$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = -A$$

$$\underline{v} = \vec{w} \times \vec{r} = \underline{\tilde{w}} \cdot \vec{r}$$

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{18+10} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{11} = (-1)^2 \cdot \det(9) = 9$$

$$\tilde{A}_{12} = (-1)^3 \det(2) = -2$$

$$\tilde{A}_{21} = (-1)^3 \det(-5) = 5$$

$$\tilde{A}_{22} = (-1)^4 \det(2) = 2$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathrm{adj}}(A) = \tilde{A}^T$$

adjunkt

$$V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \|V\|_1 = |2| + |1| + |4| = 7$$

$$\|V\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$\|V\|_\infty = \max\{|2|, |1|, |4|\} = 4$$

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \qquad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a + 2b = 0 \\ 2a + 4b = 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow a + 2b = 0$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a + 3b = 0 \\ a + \frac{1}{2} b = 0 \end{array} \quad ↯$$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang} = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang} = 2$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $\det(A - \lambda I)$

$= \begin{pmatrix} 5-\lambda & -i \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)\cdot(1-\lambda)$

2. $\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 1$

3.1 EV zu $\lambda_1 = 5$

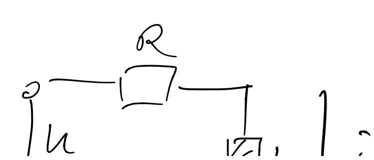
$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{V_1} \stackrel{!}{=} 0 \qquad V_1 = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}$

3.2 EV zu $\lambda_2 = 1$

$\begin{pmatrix} 4 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{V_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4V_{21} - iV_{22} = 0$

$V_2 = a \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$

DGL 1. Ordnung



$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = U_{in}$$

DGL: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{1}{L} U_{in}$

Ansatz $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$

homogene Lsg. $U_{in} \stackrel{!}{=} 0$

$$i_{in}(t) = K \cdot e^{\lambda t}$$

$$K \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = -\frac{R}{L} \cdot K \cdot e^{\lambda t}$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

$$i_{in}(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_p(t) = K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$\dot{K}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + K(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$= -\frac{R}{L} K(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{L} U_{in}$$

$$\dot{K}(t) e^{-\frac{R}{L}(t)} = \frac{1}{L} U_{in}$$

$$\dot{K}(t) = \frac{1}{L} e^{\frac{R}{L}(t)} \cdot U_{in}$$

$$K(t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{\frac{R}{L}\tau} \cdot U_{in}(\tau) \cdot d\tau$$

$$i(t) = \underbrace{K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{Eigenbewegung}} + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{L} e^{\frac{R}{L}(\tau - t)} \; U_{in}(\tau)\, d\tau}_{\text{Erzwungene Bewegung}}$$

$i(0) = 0 \rightarrow K = 0$

$x(\tilde{t})$, $u(t)$ für $t \geq \tilde{t}$

$\Rightarrow$ bekannt

$y(t)$ für $t \geq \tilde{t}$ eindeutig berechnen

$x_1 = z \qquad x_2 = \dot{z} \qquad x_3 = \ddot{z}$

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = x_3$

$\dot{x}_3 = -\frac{5}{\sqrt{2}} x_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{2}} u$

$$\underline{\dot{x}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} u$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} u_c \\ i \end{pmatrix} \qquad u = U_e$$

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + u_C = U_e$$

$$C \cdot \frac{du_c}{dt} = i \Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u$$

$$y_1 = (1 \quad 0)\, \underline{x}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \underline{x}$$

$$\underline{\dot{\tilde{x}}} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{B} u$$

$$Y = \tilde{C}^T \tilde{x} + D u$$

$$\tilde{A} = \operatorname{diag} \lambda_i = V^{-1} \cdot A \cdot V$$

$$\underline{V} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots, \underline{v}_n)$$

$$\tilde{B} = V^{-1} \cdot B$$

$$\tilde{C} = C \cdot V$$

$$\hat{X} = \underline{V}^{-1} x(t)$$

1) $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow (-3-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = 3$$

2) EV λ_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \underline{v}_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EV λ_2

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{v}_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = -\frac{6}{7} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = -\frac{6}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{6}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = (0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1)$$

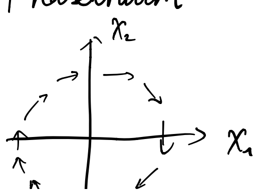
$$\dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \tilde{x} + \left(-\frac{6}{7}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

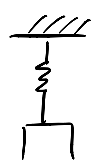
$$y = (-1 \quad -1)\, \tilde{x}$$

---

25. 04. 2019

Phaseraum





$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autonomes System: $\dot{x} = A\, x(t) + \cancel{B \cdot u(t)}$

nur $\dot{x} = A \cdot x$,
ohne Eingangsgröße

Ruhelage: $\dot{x} \overset{!}{=} 0$

$-4 x_{R1} = 0 \qquad x_{R1} = 0$

$3 x_{R1} - x_{R2} = 0 \Rightarrow x_{R2} = 0 \Rightarrow x_R = (0, 0)$

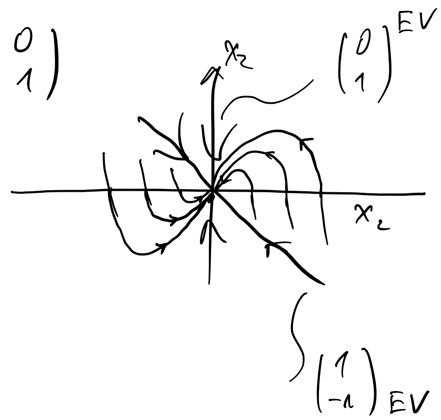
$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$Re(\lambda_1) < 0 \longrightarrow$ asym. stabil

