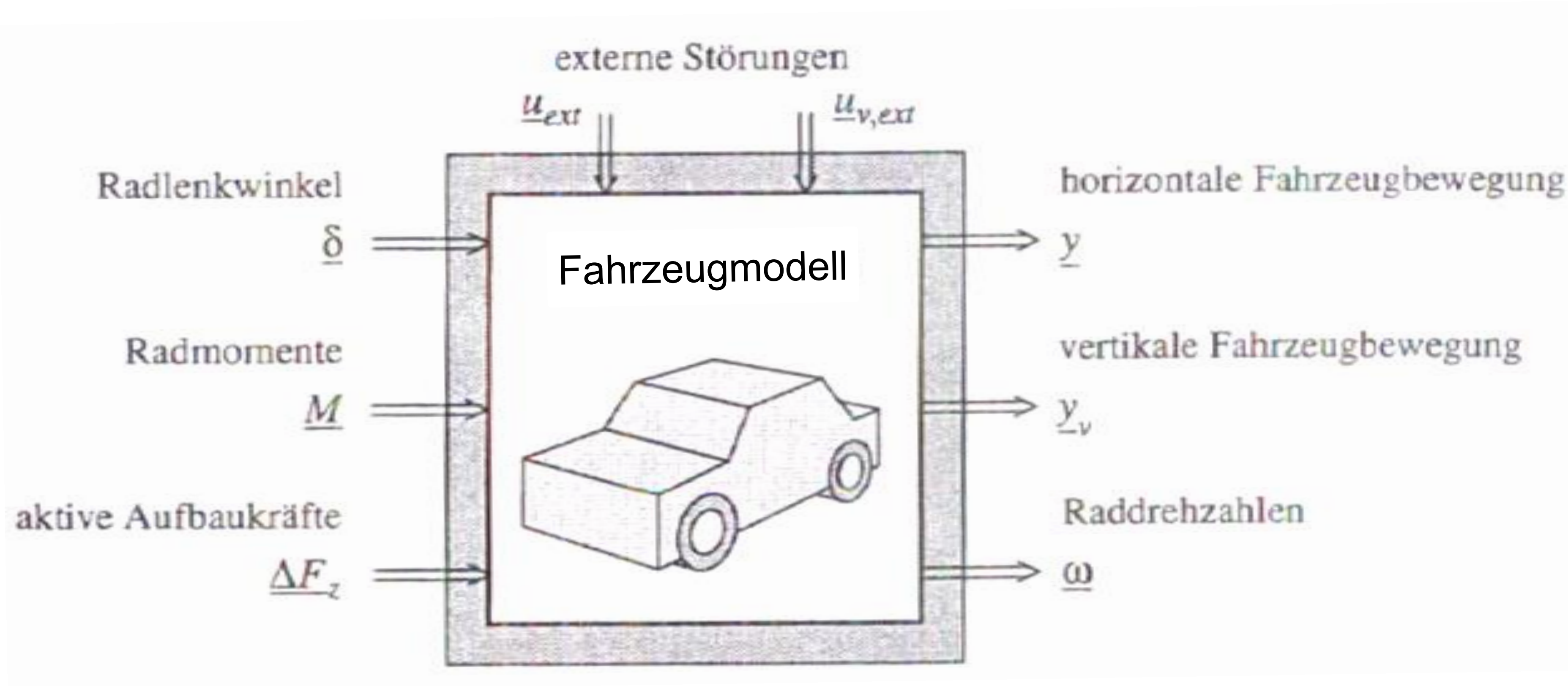
Fahrzeugregelung: Übung (Zweispurmodell)

