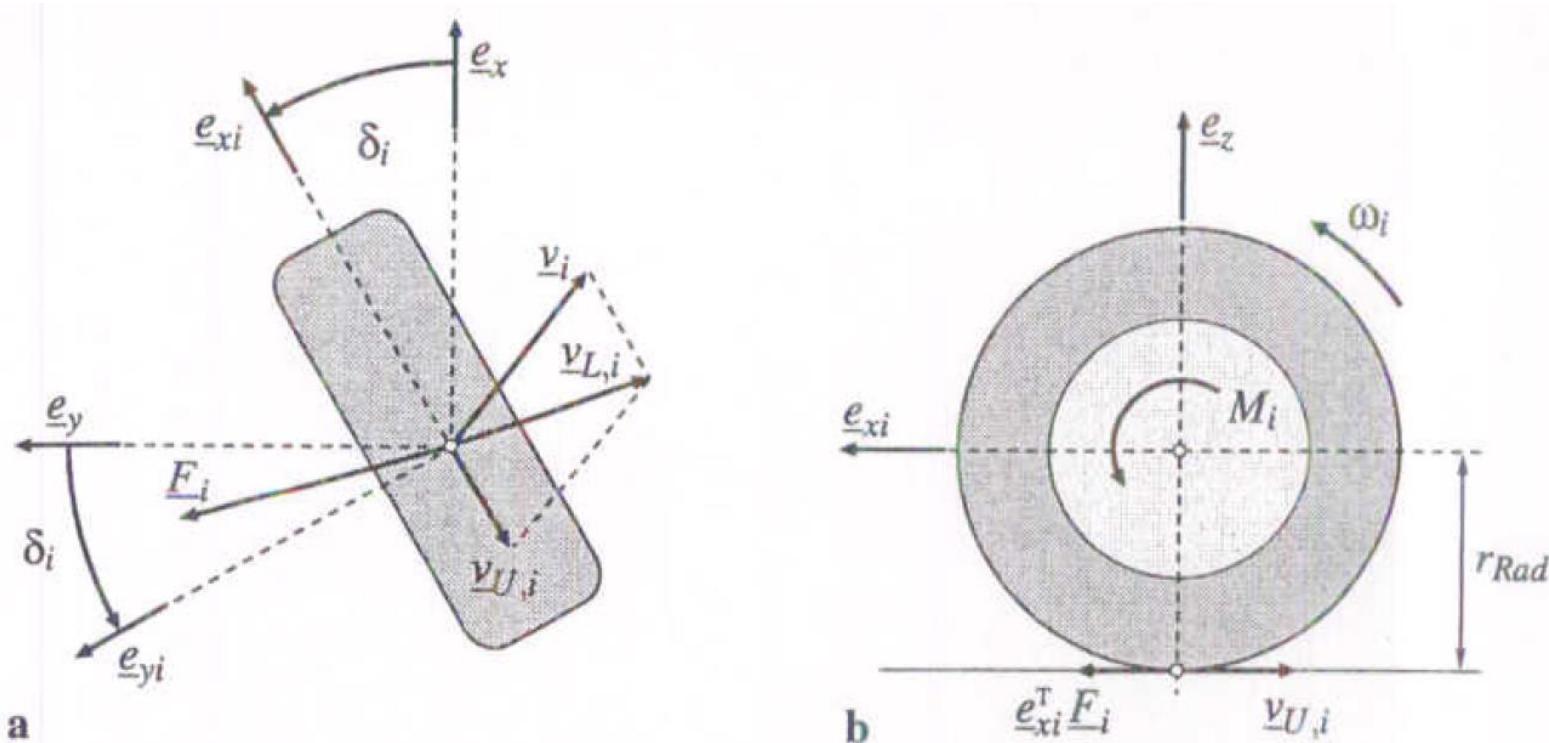
$$J_x \ddot{\phi} = -2 c_F (s_l - s_r) \Delta z - 2 k_D (s_l - s_r) \dot{\Delta z} - (2 c_F (s_l^2 + s_r^2) + c_{S,VA} + c_{S,HA}) \phi \\ - 2 k_D (s_l^2 + s_r^2) \dot{\phi} - c_F (s_l - s_r) (l_h - l_v) \theta - k_D (s_l - s_r) (l_h - l_v) \dot{\theta} \\ + s_l (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z3}) - s_r (\Delta F_{z2} + \Delta F_{z4}) + h F_y + M_{x,ext}, \quad (1.34)$$

$$J_y \ddot{\theta} = -2 c_F (l_h - l_v) \Delta z - 2 k_D (l_h - l_v) \dot{\Delta z} - c_F (s_l - s_r) (l_h - l_v) \phi \\ - k_D (s_l - s_r) (l_h - l_v) \dot{\phi} - 2 c_F (l_h^2 + l_v^2) \theta - 2 k_D (l_h^2 + l_v^2) \dot{\theta} \\ + l_h (\Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) - l_v (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2}) - h F_x + M_{y,ext}. \quad (1.35)$$

# Dynamik des Fahrzeugaufbaus

## Rad/Reifenverhalten

Da angenommen wird, dass jedes Rad individuell gelenkt werden kann, wird für jedes Rad auch ein radfestes KOS festgelegt.



# Dynamik des Fahrzeugaufbaus

## Rad/Reifenverhalten

Dieses wird um den Lenkwinkel  $\delta_i$  an jedem Rad gegenüber dem Fahrzeug-KOS gedreht:

$$\underline{e}_{xi} = \cos(\delta_i) \underline{e}_x + \sin(\delta_i) \underline{e}_y, \quad \underline{e}_{yi} = -\sin(\delta_i) \underline{e}_x + \cos(\delta_i) \underline{e}_y, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.36)$$

Die Geschwindigkeit am Reifengürtel (Radaufstandspunkt) ergibt sich nun zu:

$$\underline{v}_{L,i} = \underline{v}_i + \underline{v}_{U,i}, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.37)$$

wobei  $\underline{v}_i$  die translatorische Geschwindigkeit nach (1.6) – (1.9) ist und  $\underline{v}_{U,i}$  die Umfangsgeschwindigkeit des Rades:

$$\underline{v}_{U,i} = -\underline{e}_{xi} r_{Rad} \omega_i, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.38)$$

Entsprechend dem daraus resultierenden Schlupf entstehen die Radkräfte in Längs- und Querrichtung. Zusammen mit dem Radantriebs- und -bremsmoment stellt sich die Raddrehzahl wie folgt ein:

$$J_{Rad} \dot{\omega}_i = M_i - \underline{e}_{xi}^T \underline{F}_i r_{Rad}, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.39)$$

# Dynamik des Fahrzeugaufbaus

## Rad/Reifenverhalten

Abschließend entsteht mit (1.10) und (1.36) die BDGL des Rades zu:

$$J_{Rad} \dot{\omega}_i = M_i - r_{Rad} \cos(\delta_i) F_{xi} - r_{Rad} \sin(\delta_i) F_{yi}, \quad i = 1 \dots 4 \quad (1.40)$$

# Zusammenfassung

## Horizontaldynamik

$$\dot{v}_x = v_y \dot{\psi} + \frac{1}{m} (F_x + F_{x,ext}) ,$$

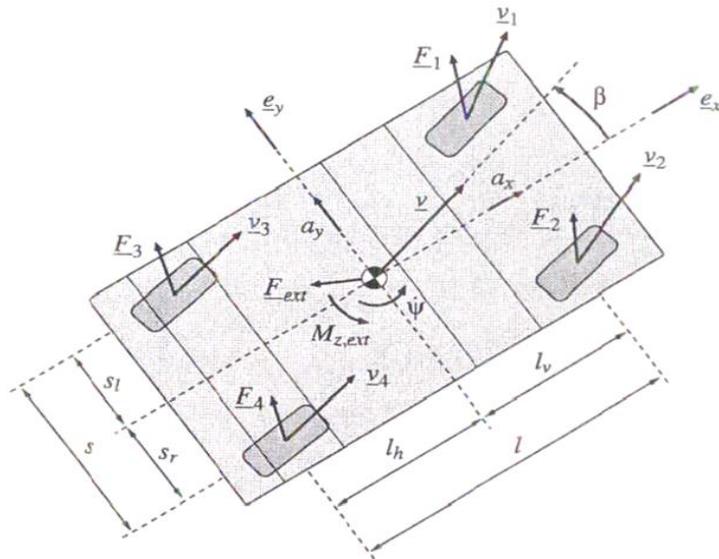
$$\dot{v}_y = -v_x \dot{\psi} + \frac{1}{m} (F_y + F_{y,ext})$$

$$J_z \ddot{\psi} = M_z + M_{z,ext}$$

## Vertikaldynamik

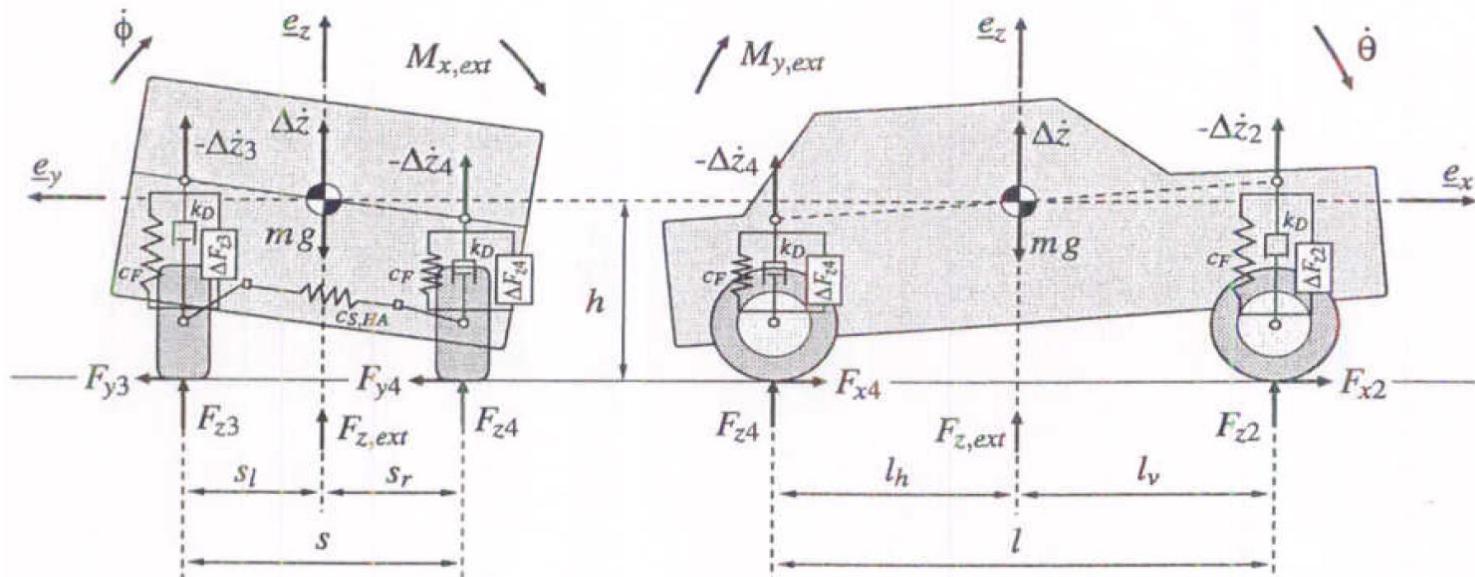
$$m \Delta \ddot{z} = -4 c_F \Delta z - 4 k_D \Delta \dot{z} - 2 c_F (s_l - s_r) \phi - 2 k_D (s_l - s_r) \dot{\phi} - 2 c_F (l_h - l_v) \theta - 2 k_D (l_h - l_v) \dot{\theta} + (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2} + \Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) + F_{z,ext} ,$$

$$J_x \ddot{\phi} = -2 c_F (s_l - s_r) \Delta z - 2 k_D (s_l - s_r) \Delta \dot{z} - (2 c_F (s_l^2 + s_r^2) + c_{S,VA} + c_{S,HA}) \phi - 2 k_D (s_l^2 + s_r^2) \dot{\phi} - c_F (s_l - s_r) (l_h - l_v) \theta - k_D (s_l - s_r) (l_h - l_v) \dot{\theta} + s_l (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z3}) - s_r (\Delta F_{z2} + \Delta F_{z4}) + h F_y + M_{x,ext} ,$$



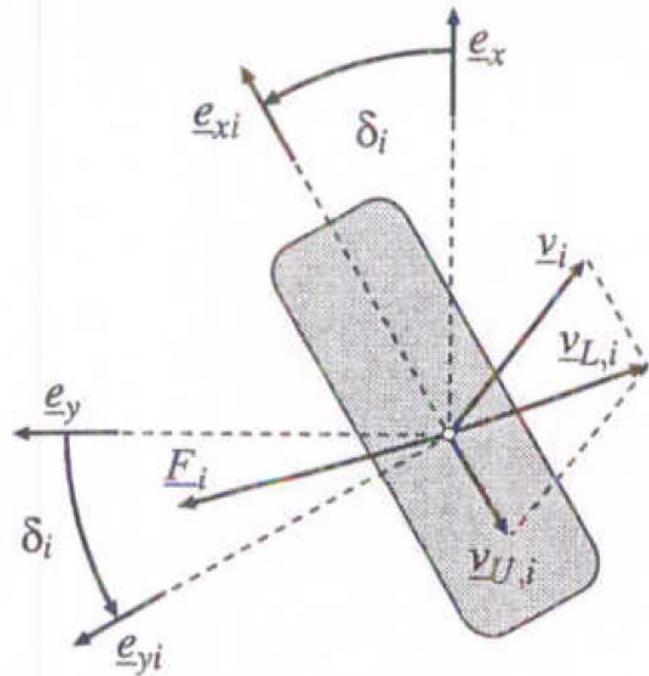
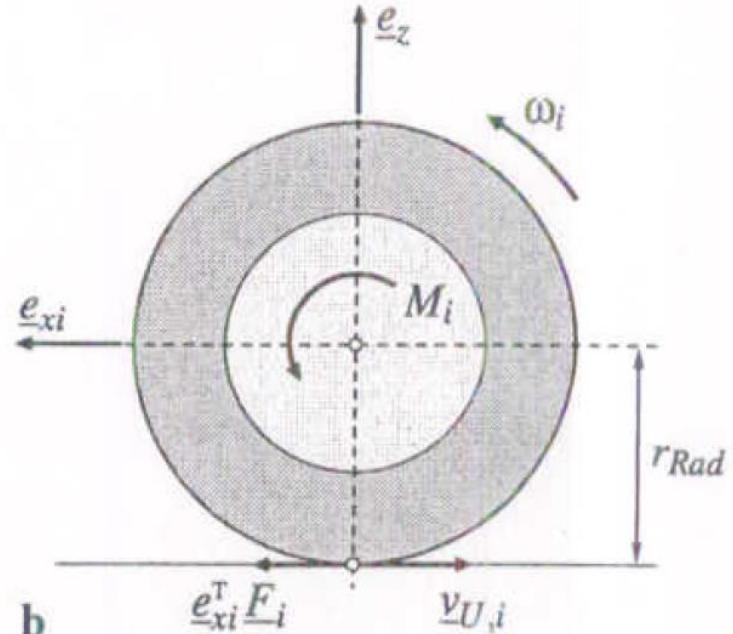
## Vertikaldynamik

$$\begin{aligned}
 J_y \ddot{\theta} = & -2c_F(l_h - l_v)\Delta z - 2k_D(l_h - l_v)\Delta \dot{z} - c_F(s_l - s_r)(l_h - l_v)\phi \\
 & - k_D(s_l - s_r)(l_h - l_v)\dot{\phi} - 2c_F(l_h^2 + l_v^2)\theta - 2k_D(l_h^2 + l_v^2)\dot{\theta} \\
 & + l_h(\Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) - l_v(\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2}) - hF_x + M_{y,ext}.
 \end{aligned}$$



## Dynamik des Rades

$$J_{Rad} \dot{\omega}_i = M_i - r_{Rad} \cos(\delta_i) F_{xi} - r_{Rad} \sin(\delta_i) F_{yi}, \quad i = 1 \dots 4$$

**a****b**

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

## Übungsaufgabe:

### Implementierung und Applikation des Einspurmodells

Ziel der Vorlesung Fahrzeugregelung ist es Ihnen einen Einblick in die Entwicklung von Fahr-dynamik-Regelsystemen zu geben, welche heute generell mit einer numerischen Simulation beginnt. Um die Fahrzeugdynamik regeln zu können, ist es notwendig, diese mit mathematischen Methoden so abzubilden, dass die numerische Simulation möglich ist. Hierfür haben Sie in der Vorlesung verschiedene Fahrzeugmodelle kennengelernt. In der heutigen Übung sollen Sie selbstständig ein lineares Fahrzeugmodell in Matlab/Simulink implementieren und analysieren.

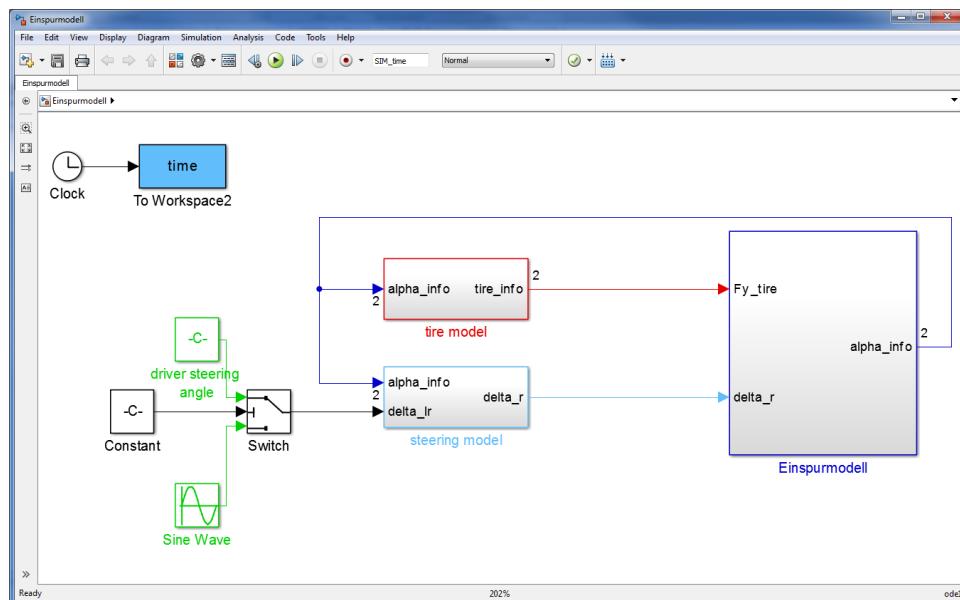


Abbildung 1: Simulationsmodell in Simulink

## A: Modellierung

**Aufgabe 1:** In der Übung zur Vorlesung Fahrzeugregelung haben Sie das lineare und nichtlineare Einspurmodell kennengelernt. Ihre erste Aufgabe besteht darin, die lineare BDGLen in eine Vorlage für ein Fahrzeugmodell in Matlab/Simulink zu implementieren, vgl. Abbildung 1. Verwenden Sie hierzu die Vorlage „Einspurmodell.mdl“ aus ISIS und implementieren Sie die BDGLen des Einspurmodells im Sub-System Einspurmodell im Block Bewegungsgleichungen.

BDGL-System des linearen Einspurmodells:

$$m \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) = F_{\eta,v} + F_{\eta,h}$$

$$J_z \cdot \ddot{\psi} = F_{\eta,v} \cdot l_v - F_{\eta,h} \cdot l_h$$

**Anmerkung:** Beachten Sie auch die Parameternamen in der Parameterdatei, wenn Sie Ihre Funktionsblöcke parametrieren. Benutzen Sie als Eingänge in die BDGL die Reifenseitenkräfte vorne und hinten.

**Aufgabe 2:** Die Reifenseitenkräfte können mittels der Schräglaufwinkel und der Reifenschräglaufstiefigkeit berechnet werden. Dies soll mit den nachstehenden Formeln im Block Schräglaufwinkel erfolgen:

$$\alpha_V = \delta_V - \tan^{-1} \left( \frac{v \sin \beta + l_v \dot{\psi}}{v \cos \beta} \right)$$

$$\alpha_H = -\tan^{-1} \left( \frac{v \sin \beta - l_h \dot{\psi}}{v \cos \beta} \right)$$

**Aufgabe 3:** Um das Fahrzeugmodell zu parametrieren laden Sie die Datei „template\_steuering.m“ aus ISIS und führen Sie dieses aus. Mittels des Templates können Sie zwischen verschiedenen Lenkwinkel für eine konstante Kreisfahrt wählen oder den Lenkwinkel als Sinusfunktion vorgeben. Führen Sie Ihre Simulation mit verschiedenen Lenkwinkeln und Geschwindigkeiten durch und stellen Sie Ihre Ergebnisse mittels des Matlabskriptes „Einspur\_plot.m“ dar. Analysieren Sie die Ergebnisse.

**Hinweis:** Die Ergebnisse der Simulation werden nach jedem Durchlauf mittels to workspace Blöcken im Base Workspace von Matlab abgelegt. Dadurch können die Ergebnisse direkt mittels plot-Befehlt dargestellt und für weitere Analysen verwendet werden.

**Aufgabe 4:** Um die Reifenabbildung in der Simulation zu verbessern sollen Sie im nächsten Schritt im Block tire model ein einfaches Reifenmodell entsprechend folgender Magic Formula implementieren:

$$F_{max} = \mu_h F_{zeta,i} \left( 1 + \frac{k_{Fzeta} (F_{zeta0} - F_{zeta,i})}{F_{zeta0}} \right)$$

$$F_{y,i} = F_{max,i} \sin(C_i \text{atan}(\frac{B_i \alpha_i}{\mu_h}))$$

Die entsprechende embedded Matlab function wurde hierfür mit den entsprechenden Ein-/Ausgängen sowie den Reifenparametern unter simple Pacejka tire model angelegt. Führen Sie abschließend eine Simulation mit dem nichtlinearen Reifenmodell durch und stellen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe des Matlabskriptes „Einspur\_plot.m“ dar. Analysieren Sie diese.

Wählen Sie das Reifenmodell im Parameterskript aus und legen Sie die Lenkwinkelvorgabe sowie die Fahrzeuggeschwindigkeit so fest, dass das Fahrzeug im nichtlinearen Querdynamikbereich fährt.