$Re(\lambda_2) \leq 0 \longrightarrow$ stabil

$\lambda_1 \longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -4$

$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_2 = -1$

$\hookrightarrow$ dominierend

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\dot{x} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 3{,}5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$

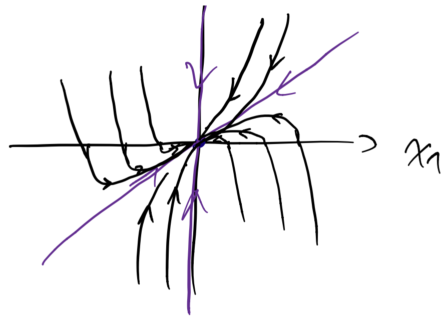
$\det(A) = 2 \neq 0 \Rightarrow x_R = (0, 0)$

$\lambda_1 = -0{,}5 \quad \lambda_2 = -4$

$\hookrightarrow$ dominierend

$\Rightarrow Re(\lambda) < 0 \Longrightarrow$ asymp stabil

$\lambda_1 \rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



• Ruhelage

v_1

v_2

[MatLab pplane8 setup]

Linearisierung

$$\dot{x}_1 = (2x_1 - 4x_2 - 2)\,x_2$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 - 5)\cdot x_1$$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = (2x_1 - 4x_2 - 2)\,x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 5)\cdot x_1$$

Ruhelage: $(0,0)$; $(5,0)$; $(5,2)$; $(0,-0{,}5)$

试3 4个点，最后得到 $(0,-0{,}5)$ stabil

Gesucht:

- Linearisiertes Modell um den Arbeitspunkt $x_R = (0, -0{,}5)^T$

Jacobimatrix

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_2 & -4x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 2 \\ x_1 + x_2 - 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 - 8x_2 - 2 \\ 2x_1 - 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_R = (0, -0{,}5)^T$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J|_{(0,-0,5)} = \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ -5 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \qquad \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} & \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$\det(A) = 10 \neq 0 \longrightarrow \underline{x_R = (0,0)} \quad ?$$

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -5 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda(\lambda+1) + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} x$$

Gesucht: EW, Pole, Übertragungsfunktionsmatrix

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \text{Gegeben}$$

EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) - 10 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{11} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{11}$$

Übergangsfunktionsmatrix:

$$\boxed{G(s) = C \cdot (s \cdot I - A)^{-1} \cdot B + D}$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \cdot \begin{pmatrix} s+1 & -5 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \underline{0}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-1) - 10} \cdot [1 \quad 0] \cdot \begin{pmatrix} s-1 & 5 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

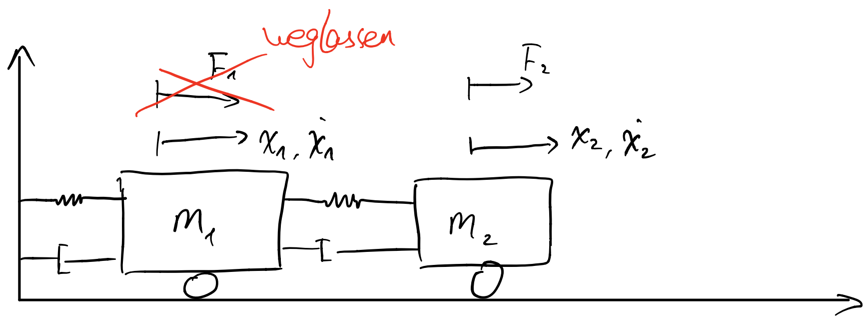
$$= \frac{1}{s^2-11} \cdot (s-1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2-11} \cdot \begin{pmatrix} s-1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s^2-11} & \frac{-5}{s^2-11} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 - 11 \overset{!}{=} 0 \qquad s_{1,2} = \pm\sqrt{11}$$

09.05.2019



$$\left.\begin{array}{l} S_S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \\ \text{Rang}(S_S) = n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{vollständig steuerbar}$$

$A \rightarrow 2 \times 2$

$S_S = (B \quad AB)$

$$\left.\begin{array}{l} S_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \\ \text{Rang}(S_B) = n \end{array}\right\} \text{vollständig beobachtbar}$$

z.B. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

EW

$\det(A-\lambda I)=0$

$(-4-\lambda)(-1-\lambda)=0$

$\lambda_1=-4 \quad \lambda_2=-1$

$y=\underbrace{[1 \quad 0]}_{C}\cdot x \Rightarrow y=x$

Wir haben kein Eingang gegeben.

$G(s)=C\cdot(s\cdot I-A)^{-1}B+D$ $=0$

$=[1 \quad 0]\cdot\begin{pmatrix} s+4 & 0 \\ -3 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{(s+4)(s+1)}\cdot[1 \quad 0]\cdot\begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 3 & s+4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{(s+4)(s+1)}\cdot[1 \quad 0]\cdot\begin{pmatrix} s+1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$=\frac{s+1}{(s+4)(s+1)}=\frac{1}{s+4}$

$S_S=(B \quad AB)=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\text{Rang}(S_S)=2$

$\det(S_S)=3\neq 0 \Rightarrow$ voll Rang hat.