M.Sc. Thang Nguyen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

Wechselwirkung Fahrzeug - Umwelt



Annahmen und Vereinfachungen

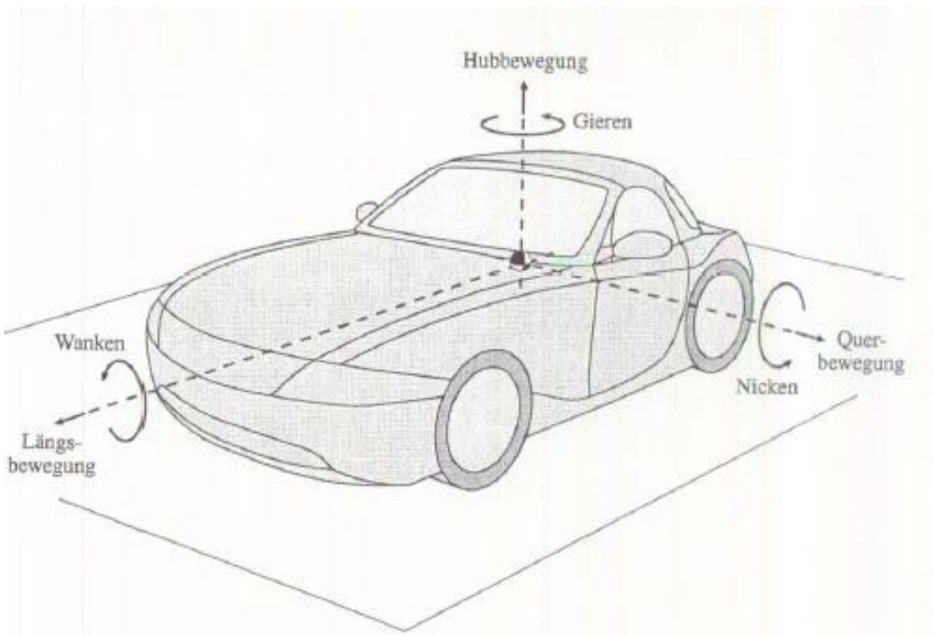
Annahmen

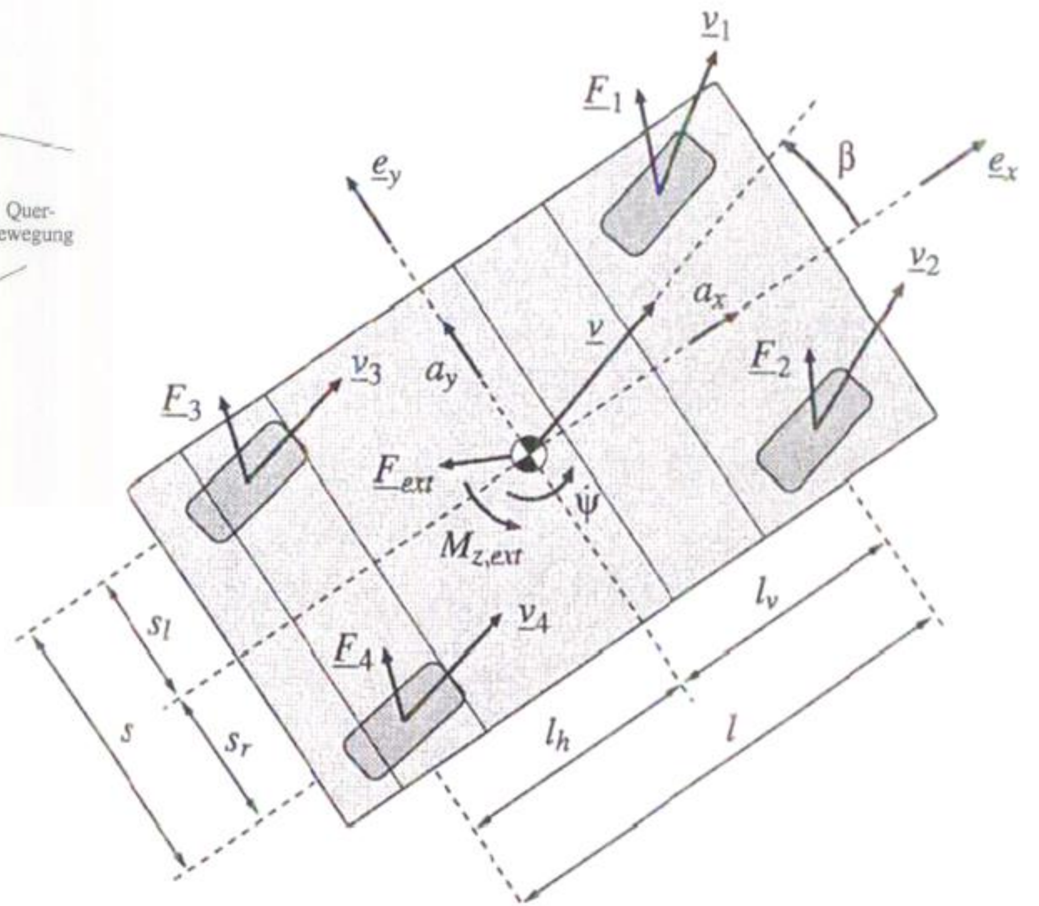
- Aerodynamik, Fahrbahnneigungen und Änderungen der Reibverhältnisse zwischen Reifen und Fahrbahn werden als externe Störungen und Parameterschwankungen dargestellt
- Fahrzeug besitzt Einzelradaktorik (Lenken, Antriebsmoment, Aktive Aufbaukräfte)
- Vernachlässigung von Kinematik und Elastokinematik der Radaufhängungen
- Lineares Verhalten der Aufbaufedern und -dämpfer
- Isotrope Reifencharakteristik

Vereinfachungen

- Vernachlässigbar kleine Abstützwinkel der Radaufhängung
- Vernachlässigung von Reifensturz

Ebene Fahrzeugbewegung



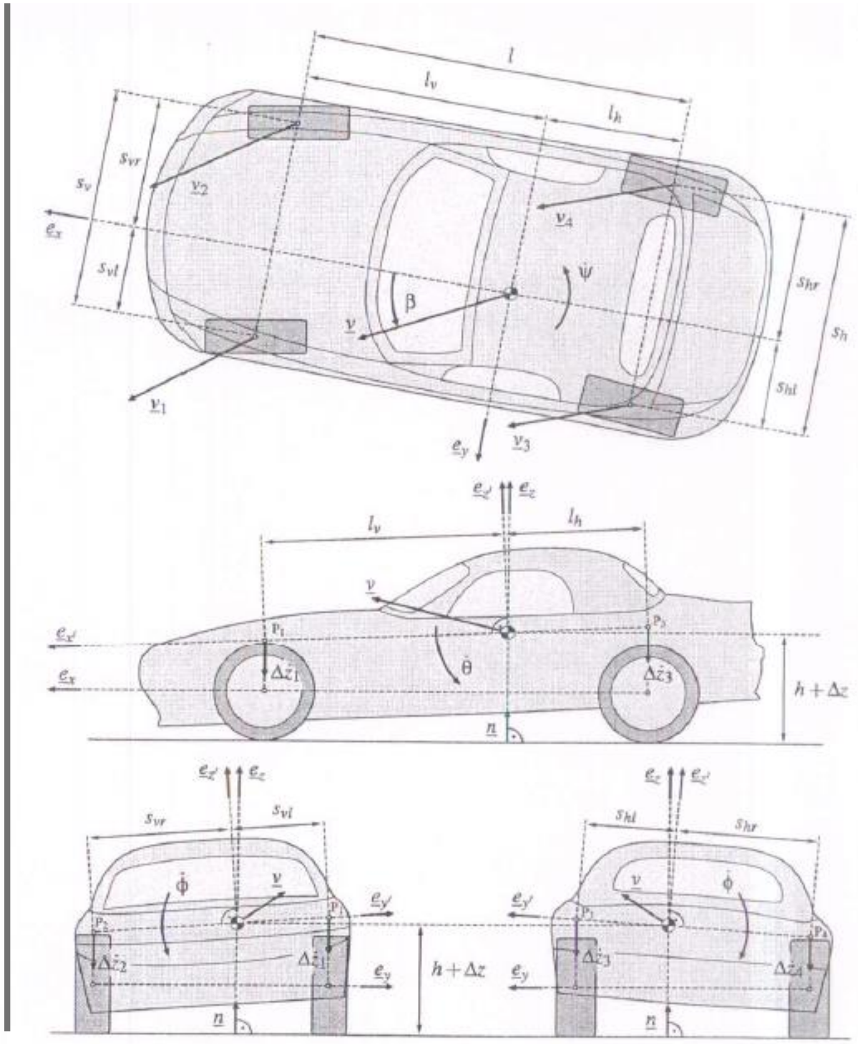


Ebene Fahrzeugbewegung

Fahrzeugaufbau besitzt

- drei miteinander verkoppelte translatorische Freiheitsgrade
- drei miteinander verkoppelte rotatorische Freiheitsgrade
- Kopplung zwischen der horizontalen und vertikalen Bewegung ist schwach