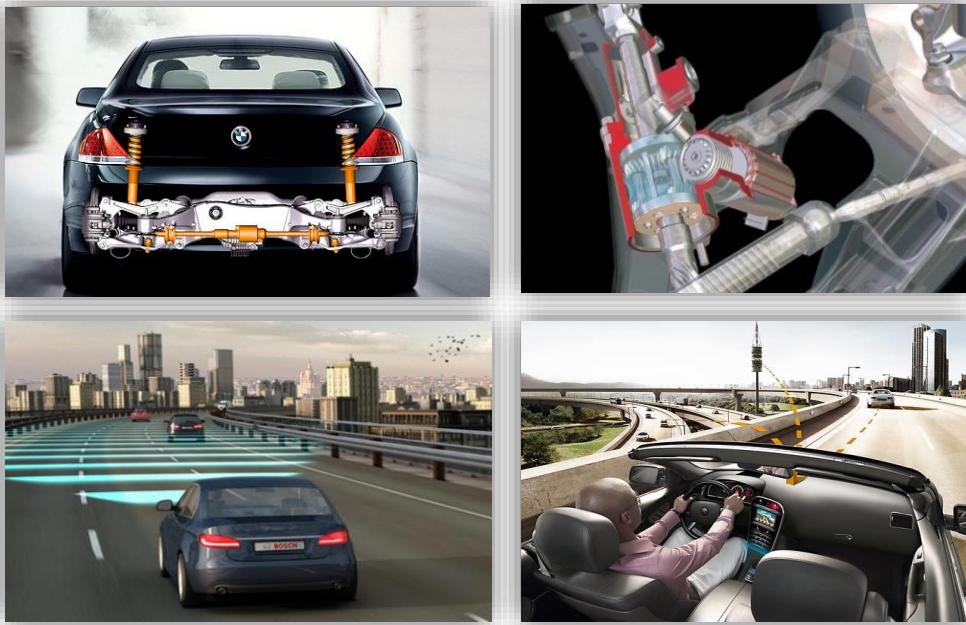
## B: Analyse des Eigenlenkverhaltens

Nachdem die Modellierung des Fahrzeugs abgeschlossen ist und die ersten Simulationsfahrten erfolgreich abgeschlossen wurden, soll nun die Fahrdynamik Ihres Simulationsfahrzeuges analysiert werden.

**Aufgabe 1:** Stellen Sie die Gierverstärkung über die Fahrzeuggeschwindigkeit dar.

**Anmerkung:** Simulieren Sie für verschiedene Geschwindigkeiten (1m/s..20m/s) eine konstante Kreisfahrt und nehmen Sie nach Abklingen der Gierdynamik einen Messwert für Ihre Kurve auf.

**Aufgabe 2:** Fügen Sie der Grafik aus Aufgabe B1 die Gierverstärkungen für verschiedene Schwerpunktlagen  $l_h$  hinzu und bewerten Sie die Fahrzeugdynamik hinsichtlich Eigenlenkverhalten.



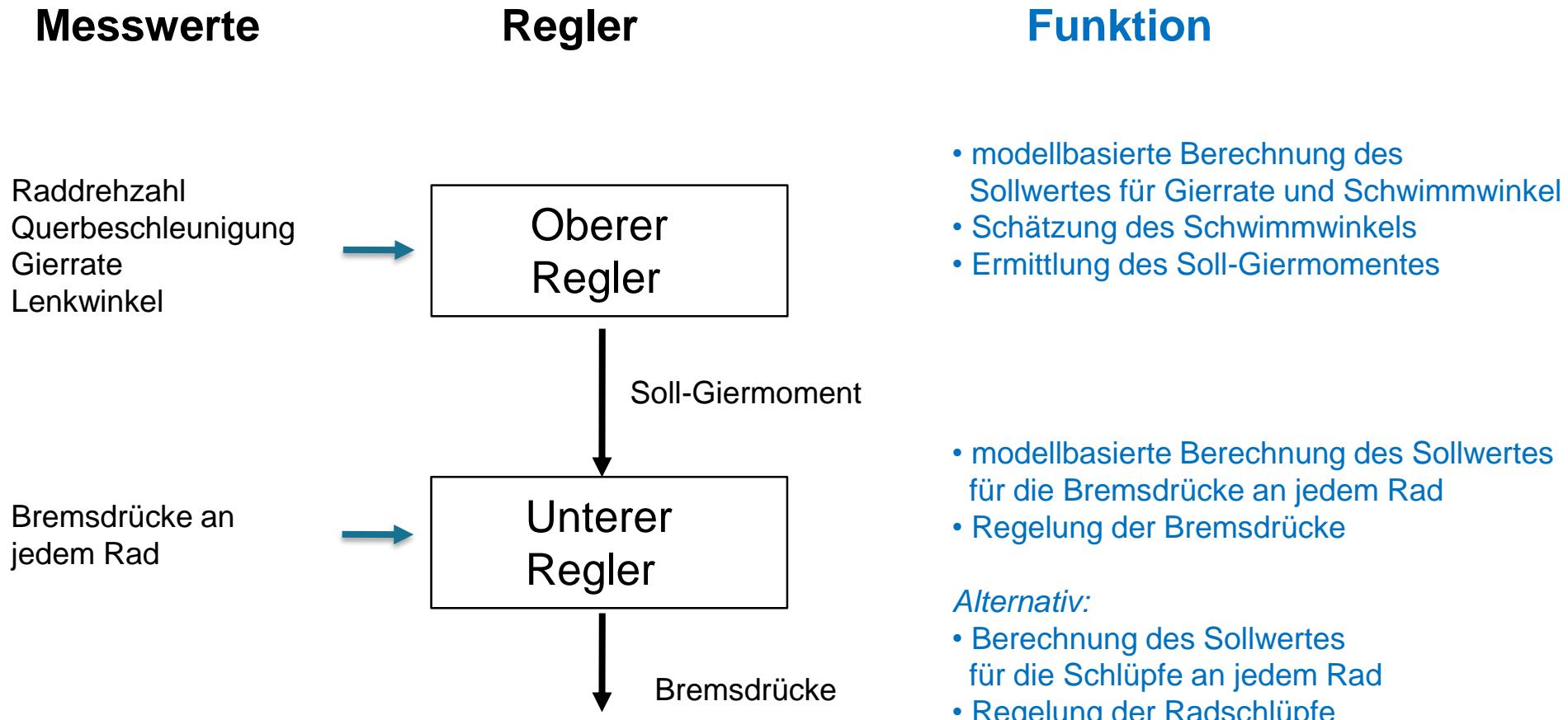
# Fahrzeugregelung (Übung): ESP – Fahrversuche und Simulation

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

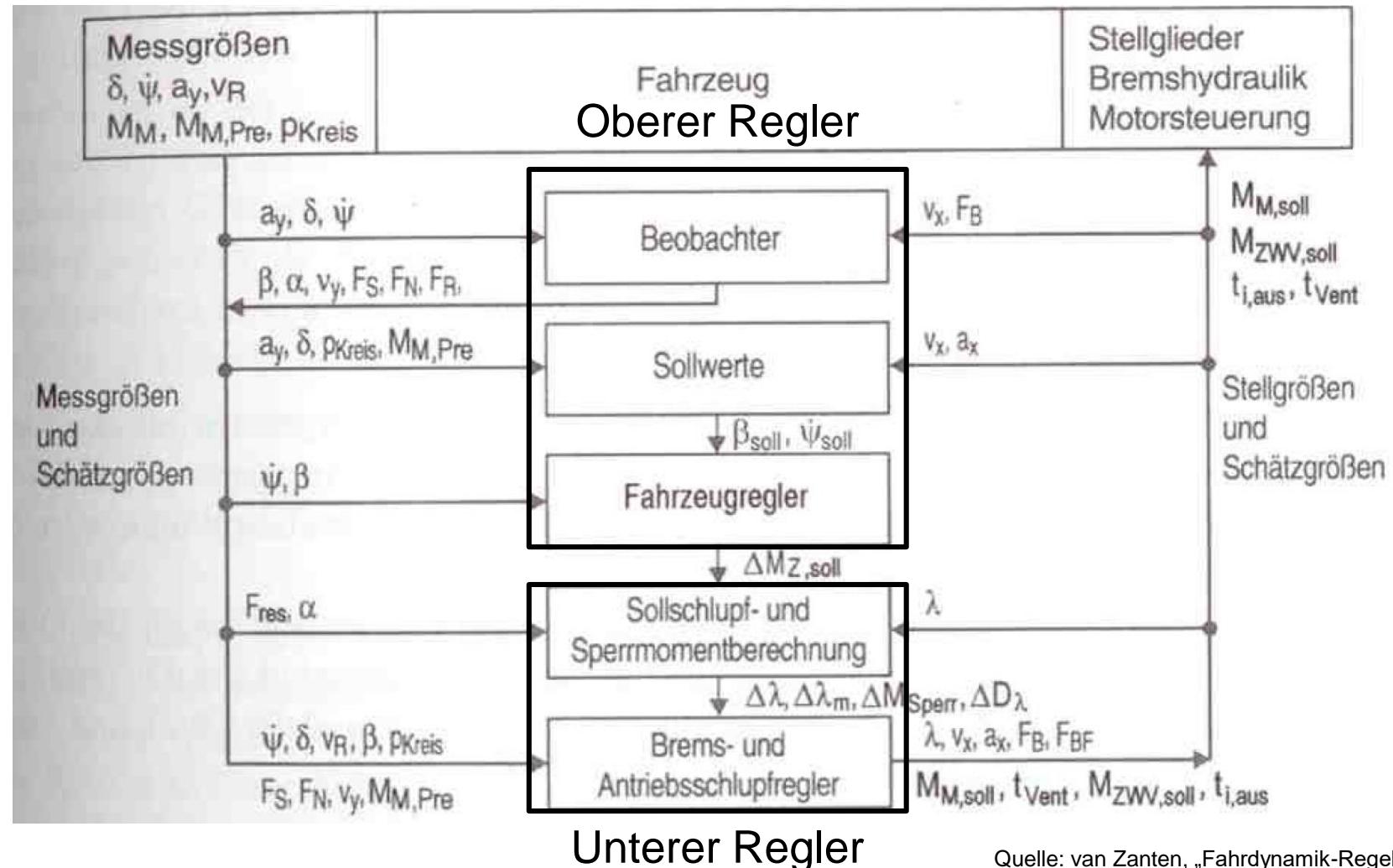
# Stabilitätsregelung – ESP

## Prinzipieller Regelalgorithmus



# Stabilitätsregelung – ESP

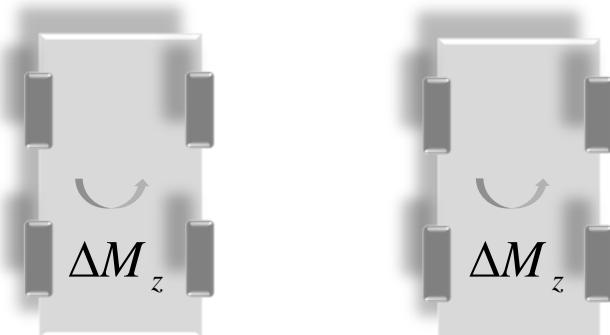
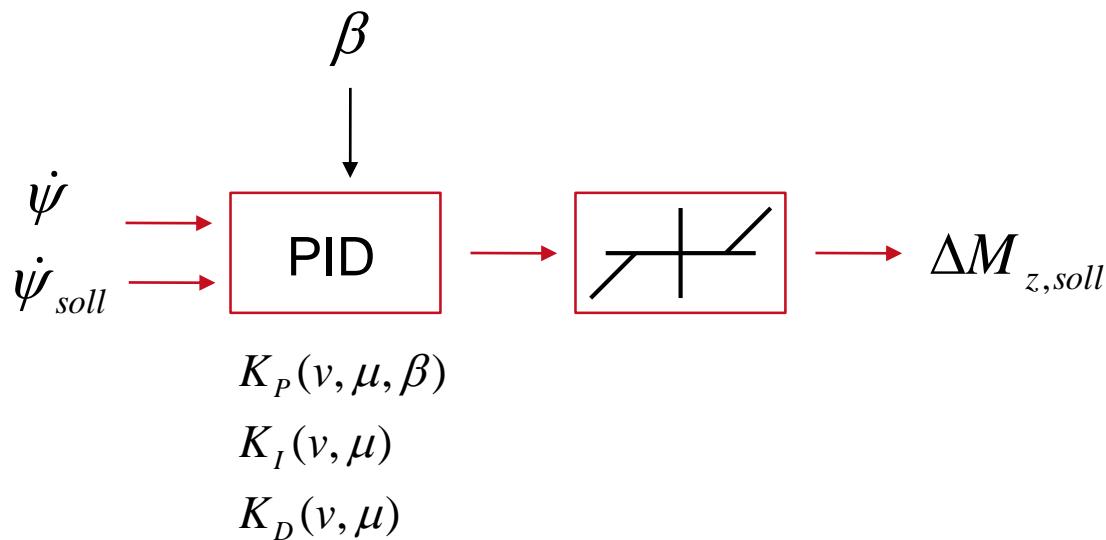
## Prinzipieller Regelalgorithmus



Quelle: van Zanten, „Fahrdynamik-Regelung“, Vieweg.

# Stabilitätsregelung – ESP

## Oberer Regler – ein möglicher Ansatz

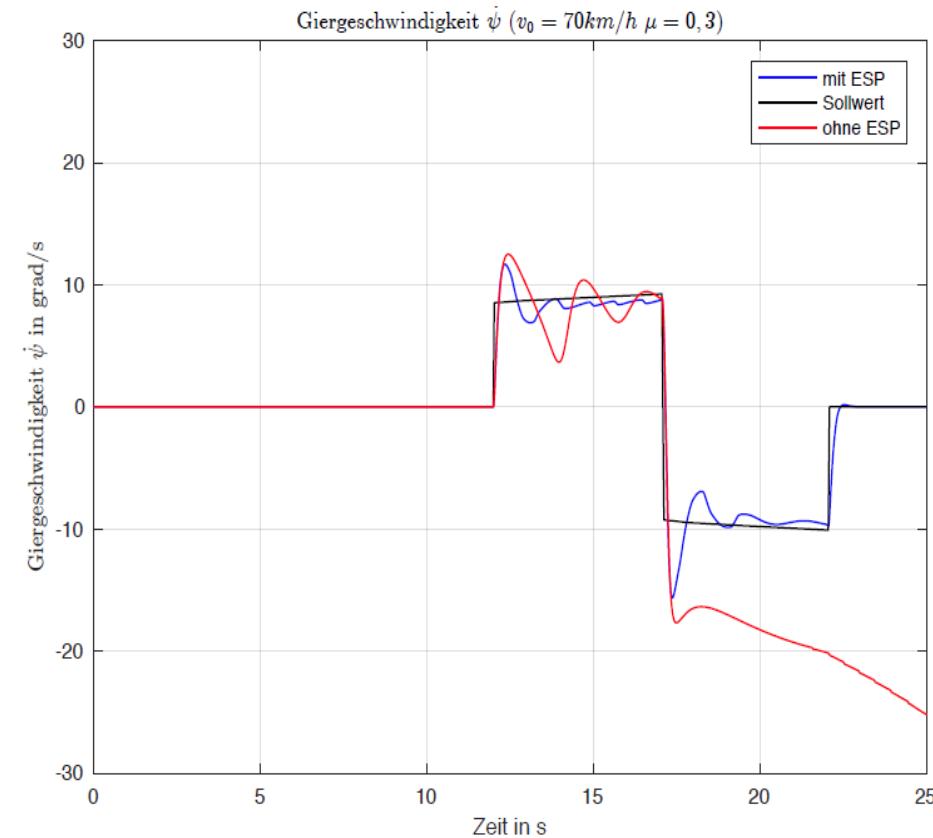


Die optimale Einstellung von  $\Delta M_{z,soll}$  ist von der aktuellen Fahrsituation abhängig.

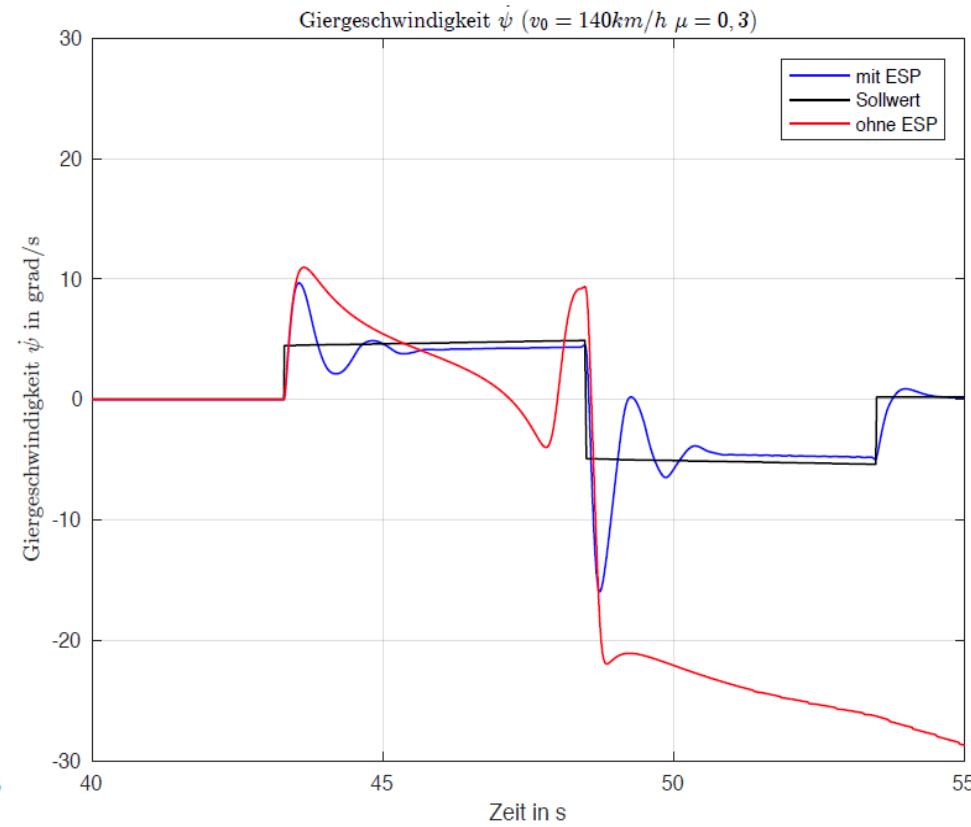
# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

$v_0 = 70 \text{ km/h}$   $\mu = 0,3$



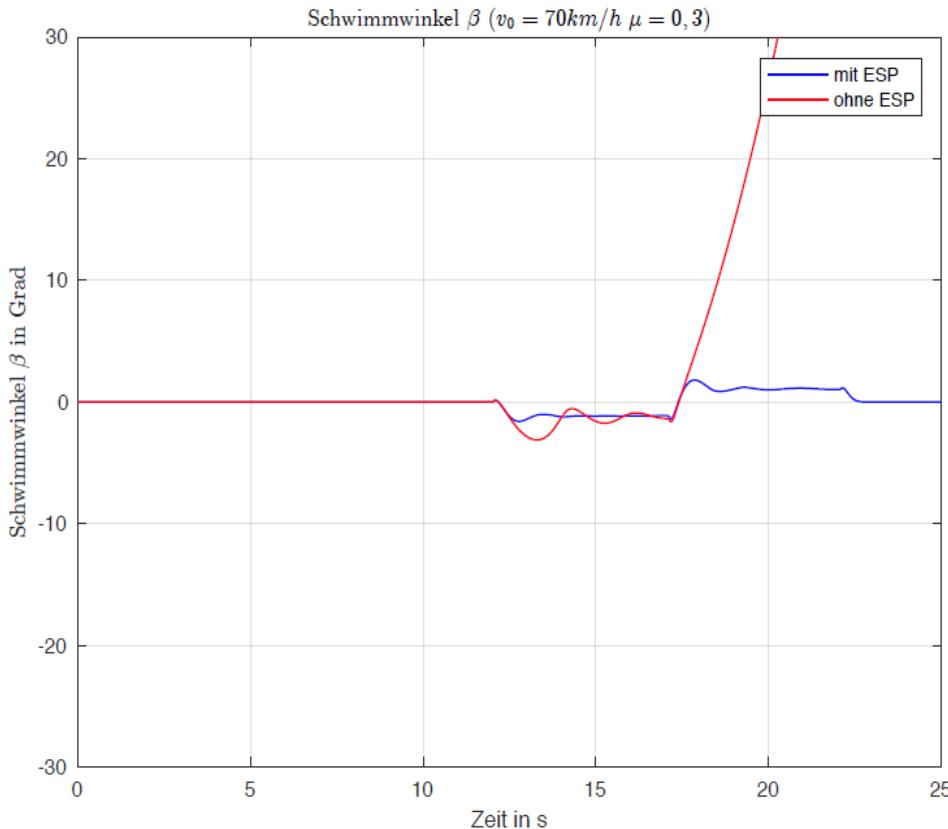
$v_0 = 140 \text{ km/h}$   $\mu = 0,3$



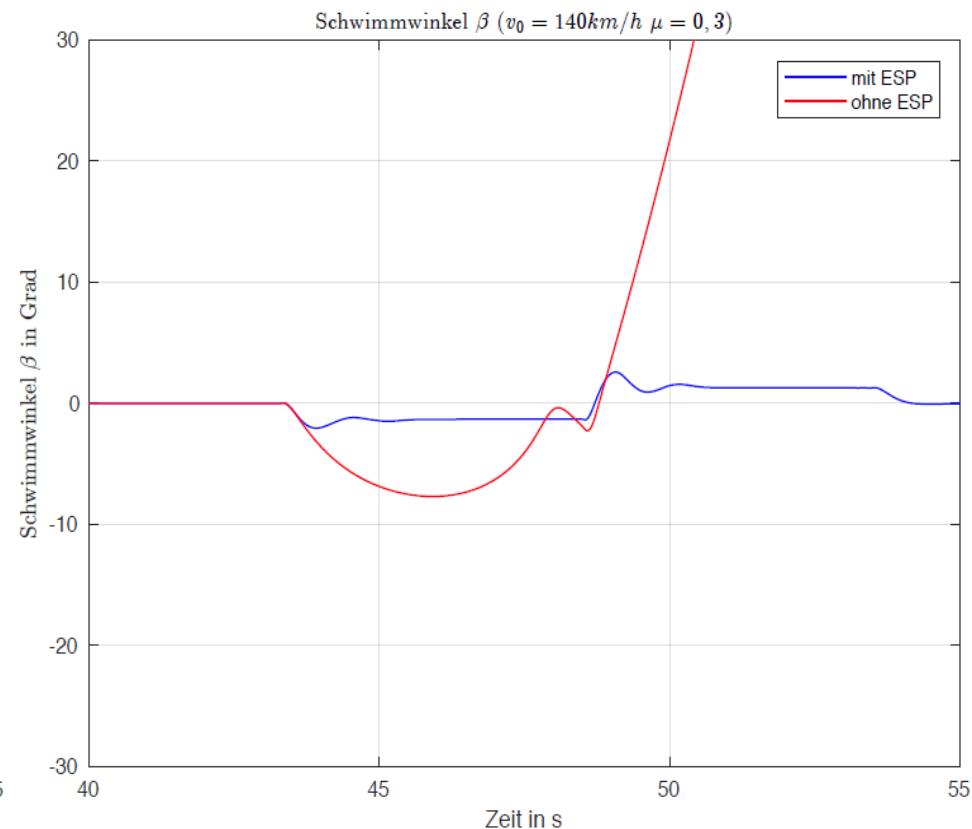
# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