$\text{Rang}(S_S)=2=n \Rightarrow$ vollständig steuerbar

$S_B=\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\text{Rang}(S_B)=1$

$\det(S_B)=0 \Rightarrow$ nicht voll Rang hat

$\text{Rang}(S_B)=1\neq n \Rightarrow$ nicht vollständig beobachtbar

System 3. Ordnung

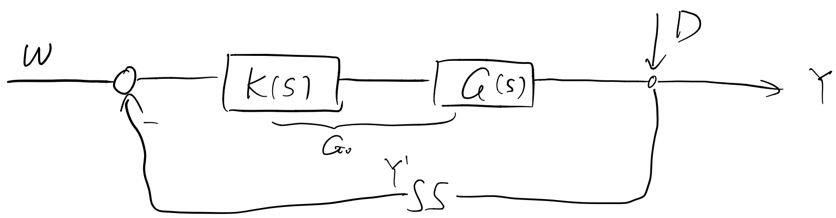
$G(s)=\frac{s^2+8s+4}{s^3+4s^2-4s-16} \Rightarrow$ vollständig $\begin{cases}\text{steuerbar}\\ \text{beobachtbar}\end{cases}$

23.05.2019 Nyquistkriterium

Nyquist:

Voraussetzung:

- offene Kette nicht Sprungfähig
- Pole der offenen Kette liegen nicht auf Imag. Achse.



$$Y(s) = G_w(s) \cdot W(s) + G_d(s) \cdot D(s)$$

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} \qquad \text{mit } G_0(s) = G(s)\,K(s)$$

Rückführdifferenzfkt.

$$F(s) = \frac{Y' - Y}{Y'} = 1 + G_0(s)$$

F(s) Nullstelle sind Polstellen des geschl. Kreises.

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}$$

$$F(s) = 1 + G_0(s) = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)}$$

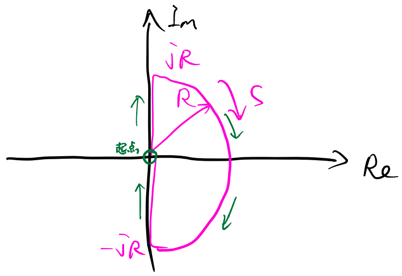
Pole der offenen Kette aus $N_0(s)$

$$\Rightarrow F(s) = k \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - s_i)}$$

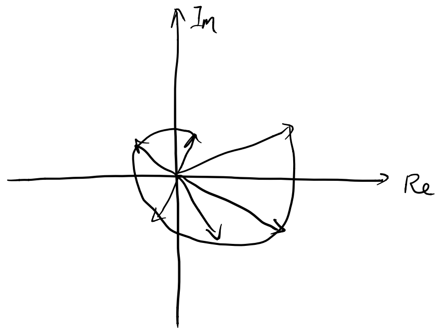
$\bar{s}_i$ – Polstelle der geschl. Kette

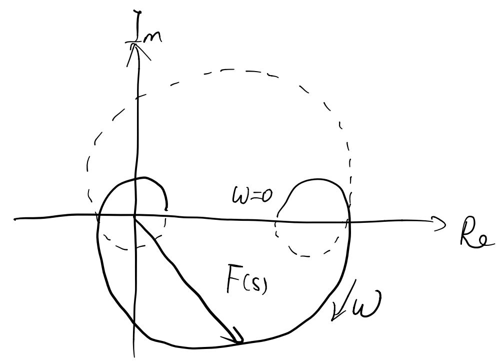
s_i – Polstelle der offene Kette

Nyquist Kurve D

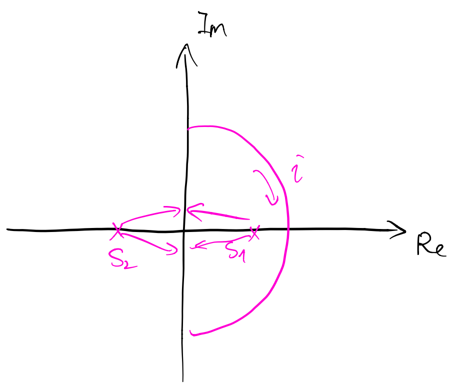


Ortskurve





Def. $\Delta \arg F(s) = \phi_F(-j0) - \phi_F(+j0)$



Pole links der Kurve

$\phi_2(-j0) = \phi_2(+j0) = 0$

$\Delta \arg(s - s_2) = 0$ I

Pole rechts

$\Delta \arg(s - s_1) = 2\pi$ II

$$\Delta \arg F(s) = \cancel{\Delta \arg K} + \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg(s - \bar{s}_i) - \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg(s - s_i)$$

$$\Delta \arg F(s) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg(s - \bar{s}_i) - \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg(s - s_i) \quad \text{III}$$

$\bar{n}^+$ — Anzahl der Pole des geschl. Kreises mit positiven Real

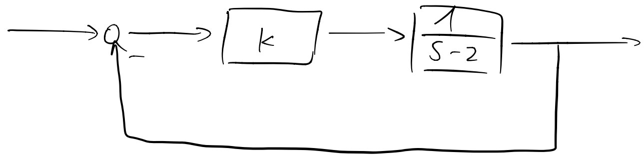
n^+ — Anzahl der Pole ·· offenen ··

$$\Delta \arg F(s) = 2(\bar{n}^+ - n^+)\pi$$

alle Pole des geschl. Kreises sind stabil, wenn $\bar{n}^+ = 0$

SISO $\Delta \arg F(s) \overset{!}{=} -2n^+\pi$

Für welche k ist der Regelkreis stabil ?



① Stablität über Pole

$$G(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{k}{s-2}}{1+\frac{k}{s-2}} = \frac{k}{s-2+k}$$

für $k>2$ ist das System E/A stabil.