  ➡ **Vernachlässigung**



Koordinatensysteme:

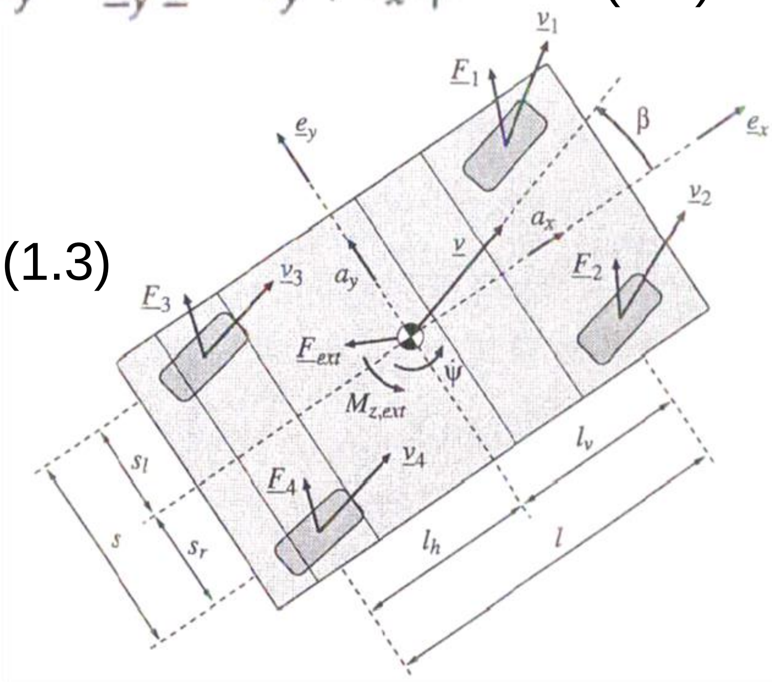
- Fahrwerkfestes KOS $\left(\underline{\boldsymbol{e}}_i\right)$
- KOS $\left(\underline{\boldsymbol{e}}_i\right)$ rotiert mit $\dot{\psi}$ um Normalen-richtung der $\underline{\boldsymbol{n}}$ Fahrbahnebene
- Aufbaufestes KOS $\left(\underline{\boldsymbol{e}}_{i'}\right)$
- Alle Radmittelpunkte befinden sich in einer Ebene parallel zur Fahrbahn, und damit auch das Fahrwerk

Horizontaldynamik

Es gilt:
$$\dot{\underline{e}}_x = \dot{\psi}\,\underline{e}_y$$
$$\dot{\underline{e}}_y = -\dot{\psi}\,\underline{e}_x \qquad (1.1)$$

Es folgt mit (1.1):

$$\underline{v} = v_x\,\underline{e}_x + v_y\,\underline{e}_y\,, \quad a_x = \underline{e}_x^{\mathrm{T}}\,\dot{\underline{v}} = \dot{v}_x - v_y\,\dot{\psi}\,, \quad a_y = \underline{e}_y^{\mathrm{T}}\,\dot{\underline{v}} = \dot{v}_y + v_x\,\dot{\psi} \qquad (1.2)$$



Die Ausrichtung des Fahrzeugs wird durch den Schwimmwinkel berechnet:

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right), \quad v = \|\underline{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (1.3)$$

Die Komponenten der Fahrzeuggeschwindigkeit ergeben dann im Fahrzeug-KOS:

$$v_x = v\cos(\beta)\,, \quad v_y = v\sin(\beta) \qquad (1.4)$$

Horizontaldynamik

Technische Universität Berlin

Die Geschwindigkeit der Radmittelpunkte lautet:

$$\underline{v}_i = v_{xi}\,\underline{e}_x + v_{yi}\,\underline{e}_y\,, \qquad i = 1\ldots4 \quad (1.5)$$

Für die Radmittelpunkte mit den Fahrzeugabmessungen und Gl. (1.1) folgt :

$$\underline{v}_1 = \underline{v} + \frac{d}{dt}\left(l_v\,\underline{e}_x + s_l\,\underline{e}_y\right) = \left(v_x - \dot{\psi}\,s_l\right)\underline{e}_x + \left(v_y + \dot{\psi}\,l_v\right)\underline{e}_y\,, \quad (1.6)$$

$$\underline{v}_2 = \underline{v} + \frac{d}{dt}\left(l_v\,\underline{e}_x - s_r\,\underline{e}_y\right) = \left(v_x + \dot{\psi}\,s_r\right)\underline{e}_x + \left(v_y + \dot{\psi}\,l_v\right)\underline{e}_y\,, \quad (1.7)$$

$$\underline{v}_3 = \underline{v} + \frac{d}{dt}\left(-l_h\,\underline{e}_x + s_l\,\underline{e}_y\right) = \left(v_x - \dot{\psi}\,s_l\right)\underline{e}_x + \left(v_y - \dot{\psi}\,l_h\right)\underline{e}_y\,, \quad (1.8)$$

$$\underline{v}_4 = \underline{v} + \frac{d}{dt}\left(-l_h\,\underline{e}_x - s_r\,\underline{e}_y\right) = \left(v_x + \dot{\psi}\,s_r\right)\underline{e}_x + \left(v_y - \dot{\psi}\,l_h\right)\underline{e}_y\,. \quad (1.9)$$