$v_0 = 70 \text{ km/h}$   $\mu = 0,3$



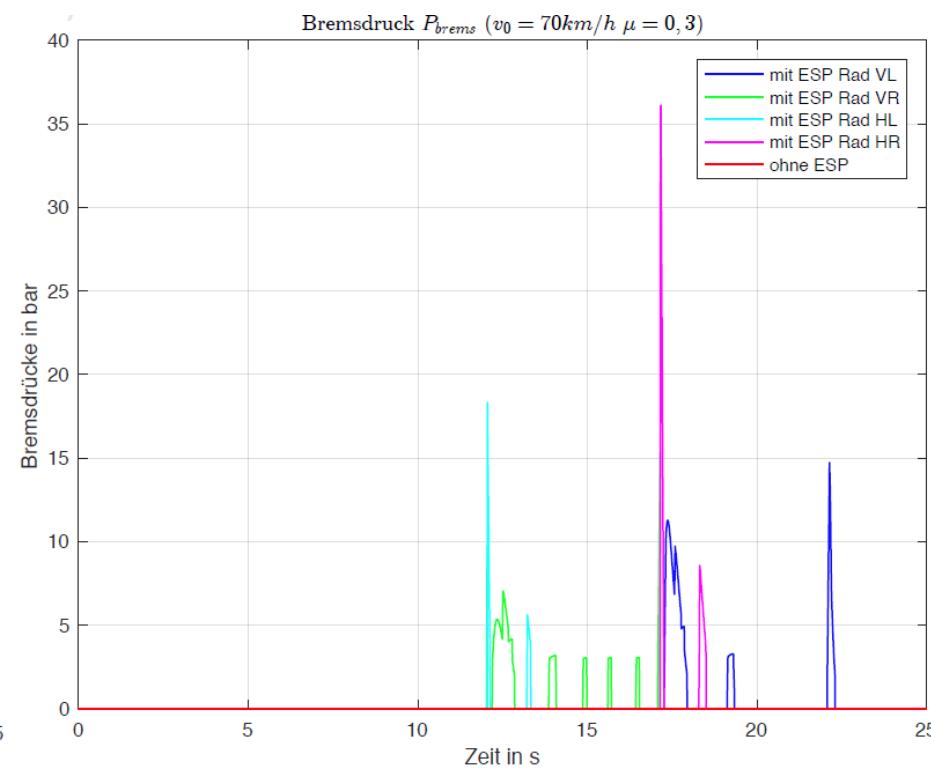
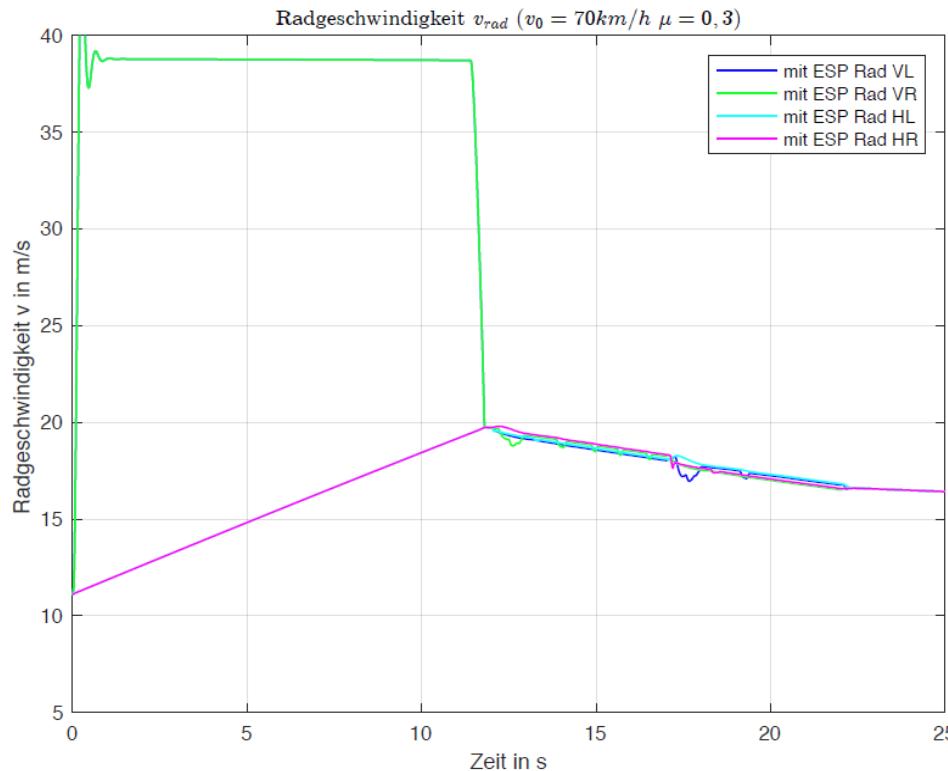
$v_0 = 140 \text{ km/h}$   $\mu = 0,3$



# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

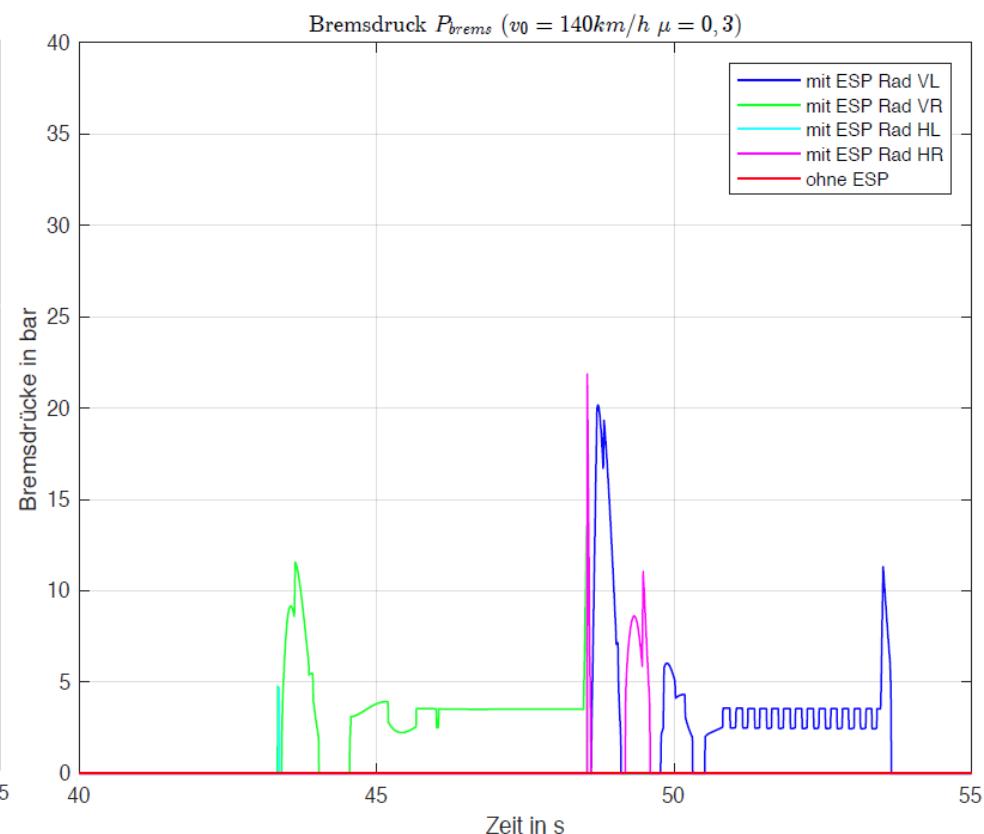
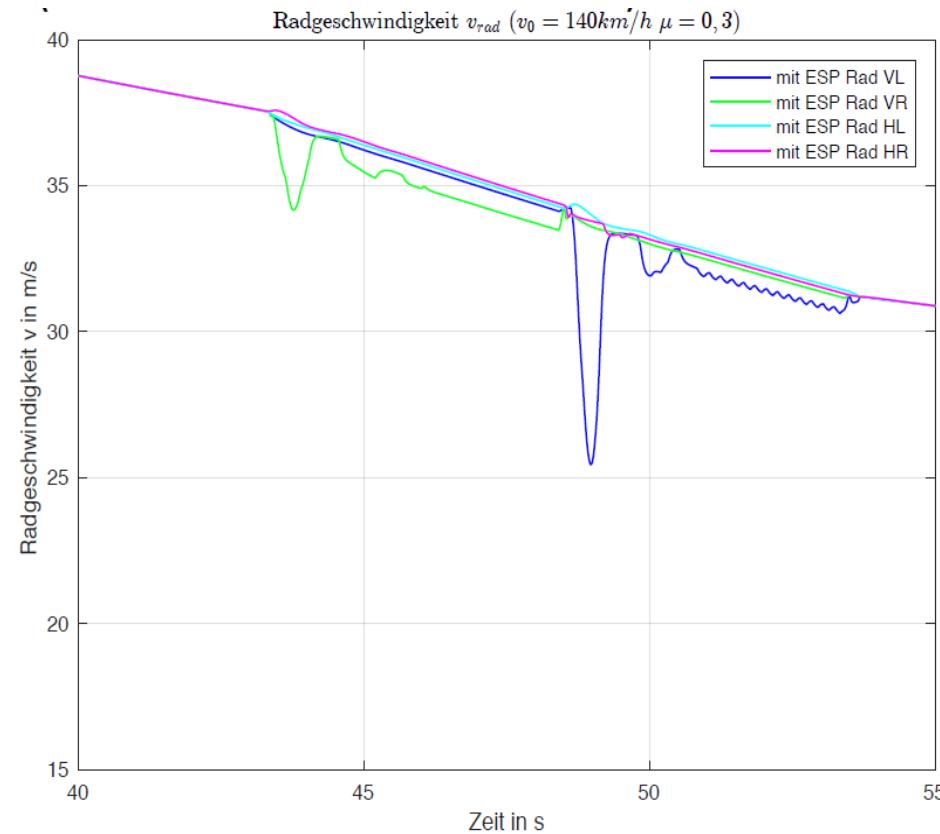
$$v_0 = 70 \text{ km/h} \quad \mu = 0,3$$



# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

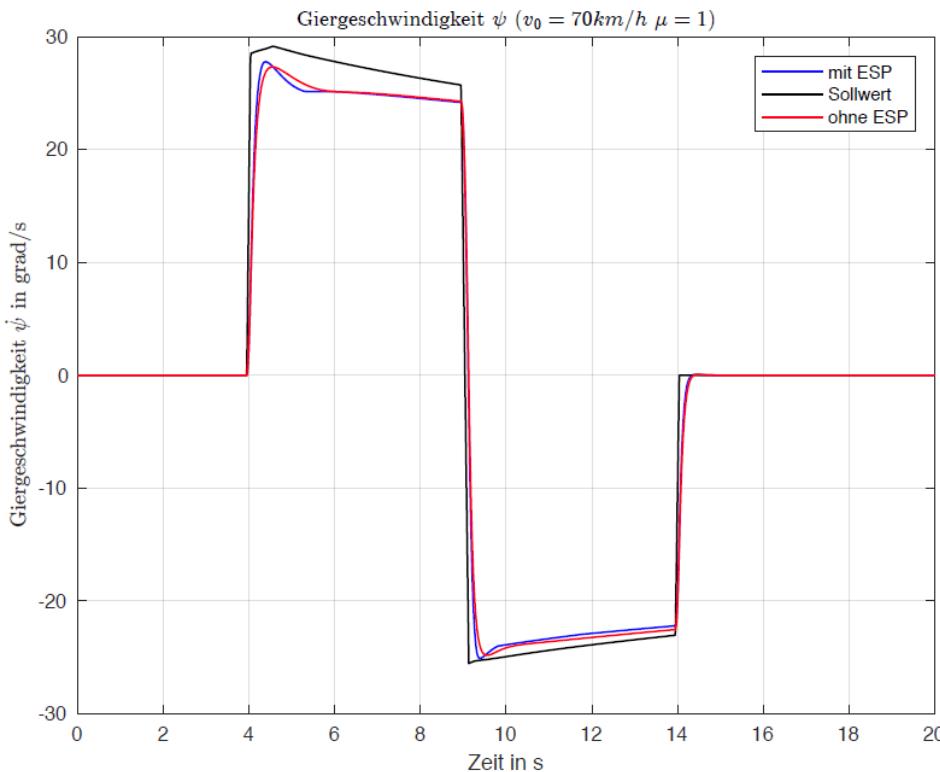
$$v_0 = 140 \text{ km/h} \quad \mu = 0,3$$



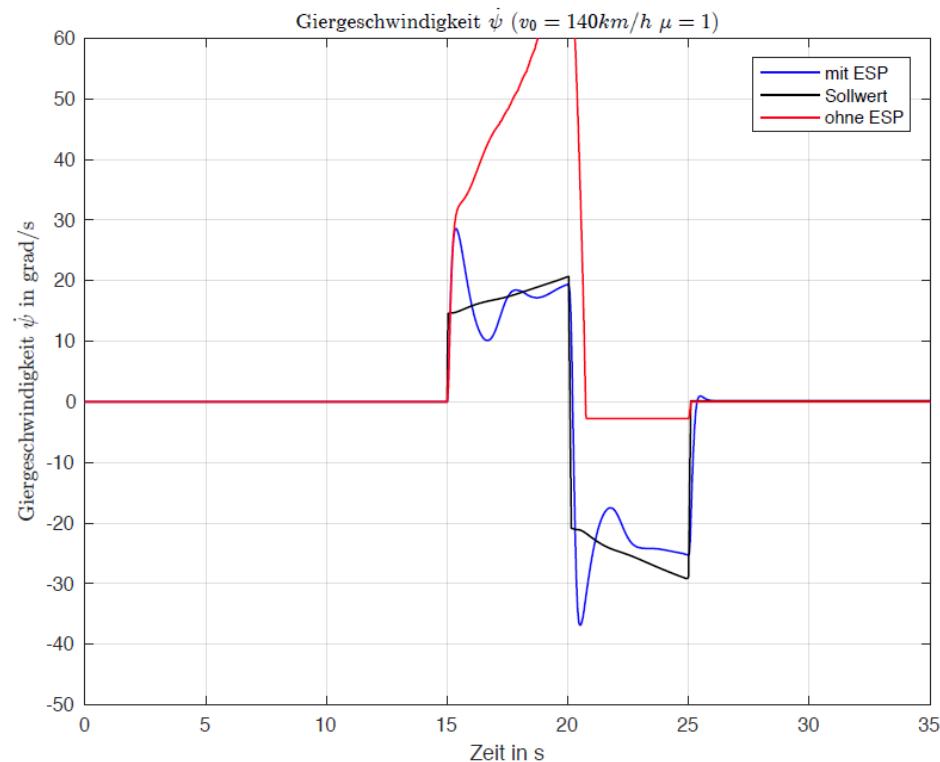
# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

$v_0 = 70 \text{ km/h}$   $\mu = 1$



$v_0 = 140 \text{ km/h}$   $\mu = 1$

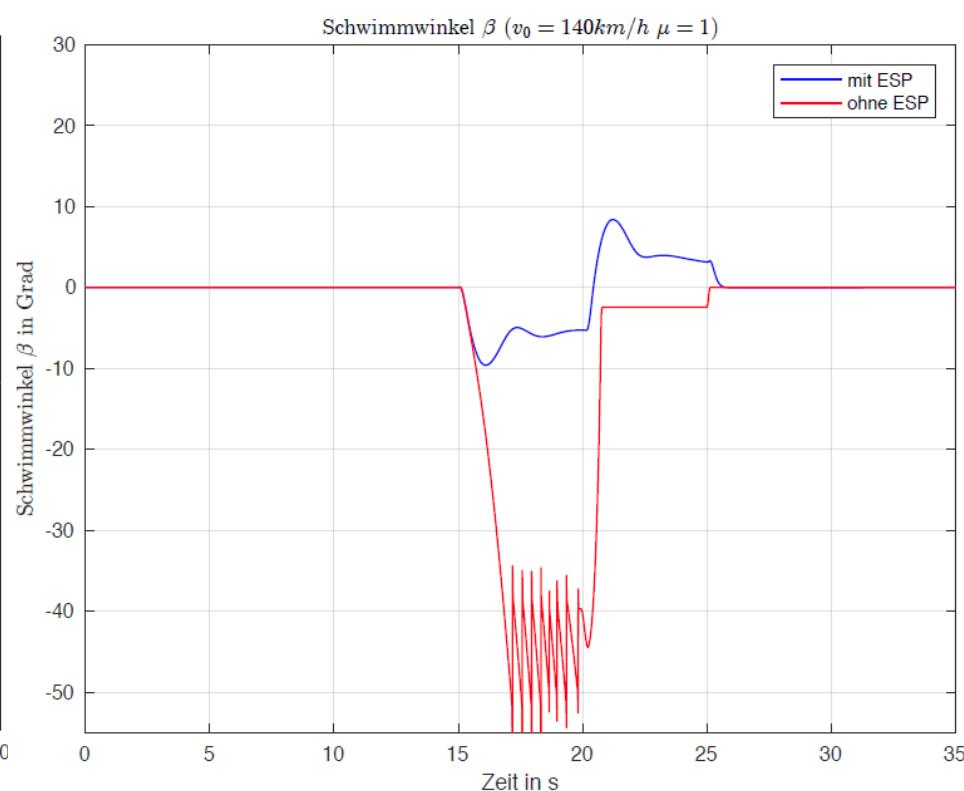
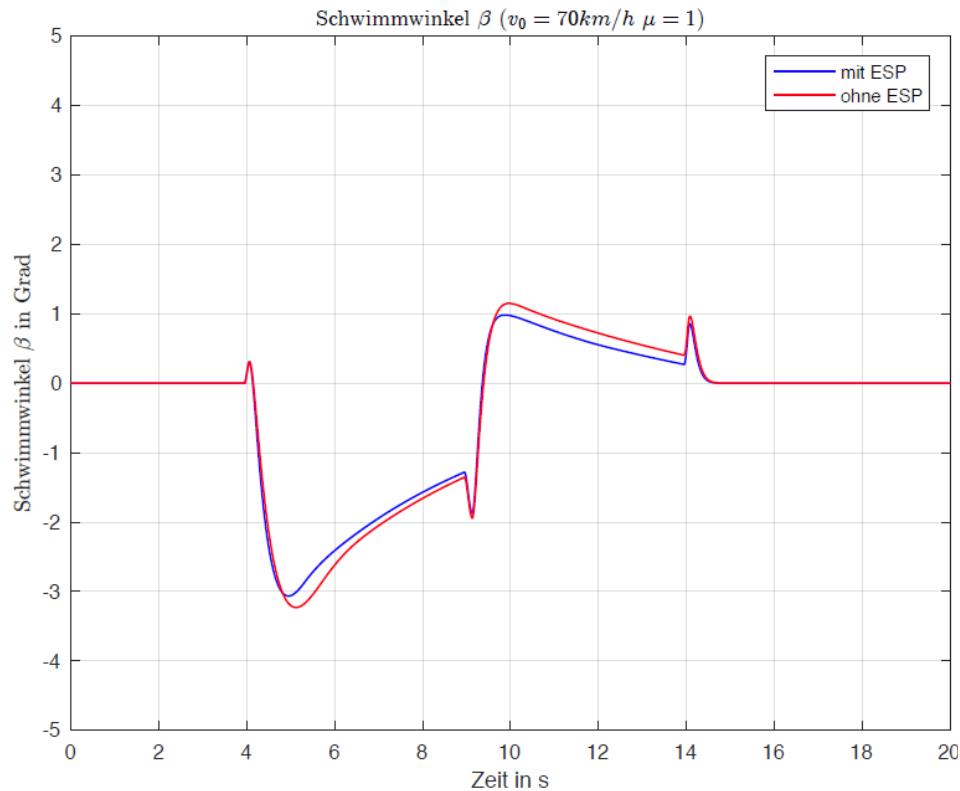


# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

$$v_0 = 70 \text{ km/h} \quad \mu = 1$$

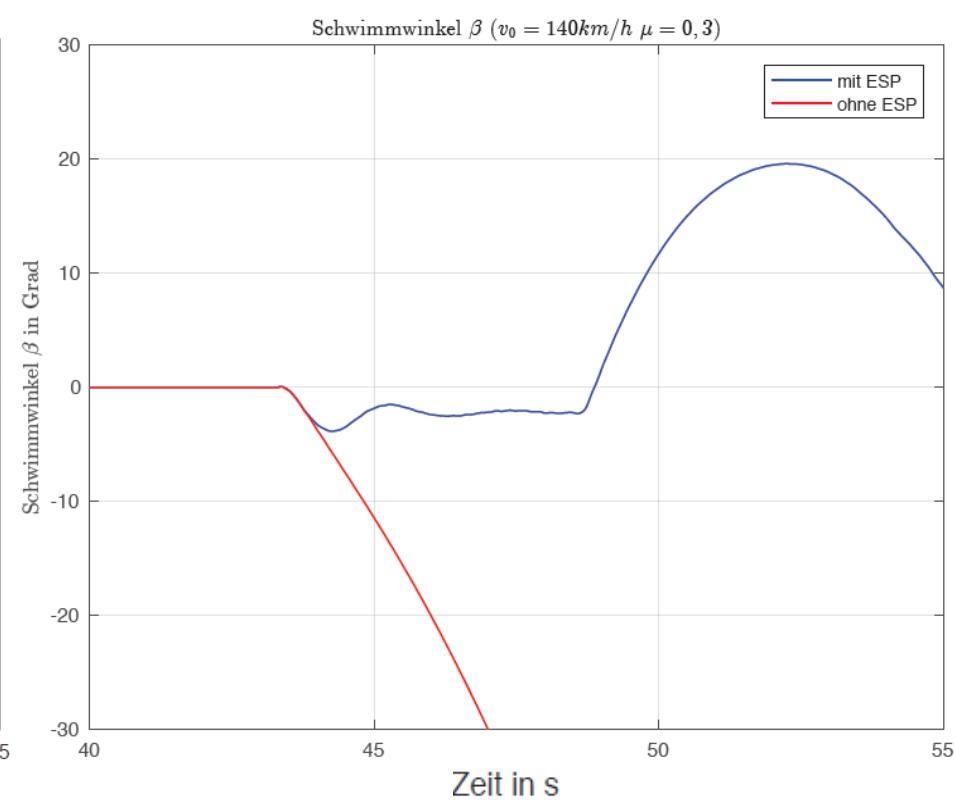
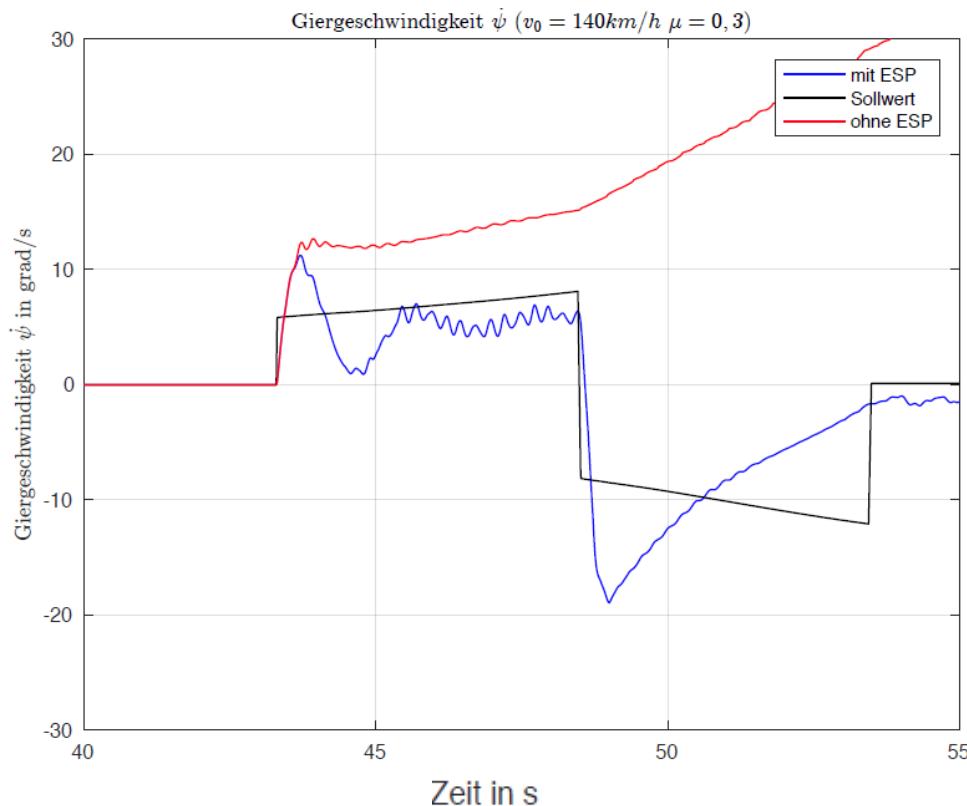
$$v_0 = 140 \text{ km/h} \quad \mu = 1$$



# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

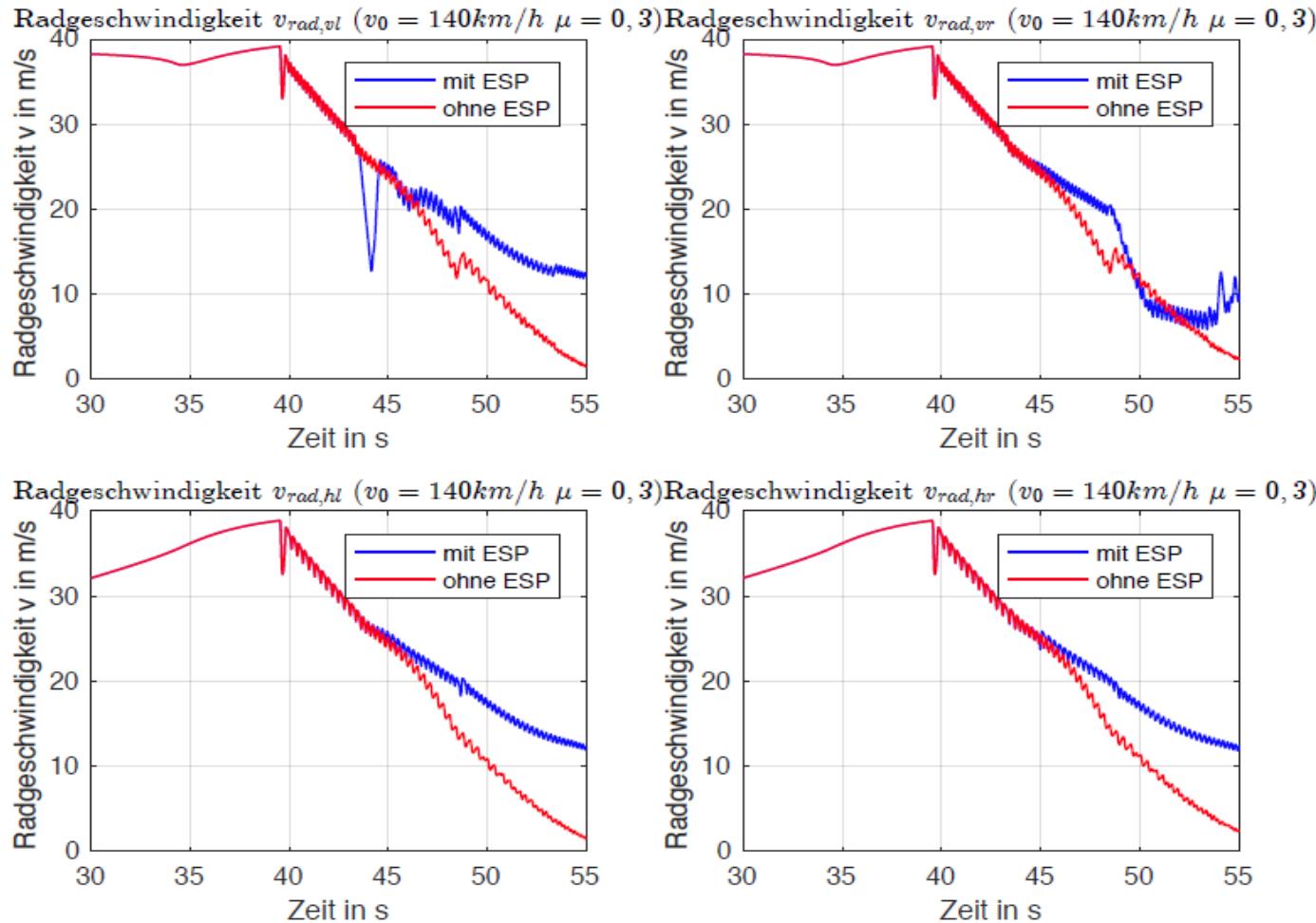
$v_0 = 140 \text{ km/h}$   $\mu = 0,3$  mit Vollbremsung



# Stabilitätsregelung – ESP

## Simulation – Doppelter Spurwechsel

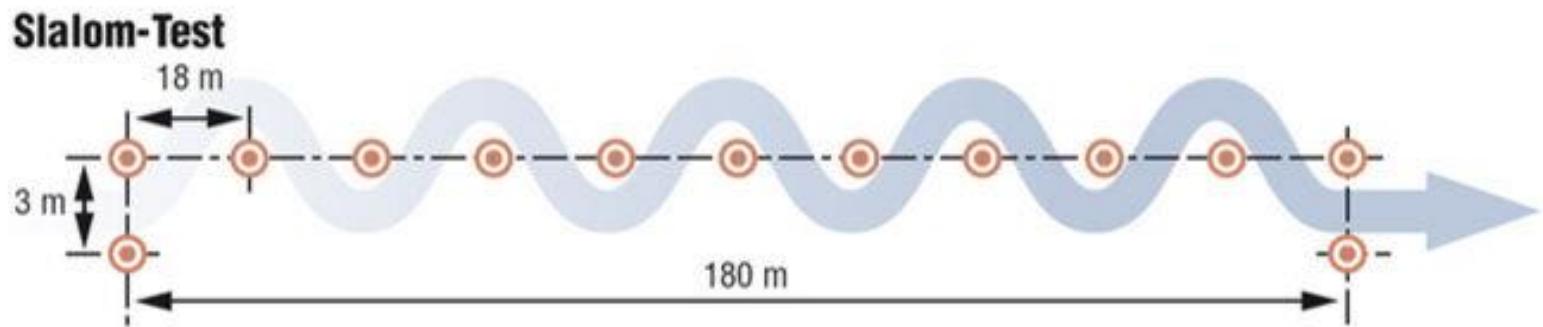
$v_0 = 140 \text{ km/h}$   $\mu = 0,3$  mit Vollbremsung



# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Slalom

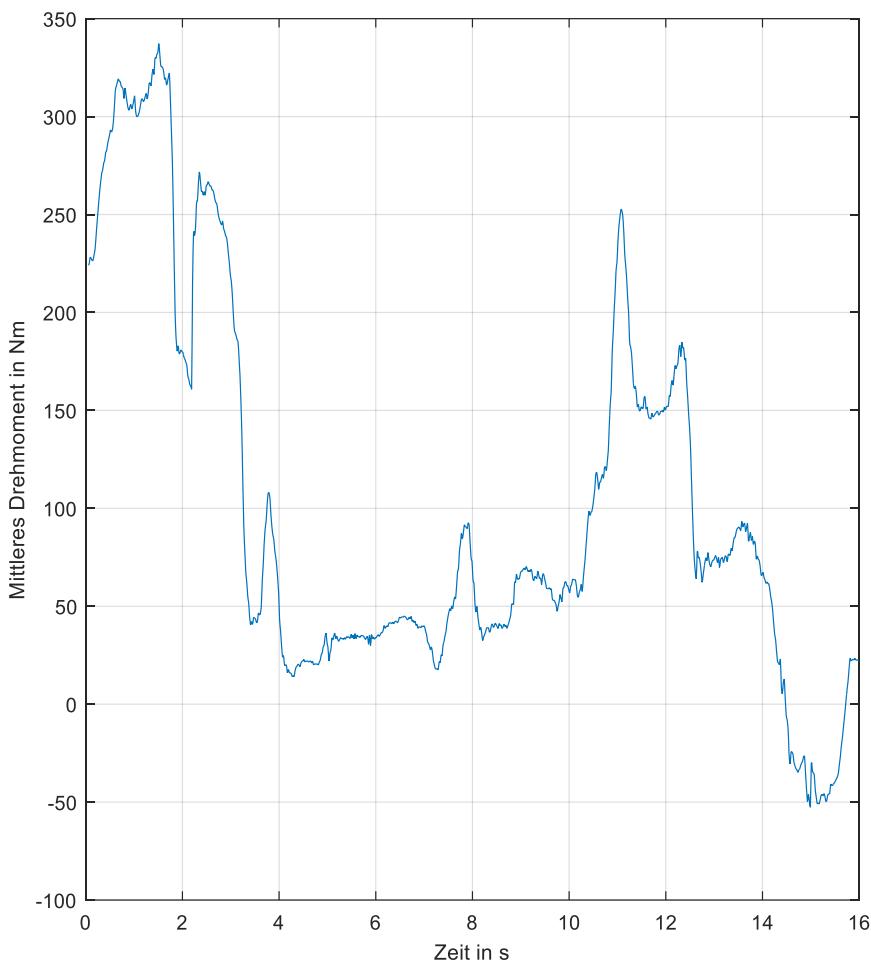
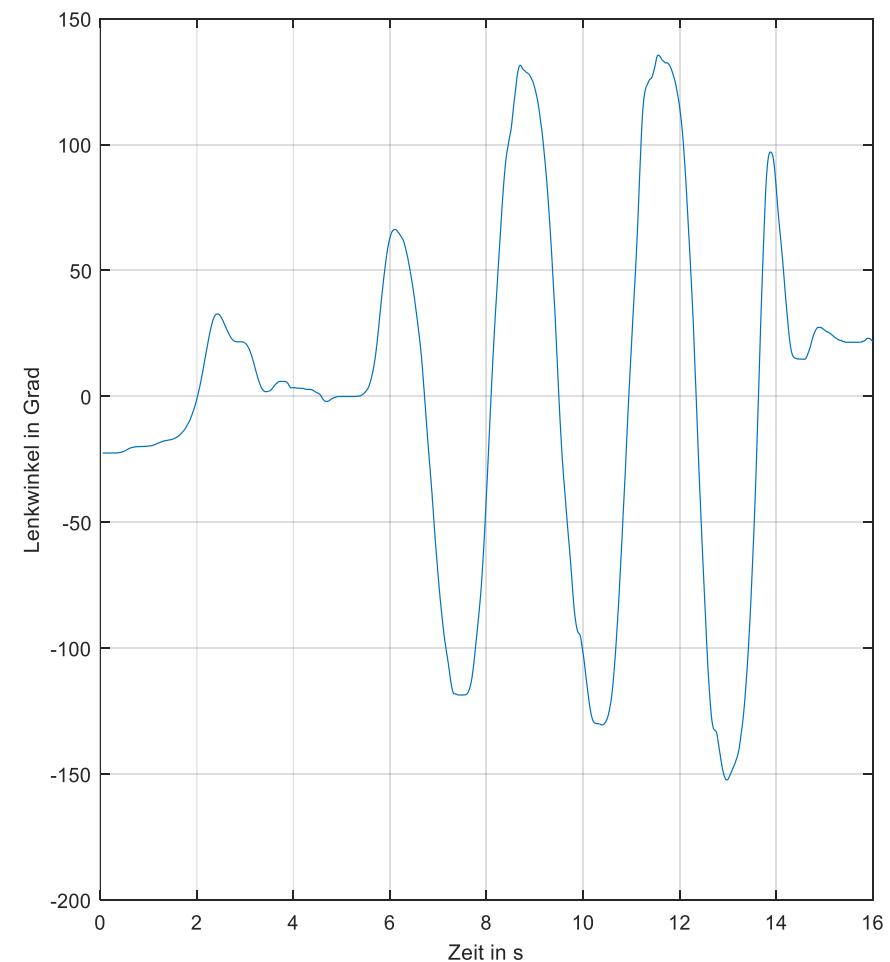
- Möglichst konstante Geschwindigkeit: 60 km/h
- Keine Bremsung



Quelle: <http://www.auto-motor-und-sport.de/>

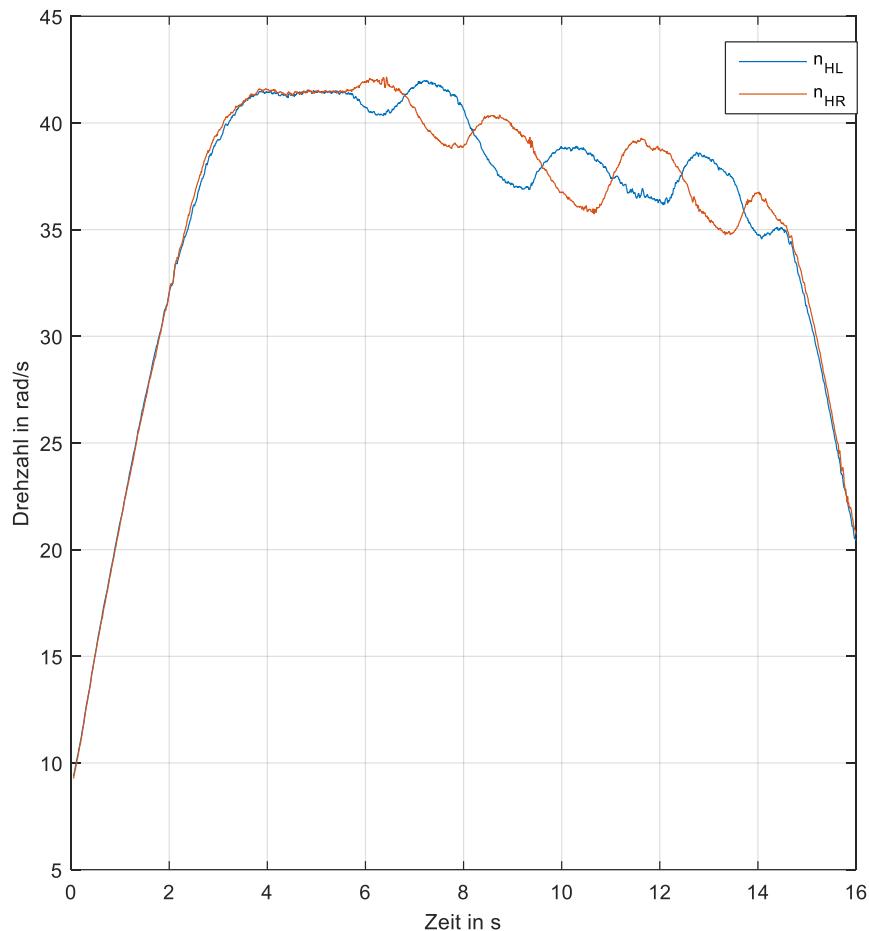
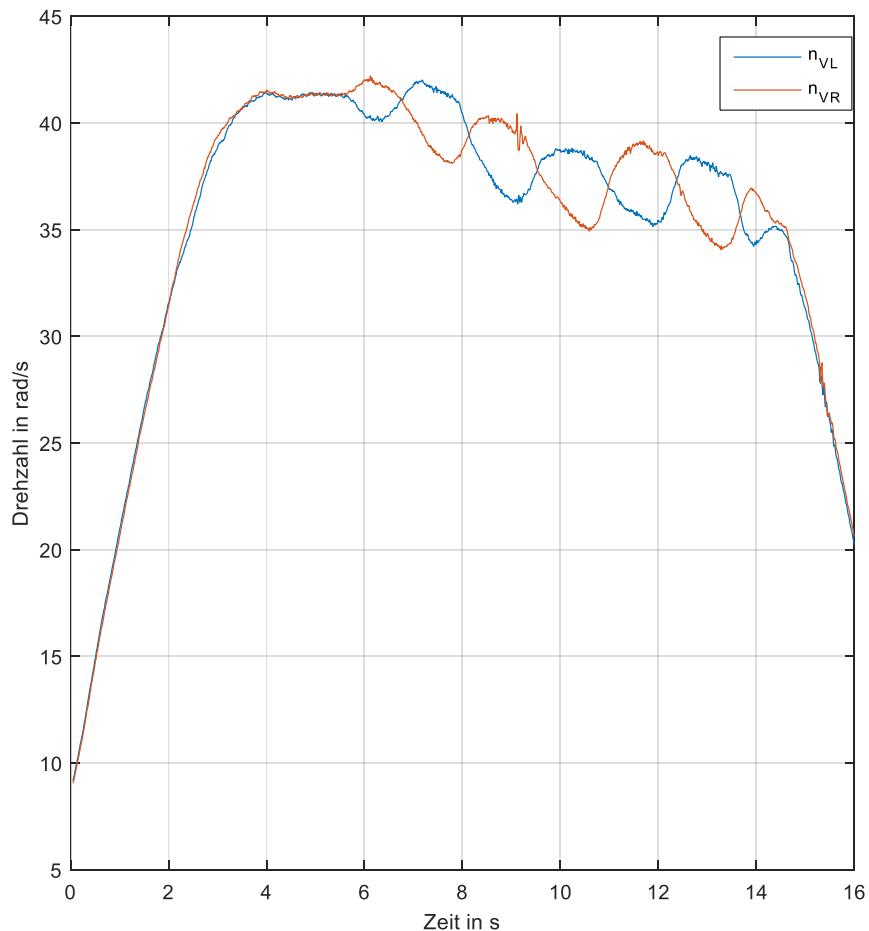
# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Slalom



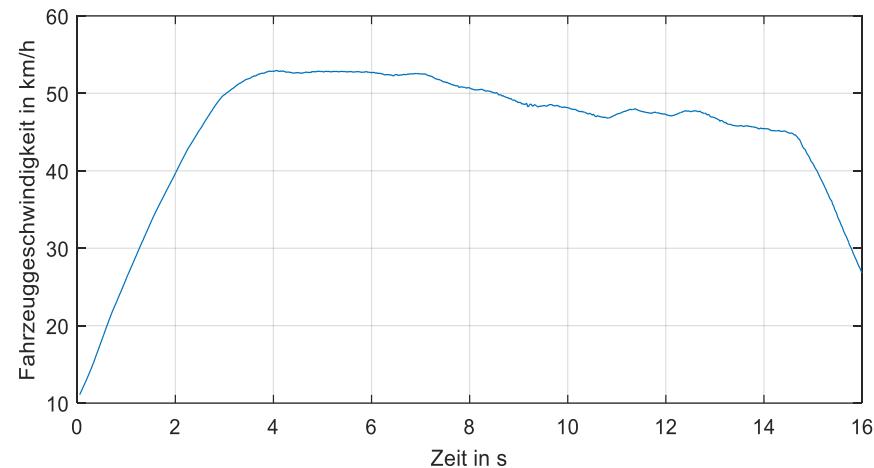
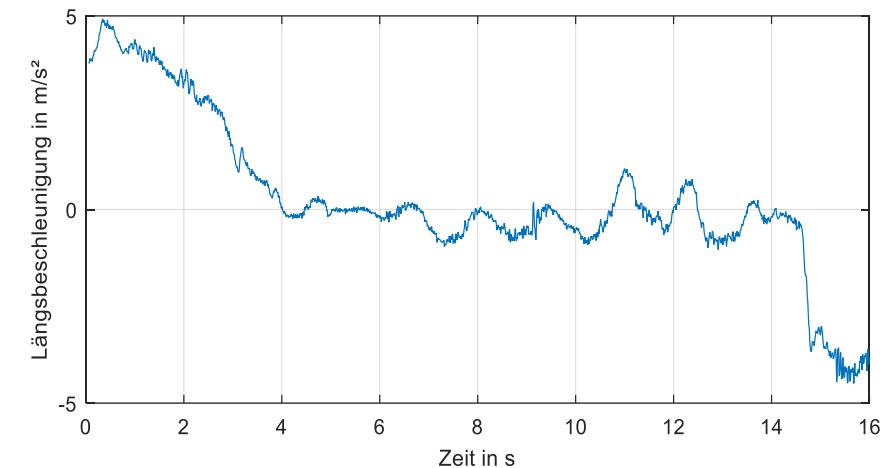
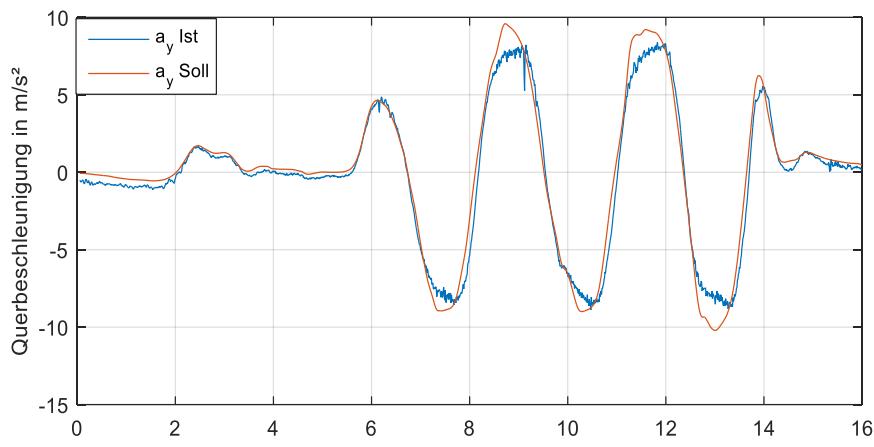
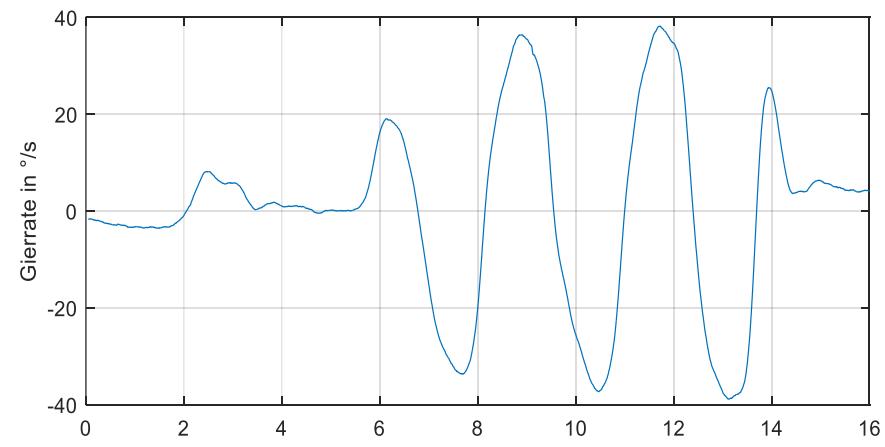
# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Slalom



# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Slalom

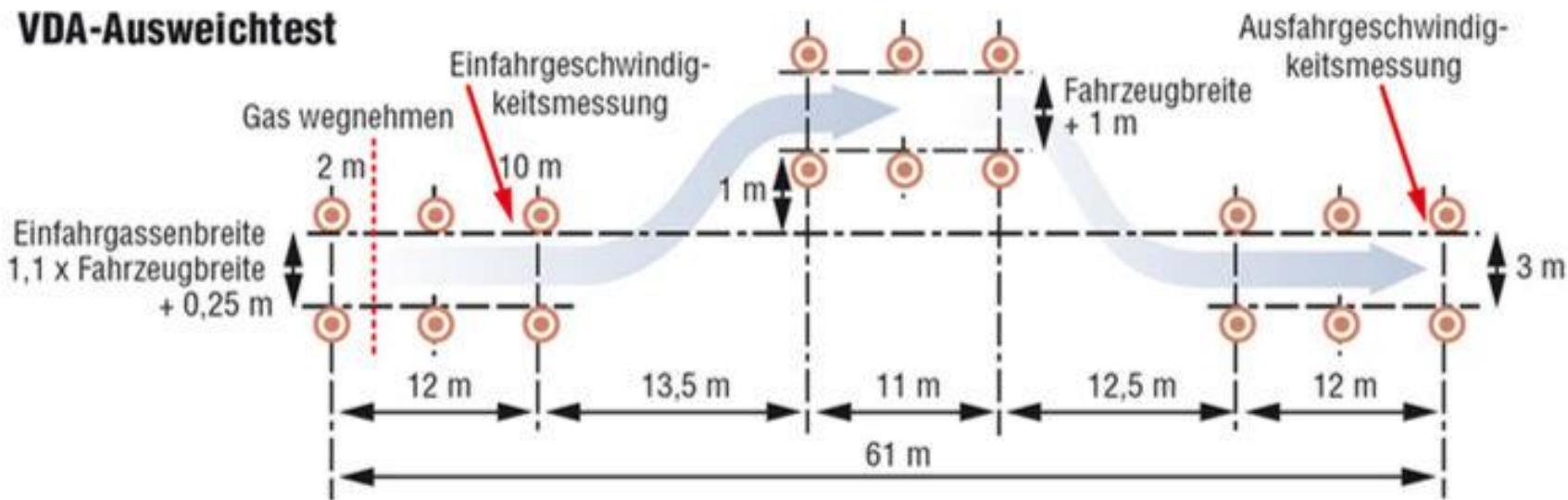


# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Ausweichtest

- Einfahrgeschwindigkeit: 80 km/h
- Keine Bremsung

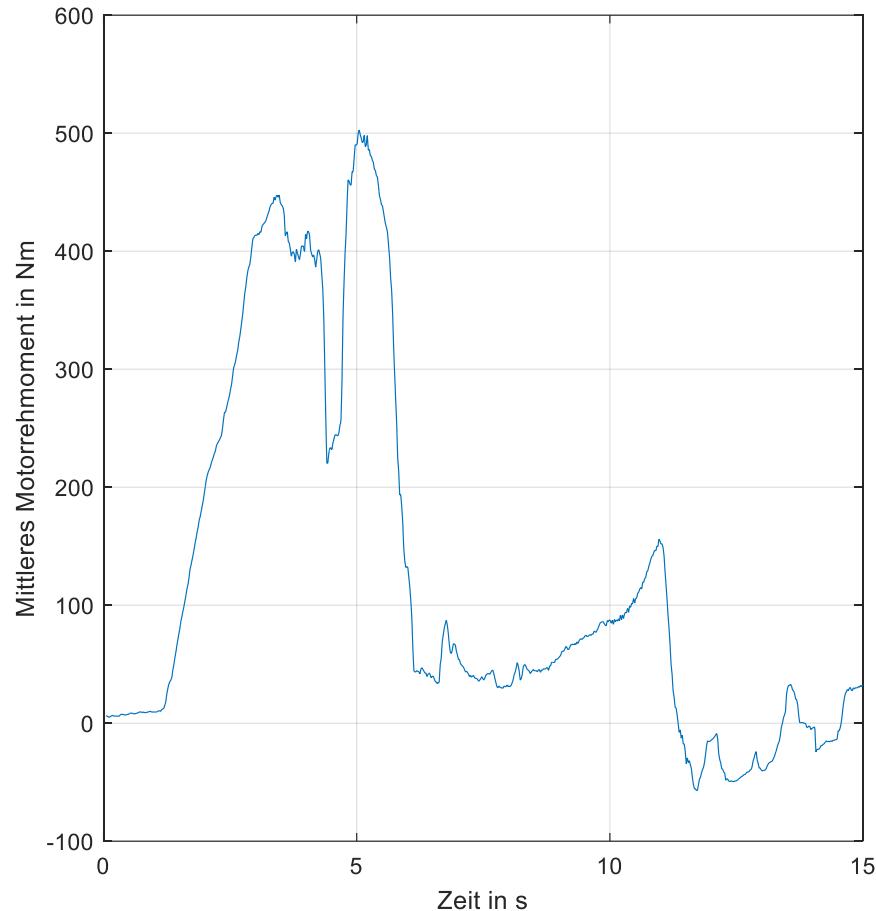
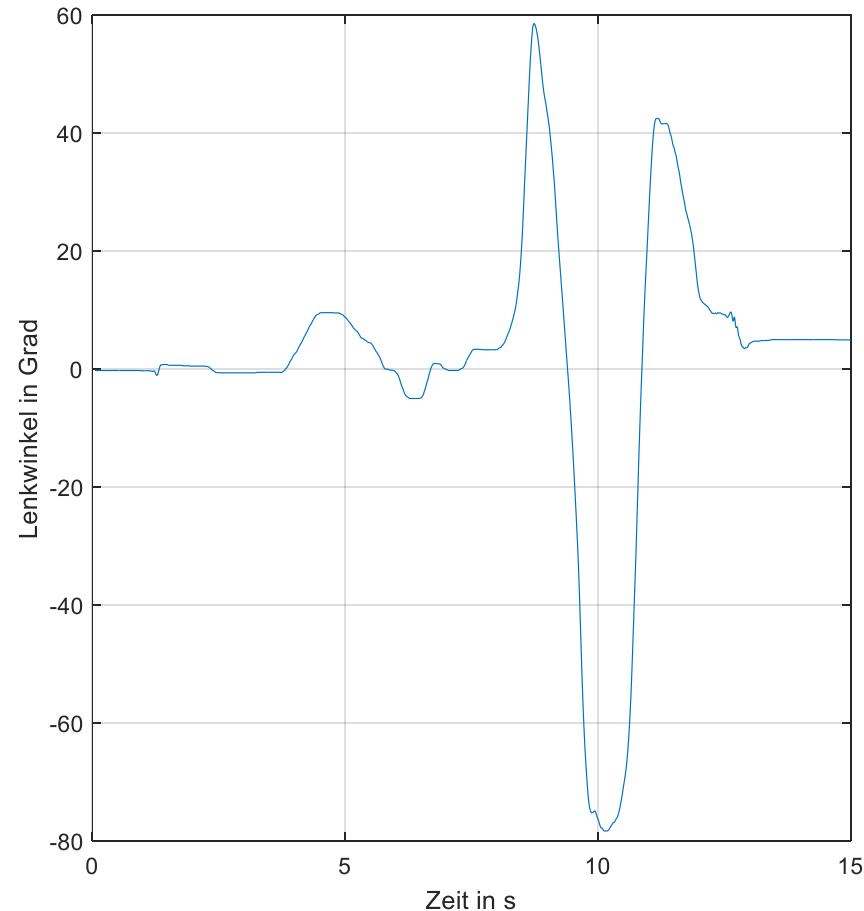
### VDA-Ausweichtest



Quelle: <http://www.auto-motor-und-sport.de/>

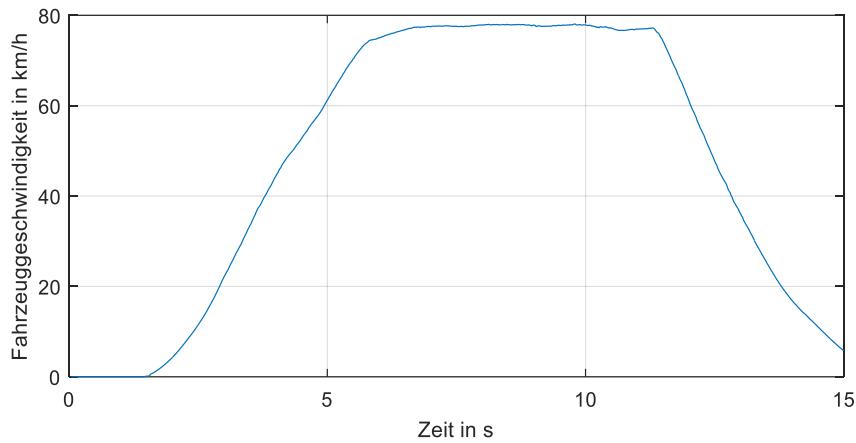
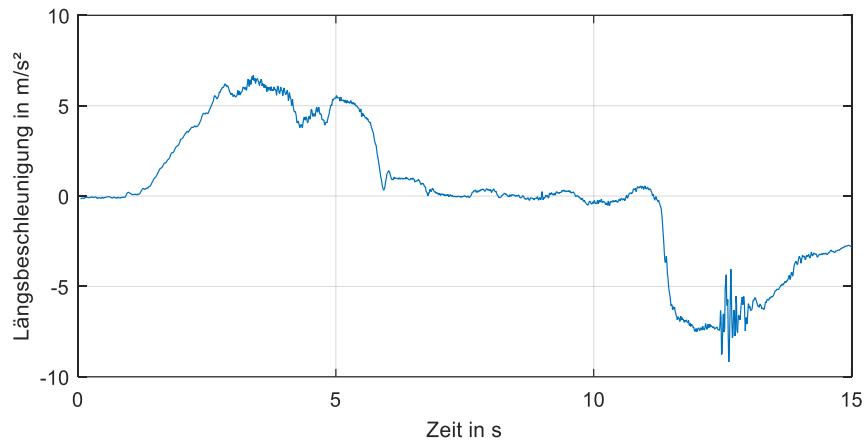
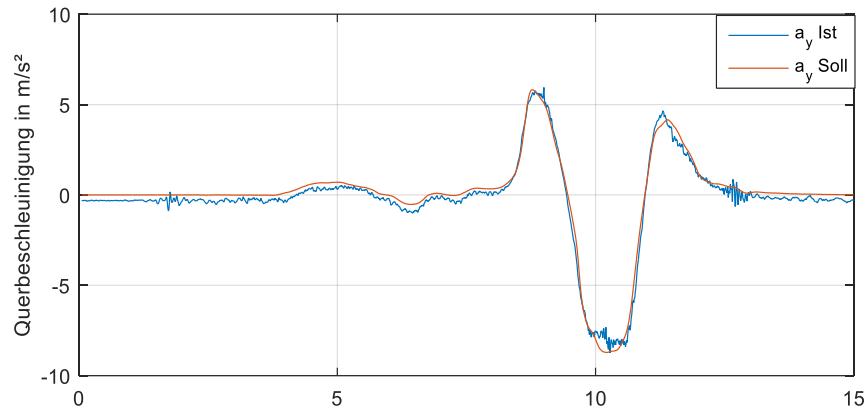
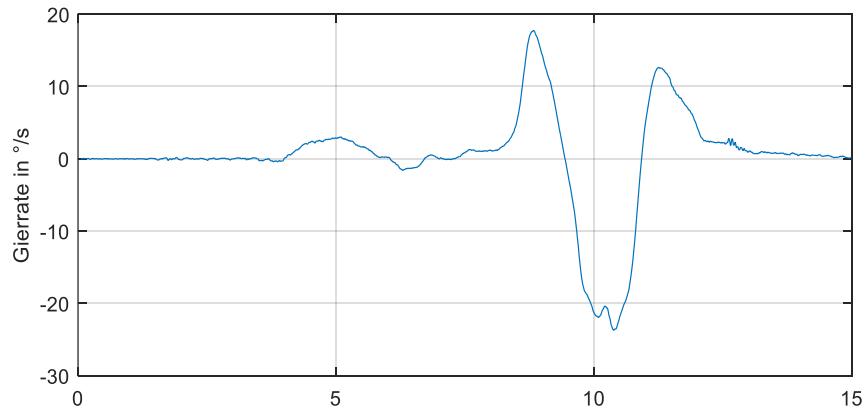
# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Ausweichtest



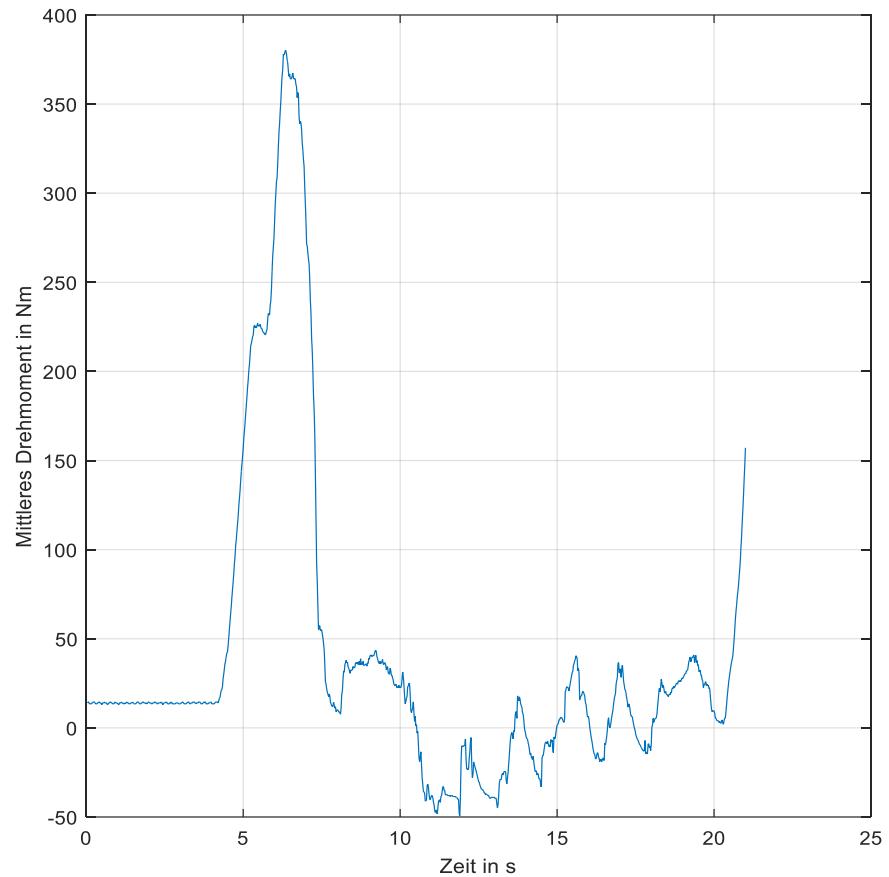
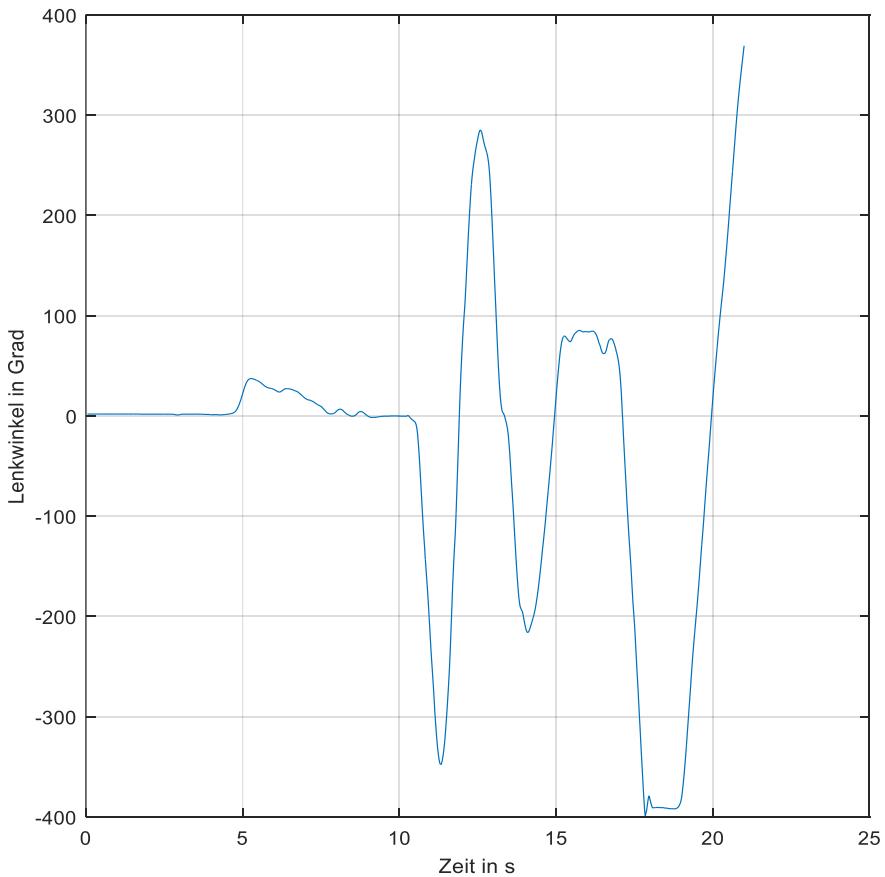
# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Ausweichtest



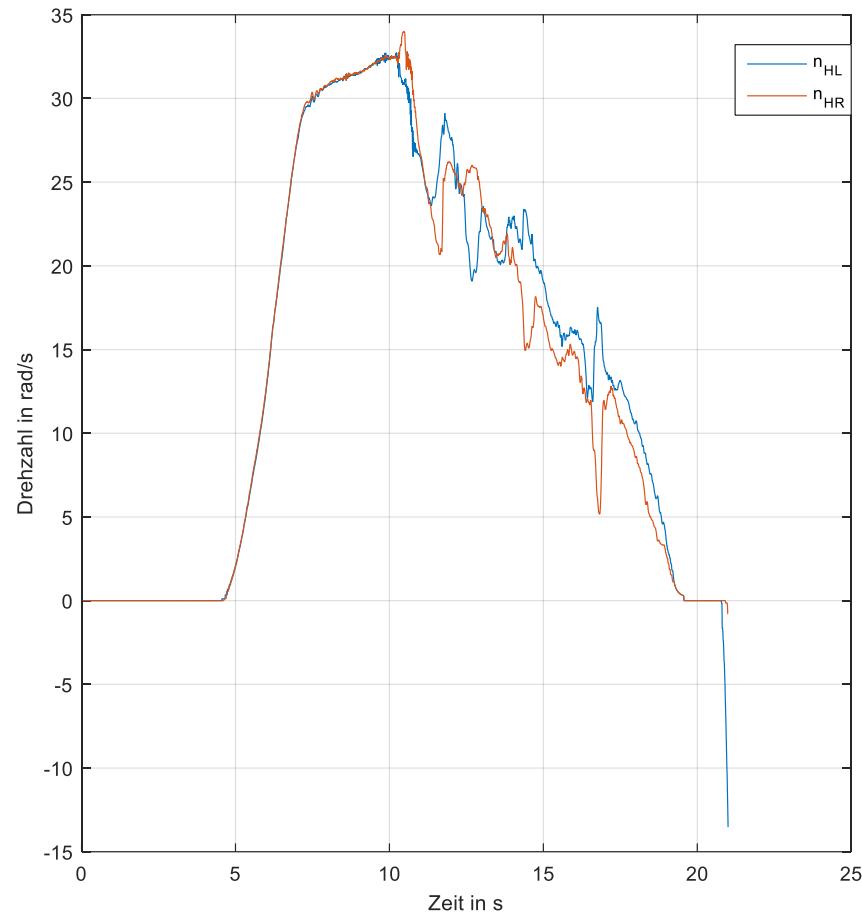
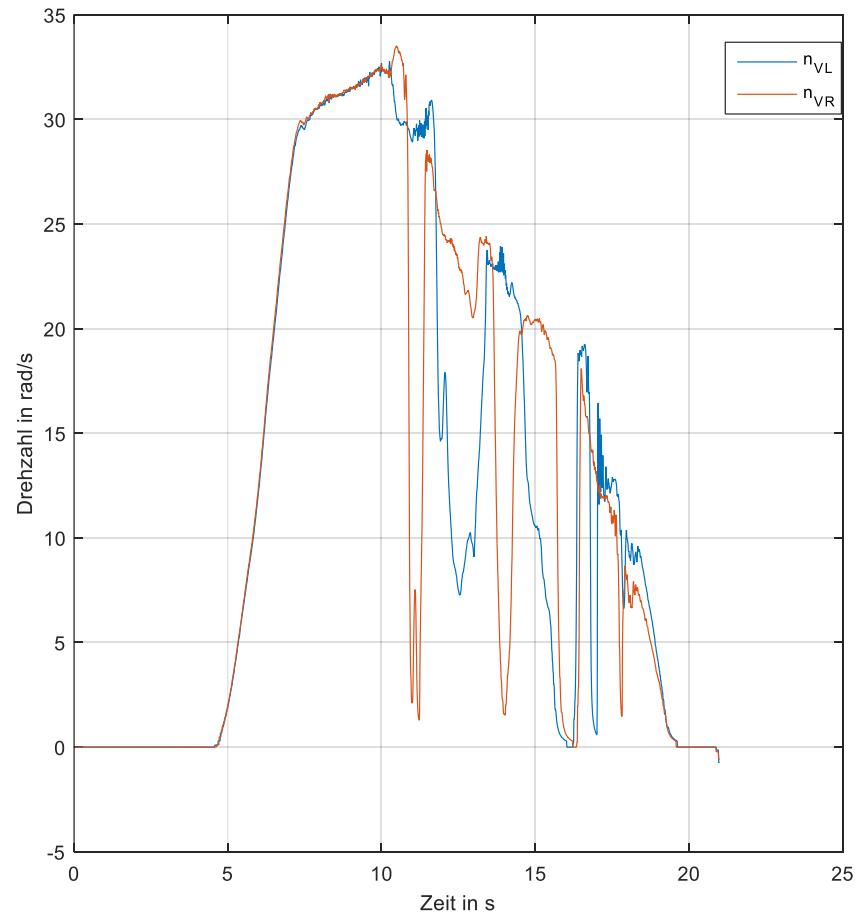
# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Dynamische Tests