② Nachweis mit Nyquist

Pole des offene Kreises:

$$s_i = 2 \longrightarrow n^+ = 1$$

$$\Delta \arg F(s) = 2\pi \quad \text{(Gegen Uhrzeiger)}$$

$$F(s) = 1 + G_o(s)$$

$$\Delta \arg F(s) = 2\pi \rightarrow \text{stabil}$$

Beispiel 2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0{,}333 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0{,}333 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = x \qquad u = -(5 \quad -0{,}375)\, x$$

$$G = C(sI-A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+0{,}333 & 0 \\ -2 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+0{,}333)(s+2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 2 & s+0{,}333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}333 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0{,}333}{s+0{,}333} \\ \frac{0{,}667}{(s+0{,}333)(s+2)} \end{pmatrix}$$

$$G_o = G \cdot k = G \cdot (5 \quad -0{,}375)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1{,}665}{s+0{,}333} & \frac{-0{,}1244}{s+0{,}333} \\ \frac{3{,}33}{(s+0{,}333)(s+2)} & \frac{-0{,}2498}{(s+0{,}333)(s+2)} \end{pmatrix}$$

Pole von G_o

$s_1 = -0{,}333 \qquad s_2 = -2$

$\hookrightarrow n^+ = 0$

$\Delta \arg F(s) \overset{!}{=} 0$

$F(s) = 1 + G_o$

Das System ist E/A stabil.

① offene Kette stabil?

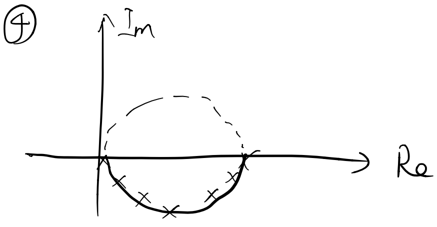
$\hookrightarrow$ stabil $\longrightarrow n^+ = 0$

② $\Delta \arg F(s) \overset{!}{=} 0$

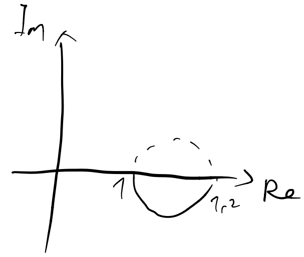
③ Messwerte

ω	$G_o(j\omega)$	$\varphi = \frac{\Delta t}{2\pi} \cdot 360 \cdot \omega$
0	0,2	0
2	0,19	−22
5	0,14	−45
20	0,05	−80
100	0,01	−88

④



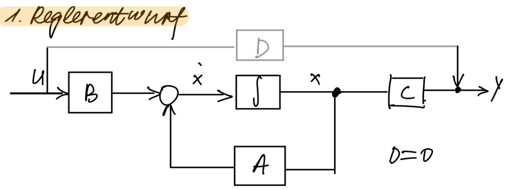
$F(s) = 1 + G_o(s)$



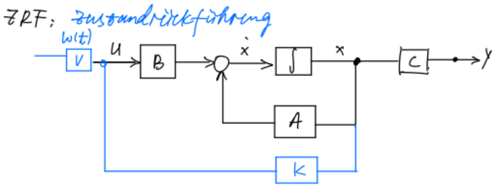
$\Rightarrow$ Das System ist E/A stabil.

06.06.2019

1. Reglerentwurf



ZRF: Zustandrückführung



Zustandsraumdarstellung:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} \quad \text{mit} \quad \underline{D} = 0$$

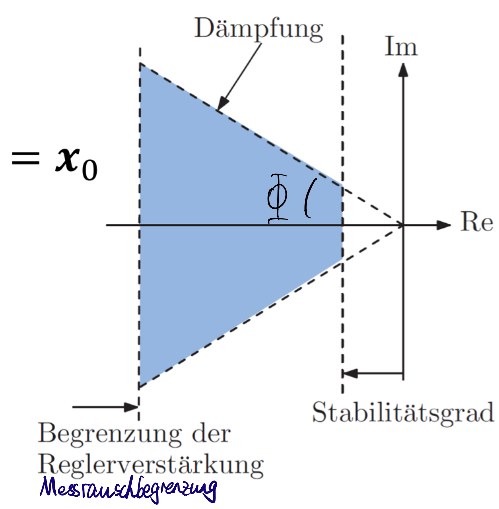
Zustandrückführung

$$\underline{u} = -\underline{k}\,\underline{x} + \underline{V} \cdot w(t)$$

$$\underline{\dot{x}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{k})\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{V}\,w(t)$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

$\underline{k}$ beeinflusst $\underline{A} \longrightarrow \lambda_i \longrightarrow$ Stabilität



Ziel:

besser D.C nach links platzieren

$\Phi \downarrow \longrightarrow$ größer Dämpfung

$\quad \longrightarrow$ Überschwingszeit

Regelungsnormalform

?

$$k_R^T = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}) - (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

$$P(\bar{\lambda}) = \lambda^{n} + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0$$

Für die Reglerparameter folgt

2 4

$$P(\bar{\lambda}) = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \stackrel{!}{=} 0$$

$$T_R = \begin{pmatrix} S_R^T \\ S_R^T \cdot A \\ \vdots \\ S_R^T \cdot A^{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad S_R^T = (0, 0, \dots, 1)\, S_S^{-1}$$