Horizontaldynamik

Als eingeprägte Kräfte wirken an der Fahrzeugmasse die Radkräfte:

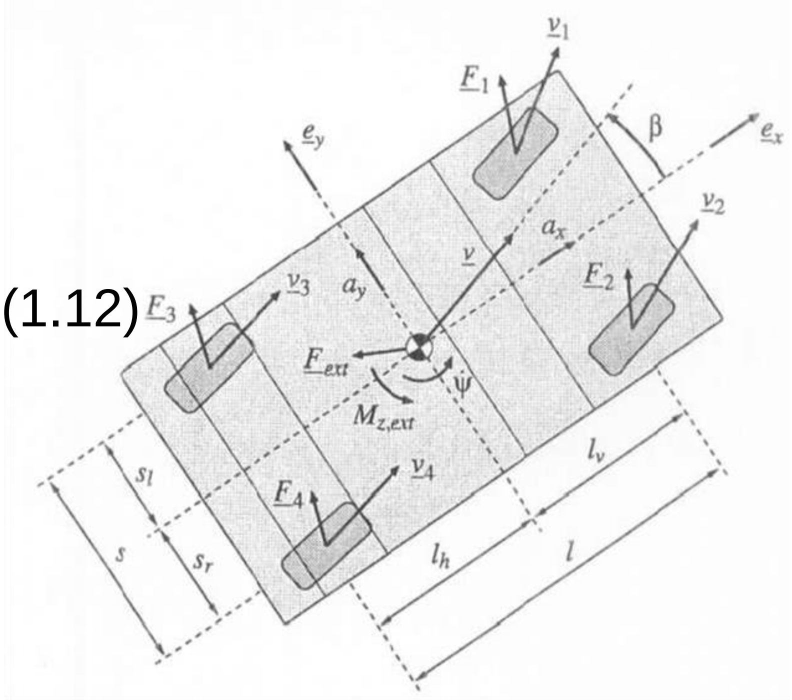
$$\underline{F}_i = F_{xi}\,\underline{e}_x + F_{yi}\,\underline{e}_y\,, \qquad i = 1\ldots 4 \qquad (1.10)$$

Die äußeren Einflüsse auf das Fahrzeug werden durch

$$\underline{F}_{ext} = F_{x,ext}\,\underline{e}_x + F_{y,ext}\,\underline{e}_y \quad (1.11)$$

vorgegeben. Aus dem SPS ergibt sich:

$$m\dot{\underline{v}} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + \underline{F}_{ext} \quad (1.12)$$



Horizontaldynamik

Mit (1.2) und (1.12) ergeben sich die skalaren Gleichungen für die translatorische Bewegung:

$$\dot{v}_x = v_y \dot{\psi} + \frac{1}{m}\left(F_x + F_{x,ext}\right), \tag{1.13}$$

$$\dot{v}_y = -v_x \dot{\psi} + \frac{1}{m}\left(F_y + F_{y,ext}\right) \tag{1.14}$$

mit den resultieren Kräften aus den Rädern:

$$F_x = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4}, \quad F_y = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} \tag{1.15}$$

Die Momentenbilanz um die Hochachse führt zu

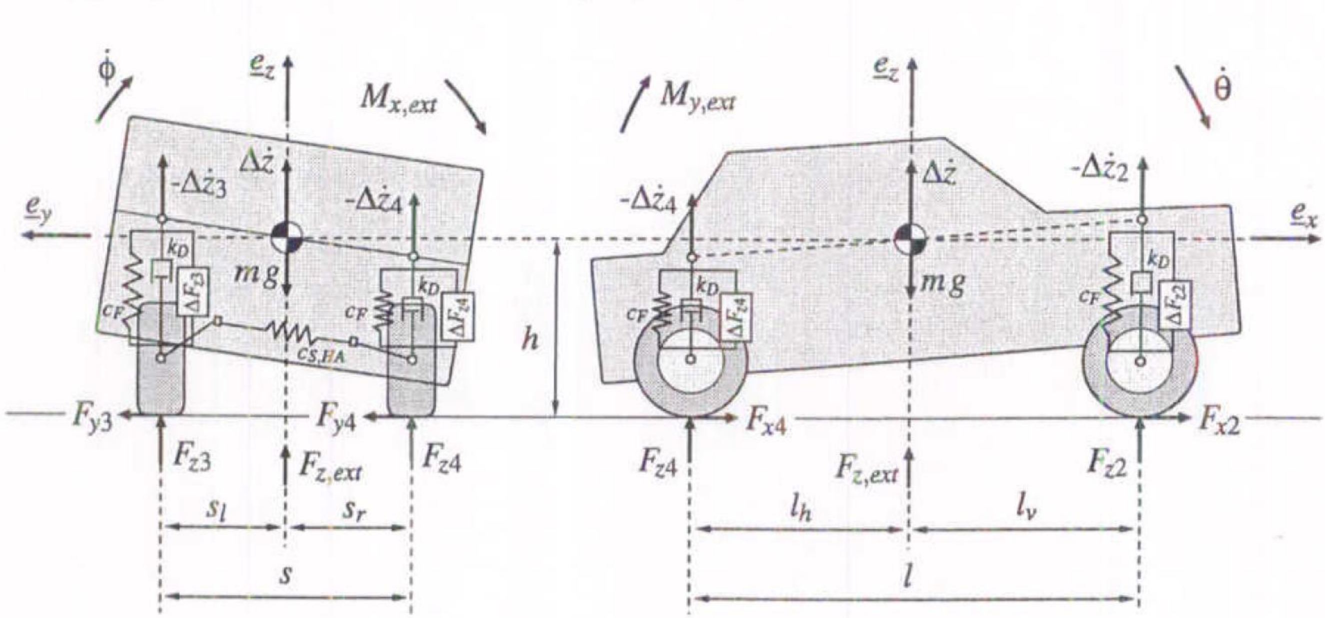
$$J_z \ddot{\psi} = M_z + M_{z,ext} \tag{1.16}$$

mit

$$M_z = -s_l F_{x1} + s_r F_{x2} - s_l F_{x3} + s_r F_{x4} + l_v F_{y1} + l_v F_{y2} - l_h F_{y3} - l_h F_{y4} \tag{1.17}$$

Die Gleichungen (1.13), (1.14) und (1.16) beschreiben nun die horizontale Fahrzeugdynamik in der Ebene.