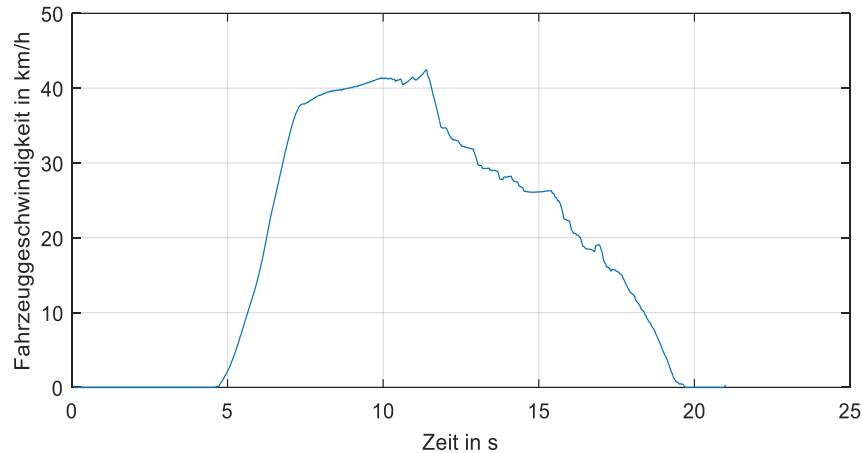
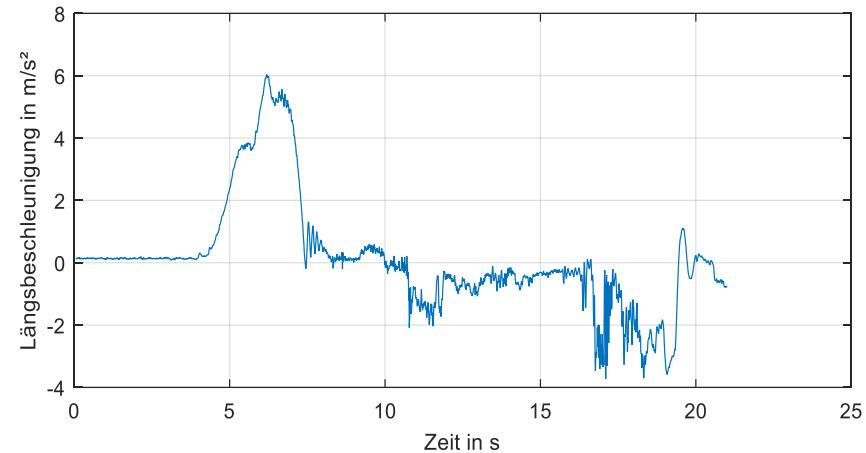
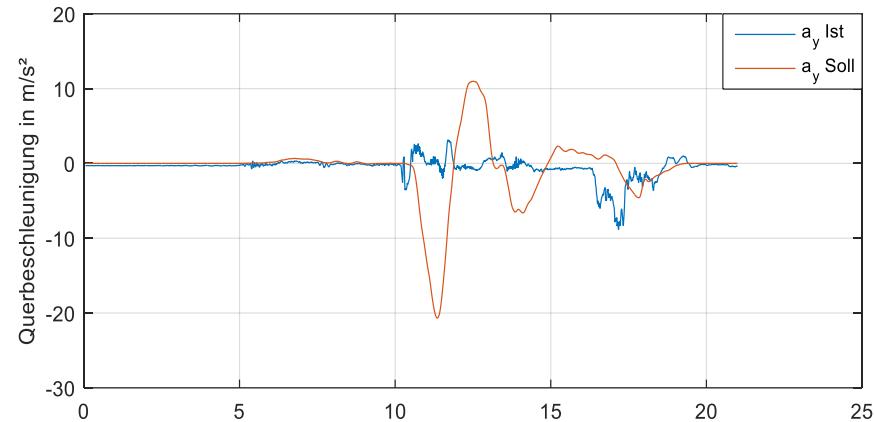
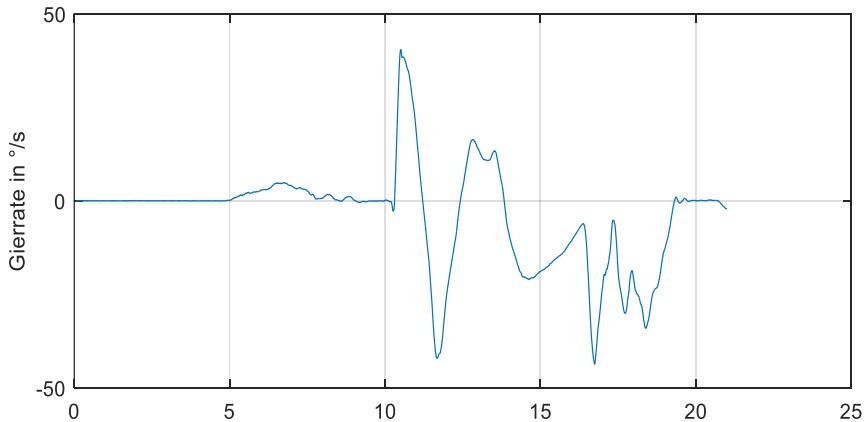
# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Dynamische Tests



# Stabilitätsregelung – ESP

## Fahrversuch – Dynamische Tests



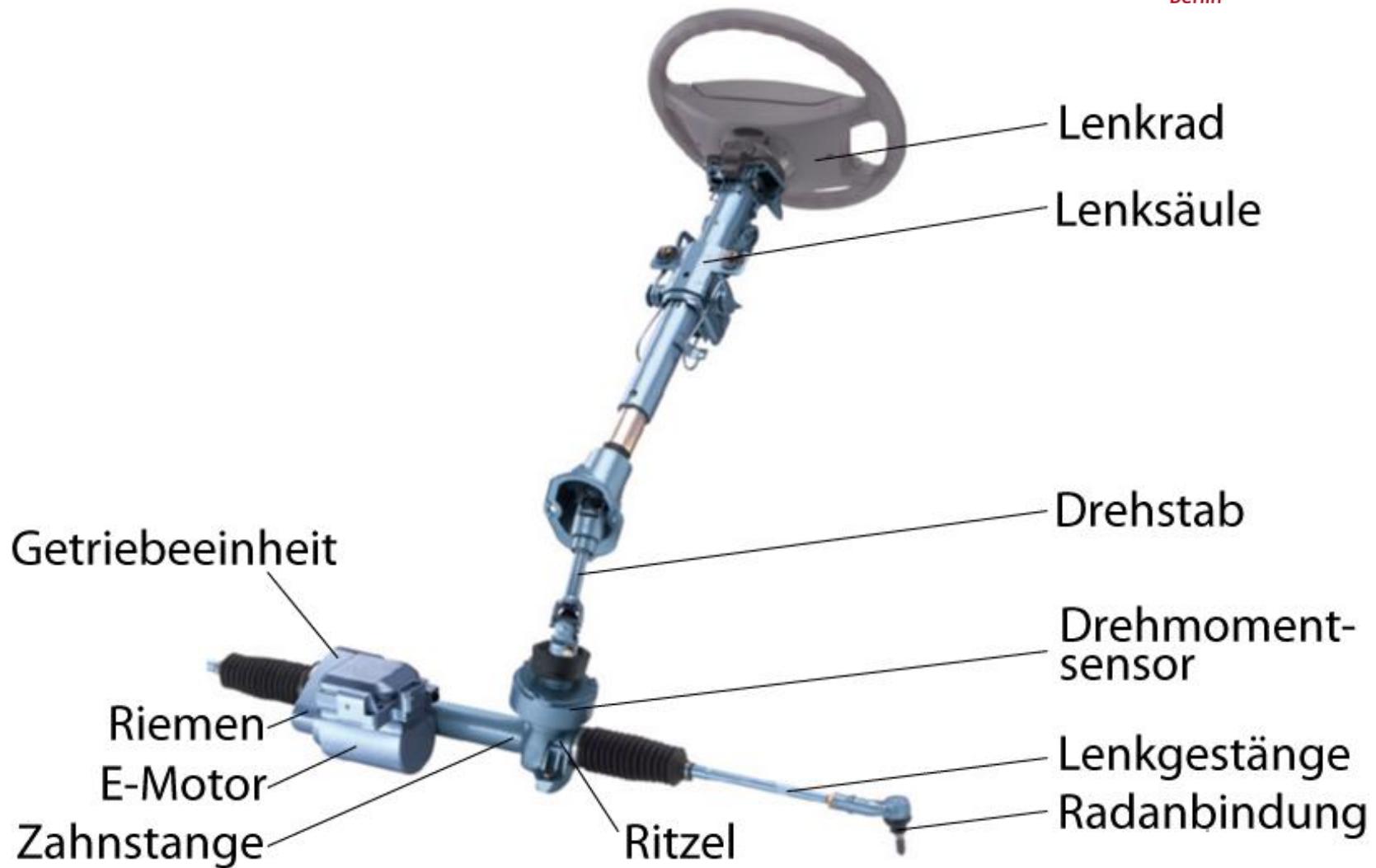


# Fahrzeugregelung - Übung (Regelung einer elektromechanischen Servolenkung - EPS)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

# Aufbau eines EPS Lenksystems



## Lenkmomentensor

➤ **Messprinzip bei einem Drehstabsensor:**

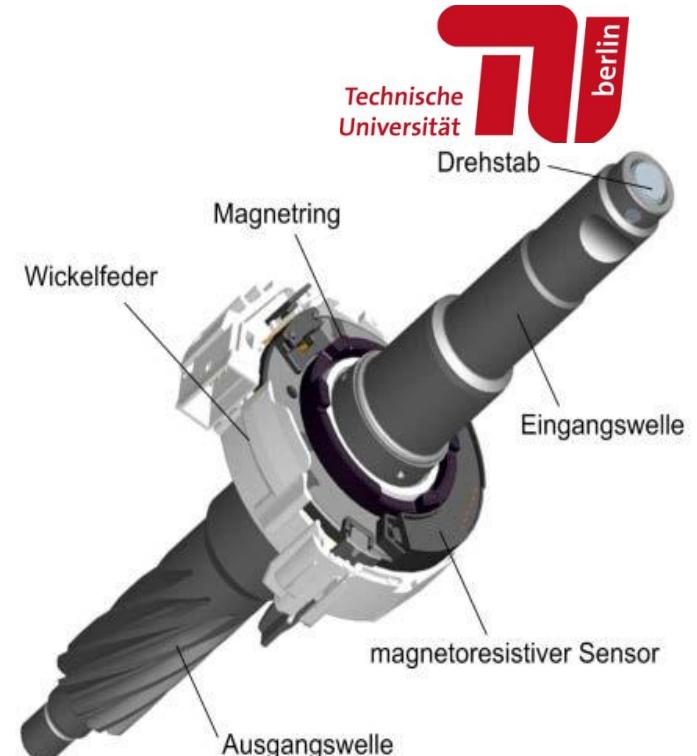
1. Drehwinkel  $\Delta\varphi$  erfassen
2. Lenkmoment:  $M_L \sim \Delta\varphi$

➤ **Erfassung des Drehwinkels  $\Delta\varphi$  z.B.:**

- induktiv
- kapazitiv
- magnetisch
- Optisch

➤ **Magnetische Sensoren:**

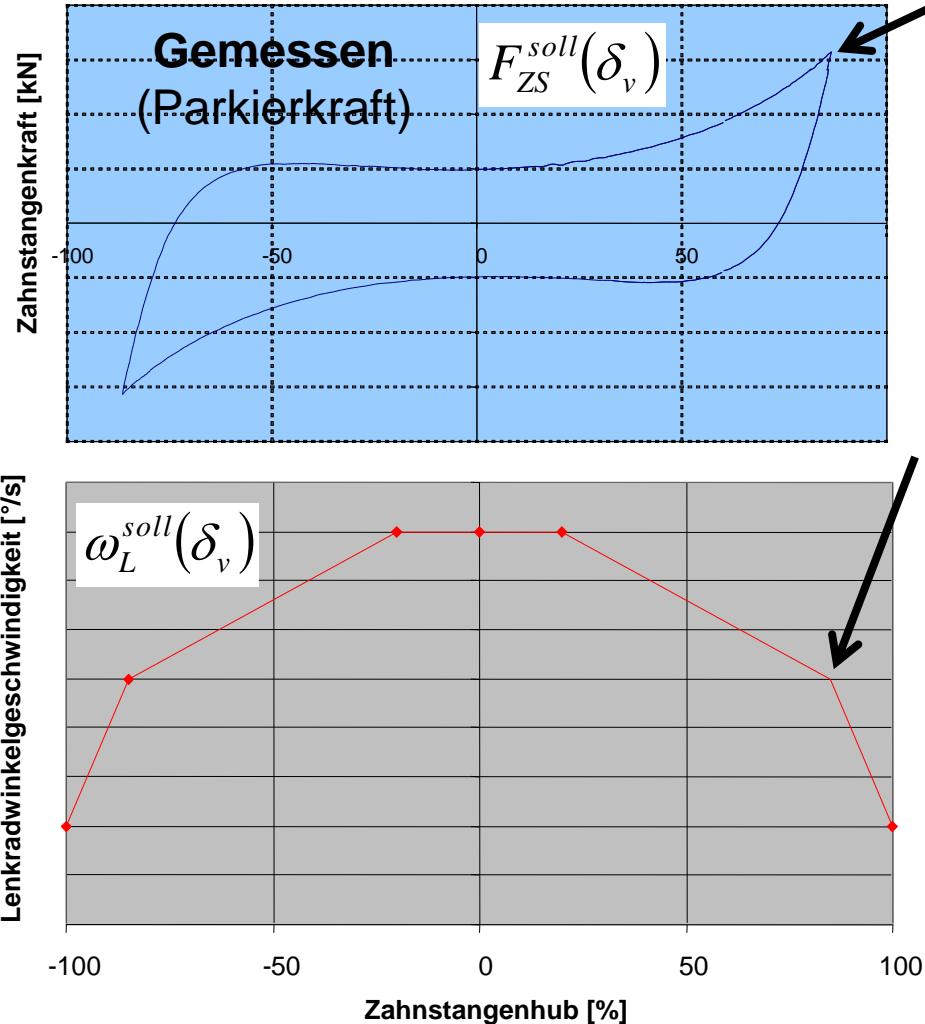
- Magnetring wird auf Eingangswelle platziert und erzeugt ein Magnetfeld
- Auf der Ausgangswelle wird ein magnetoresistiver Sensor platziert.
- Die Magnetfeldänderung durch die relative Verdrehung zwischen Ein- und Ausgangswelle wird durch das Sensorelement erfasst und ausgewertet.



Quelle: Lenkungshandbuch, Pfeffer, P.; Harrer, M.

# Analyse des Lenkverhaltens

## Lenkungsauslegung



10kN

Abhängig von  
Manöver

0.1m/s

Leistungsbedarf

Gefordert  
(Herstellerphilosophie)

# Analyse des Lenkverhaltens

## Zahnstangenleistung

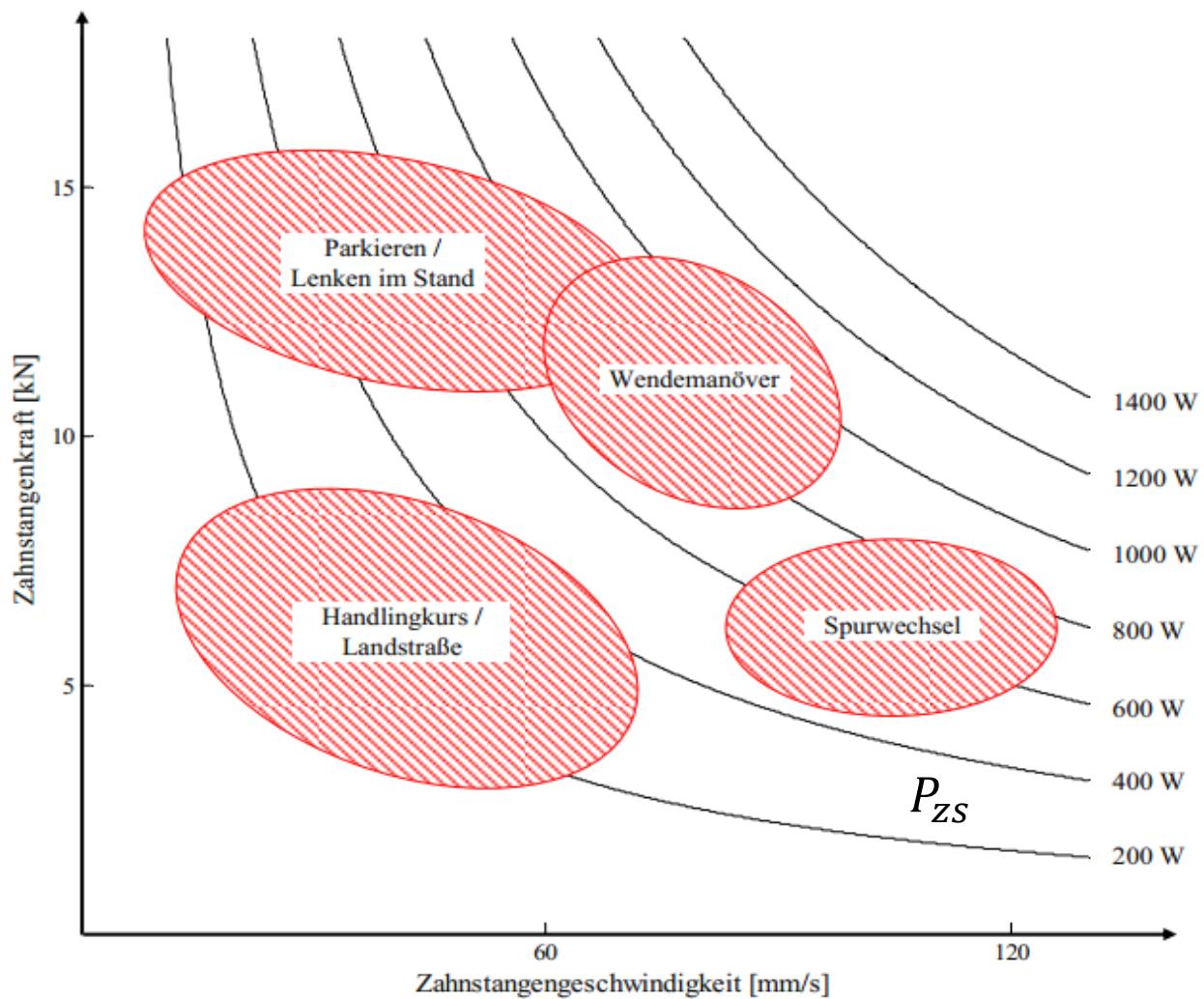
Berechnung der Zahnstangenleistung:

$$\begin{aligned} P_{zs} &= F_{zs}(\delta_v) v_{zs}^{soll}(\delta_v) \\ &= \boxed{F_{zs}(\delta_v) \frac{1}{i_{rzs}} \omega_L^{soll}(\delta_v)} \end{aligned}$$

**z.B. Umrechnung  
auf Fahrer (Lenkrad)**

# Analyse des Lenkverhaltens

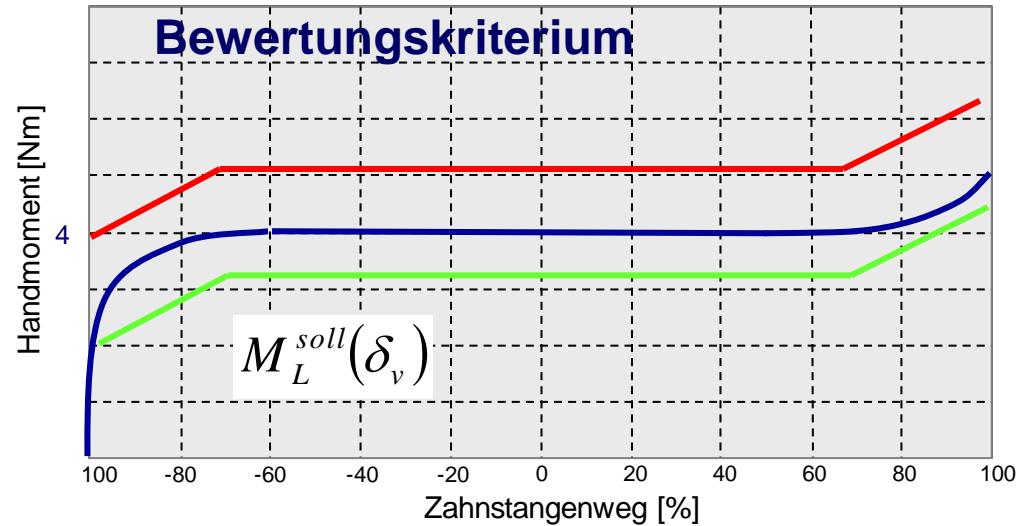
## Zahnstangenleistung



Quelle: Lenkungshandbuch, Pfeffer, P.; Harrer, M.

# Berücksichtigung des Fahrers - Feelingkennlinie

- Rückmeldung
- Fahrgefühl
- ...