↳ letzte Zeile der Inversen der Steuerbarmatrix

↳ Transformationsmatrix

$\curvearrowright$ $u = -k^T x(t)$ $\qquad \underline{u} = -k\underline{x}$

$k^T = k_R^T \cdot T_R^{-1}$

Benutzung eines Theorems

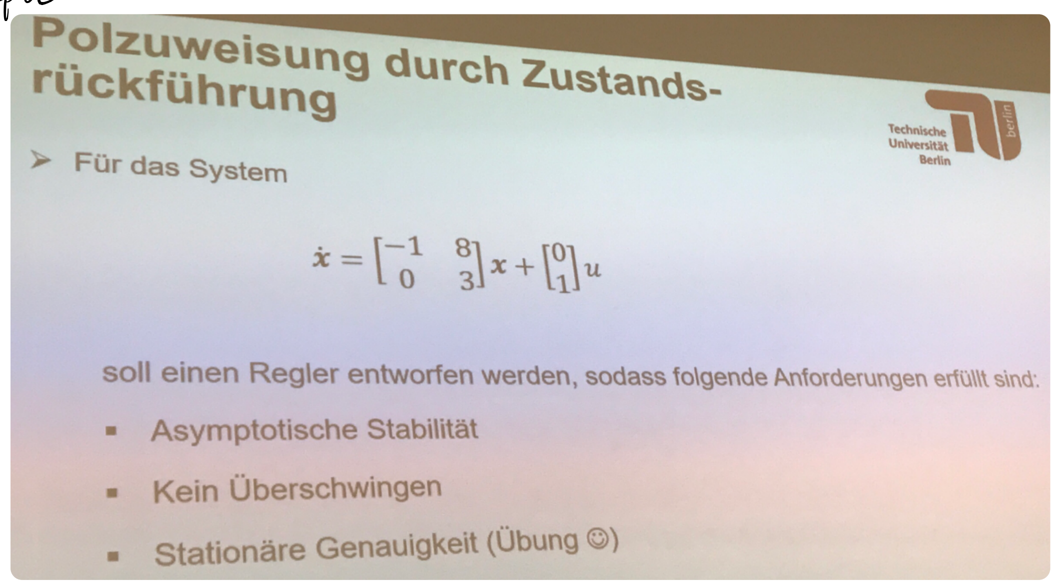
$$k^T = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{n-1}, 1) \begin{pmatrix} S_R^T \\ S_R^T \cdot A \\ \vdots \\ S_R^T \cdot A^{n-1} \end{pmatrix}$$

↘ Ackermann-Formel

Aus Neuer Matrix

mit $p(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^{n} + \bar{a}_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0$

Beispiel



① $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$ → Regelstrecke $\quad$ chara. Polynom: $(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$

② kein Überschwingungen

z.B. $\bar{\lambda}_1 = -4 \qquad \bar{\lambda}_2 = -6$ $\qquad$ (Auswählen — Wünschewert) ?

Bedingung:

— eine Stellgröße $\quad m = 1$ ✓

— Nach Kalman: $\text{Rang}(S_s) \overset{!}{=} n$

$$S_s = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Rang}(S_s) = 2 = n$$

$\det(S_s) = -8 \neq 0 \quad \Rightarrow$ voller Rang $\rightarrow$ vollst. Steuerbar

S_s → Steuerbarkeitsmatrix

Variante 1

geschlossene Regelkreis

?? $\underline{\underline{P(\bar\lambda)}} = (\bar\lambda+4)(\bar\lambda+6) = \bar\lambda^2 + 10\bar\lambda + 24$

$\Rightarrow a_0 = 24 \;;\; a_1 = 10$

letzte Zeile der Inverse

$$S_R^T = (0 \quad 1) S_s^{-1} \qquad S_s^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_R^T = \left[\frac{1}{8} \quad 0\right]$$

$$S_R^T A = \left[-\frac{1}{8} \quad 1\right]$$

$$S_R^T \cdot A^2 = \left[\frac{1}{8} \quad -2\right]$$

$$\Rightarrow k^T = (24 \quad 10 \quad 1)\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{8} & -2 \end{bmatrix} = \left(\frac{15}{8} \quad 12\right)$$

überprüfen

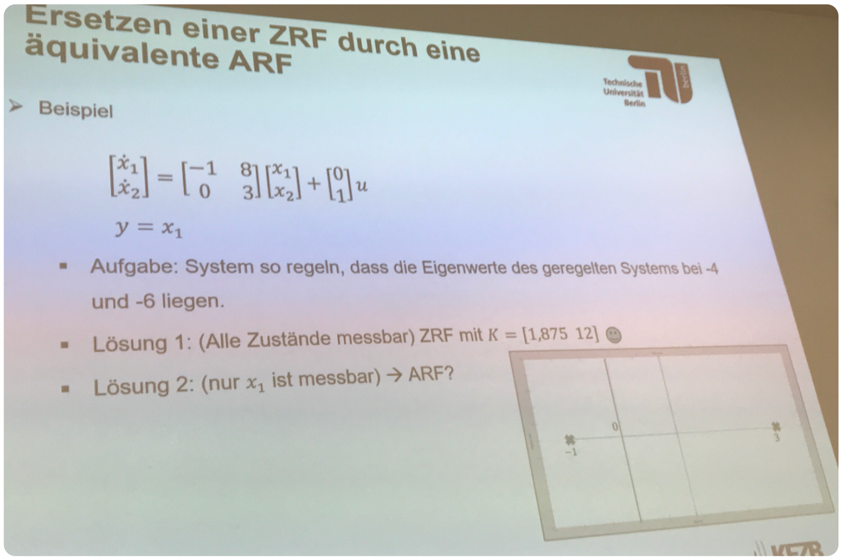
$$\bar A = A - Bk^T = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{15}{8} & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -\frac{15}{8} & -9 \end{pmatrix}$$

$$P(\bar\lambda) = (-1-\bar\lambda)(-9-\bar\lambda) + 15 = \bar\lambda^2 + 10\bar\lambda + 24$$

$$\begin{cases} \text{ZRF:} & u = -kx, \quad y = Cx \\ \text{ARF:} & u = -k_y y = -k_y C x \end{cases}$$

(x nicht immer messbar)

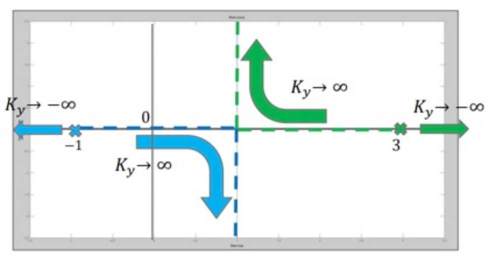
Variante 2



$$\bar{A} = \underline{A} - \underline{B}\, k_y \cdot \underline{c}$$

$$P(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 - 2\bar{\lambda} - 3 + 8k_y \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{1-2k_y}$$

$$\begin{cases} k_y = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3 \\ k_y \to \infty \longrightarrow \lambda_1 = 1 - i \\ \qquad\qquad\qquad\ \ \lambda_2 = 1 + i \end{cases}$$



$$k_y \to -\infty \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\infty \\ \lambda_2 = +\infty \end{cases}$$

EW können nicht beliebig platzierbar.