Vertikaldynamik



Vertikaldynamik

- Die Aufbaumasse ist über gefederte Radaufhängung mit den Rädern verbunden.
- Reifenkräfte sowie externe Kräfte/Momente verursachen Reaktionskräfte am Fahrzeugaufbau, welche vertikale Bewegungen (Wanken, Nicken, Hubbewegung) verursachen.
- Die Aufbaufedern und -dämpfer sind linear in ihrem Verhalten sowie durch das Fahrzeuggewicht bereits vorgespannt und an den Achsen befinden sich Stabilisatoren (Federsteifigkeiten).
- In der stat. Ruhelage sind alle Federwege sowie die Wank- und Nickwinkel null. Es stellen sich die Federvorspannkräfte und die Höhe h des Schwerpunktes ein.
- Da die Wank- und Nickwinkel meist <10° sind, werden Kleinwinkel-näherungen genutzt, um die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen.

Vertikaldynamik

Durch eine Kleinwinkelnäherung gilt für die Radhubdifferenz an jedem Rad die Beziehung

$$-\Delta \dot{z}_1 = \Delta \dot{z} + s_l \dot{\phi} - l_v \dot{\theta}\,, \quad -\Delta z_1 = \Delta z + s_l \phi - l_v \theta \tag{1.26}$$

$$-\Delta \dot{z}_2 = \Delta \dot{z} - s_r \dot{\phi} - l_v \dot{\theta}\,, \quad -\Delta z_2 = \Delta z - s_r \phi - l_v \theta \tag{1.27}$$

$$-\Delta \dot{z}_3 = \Delta \dot{z} + s_l \dot{\phi} + l_h \dot{\theta}\,, \quad -\Delta z_3 = \Delta z + s_l \phi + l_h \theta \tag{1.28}$$

$$-\Delta \dot{z}_4 = \Delta \dot{z} - s_r \dot{\phi} + l_h \dot{\theta}\,, \quad -\Delta z_4 = \Delta z - s_r \phi + l_h \theta \tag{1.29}$$

Vertikaldynamik

Mit Berücksichtigung der externen Kräfte $F_{z,ext}$, $M_{x,ext}$, $M_{y,ext}$ ergeben sich mit dem Wankträgheitsmoment J_x und dem Nickträgheitsoment J_y des Aufbaus die BDGL der vertikalen Aufbaubewegungen zu:

$$m\Delta\ddot{z} = -mg + \sum_{i=1}^{4}(c_F\,\Delta z_i + F_{z,F0,i}) + \sum_{i=1}^{4} k_D\,\Delta\dot{z}_i + \sum_{i=1}^{4}\Delta F_{zi} + F_{z,ext}\,, \qquad (1.30)$$

$$\begin{aligned} J_x\,\ddot{\phi} = {} & s_l\,(c_F\,(\Delta z_1+\Delta z_3) + F_{z,F0,1} + F_{z,F0,3}) - s_r\,(c_F\,(\Delta z_2+\Delta z_4) + F_{z,F0,2} + F_{z,F0,4}) \\ & + s_l\,k_D\,(\Delta\dot{z}_1+\Delta\dot{z}_3) - s_r\,k_D\,(\Delta\dot{z}_2+\Delta\dot{z}_4) - (c_{S,VA}+c_{S,HA})\,\phi \\ & + s_l\,(\Delta F_{z1}+\Delta F_{z3}) - s_r\,(\Delta F_{z2}+\Delta F_{z4}) + h\,(F_{y1}+F_{y2}+F_{y3}+F_{y4}) + M_{x,ext}\,, \end{aligned} \qquad (1.31)$$

$$\begin{aligned} J_y\,\ddot{\theta} = {} & l_h\,(c_F\,(\Delta z_3+\Delta z_4) + F_{z,F0,3} + F_{z,F0,4}) - l_v\,(c_F\,(\Delta z_1+\Delta z_2) + F_{z,F0,1} + F_{z,F0,2}) \\ & + l_h\,k_D\,(\Delta\dot{z}_3+\Delta\dot{z}_4) - l_v\,k_D\,(\Delta\dot{z}_1+\Delta\dot{z}_2) \\ & + l_h\,(\Delta F_{z3}+\Delta F_{z4}) - l_v\,(\Delta F_{z1}+\Delta F_{z2}) - h\,(F_{x1}+F_{x2}+F_{x3}+F_{x4}) + M_{y,ext}\,. \end{aligned} \qquad (1.32)$$

Vertikaldynamik

Da die Vorspannkräfte der Aufbaufedern die Summe der Gewichtskräfte kompensieren, entsteht durch sie kein Wank-/Nickmoment und mit (1.26) - (1.29) sowie (1.30) – (1.32) folgt:

$$\begin{aligned} m\Delta\ddot{z} = &-4c_F\,\Delta z - 4k_D\,\Delta\dot{z} - 2c_F\,(s_l - s_r)\,\phi - 2k_D\,(s_l - s_r)\,\dot{\phi} \\ &-2c_F\,(l_h - l_v)\,\theta - 2k_D\,(l_h - l_v)\,\dot{\theta} + (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2} + \Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) + F_{z,ext}\,, \end{aligned} \tag{1.33}$$