# Analyse des Lenkverhaltens

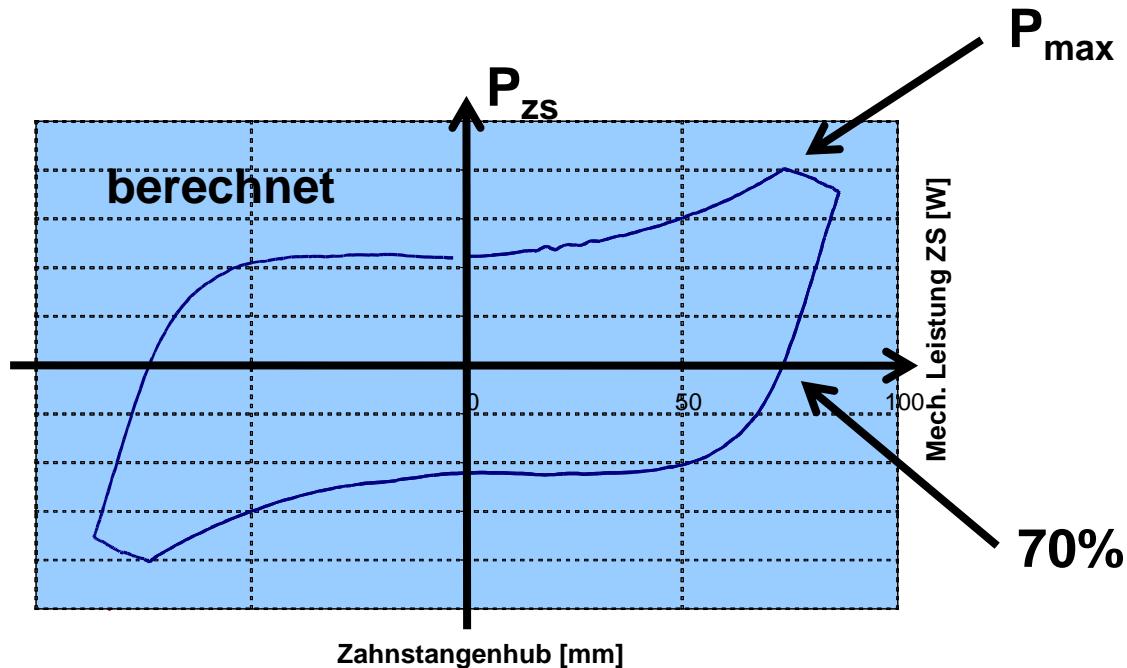
## Zahnstangenleistung

Berechnung der Zahnstangenleistung bei Servounterstützung:

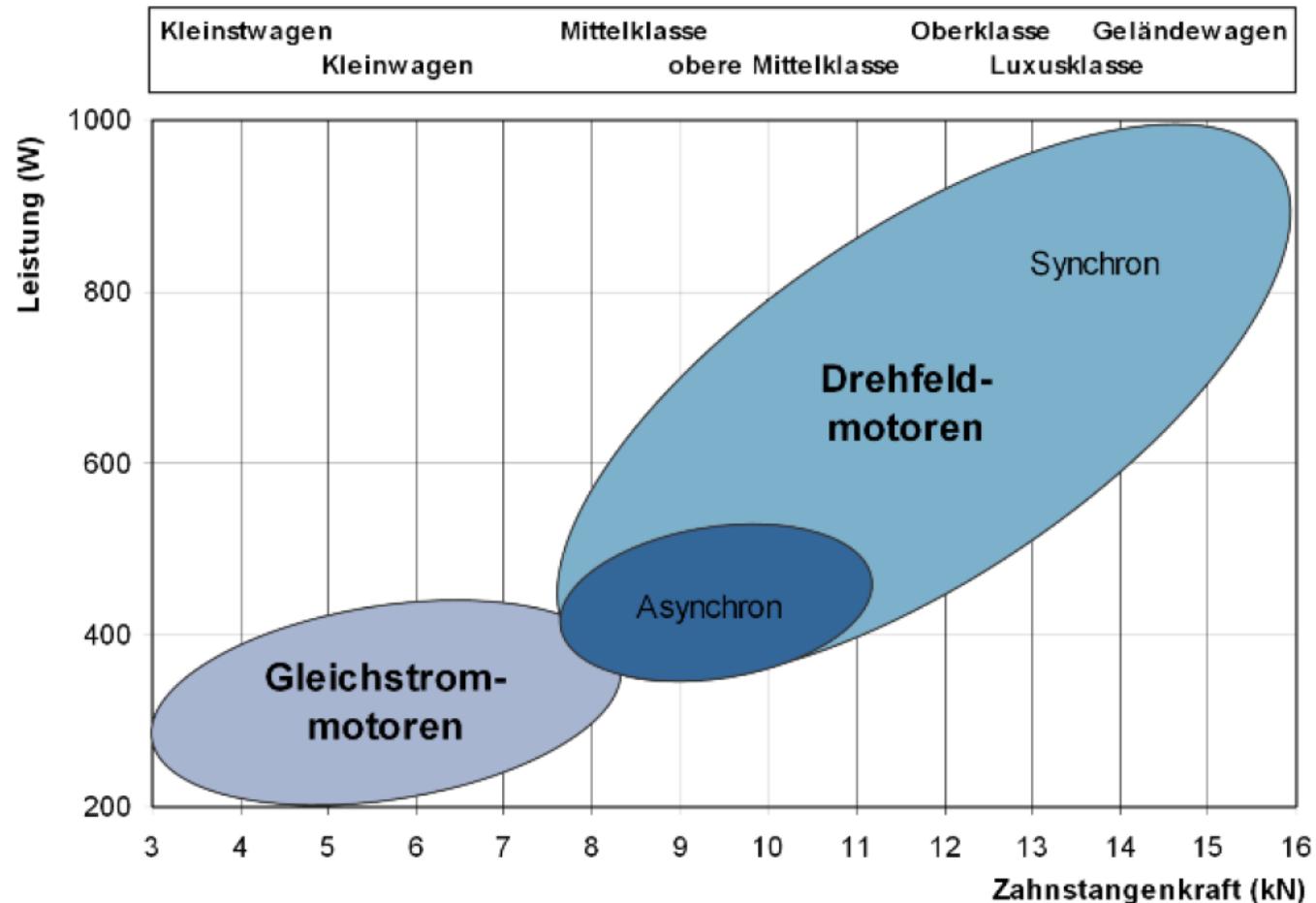
$$\begin{aligned} P_{zs} &= F_{zs,ges}(\delta_v) v_{zs}^{soll}(\delta_v) \quad \text{z.B. Umrechnung auf Fahrer (Lenkrad)} \\ &= (F_{zs}(\delta_v) + i_{rzs} M_L^{soll}) v_{zs}^{soll}(\delta_v) \\ &= F_{zs}(\delta_v) v_{zs}^{soll}(\delta_v) + i_{rzs} M_L^{soll} \frac{1}{i_{rzs}} \omega_L^{soll}(\delta_v) \\ &= \underbrace{F_{zs}(\delta_v) v_{zs}^{soll}(\delta_v)}_{\text{Unterstützungs-aktorik}} + \underbrace{M_L^{soll} \omega_L^{soll}(\delta_v)}_{\text{Fahrer}} \end{aligned}$$

# Analyse des Lenkverhaltens

## Erforderliche Leistung



# Analyse des Lenkverhaltens Motorauslegung



Quelle: Lenkungshandbuch, Pfeffer, P.; Harrer, M.

# Analyse des Lenkverhaltens

## Beispiel

Berechnung der erforderlichen Servounterstützung:

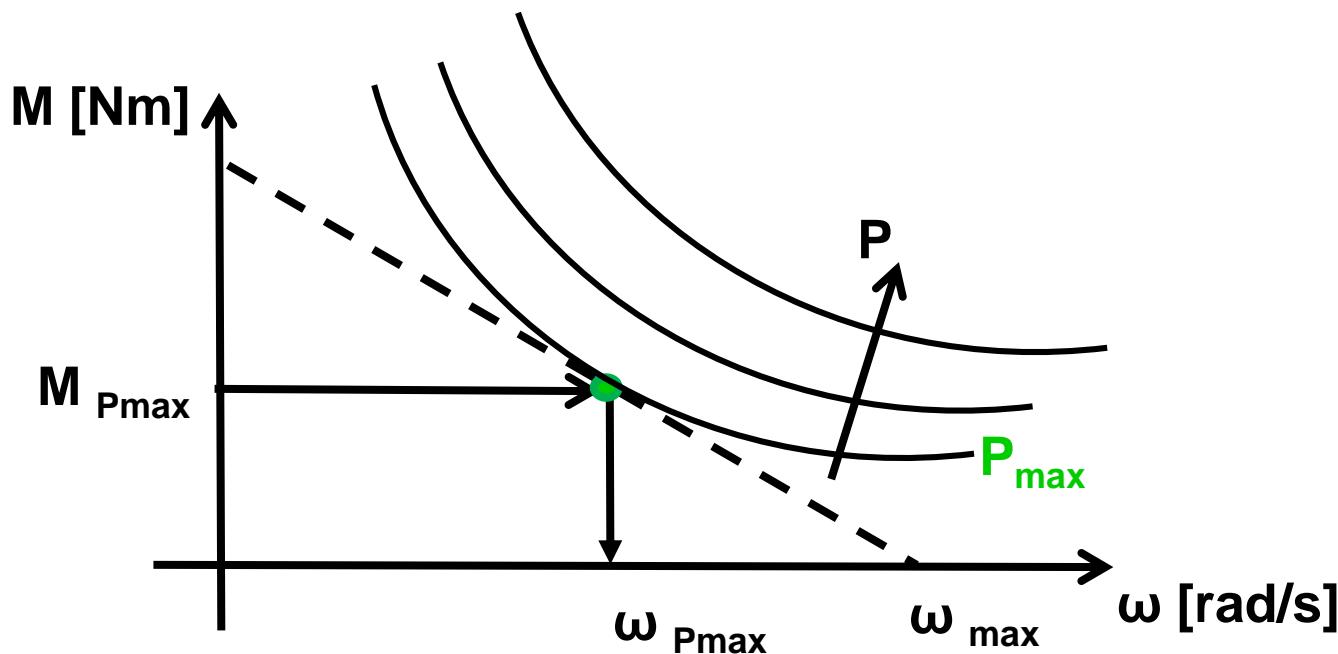
$$\begin{aligned} P_s &= F_{zs} (70\%) \nu_{zs}^{soll} (70\%) \quad \text{Mechanik} \\ \text{Kennlinien} \rightarrow &= (10000N - 112 \frac{\text{rad}}{m} \cdot 8Nm) \nu_{zs}^{soll} (70\%) \\ &= 9100N \cdot \nu_{zs}^{soll} (70\%) \\ &= 9100N \cdot 0.1 \frac{m}{s} = 910W \end{aligned}$$

Aufgrund der erforderlichen Leistung eignet sich hierzu ein **BLDC-Motor** am besten.

# Analyse des Lenkverhaltens

## Motorauslegung

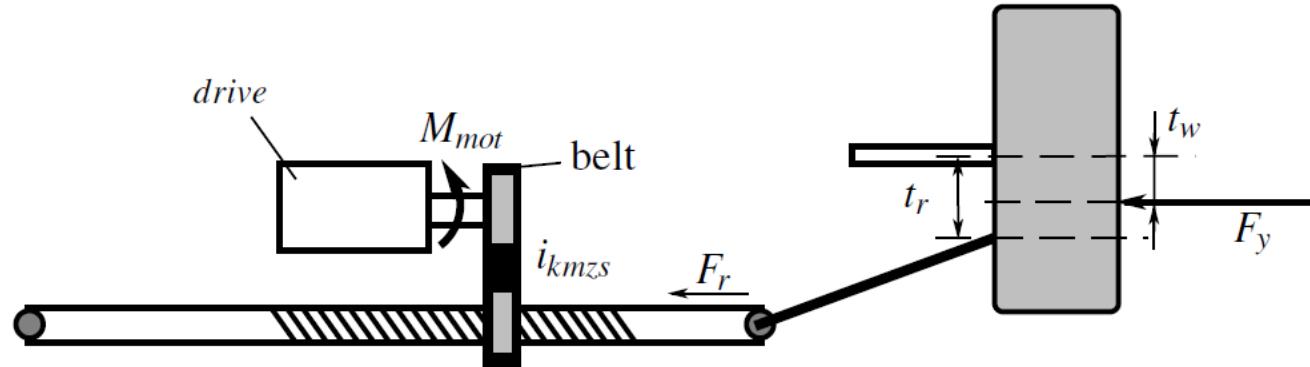
- Zur Vereinfachung wird für die Auslegung ein Gleichstrommotor ausgewählt.
- Wie müsste die Kennlinie eines Gleichstrommotors aussehen, um die Anforderungen zu erfüllen?



Gesucht:  $M_{Pmax}$ ,  $\omega_{Pmax}$

# Analyse des Lenkverhaltens

## Motorauslegung



$$i_{kmzs} = 800 \text{ [rad/m]}, i_{rok} = 3 [-], i_{roz} = 2400 \text{ [rad/m]}$$

$$M_{mot} = F_{zs} \frac{1}{i_{roz}} = \frac{9100N}{2400 \frac{rad}{m}} = 3,79Nm$$

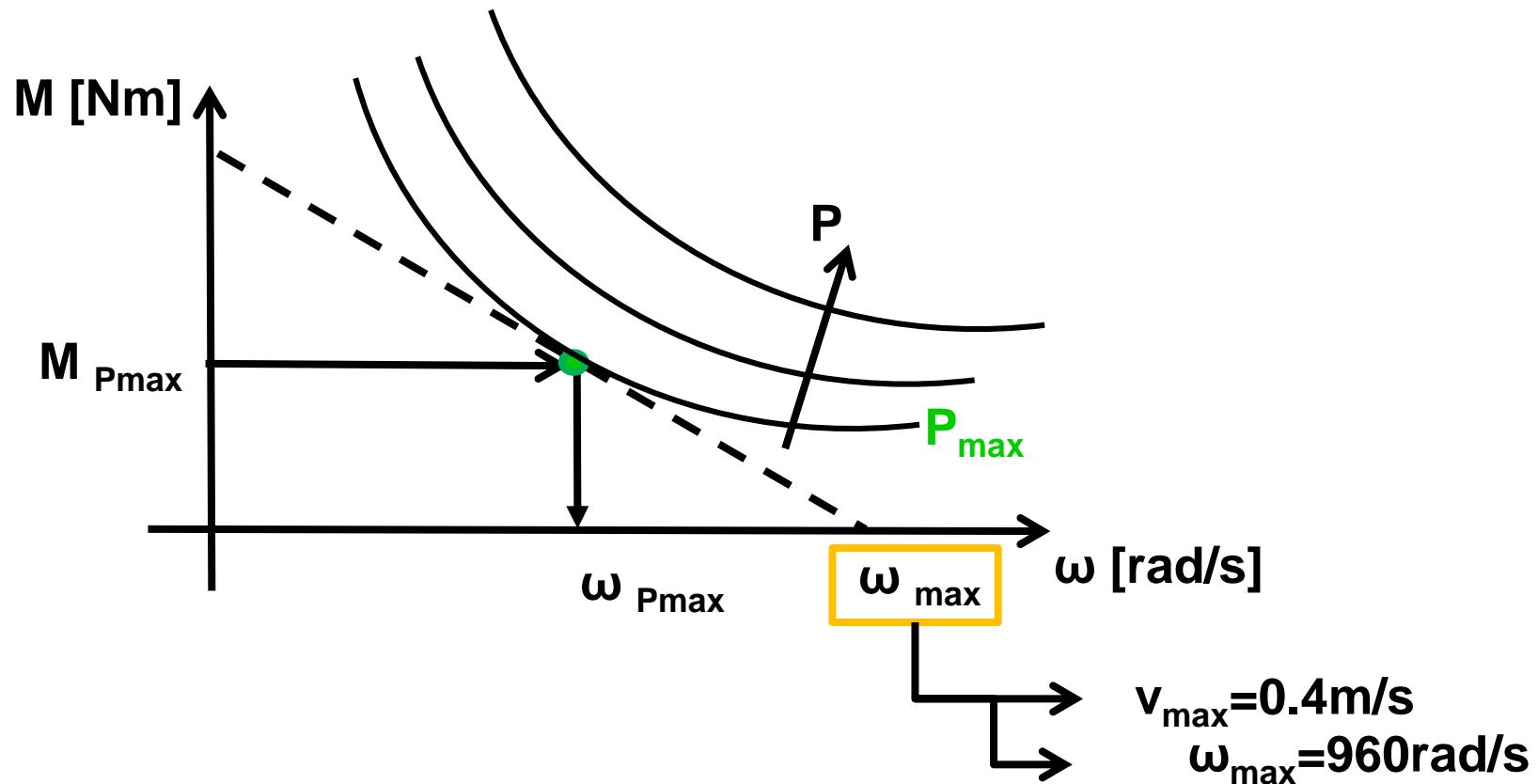
$$\omega_{mot} = v_{zs}^{soll} (70\%) i_{roz} = 0.1 \frac{m}{s} 2400 \frac{rad}{m} = 240 \frac{rad}{s}$$

$$P = 910W$$

# Analyse des Lenkverhaltens

## Motorauslegung

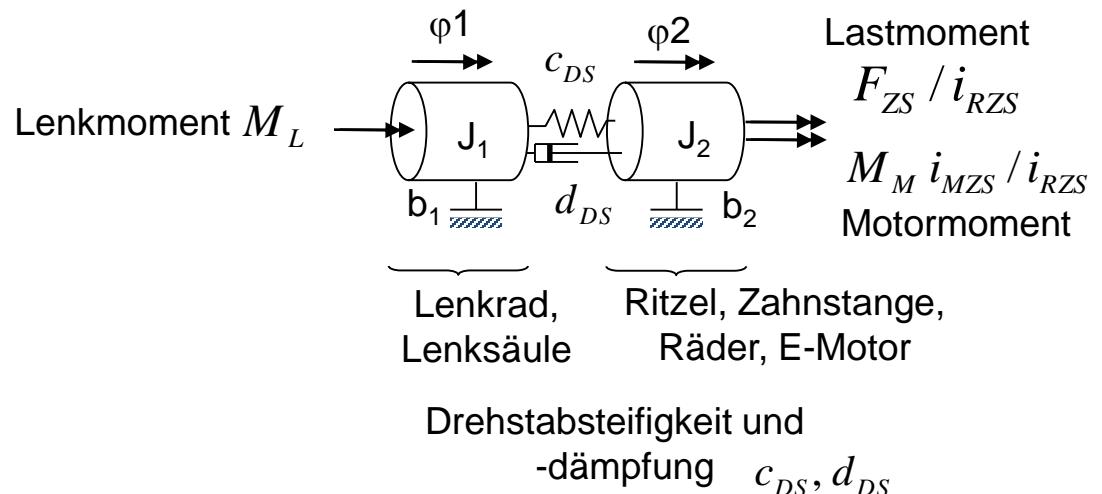
Wie müsste die Kennlinie eines Gleichstrommotors aussehen, um die Anforderungen zu erfüllen?



# Mechanisches Ersatzmodell der Lenkung

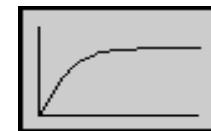


## Mechanisches Ersatzmodell



## Gleichstrommotor

Vereinfacht als PT1-Glied



# Lenkungsregelung – Modellierung

## Bewegungsgleichungen

$$J_1 \cdot \ddot{\phi}_1 = M_L - b_1 \cdot \dot{\phi}_1 + c_{DS} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + b_{DS} \cdot (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)$$

$$J_2 \cdot \ddot{\phi}_2 = c_{DS} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + b_{DS} \cdot (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) - b_2 \cdot \dot{\phi}_2 + \frac{1}{i_{RZS}} \cdot F_{ZS} + \frac{i_{MZS}}{i_{RZS}} M_M$$

$$\dot{M}_M = -\frac{1}{\tau} M_M + \frac{1}{\tau} M_{M,soll} \Rightarrow \tau s M_M + M_M = M_{M,soll} \Rightarrow \frac{M_M}{M_{M,soll}} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (PT1)$$

# Bewegungsgleichung im Zustandsraum

mit

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ M_M \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = M_{M.Soll}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} M_L \\ F_{ZS} \end{bmatrix}$$

folgt:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c_{DS}}{J_1} & \frac{c_{DS}}{J_1} & -\frac{b_{DS} + b_1}{J_1} & \frac{b_{DS}}{J_1} & 0 \\ \frac{c_{DS}}{J_2} & -\frac{c_{DS}}{J_2} & \frac{b_{DS}}{J_2} & -\frac{b_{DS} + b_1}{J_2} & \frac{i_{MZS}}{J_2 i_{RZS}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{J_2 i_{RZS}} & 0 \end{bmatrix} \underline{d}$$

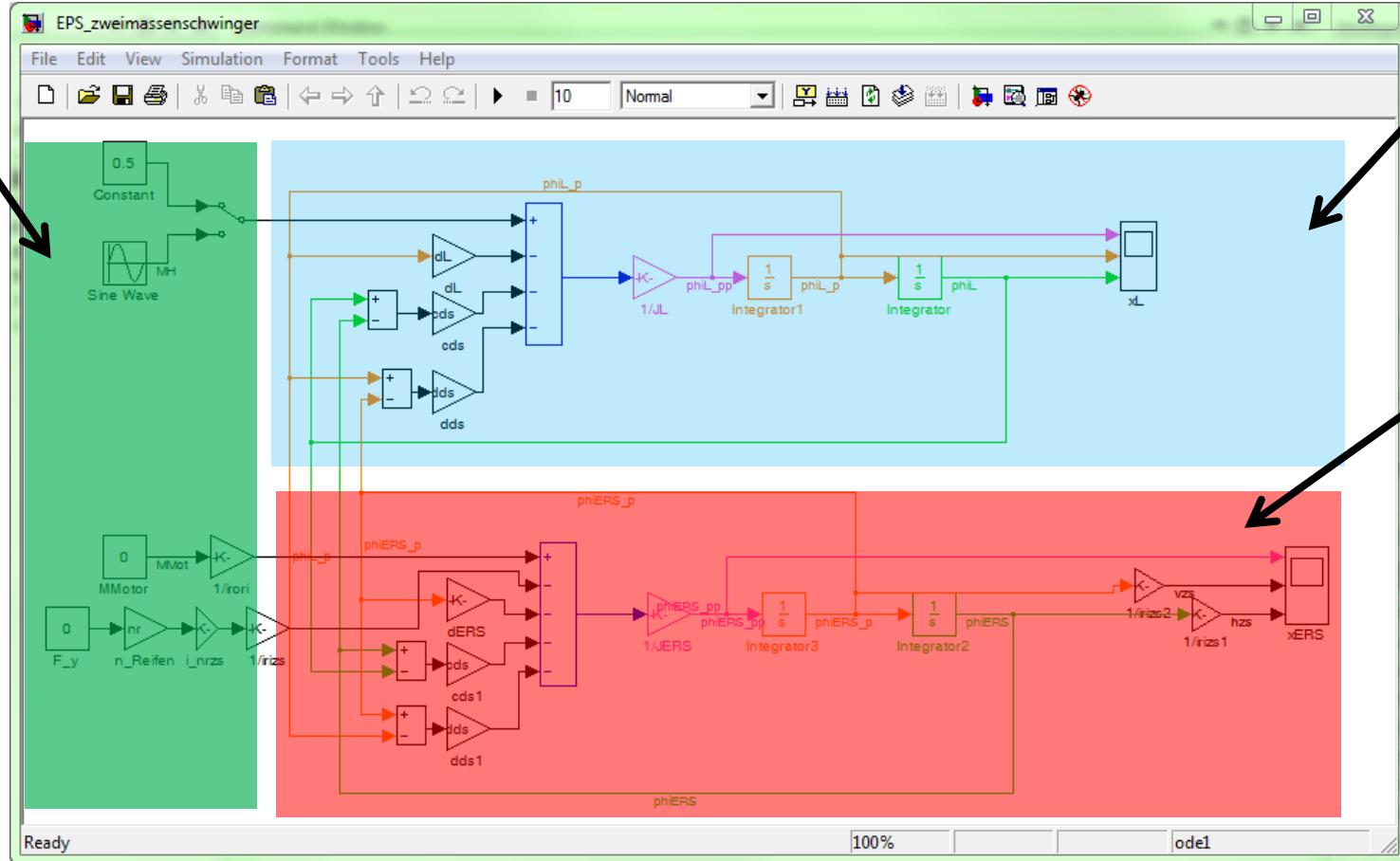
# Transformation des Systems

Das System lässt sich mit einer Ähnlichkeitstransformation reduzieren.  
Der neue Zustandsvektor ergibt sich zu

$$\underline{\tilde{x}} = [\Delta\varphi_{12} \quad \Delta\dot{\varphi}_{12} \quad \dot{\varphi}_2 \quad M_M]^T$$

# Simulation des Lenksystems mit Matlab/Simulink

DGL für

 $\varphi_1$ DGL für  
Ersatz  
-masse

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



# Fahrzeugregelung - Übung (Regelung einer elektromechanischen Servolenkung - EPS)

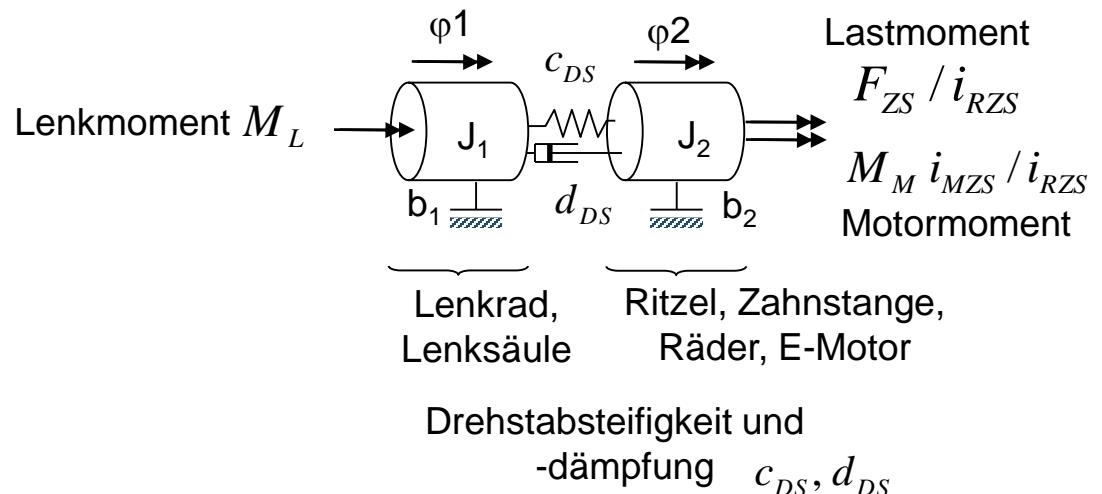
M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

