Fahrzeugregelung: Übung (Reifenmodelle)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

Motivation

- Stark nichtlinearer Reifen-Fahrbahnkontakt
- Mathematische Modelle des Fahrzeugverhaltens benötigen für eine reale Abbildung bestmögliche Reifennachbildungen
- Der Kontakt Straße-Fahrzeug ist, abgesehen von aerodynamischen Maßnahmen, die einzige Möglichkeit, die Bewegung des Fahrzeugs aktiv zu beeinflussen
- Moderne Regelalgorithmen nutzen Reifeninformationen zur Verbesserung der Regelgüte

➡ **Reifenmodelle zur Berechnung der Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn**

  - Experimentelle Grundlage
  - Physikalische Grundlage
  - FE-Modelle

Lineares Reifenmodell

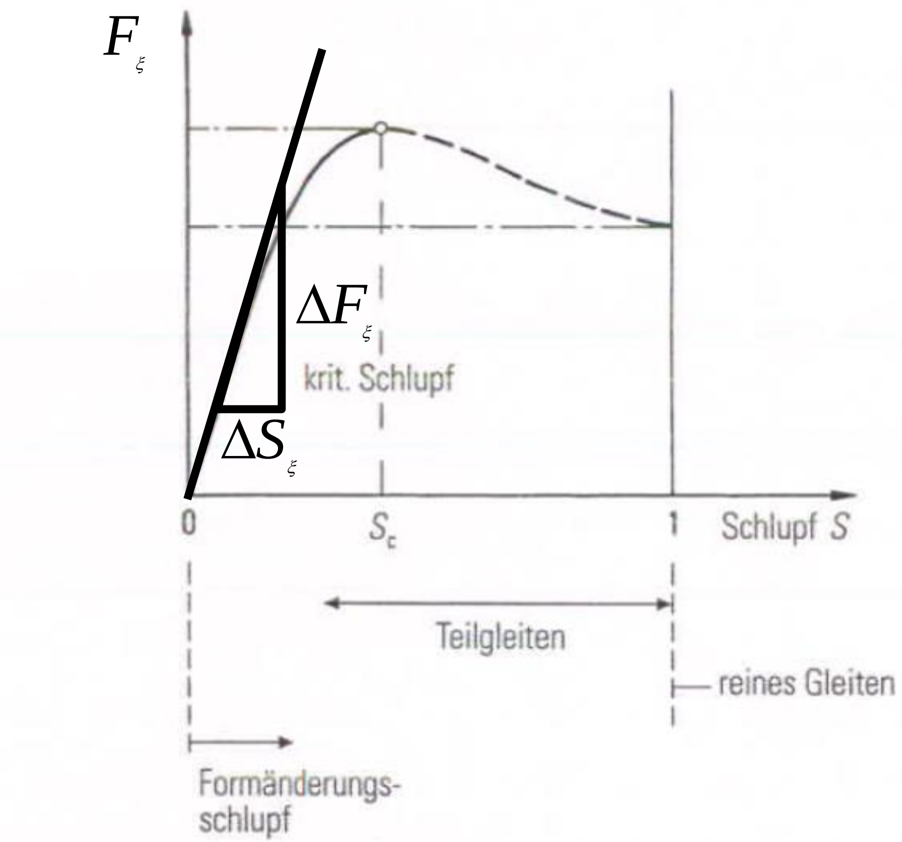
- Lineare Approximation der Reifeneigenschaften:

$$C_{\xi} = \frac{\Delta F_{\xi}}{\Delta S_{\xi}}$$

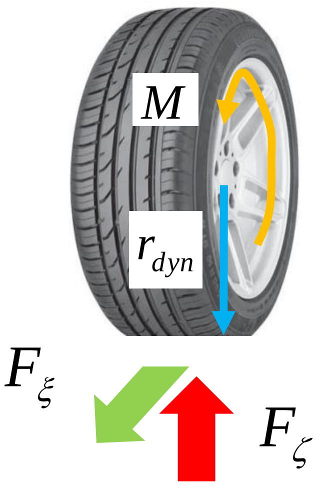
ergibt Längs- oder Querkraft:

$$F_{\xi \wedge, \eta} = C_{\xi, \eta} \cdot S_{\xi, \eta}$$

- Einsatzmöglichkeiten: lineares Einspurmodell
- Nachteil: Modell im Grenzbereich nicht anwendbar



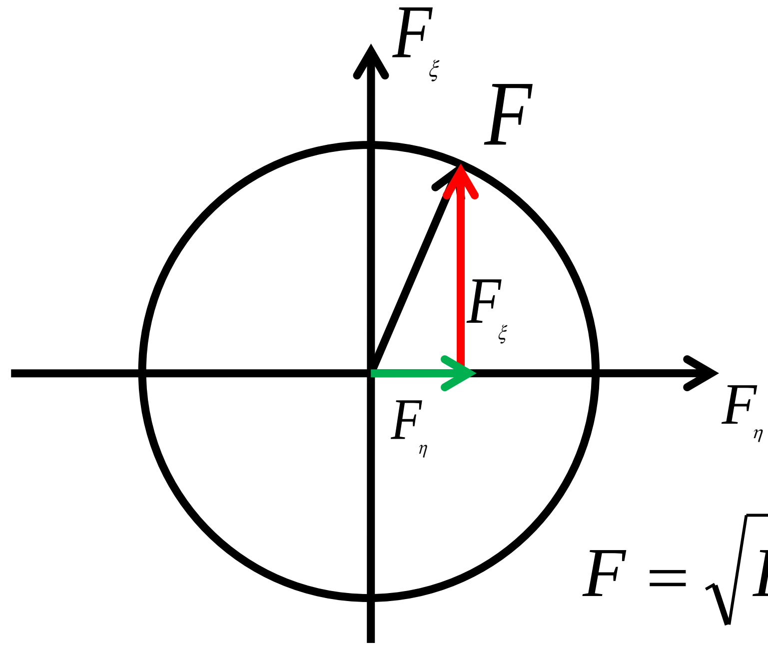
Haft- und Gleitreibung



Maximal übertragbare Reifenkraft:

$$F_{\xi,\eta} = \mu_H \cdot N_\zeta$$

Aufteilung auf Längs- und Seitenkraft:



$$F = \sqrt{F_\xi^{\;2} + F_\eta^{\;2}}$$

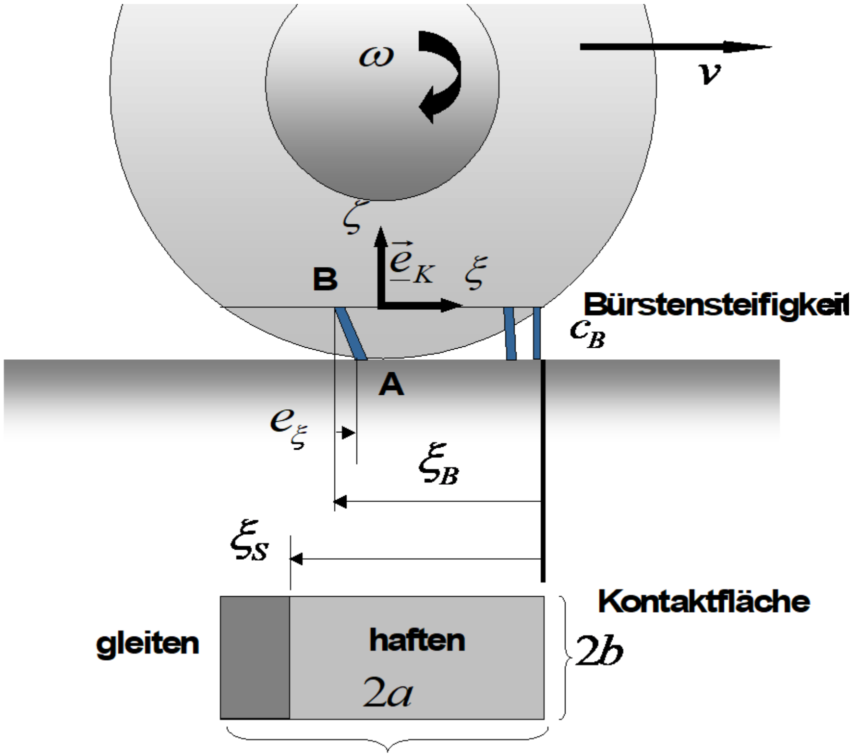
Bürstenmodell (Brush Tire Model)

- Analytisch physikalisches Reifenmodell
- Isotropes Modell mit Coulombscher Reibung zwischen Fahrweg und Reifen
- Idealisierung des Reifens im Kontaktgebiet (Latsch)
- Reifen wird durch in Längs- und Querrichtung in Reihe befindlicher, elastischer Zylinder abgebildet
- Rollt der Reifen kraftfrei, so wird angenommen, dass es keine Verformung der Elemente gibt
- Bei Längs- und Querkraft werden die Zylinder deformiert,

  ➡ proportional zur Verformung entsteht eine Schubspannung
- Verformung wird dargestellt durch horizontalen Abstand zwischen Bürstenanbindung B am Reifen und Berührpunkt A

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

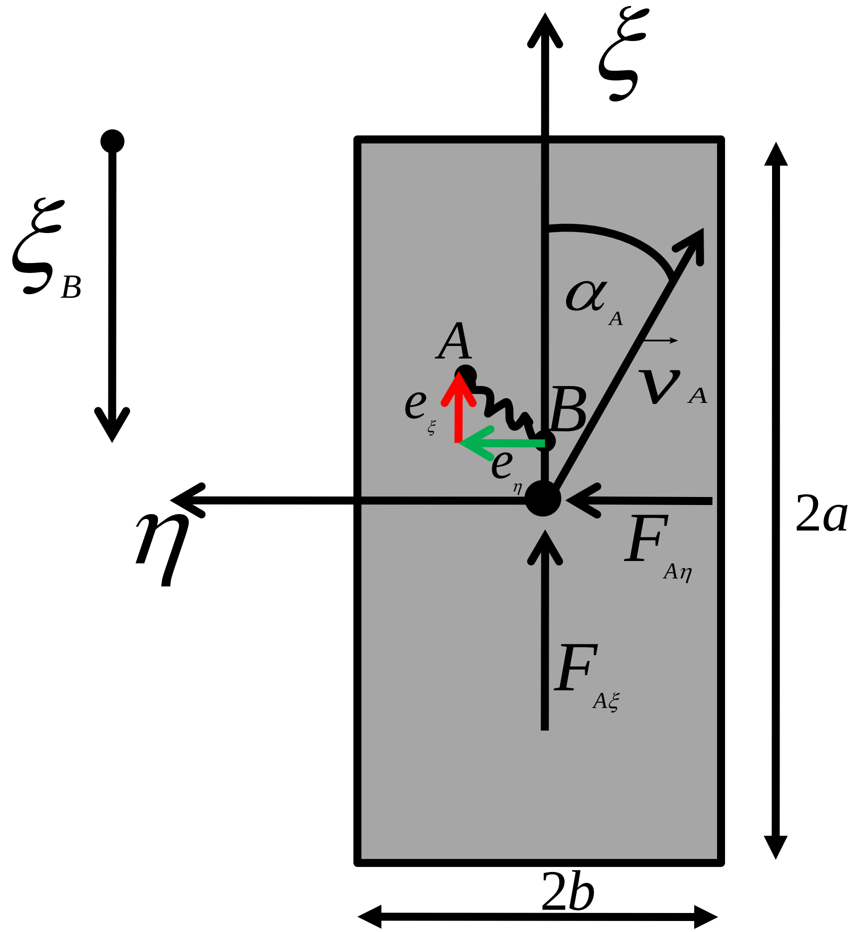
Geometrie des Reifenmodells:



Aus den **Integralen der Tangentialspannungen** über die Kontaktfläche folgen die Kraftschluss-Schlupf Beziehungen

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



Deformation in Reifenlängsrichtung:

$$e_\xi = (r \cdot \dot{\varphi} - v \cdot \cos\alpha) \cdot \Delta t$$

Mit v und $\dot{\varphi}$ konstant im Zeitintervall Δt sind.

Deformation in Reifenquerrichtung:

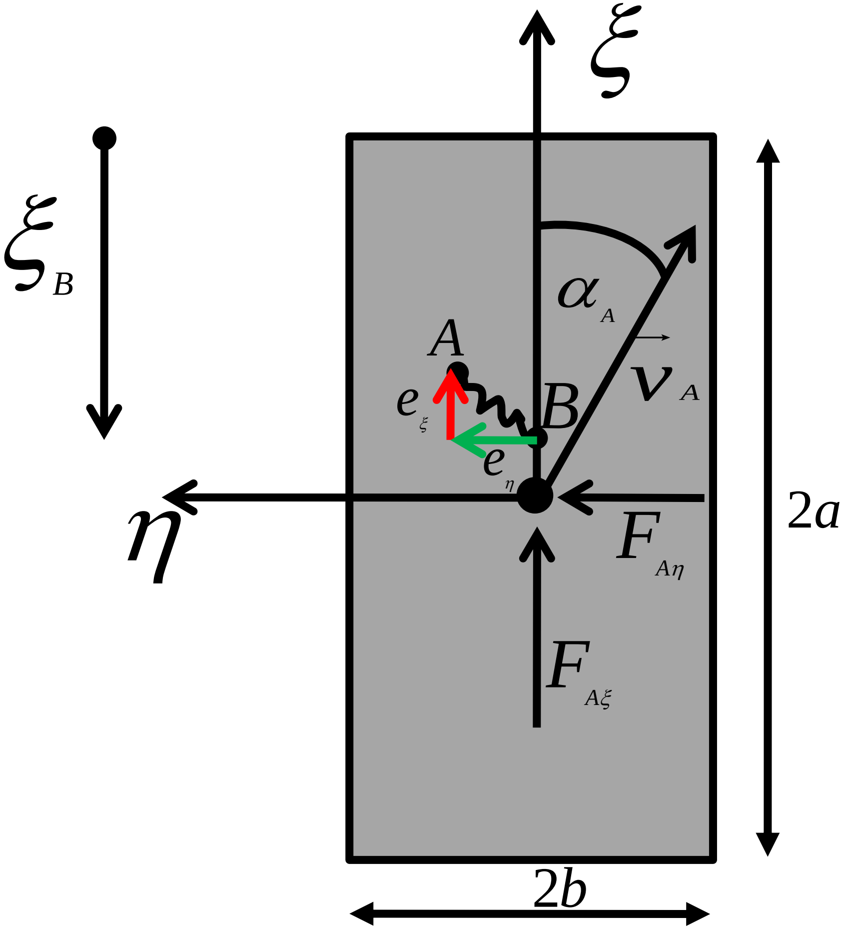
$$e_\eta = v \cdot \sin\alpha \cdot \Delta t$$

ξ_B beschreibt die Längsposition des Anschlusspunktes B auf dem Reifengürtel:

$$\xi_B = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \Delta t$$

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



Umformen der letzten Gleichung zu

$$\Delta t = \frac{\xi_B}{r \cdot \dot{\varphi}}$$

Einsetzen ergibt:

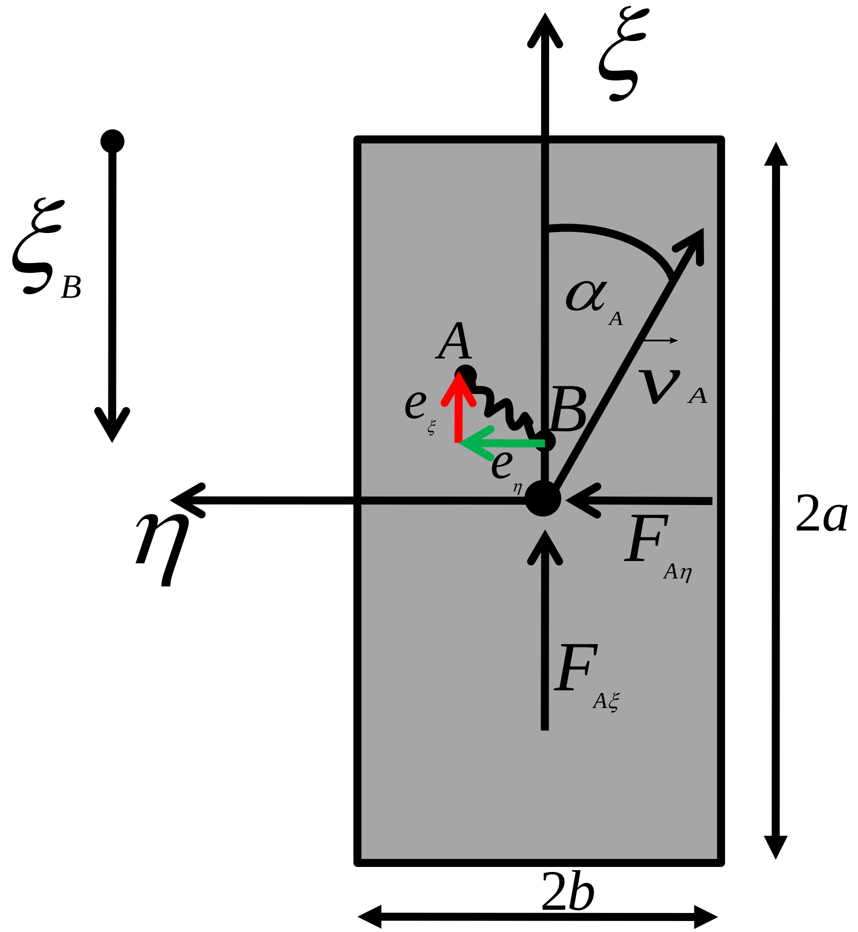
$$e_\xi = -s_\xi \xi_B$$

$$e_\eta = -s_\eta \xi_B$$

mit s_i wie in der VL deklariert.

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Kontaktfläche (Latsch):



Betrachte nun **Haften** aller Bürsten:
Mit der äquivalenten Tangential-Steifigkeit c_B in [N/m³] des elastischen Zylinders folgt:

$$\tau_\xi = -c_B s_\xi \xi_B$$

$$\tau_\eta = -c_B s_\eta \xi_B$$

Mit einer rechteckigen Kontaktfläche ergibt sich die Tangentialkraft zu:

$$F_\xi = -2bc_B \int_0^{2a} s_\xi \xi_B \, d\xi_B$$

$$= -4ba^2 c_B s_\xi$$

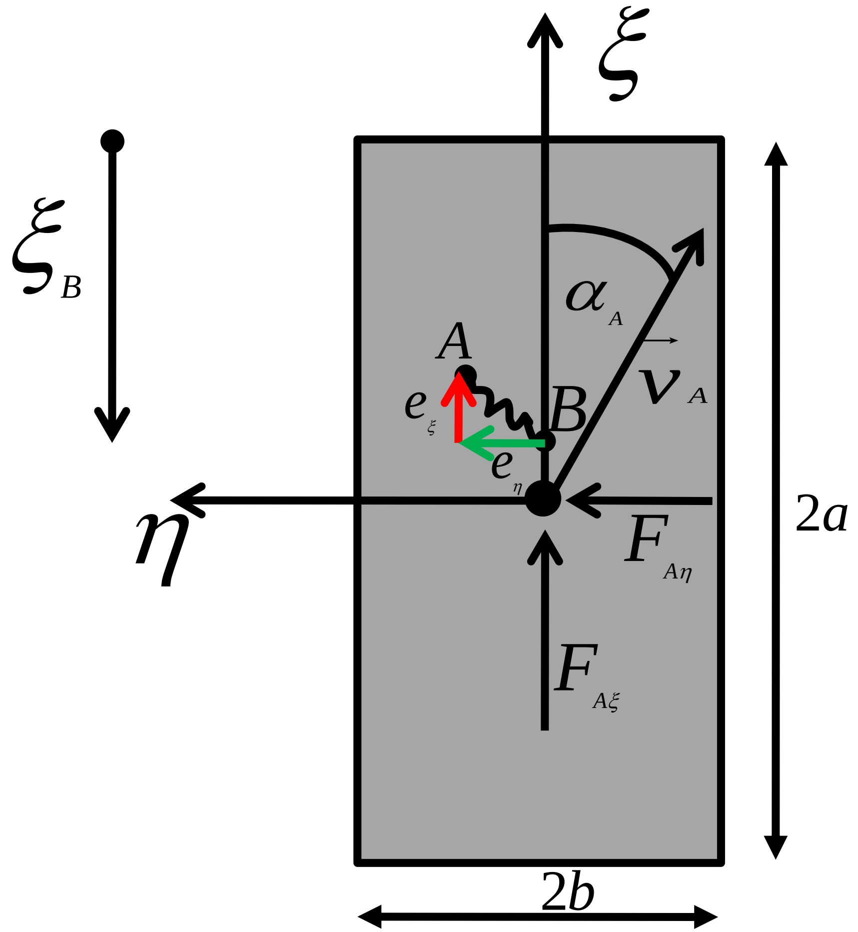
$$F_\eta = -2bc_B \int_0^{2a} s_\eta \xi_B \, d\xi_B$$