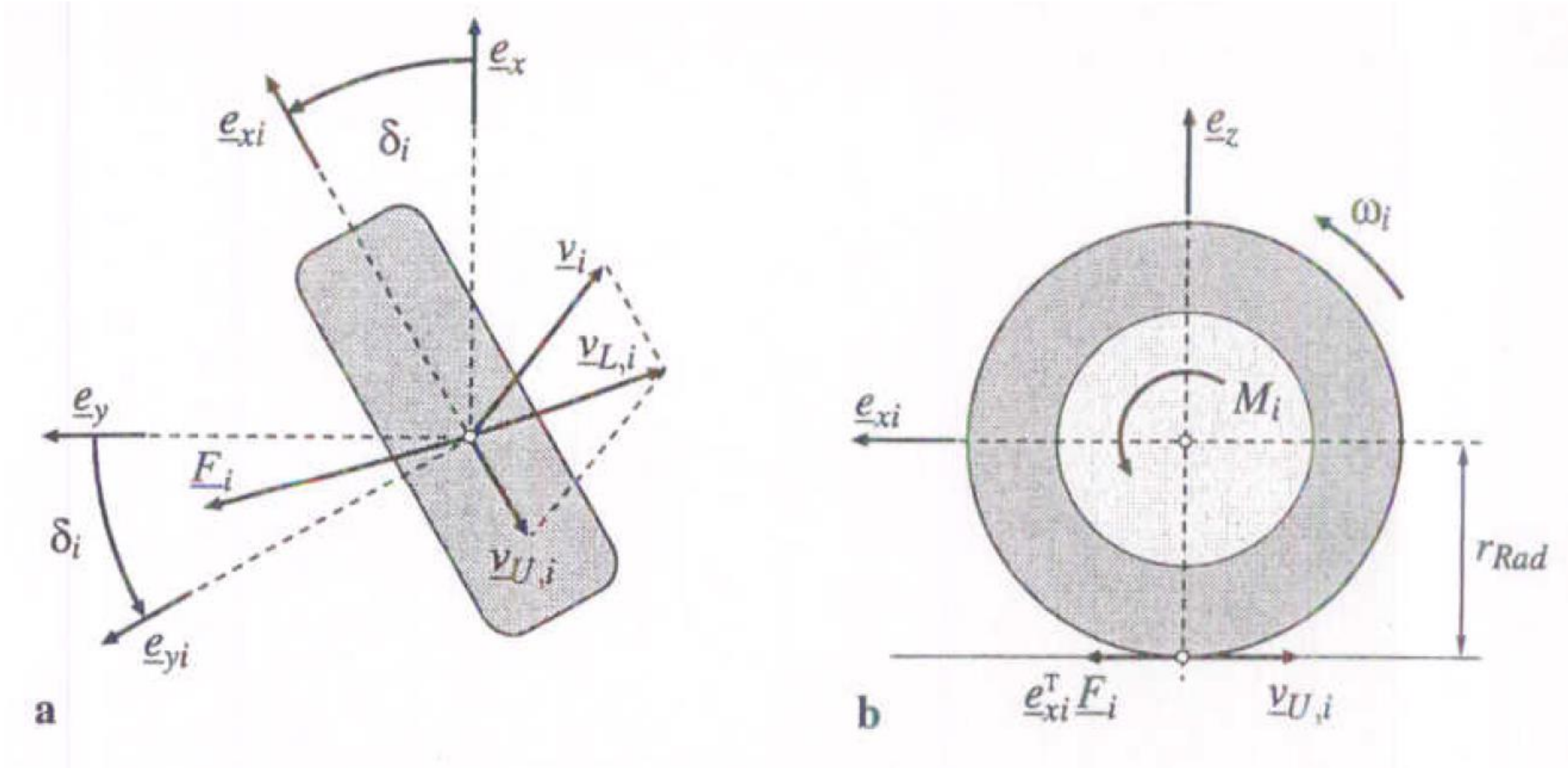
$$\begin{aligned} J_x\ddot{\phi} = &-2c_F\,(s_l - s_r)\,\Delta z - 2k_D\,(s_l - s_r)\,\Delta\dot{z} - \left(2c_F\left(s_l^2 + s_r^2\right) + c_{S,VA} + c_{S,HA}\right)\phi \\ &-2k_D\left(s_l^2 + s_r^2\right)\dot{\phi} - c_F\,(s_l - s_r)\,(l_h - l_v)\,\theta - k_D\,(s_l - s_r)\,(l_h - l_v)\,\dot{\theta} \\ &+ s_l\,(\Delta F_{z1} + \Delta F_{z3}) - s_r\,(\Delta F_{z2} + \Delta F_{z4}) + h\,F_y + M_{x,ext}\,, \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned} J_y\ddot{\theta} = &-2c_F\,(l_h - l_v)\,\Delta z - 2k_D\,(l_h - l_v)\,\Delta\dot{z} - c_F\,(s_l - s_r)\,(l_h - l_v)\,\phi \\ &-k_D\,(s_l - s_r)\,(l_h - l_v)\,\dot{\phi} - 2c_F\left(l_h^2 + l_v^2\right)\theta - 2k_D\left(l_h^2 + l_v^2\right)\dot{\theta} \\ &+ l_h\,(\Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) - l_v\,(\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2}) - h\,F_x + M_{y,ext}\,. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Rad/Reifenverhalten

Technische Universität Berlin

Da angenommen wird, dass jedes Rad individuell gelenkt werden kann, wird für jedes Rad auch ein radfestes KOS festgelegt.