# Mechanisches Ersatzmodell der Lenkung

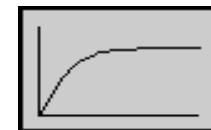


## Mechanisches Ersatzmodell



## Gleichstrommotor

Vereinfacht als PT1-Glied



# Lenkungsregelung – Modellierung

## Bewegungsgleichungen

$$J_1 \cdot \ddot{\phi}_1 = M_L - b_1 \cdot \dot{\phi}_1 + c_{DS} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + b_{DS} \cdot (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)$$

$$J_2 \cdot \ddot{\phi}_2 = c_{DS} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + b_{DS} \cdot (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) - b_2 \cdot \dot{\phi}_2 + \frac{1}{i_{RZS}} \cdot F_{ZS} + \frac{i_{MZS}}{i_{RZS}} M_M$$

$$\dot{M}_M = -\frac{1}{\tau} M_M + \frac{1}{\tau} M_{M,soll} \Rightarrow \tau s M_M + M_M = M_{M,soll} \Rightarrow \frac{M_M}{M_{M,soll}} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (PT1)$$

# Bewegungsgleichung im Zustandsraum

mit

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ M_M \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = M_{M.Soll}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} M_L \\ F_{ZS} \end{bmatrix}$$

folgt:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c_{DS}}{J_1} & \frac{c_{DS}}{J_1} & -\frac{b_{DS} + b_1}{J_1} & \frac{b_{DS}}{J_1} & 0 \\ \frac{c_{DS}}{J_2} & -\frac{c_{DS}}{J_2} & \frac{b_{DS}}{J_2} & -\frac{b_{DS} + b_1}{J_2} & \frac{i_{MZS}}{J_2 i_{RZS}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{J_2 i_{RZS}} & 0 \end{bmatrix} \underline{d}$$

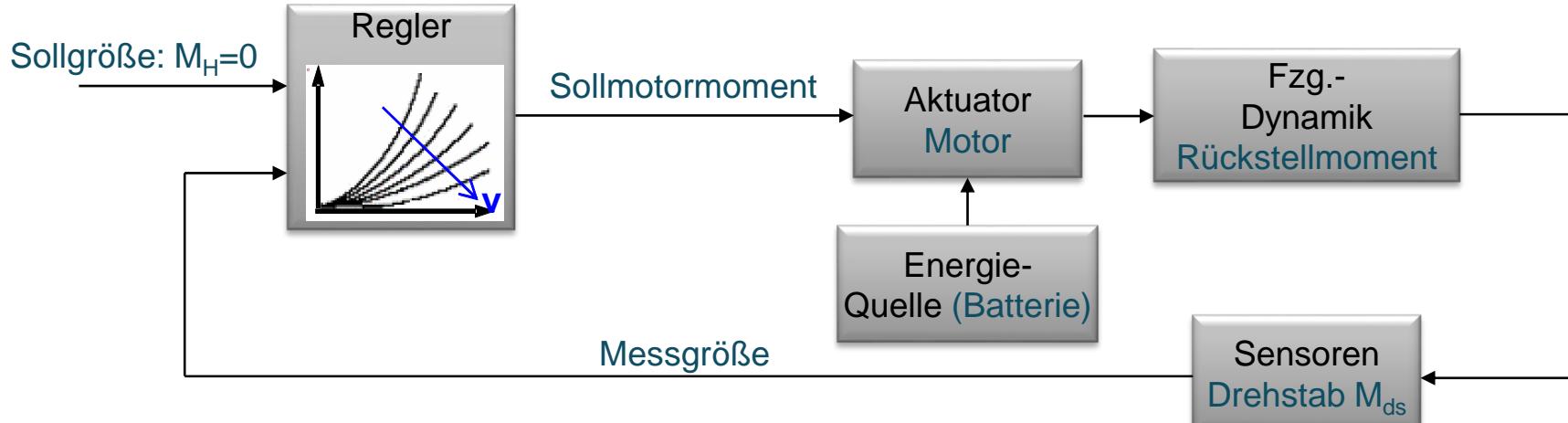
# Transformation des Systems

Das System lässt sich mit einer Ähnlichkeitstransformation reduzieren.  
Der neue Zustandsvektor ergibt sich zu

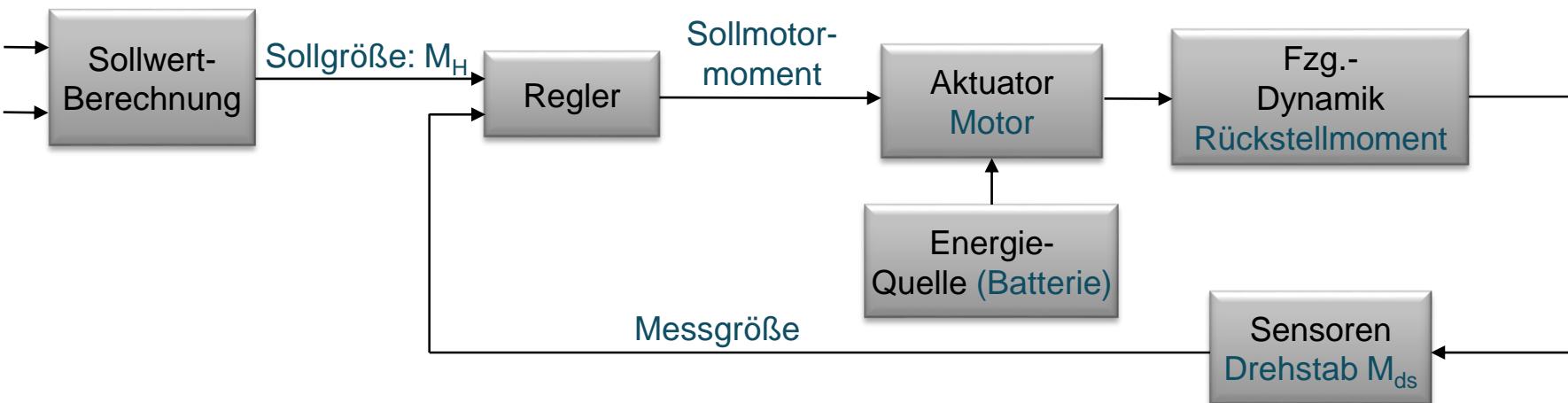
$$\tilde{x} = [\Delta\varphi_{12} \quad \Delta\dot{\varphi}_{12} \quad \dot{\varphi}_2 \quad M_M]^T$$

# Mögliche Regelungskonzepte

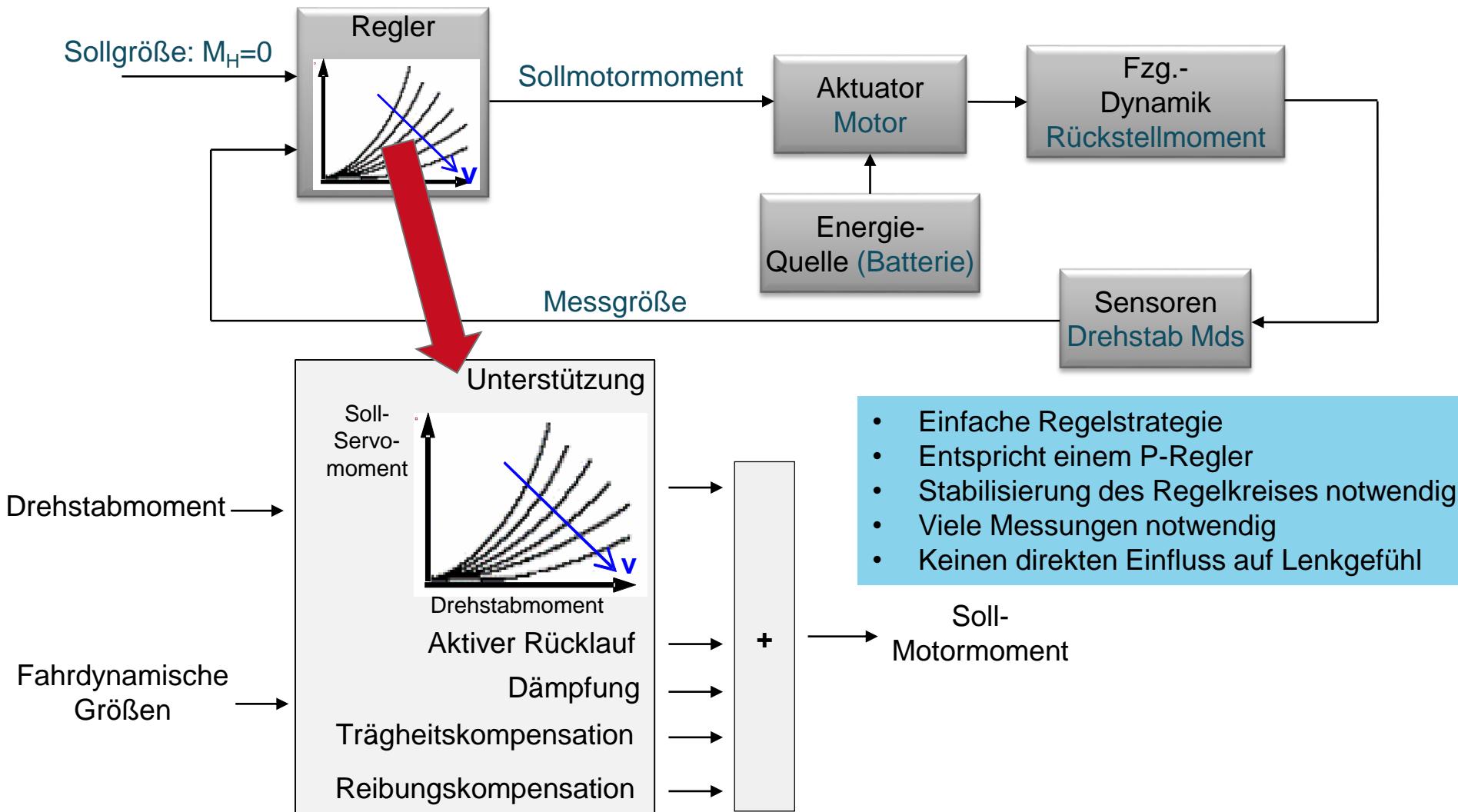
## Regelungskonzept 1 (konventionell):



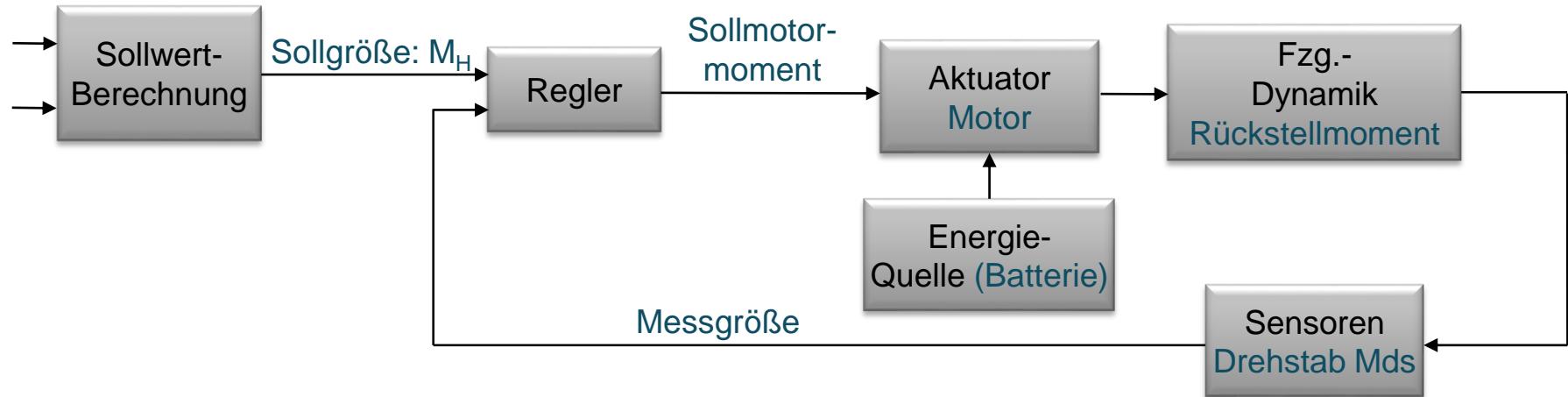
## Regelungskonzept 2:



# Regelungskonzept 1 (konventionell):



# Regelungskonzept 2



## Sollwertberechnung:

- **Aufgabe:** Bestimmung des Sollwertes für Drehstabilitätsmoments → Lenkgefühl

## Regler:

- z.B.: Zustandsreglung durch Polzuweisung, LQR (Linear-quadratic regulator)
- **Aufgabe:** Bestimmung des notwendigen EPS-Motormoments, um das gewünschte Drehstabilitätsmoments einzustellen.
- Zahnstangenkräfte und Fahrerhandmoment werden dabei als Störgrößen betrachtet.
- Trägheiten und Reibungen werden durch den Regler *automatisch* kompensiert.

## Ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

heißt **vollständig steuerbar**, wenn es in endlicher Zeit  $t_e$  von jedem **beliebigen Anfangszustand**  $\mathbf{x}_0$  durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  in einen **beliebig vorgegebenen Endzustand**  $\mathbf{x}(t_e)$  überführt werden kann.

# Steuerbarkeitskriterium von Kalman

## Satz:

Das System  $(A, B)$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix  $S_s$  den Rang  $n$  hat:

Rang  $S_s = n \quad mit$

$$S_s = [B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-1}B]$$

Hierbei

$$\left\{ \dot{x}(t) \right\} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \left\{ x(t) \right\} + \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \left\{ u(t) \right\}$$

## Ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

heißt **vollständig beobachtbar**, wenn der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  aus dem über einem endlichen Intervall  $[0, t_e]$  bekannten Verlauf der Eingangsgröße  $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$  und der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_{[0, t_e]}$  bestimmt werden kann.

# Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

## Satz:

Das System  $(A, C)$  ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix  $S_B$  den Rang  $n$  hat:

Rang  $S_B = n \quad mit$

$$S_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Hierbei

$$\left\{ \mathbf{y}(t) \right\} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{x}(t) \right\}$$

# Polvorgabe durch Zustandsrückführung

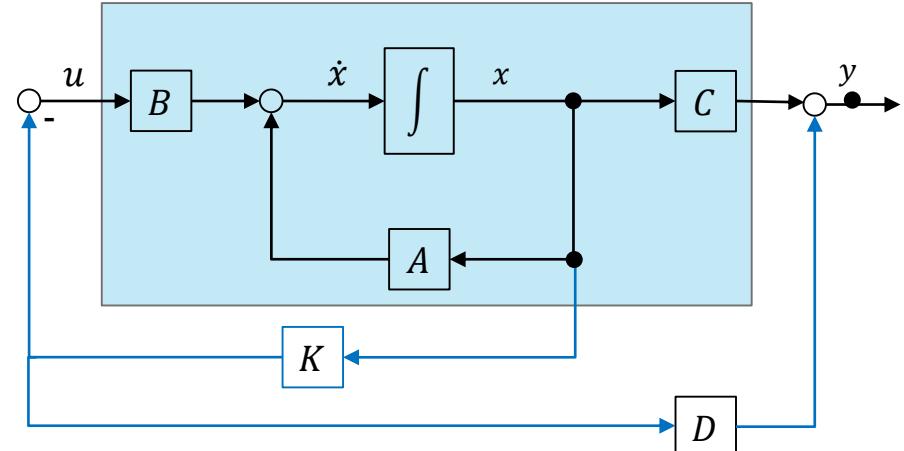
## ➤ Systemmodell

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

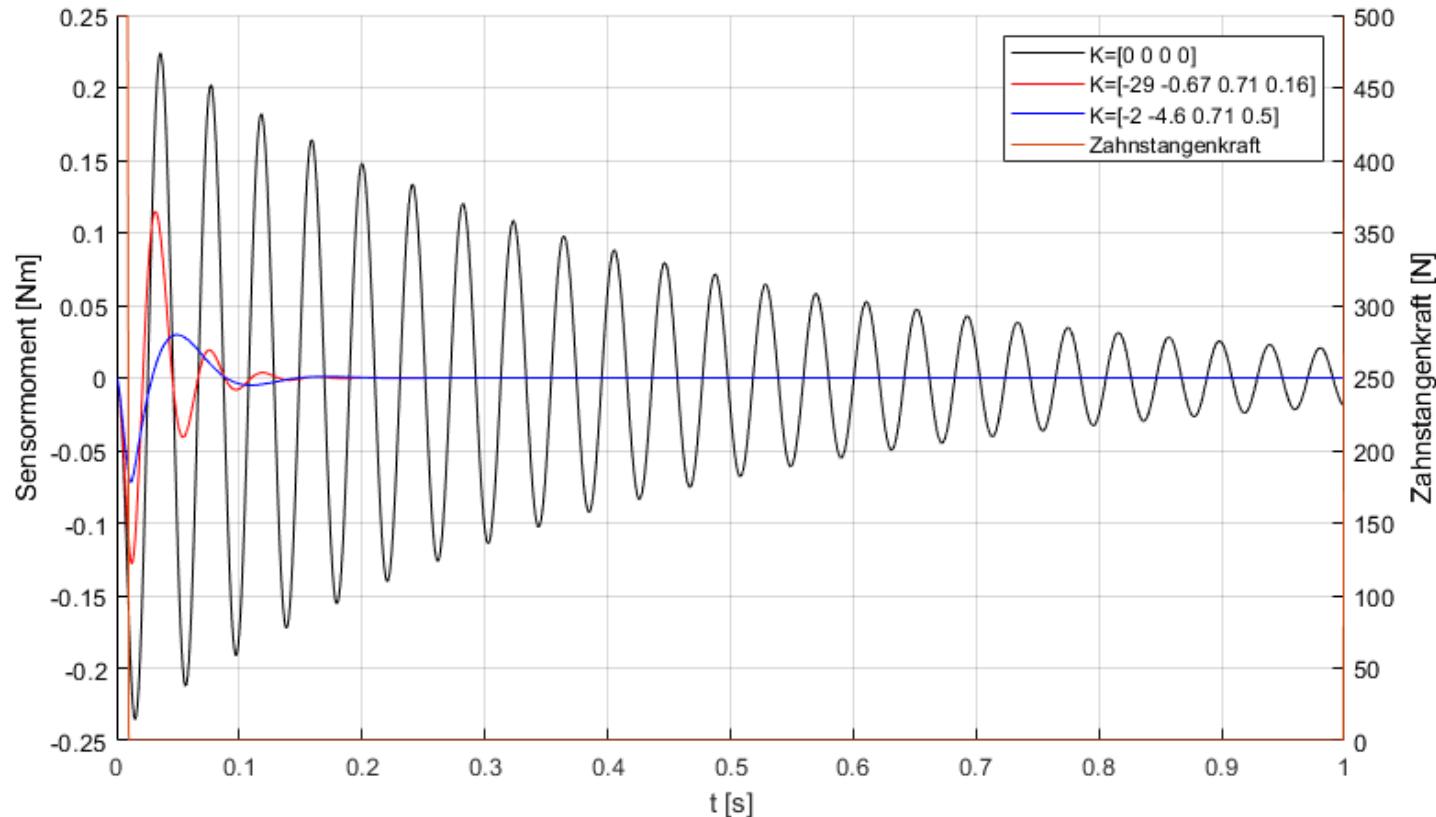
$$y = Cx + Du$$

## ➤ Zustandsrückführung

- Voraussetzungen zum Entwurf:
  - Steuerbarkeit
  - Eine Stellgröße ( $m = 1$ )
- Ergebnis: Eigenwerte können durch die Wahl von  $K$  **zielgerichtet** verschoben werden
- Einschränkung: Alle Zustände müssen **messbar** sein



# EPS-Simulation



# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

# BACKUP

# Stabilität von Mehrgrößensystemen

## Allgemein

### Stabilität



#### Zustandsstabilität

Das System kehrt von einer **Auslenkung  $x_0$  des Zustandes aus der Gleichgewichtslage** in die Gleichgewichtslage zurück.

#### Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Das System besitzt bei **Erregung durch eine beschränkte Eingangsgröße** eine **beschränkte Ausgangsgröße**.

# Stabilität von Mehrgrößensystemen

## Definition Zustandsstabilität

### Definition (Zustandsstabilität)

Der Gleichgewichtszustand  $x_g = 0$  des Systems heißt stabil (im Sinne von LJAPUNOW) oder zustandsstabil, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so dass bei einem beliebigen Anfangszustand, der die Bedingung

$$\|x_0\| < \delta$$

erfüllt, die Eigenbewegung des Systems die Bedingung

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t > 0$$

erfüllt. Der Gleichgewichtszustand heißt asymptotisch stabil, wenn er stabil ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

gilt.

# Stabilität von Mehrgrößensystemen

## Kriterien für Zustandsstabilität

### Satz (Kriterium für die Zustandsstabilität)

- Der Gleichgewichtszustand  $x_g = 0$  des Systems ist stabil, wenn die Matrix  $A$  diagonalähnlich ist und alle Eigenwerte der Matrix  $A$  die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllen.

- Der Gleichgewichtszustand  $x_g = 0$  des Systems ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix  $A$  die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

erfüllen.

# Stabilität von Mehrgrößensystemen

## Definition Eingangs-Ausgangs-Stabilität

### Definition 2.4 (Eingangs-Ausgangs-Stabilität)

Ein lineares System (2.72), (2.73) heißt eingangs-ausgangs-stabil (E/A-stabil), wenn für verschwindende Anfangsauslenkungen  $x_o = 0$  und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal

$$\|u(t)\| < u_{\max} \quad \text{für alle } t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$\|y(t)\| < y_{\max} \quad \text{für alle } t > 0. \tag{2.74}$$

# Stabilität von Mehrgrößensystemen

## Kriterien für Eingangs-Ausgangs-Stabilität

- Das System (2.72), (2.73) ist genau dann E/A-stabil, wenn sämtliche Pole  $s_i$  seiner Übertragungsfunktionsmatrix  $G(s)$  die Bedingung

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.76)$$

erfüllen.

- Ist das System asymptotisch stabil, so ist es auch E/A-stabil.
- Gilt  $\operatorname{Re}(s_i) \leq 0$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) kann das System noch zustandsstabil sein