$$= -4ba^2 c_B s_\eta$$

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Technische Universität Berlin

Kontaktfläche (Latsch):



Da die Tangentialspannungsverteilung nicht symmetrisch zur Reifenquerachse ist, erhalten wir ein sogenanntes Bohrmoment

$$M_\xi = -2bc_B \int_0^{2a} s_\eta \underbrace{(a-\xi_B)}_{Hebelarm} \xi_B \, d\xi_B$$

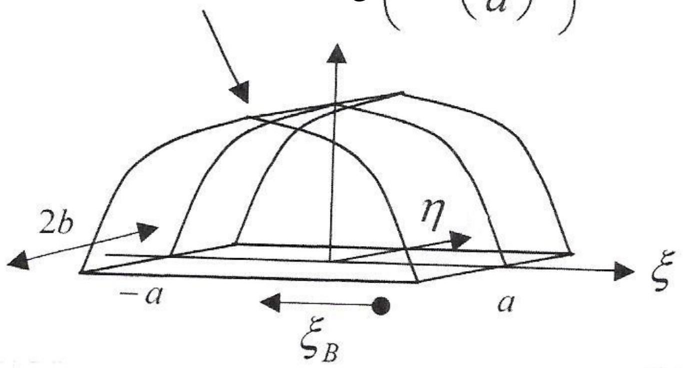
$$= \frac{a}{3}(4ba^2 c_B) s_\eta$$

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass Gleiten auftritt, wobei der Normalspannungsverlauf parabolisch in Reifenlängs- und konstant in Reifenquerrichtung verläuft.

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Normalkraftverteilung:

$$p(\xi) = p_0\left(1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2\right)$$



Dabei berechnet sich p_0 zu:

$$N_\xi \overset{!}{=} 2b\int_{-a}^{a} p_0\left[1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2\right]d\xi_B$$

$$\rightarrow p_0 = \frac{3N_\xi}{8ab}$$

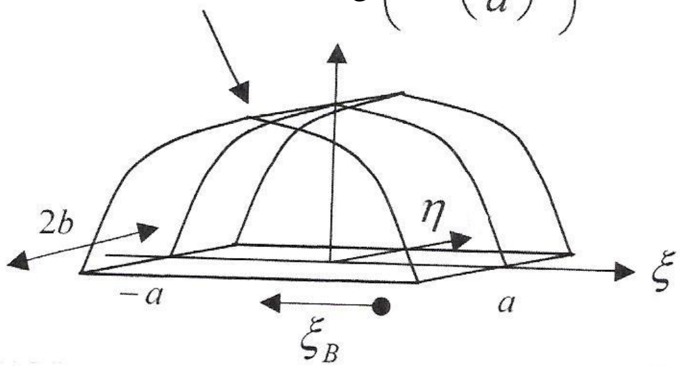
Die maximal mögliche Deformation $|e_{max}|$ einer Bürste ist wegen des Verlaufs in Längsrichtung eine Funktion von ξ bzw. ξ_B.

$$e_{\max} = \frac{\mu_h p(\xi)}{c_B}$$

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Normalkraftverteilung:

$$p(\xi) = p_0\left(1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2\right)$$



bzw. mit: $\xi = a - \xi_B$

$$e_{max} = \frac{\xi_B(2a-\xi_B)}{2a\Theta_H}$$

wobei:

$$\Theta_H = \frac{4a^2bc_B}{3\mu_H N_\xi}$$

Ein Zylinder beginnt zu Gleiten, wenn:

$$\sqrt{e_\xi^2 + e_\eta^2} \overset{!}{=} e_{max}$$

bzw.

$$\sqrt{s_\xi^2 + s_\eta^2}\,\xi_B \overset{!}{=} e_{max}$$

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Mit dem Gesamtschlupf s

$$s \overset{def}{=} \sqrt{s_\xi^2 + s_\eta^2}$$

folgt für den Losbrechpunkt (aus Gl. $e_{\max}$):

$$\xi_S = 2a(1 - \Theta_H s)$$

Es ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für das Haft- und Gleitgebiet:

$$\tau_\xi(\xi_B) = \begin{cases} -c_B s_\xi \xi_B \\ -c_B s_\xi \xi_S \end{cases}$$

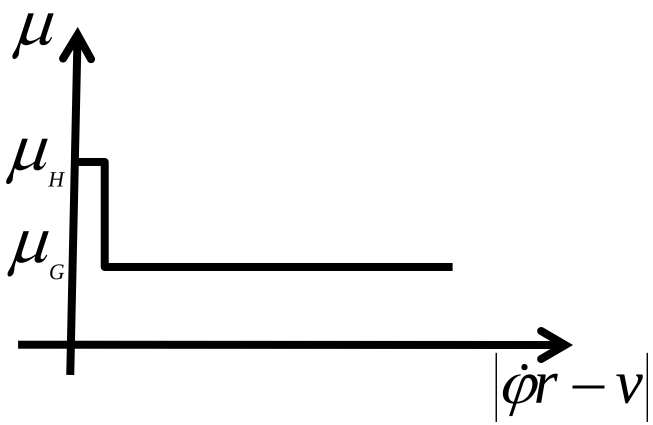
und

$$\tau_\eta(\xi_B) = \begin{cases} -c_B s_\eta \xi_B \\ -c_B s_\eta \xi_S \end{cases}$$

jeweils bis/ab dem Losbrechpunkt. Je mehr der Losbrechpunkt nun in Richtung Eintrittsbeginn einer Bürste In den Latsch liegt, desto größer wird der Anteil an Bürsten, die in Gleiten übergehen. Dadurch verläuft die Reifenkraft degressiv.