Rad/Reifenverhalten

Dieses wird um den Lenkwinkel δ_i an jedem Rad gegenüber dem Fahrzeug-KOS gedreht:

$$\underline{e}_{xi} = \cos(\delta_i)\,\underline{e}_x + \sin(\delta_i)\,\underline{e}_y\,, \quad \underline{e}_{yi} = -\sin(\delta_i)\,\underline{e}_x + \cos(\delta_i)\,\underline{e}_y\,, \qquad i = 1\ldots4 \quad (1.36)$$

Die Geschwindigkeit am Reifengürtel (Radaufstandspunkt) ergibt sich nun zu:

$$\underline{v}_{L,i} = \underline{v}_i + \underline{v}_{U,i}\,, \qquad i = 1\ldots4 \quad (1.37)$$

wobei $\underline{v}_i$ die translatorische Geschwindigkeit nach (1.6) – (1.9) ist und $\underline{v}_{U,i}$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades:

$$\underline{v}_{U,i} = -\underline{e}_{xi}\, r_{Rad}\, \omega_i\,, \qquad i = 1\ldots4 \quad (1.38)$$

Entsprechend dem daraus resultierenden Schlupf entstehen die Radkräfte in Längs- und Querrichtung. Zusammen mit dem Radantriebs- und -bremsmoment stellt sich die Raddrehzahl wie folgt ein:

$$J_{Rad}\,\dot{\omega}_i = M_i - \underline{e}_{xi}^{T}\,\underline{F}_i\, r_{Rad}\,, \qquad i = 1\ldots4 \quad (1.39)$$

Rad/Reifenverhalten

Abschließend entsteht mit (1.10) und (1.36) die BDGL des Rades zu:

$$J_{Rad}\,\dot{\omega}_i = M_i - r_{Rad}\cos(\delta_i)\,F_{xi} - r_{Rad}\sin(\delta_i)\,F_{yi}\,, \qquad i = 1\ldots4 \qquad (1.40)$$

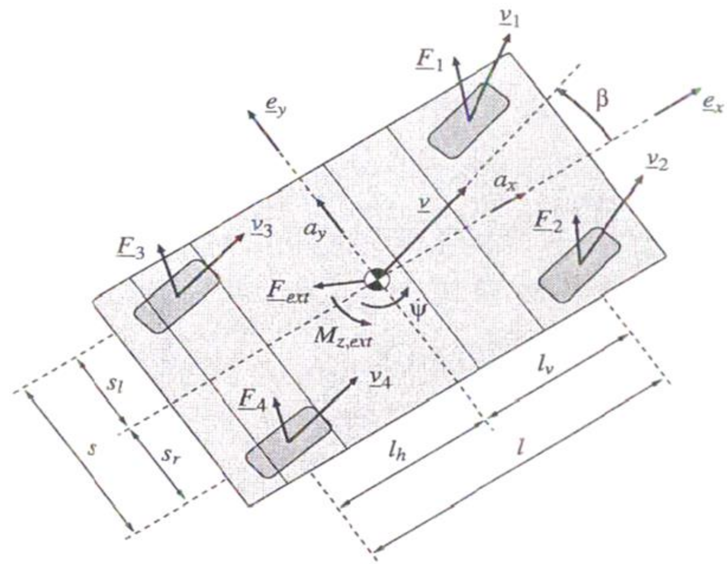
Zusammenfassung

Horizontaldynamik

$$\dot{v}_x = v_y \dot{\psi} + \frac{1}{m}\left(F_x + F_{x,ext}\right),$$

$$\dot{v}_y = -v_x \dot{\psi} + \frac{1}{m}\left(F_y + F_{y,ext}\right)$$

$$J_z \ddot{\psi} = M_z + M_{z,ext}$$



Vertikaldynamik

$$m\Delta\ddot{z} = -4c_F\Delta z - 4k_D\Delta\dot{z} - 2c_F(s_l - s_r)\phi - 2k_D(s_l - s_r)\dot{\phi}$$

$$-2c_F(l_h - l_v)\theta - 2k_D(l_h - l_v)\dot{\theta} + (\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2} + \Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) + F_{z,ext},$$

$$J_x\ddot{\phi} = -2c_F(s_l - s_r)\Delta z - 2k_D(s_l - s_r)\Delta\dot{z} - \left(2c_F\left(s_l^2 + s_r^2\right) + c_{S,VA} + c_{S,HA}\right)\phi$$

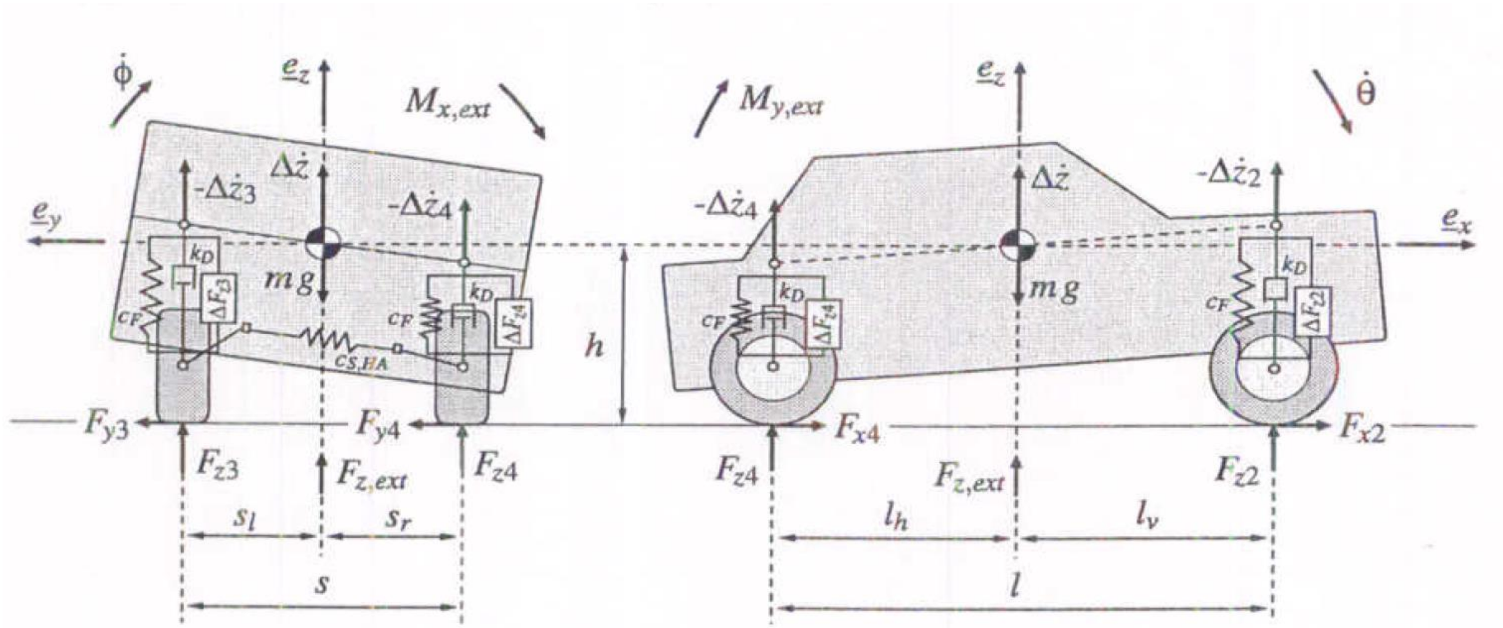
$$-2k_D\left(s_l^2 + s_r^2\right)\dot{\phi} - c_F(s_l - s_r)(l_h - l_v)\theta - k_D(s_l - s_r)(l_h - l_v)\dot{\theta}$$