→ Das System ist nicht vollständig steuerbar.

Variante 3 Äquivalent

Variante 4 Nährung einer ZRF durch eine ARF

Zusammenfassung

ZRF $\xrightarrow{\text{messbar?}}$ ARF ⟶ Nährung einer ZRF durch eine ARF

ZRF: andere Methode [代替 Ackmann-Formel]

$$p(\bar\lambda) = \bar\lambda^2 + 10\bar\lambda + 24 \quad (*)$$

$$\bar A = A - B \cdot k^T$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \quad k_2) = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -k_1 & 3-k_2 \end{pmatrix}$$

$$p(\bar\lambda) = \det(\bar A - \lambda \bar I) = \det \begin{pmatrix} -1-\bar\lambda & 8 \\ -k_1 & 3-k_2-\bar\lambda \end{pmatrix}$$

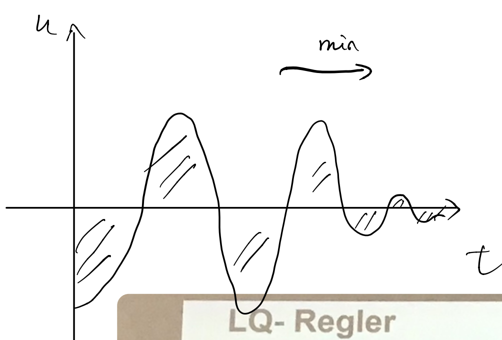
$$= \bar\lambda^2 + k_2\bar\lambda - 3\bar\lambda + \bar\lambda + k_2 - 3 + 8k_1$$

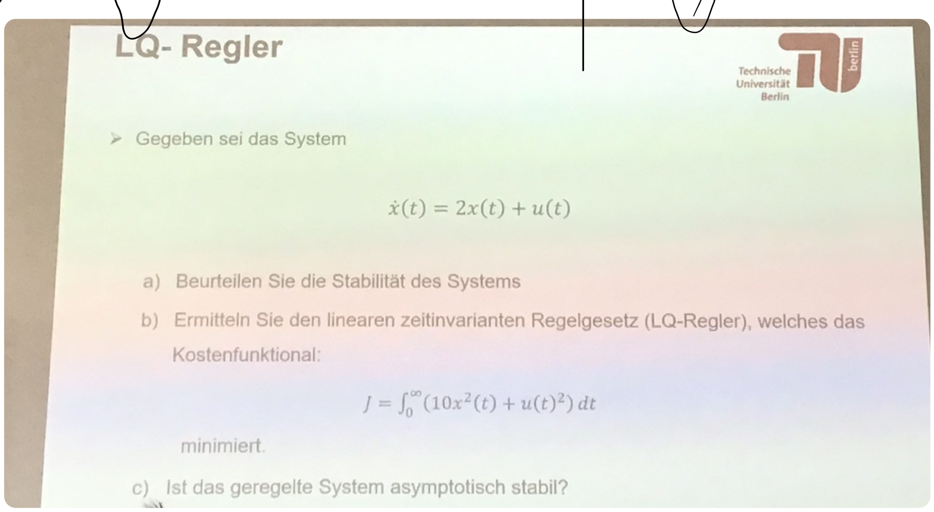
$$= \bar\lambda^2 + (k_2 - 2)\bar\lambda + 8k_1 + k_2 - 3 \overset{!}{=} (*)$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_2 - 2 = 10 \\ 8k_1 + k_2 - 3 = 24 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{15}{8} \\ k_2 = 12 \end{cases}$$

Matlab - Code

20.06.2019





a) $\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t)$

$\underline{A} = [2]$, $\Rightarrow \lambda = 2 > 0$, nicht stabil.

b) $J = \int_0^\infty (10x^2(t) + u(t)^2)\,dt$ um $K^* = R^{-1} B^T P$ zu bekommen

$\underline{R} = 1$ $B = 1$

P? $\Rightarrow$ $Q = 10$

$\Rightarrow \underline{A}^T \underline{P} + \underline{P}\underline{A} - \underline{P}\underline{B}\underline{R}^{-1}\underline{B}^T \underline{P} + \underline{Q} = \underline{0}$

$2P + P \cdot 2 - P \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot P + 10 = 0$

$4P - P^2 + 10 = 0$

$P_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 10} = 2 \pm \sqrt{14}$

$P_1 \approx 5.74$ $P_2 \approx -1.74$

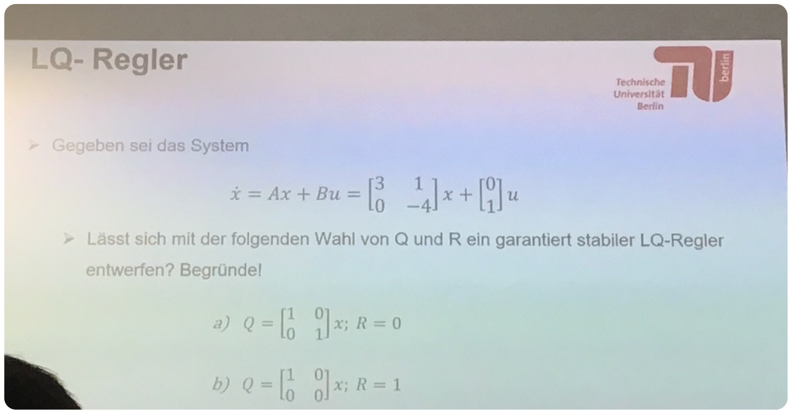
P ist dabei die symmetrische, positive definite Lösung...