Bürstenmodell (Brush Tire Model)

Haftwerte:



Für den Fall, dass:

$$\mu_H \neq \mu_G$$

ergibt sich mit Θ_G statt Θ_H

$$\Theta_G = \frac{4a^2 b c_B}{3\mu_G N_\xi}$$

Die resultierenden Kraftgleichungen ergeben:

$$F_\xi = -2bc_B \left[\int_0^{\xi s} s_\xi \xi_B d\xi_B + \int_{\xi s}^{2a} s_\xi \xi_B d\xi \right]$$

$$F_\eta = -2bc_B \left[\int_0^{\xi s} s_\eta \xi_B d\xi_B + \int_{\xi s}^{2a} s_\eta \xi_B d\xi \right]$$

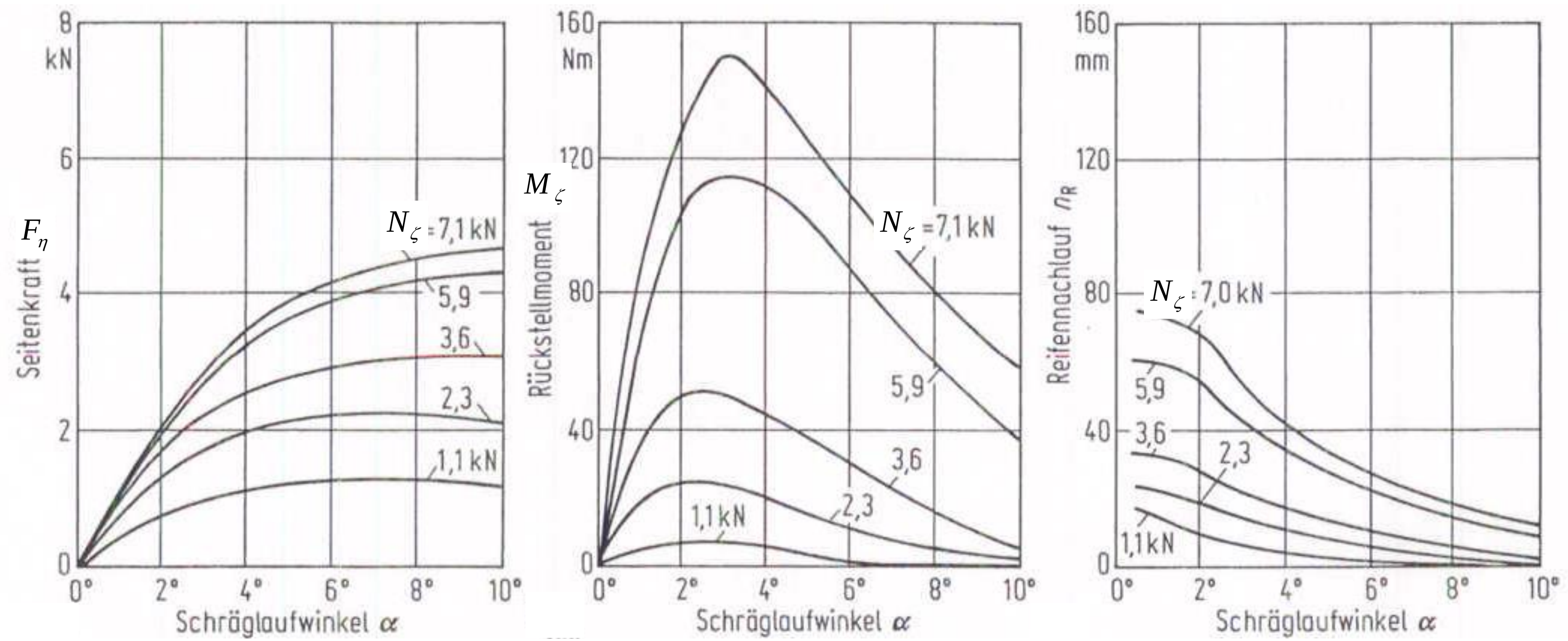
Das Bohrmoment ergibt sich zu:

$$M_\xi = -2bc_B \int_0^{\xi s} s_\eta (a - \xi_B)\xi_B + \int_{\xi s}^{2a} s_\eta (a - \xi_B)\xi_B d\xi_B$$