$$+s_l(\Delta F_{z1} + \Delta F_{z3}) - s_r(\Delta F_{z2} + \Delta F_{z4}) + hF_y + M_{x,ext},$$

Zusammenfassung

Vertikaldynamik

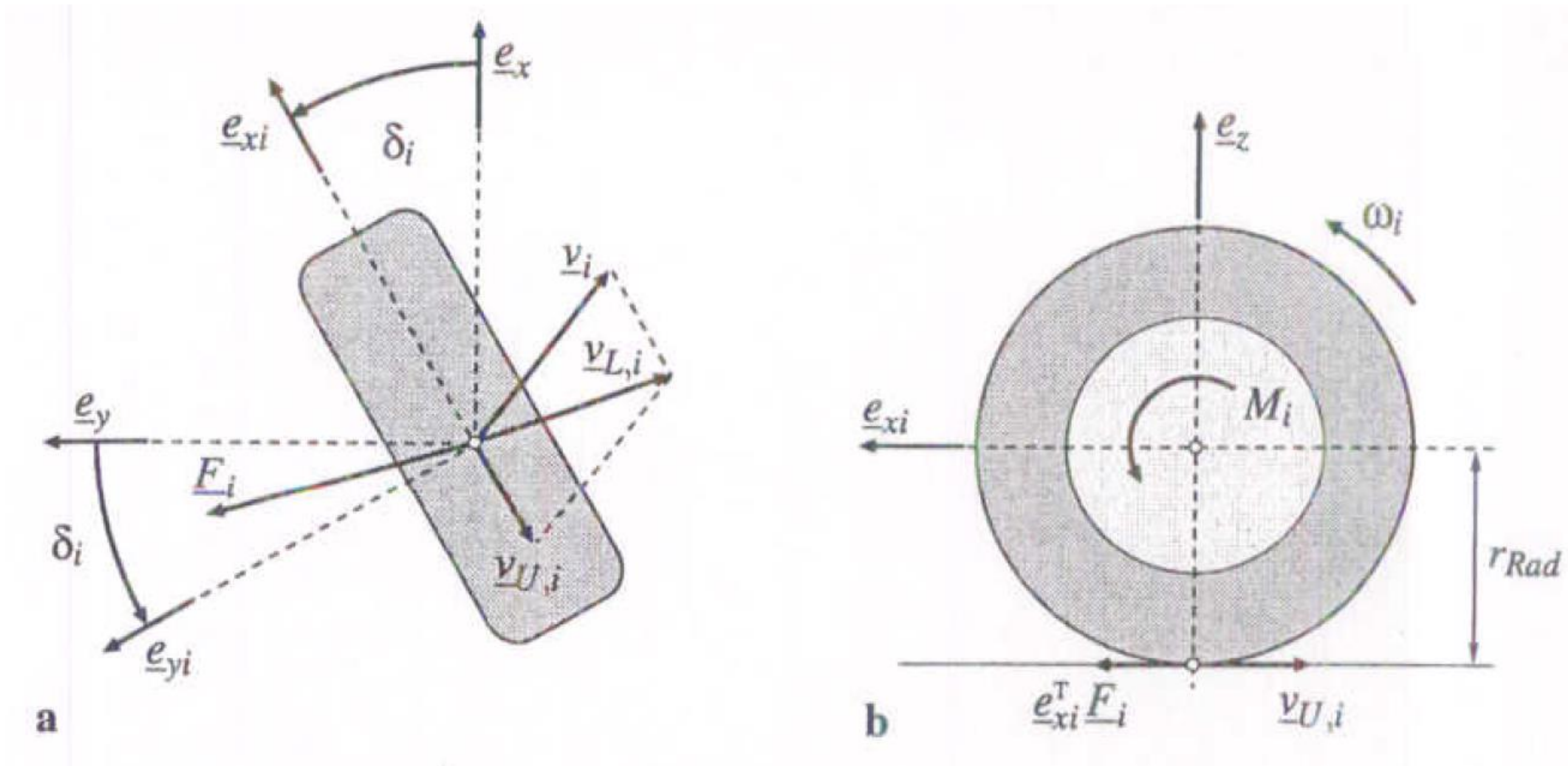
$$J_y \ddot{\theta} = -2c_F(l_h - l_v)\Delta z - 2k_D(l_h - l_v)\Delta\dot{z} - c_F(s_l - s_r)(l_h - l_v)\phi$$
$$- k_D(s_l - s_r)(l_h - l_v)\dot{\phi} - 2c_F(l_h^2 + l_v^2)\theta - 2k_D(l_h^2 + l_v^2)\dot{\theta}$$
$$+ l_h(\Delta F_{z3} + \Delta F_{z4}) - l_v(\Delta F_{z1} + \Delta F_{z2}) - hF_x + M_{y,ext}.$$



Zusammenfassung

Dynamik des Rades

$$J_{Rad}\,\dot{\omega}_i = M_i - r_{Rad}\cos(\delta_i)\,F_{xi} - r_{Rad}\sin(\delta_i)\,F_{yi}\,, \qquad i = 1\ldots4$$



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!