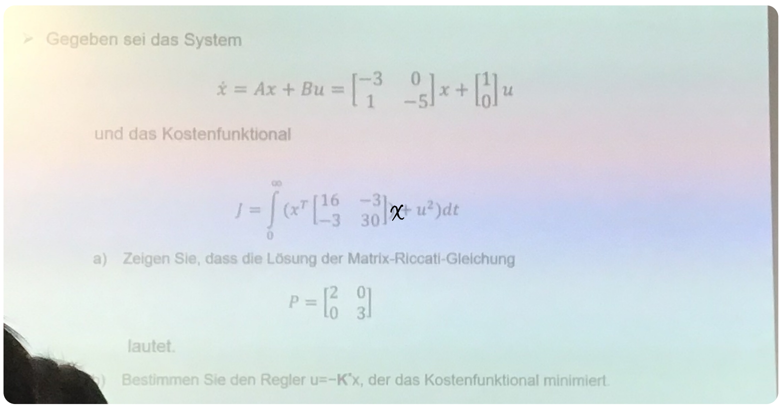
$K^* = R^{-1} \cdot B^T \cdot P$

$= 1 \cdot 1 \cdot 5{,}74 = 5.74$

$A_G = A - B \cdot K^* = 2 - 1 \cdot 5{,}74 = -3{,}74 < 0$

So ist das System asymptotisch stabil.





$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -3 & 30 \end{bmatrix}$$

$$R = 1 \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T P + PA - P \underbrace{B R^{-1} B^T}_{\text{已算}} P + Q \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -3 & 30 \end{bmatrix}$$

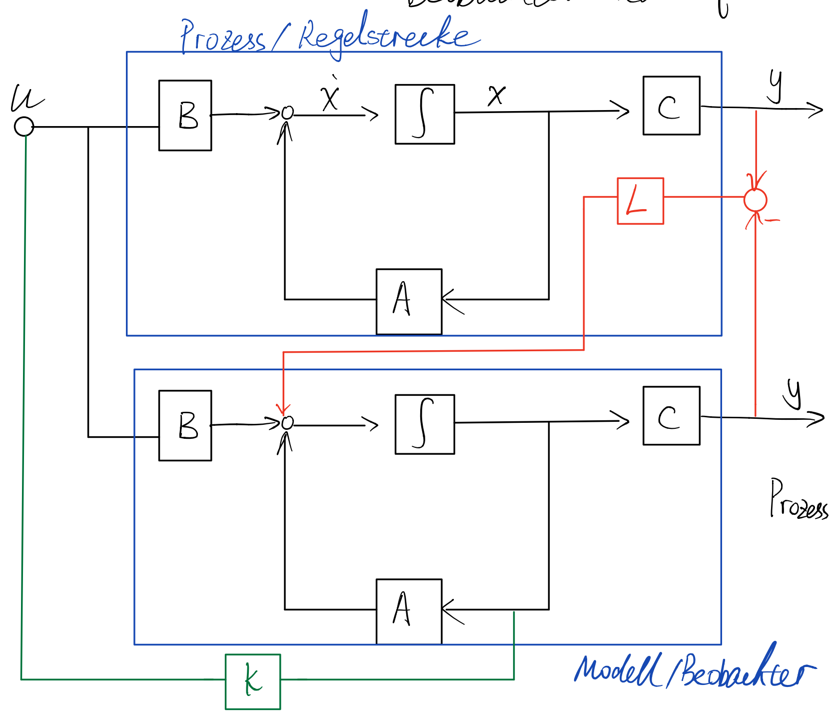
$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -3 & 30 \end{bmatrix}$$

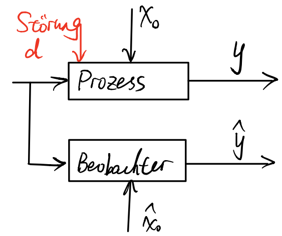
$$= \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 3 & -30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -3 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$K^* = R^{-1} B^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

04.07.2019

Beobachterentwurf





Prozess: $\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx$

Beobachter: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$

$\hat{y} = C\hat{x}$

Beobachtungsfehler

$$e = x - \hat{x}$$

Fehlerdynamik

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu$$
$$= A(x - \hat{x}) = A \cdot e$$

Differenz: $y(t) - \hat{y}(t)$

d.h. Luenberger Beobachter:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L \cdot (y - \hat{y})$$
$$= A\hat{x} + Bu + L \cdot C \cdot (x - \hat{x})$$
$$\dot{e} = A \cdot (x - \hat{x}) - L \cdot C \cdot (x - \hat{x}) = \underline{(A - LC)}(x - \hat{x})$$

$e \longrightarrow 0$ muss $(A - LC)$ stabil sein

d.h. λ_i haben nur neg. Realteile.