$$= n_R(s) F_\eta$$

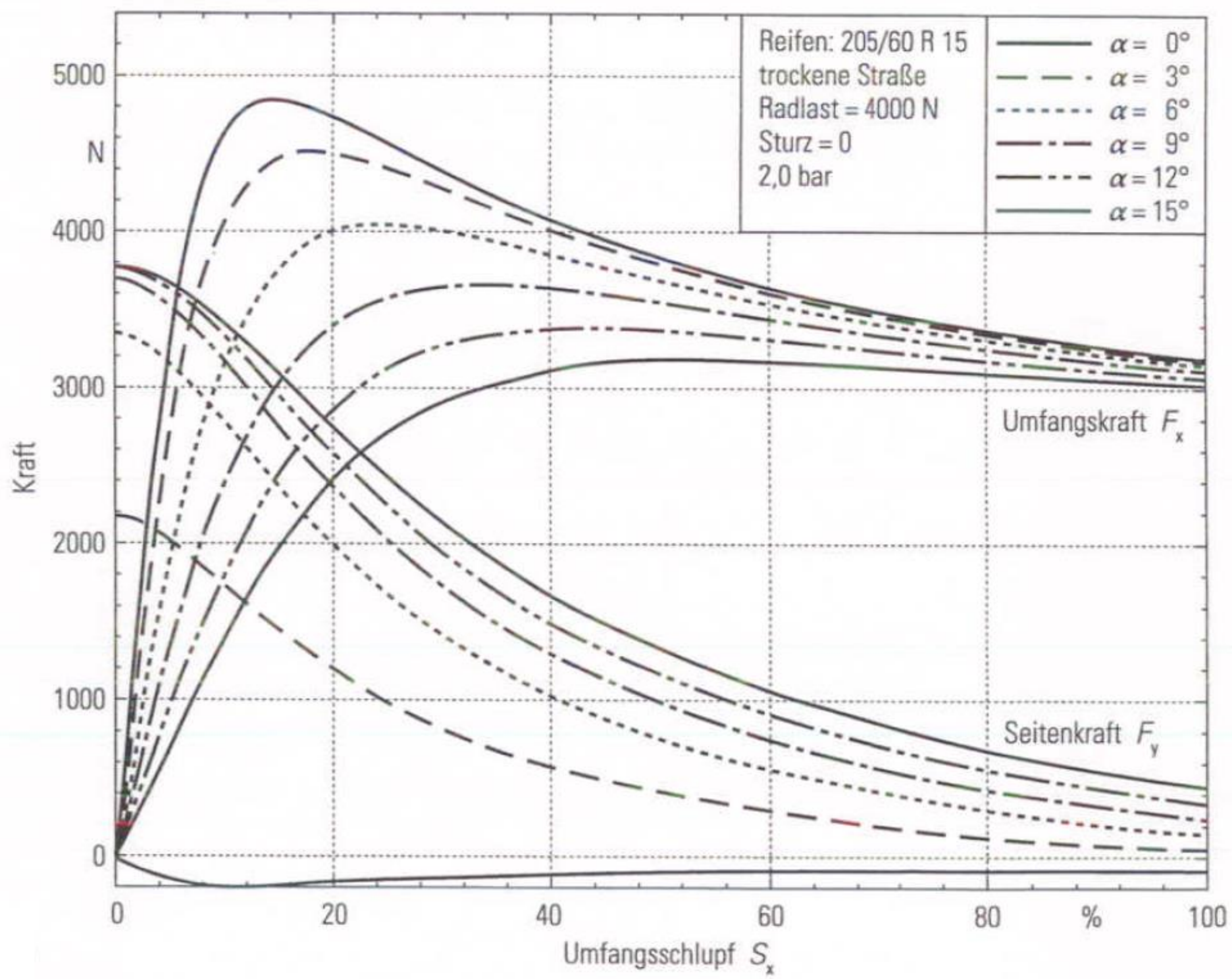
mit dem sog. Riefennachlauf $n_R(s)$

Seitenkraft und Rückstellmoment über α



Längskraft und Seitenkraft

f(Längsschlupf), Parameter Schräglaufwinkel



Vereinfachte Pacejka Magic Tire Formular

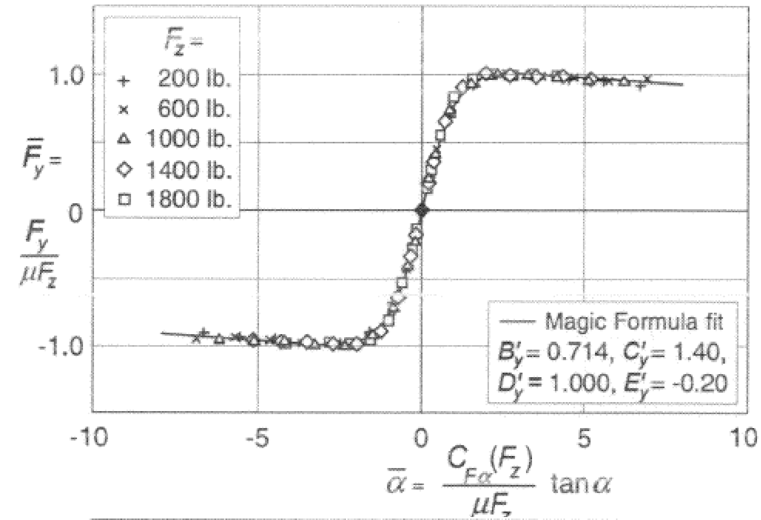
Technische Universität Berlin

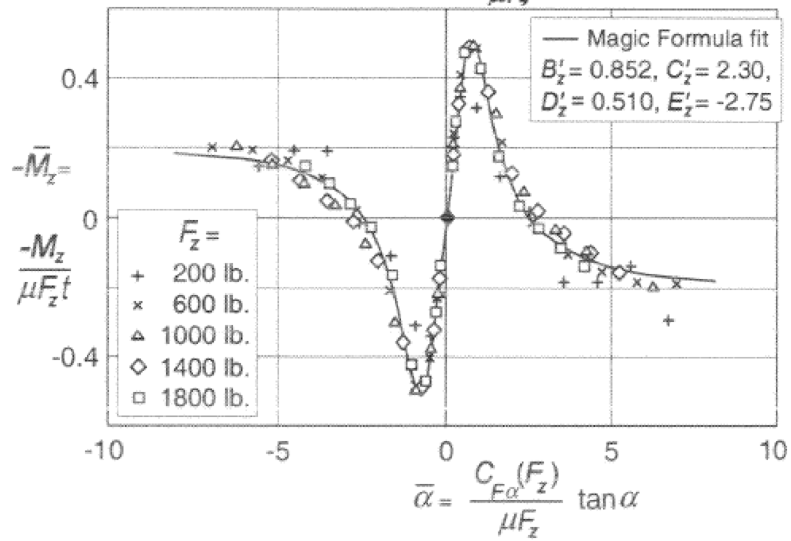
- Nichtlineare Approximation der Reifen-eigenschaften
- Reifenmodell bildet die Kraftschluss-Schlupf-Beziehung analytisch ab, z.B. durch

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{F}_{\max} \cdot \sin(\boldsymbol{C} \arctan(\boldsymbol{B} \cdot \frac{\boldsymbol{s}}{\mu}))$$

- Mit Hilfe der Optimierungsrechnung werden die freien Parameter so bestimmt, dass es zur optimalen Übereinstimmung der Messkurven und der Modellkurve kommt

Nachteil: viele Messungen für verschiedene Betriebsbereiche notwendig





Vereinfachte Pacejka Magic Tire Formular

Die einzelnen Parameter bedeuten:

- Kraftschlusspotential:

$$F_{\max} = \mu N_{\zeta} \cdot (1 + k_{F\zeta} \frac{N_{\zeta 0} - N_{\zeta}}{N_{\zeta 0}}) = D$$

- Parameterbedeutung:

Y …Quer- oder Längskraft, Bohrmoment

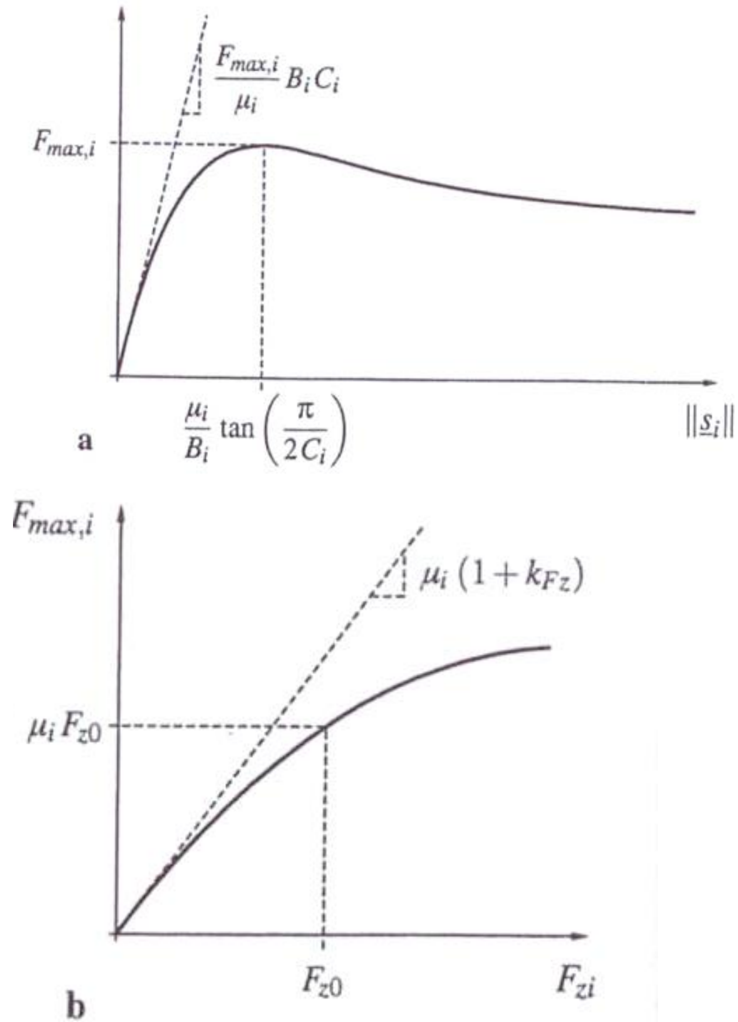
C …Wertebereich (1;2)

B …Wertebereich > 0

μ …Haftbeiwert > 0

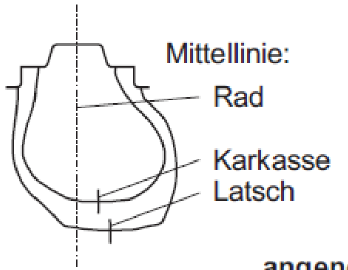
$k_{F\zeta}$ …Degressivitätsfaktor >= 0

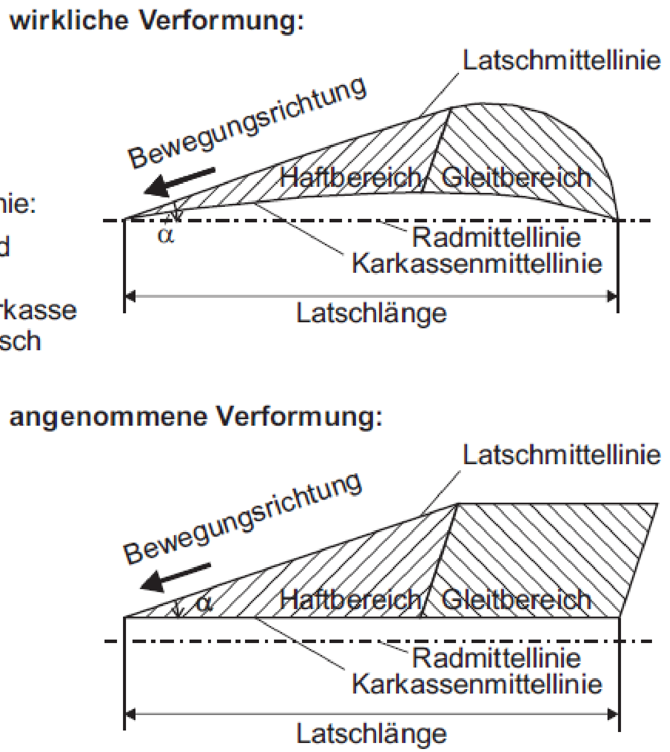
$N_{\zeta 0}$ …Nominale Radlast > 0



HSRI Reifenmodell

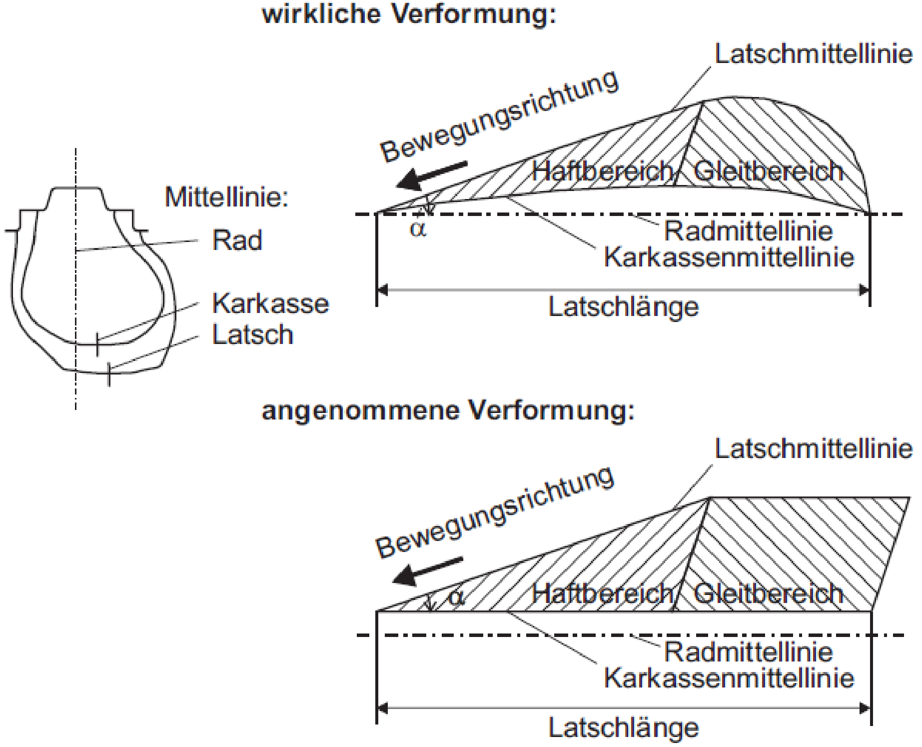
- HSRI = Highway Safety Research Institute der Universität in Michigan
- Modell berechnet die Reifenkräfte aufgrund der Verformungen durch im Reifen auftretende Spannungen
- Eingangsgrößen: Schräglaufwinkel, Radlast, Raddrehzahl, Fahrzeug-geschwindigkeit
- Reifensturz wird nicht berücksichtigt
- Konstante Flächenpressung im Latsch
- Mittellinie der Reifenkarkasse verschiebt sich durch die Seitenkraft parallel gegenüber der Radmittenebene
- physikalisches Modell





HSRI Reifenmodell

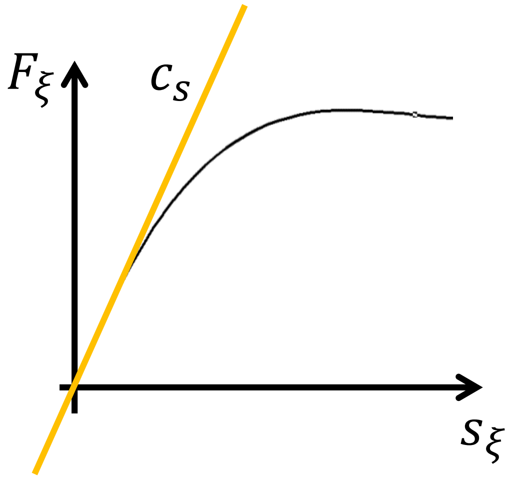
- Es wird die Auslenkung der Protektorteilchen von der Karkassenmittellinie betrachtet
- linearer Schubspannungsverlauf bis zur Kraftschlussgrenze
- Anzahl der benötigten Parameter ist relativ gering



HSRI - Mathematische Modellierung

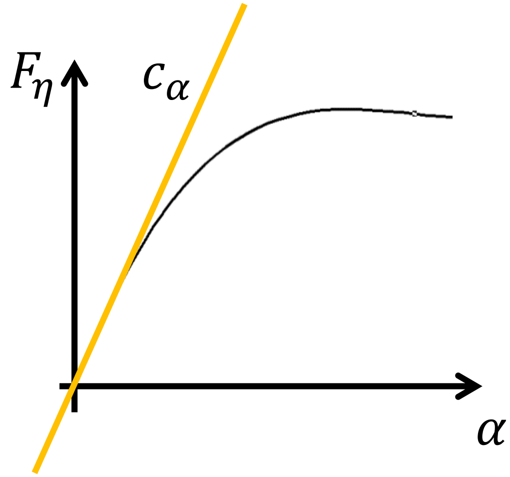
- Längsschlupfsteifigkeit c_s als Anstieg der Längskraft-Schlupf-Kurve im Ursprung

$$c_s = \left.\frac{\partial F_\xi}{\partial s_\xi}\right|_{\substack{s \to 0 \\ \alpha = 0}}$$



- Seitenschlupfsteifigkeit c_α als Anstieg der Seitenkraft-Schräglaufwinkel-Kurve im Ursprung

$$c_\alpha = \left.\frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha}\right|_{\substack{\alpha \to 0 \\ s = 0}}$$



HSRI - Mathematische Modellierung

- Die Definition des Antriebs- und Bremsschlupfs kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$s_i = \frac{\left| v - r_{dyn} \cdot \omega \right|}{\max(v, r_{dyn} \cdot \omega)}$$

- Die Gleitgeschwindigkeit ergibt sich aus:

$$v_G = v_{G,\xi} \sqrt{s_i^2 + \tan^2 \alpha}$$

- Mit der Gleitgeschwindigkeit in Latschlängsrichtung $v_{G,\xi}$:

$$v_{G,\xi} = v - r_{dyn} \cdot \omega$$

HSRI - Mathematische Modellierung

- Die Gleitgeschwindigkeit wird genutzt, um den Haftreibbeiwert zu berechnen:

v_G < 80km/h: $$\mu_i = f_{0,i}(1 - k_R v_G)$$

v_G >= 80km/h: $$\mu_i = f_{0,i}(1 - k_R \tanh(v_G)^2)$$

- Mit den Parametern f_0 und k_R welche die Kraftschlussabnahme bei zunehmender Geschwindigkeit beschreiben:

$$f_0 = f_{0,1} + f_{0,2} N_\zeta \qquad k_R = k_{R,1} + k_{R,2} N_\zeta$$

- Die Funktion $\bar{s}_R$ dient zur Bestimmung der Haftbereiche (Gleiten, Haften):

$$\bar{s}_R = \frac{\sqrt{(c_s s_i)^2 + (c_\alpha \tan(\alpha))^2}}{\mu_i N_\zeta (1 - s_i)}$$

HSRI - Mathematische Modellierung

- Kombiniert man diese Gleichungen ergeben sich die Reifenkräfte zu:

$\bar{s}_R \leq 0{,}5$:

(Haftbereich, linear)

$$F_\xi = c_s s_i$$

$$F_\eta = c_\alpha \tan(\alpha)$$

$\bar{s}_R > 0{,}5$:

(Gleitbereich, nichtlinear)

$$F_\xi = c_s \left(\frac{s_i}{1 - s_i} \right) \left(\frac{\bar{s}_R - 0{,}25}{\bar{s}_R^2} \right)$$

$$F_\eta = c_\alpha \left(\frac{\tan(\alpha)}{1 - s_i} \right) \left(\frac{\bar{s}_R - 0{,}25}{\bar{s}_R^2} \right)$$

HSRI - Mathematische Modellierung

Technische Universität Berlin

- Zur Berechnung des Rückstellmoments wird der Reifennachlauf in Längs- n_ξ und Seitenrichtung n_η benötigt. Für n_ξ gilt:

$\bar{s}_R \leq 0{,}5$:

(Haftbereich, linear)

$$n_\xi = \frac{4}{3} l \tan(\alpha) + \frac{F_\eta}{c_\alpha}$$

$\bar{s}_R > 0{,}5$:

(Gleitbereich, nichtlinear)

$$n_\xi = l \tan(\alpha) \left(\frac{\bar{s}_R - \frac{1}{3}}{\bar{s}_R \left(\bar{s}_R - \frac{1}{4} \right)} + \frac{F_\eta}{c_\alpha} \right)$$

- Mit der halben Latschlänge l und der Reifensubtangente s_1:

$$l = \sqrt{2 r_{dyn} s_1}$$

HSRI - Mathematische Modellierung

- Für den Reifennachlauf in Seitenrichtung n_η erhält man:

$\bar{s}_R \leq 0{,}5$:

(Haftbereich, linear)

$$n_\eta = \frac{1}{3} l \left[1 + 2\bar{s}_R \left(\frac{1}{2} - \bar{s}_R \right) \right]$$

$\bar{s}_R > 0{,}5$:

(Gleitbereich, nichtlinear)

$$n_\eta = l \left(\frac{12 - \frac{1}{\bar{s}_R^{\,2}}}{12 - \frac{3}{\bar{s}_R}} - 1 \right) \left(\frac{1 - (\bar{s}_R - 0{,}5)}{k_{Kor}} \right)$$

k_{Kor}: Korrekturwert

HSRI - Mathematische Modellierung

Technische Universität Berlin

- Über das Momentengleichgewicht ergibt sich damit das Rückstell-moment zu:

$$M_{\zeta} = F_{\eta} n_{\eta} - F_{\xi} n_{\xi}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!