Erinnerung: Polzuweisung

$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u = -kx$

$\dot{x} = (A - BK)x$

durch Wahl von K beliebig λ setzen

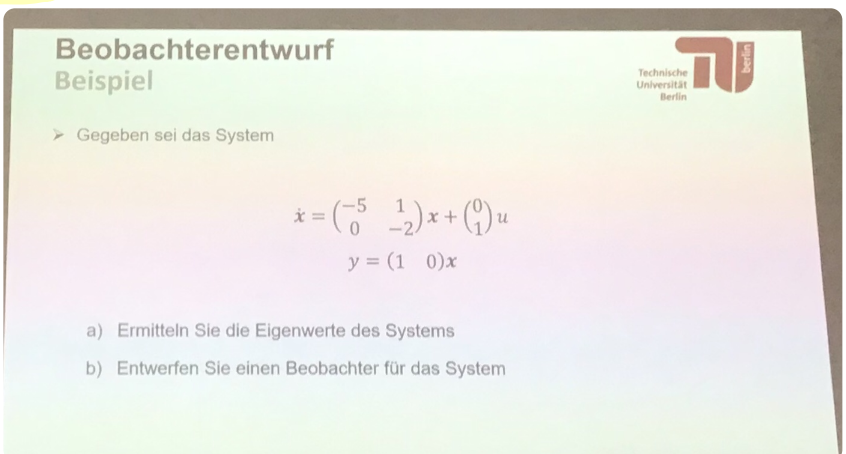
EW von $A-LC$ sind gleich der EW von $(A-LC)^T$

$(A-LC)^T = A^T - C^T L^T$ ⁎

$(A - BK)$ ⁎

⁎ $\Rightarrow$ mathmatisch duale Systeme ist (A, C) beobachter, kann mit Wahl von L die EW von $(A-LC)$ beliebig platziert werden.

Beispiel



$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$\underline{y} = (1 \quad 0)\, \underline{x}$

a) EW: $\lambda_1 = -5 \qquad \lambda_2 = -2$

b) Beobachter – EW: $\bar{\lambda}_1 = 4\lambda_1 = -20$

$\bar{\lambda}_2 = 4\lambda_2 = -8$

? Warum 4?
加一个正数就行.

Beobachtbarkeit nach Kalman

$S_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Rang}(S_B) \overset{!}{=} n = 2$

$\det(S_B) = 1 \neq 0 \longrightarrow$ vollständig beobachtbar.

die rang $S_B = 2 = n$

1. Methode: Ackermann-Formel mit A^T und C^T

2. Methode: Direkte Berechnung

$$A - LC = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5-L_1 & 1 \\ -L_2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P(\bar\lambda) = \det(A - L(\lambda I))$$

$$= \det \begin{pmatrix} 5-L_1-\bar\lambda & 1 \\ -L_2 & -2-\bar\lambda \end{pmatrix}$$

$$0 = \bar\lambda^2 + 2\bar\lambda + L_1\bar\lambda + 2L_1 + 5\bar\lambda + 10 + L_2$$

$$* \quad = \bar\lambda^2 + (7+L_1)\bar\lambda + (10 + 2L_1 + L_2)$$

aus EW: $(\bar\lambda + 20)(\bar\lambda + 8) = 0$

$$0 = \bar\lambda^2 + 28\bar\lambda + 160$$

aus $*$:

$$7 + L_1 \overset{!}{=} 28 \rightarrow L_1 = 21$$

$$10 + 2 \cdot L_1 + L_2 \overset{!}{=} 160 \longrightarrow L_2 = 108$$

$$L = \begin{pmatrix} 21 \\ 108 \end{pmatrix} /\!/$$

4. HA

2) Entwurf Optimalregler

$\dot{x}(t) = x(t) + 3u(t)$

$A = 1 \qquad B = 3$

a) Das System ist instabil, da $\lambda = 1$.
Somit $Re(\lambda) > 0$.

b) $Q = 10 \qquad R = 2$

$J = \int_0^\infty (10x^2 + 2u^2)\, d_t$

$A^T \cdot P + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$

$P + P - P \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot P + 10 = 0 \Rightarrow -\frac{9}{2}P^2 + 2P + 10 = 0$

$P^2 - \frac{4}{9}P - \frac{20}{9} = 0$

$P_{1,2} = \frac{2}{9} \pm \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{20}{9}}$

$P_1 = 1{,}729 \qquad P_2 = -1{,}285$

$K = R^{-1}B^TP = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}729 = 2{,}59$

c) $C = 1$

$A_G = A - BK = -6{,}72$

$\lambda = -6{,}77 \Rightarrow Re(\lambda) < 0 \rightarrow$ asy. stabil

$V = -[C(A-BK)^{-1} \cdot B]^{-1} = 2{,}257$

11.07.2019

5. HA

2. Aufgabe

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [0 \quad 1] \qquad K = [10 \quad 27]$

$\underline{A}_G = \underline{A} - \underline{B}\underline{K}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [10 \quad 27]$

$$= \begin{bmatrix} -10 & -28 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - G - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -10-\lambda & -28 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -2$$

b) $A - LC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1-L_1 \\ 2 & 5-L_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - LC - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1-L_1 \\ 2 & 5-L_2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \lambda(L_2 - 5) + (2 + 2L_1)$$

$$\bar{\lambda}_1 \stackrel{!}{=} -6 \qquad \bar{\lambda}_2 \stackrel{!}{=} -8$$

$$P(\bar{\lambda}) = (\bar{\lambda} + 6) \cdot (\bar{\lambda} + 8) = \bar{\lambda}^2 + 14\bar{\lambda} + 48$$

Koeffz - vergleich:

$$14 \stackrel{!}{=} L_2 - 5 \Rightarrow L_2 = 19$$

$$48 \stackrel{!}{=} 2 + 2L_1 \Rightarrow L_1 = 23$$

$$L = \begin{pmatrix} 23 \\ 19 \end{pmatrix}$$