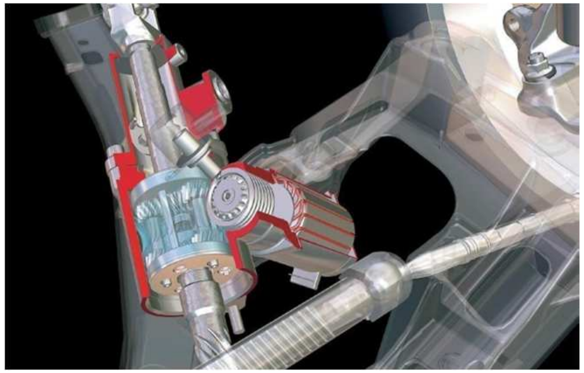
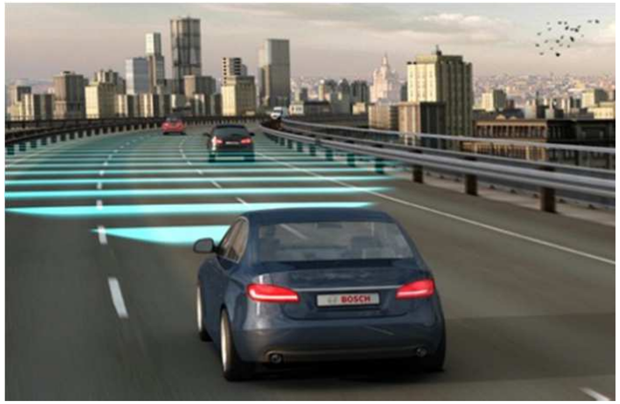
Fahrzeugmechatronik II
Beobachterentwurf


Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Beobachterentwurf
Problem und Lösungsansatz

Eine Zustandsrückführung erlaubt eine weitgehend freie Gestaltung der dynamischen Eigenschaften des Regelkreises. Vorausgesetzt wird aber, dass alle Zustände zu jedem Zeitpunkt bekannt sind.

Die Zustände sind meist nicht vollständig messbar, da

- der messtechnischer Aufwand zu hoch oder
- die Messgröße gar nicht kontinuierlich während des Prozesses messbar ist.

Mit einem Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}(t)$ für den Zustand $\mathbf{x}(t)$ könnte eine Zustandsrückführung $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$ realisiert werden.

Beobachterentwurf
Problem und Lösungsansatz

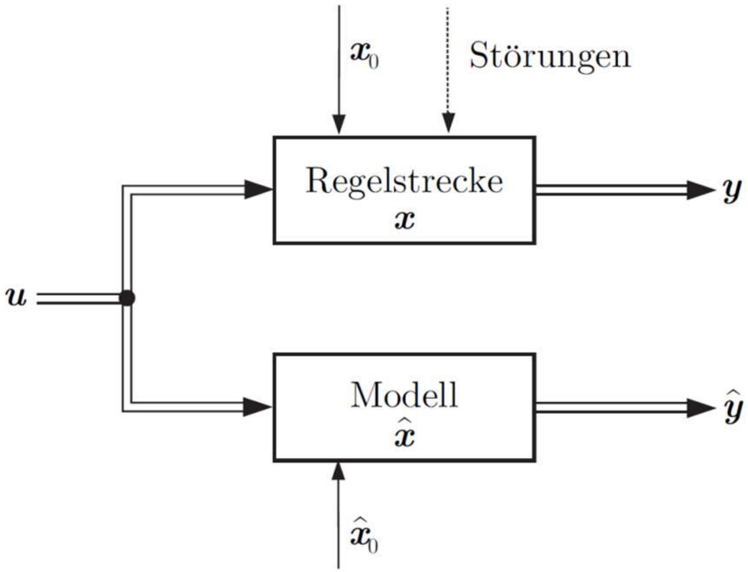
Beobachter rekonstruieren den Zustand aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen. Hierdurch lassen sich z.B. **Zustandsrückführungen ohne die Messung aller Zustände realisieren oder Zustände bzw. Störgrößen beobachten**.

Es werden behandelt:

- **Lösungsweg** für den **Beobachterentwurf**
- Realisierung von **Zustandsrückführungen mit Beobachter**

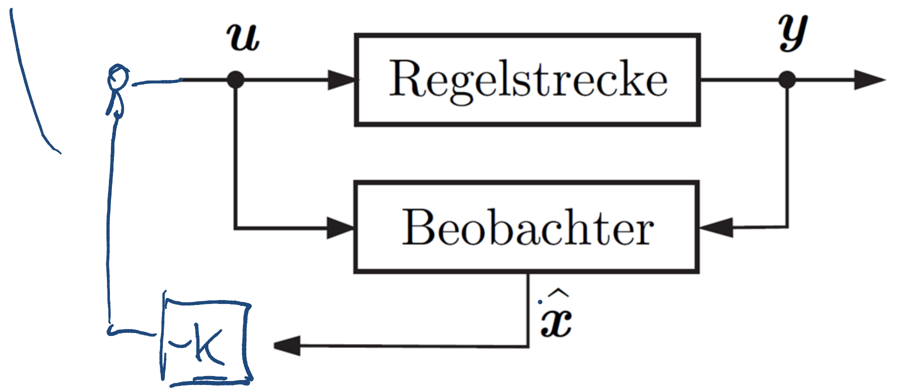
Beobachterentwurf
Lösungsweg

Einfachster Lösungsweg



Allgemeine Beobachterstruktur

für Zustandsrückführung



1. Nachteil:

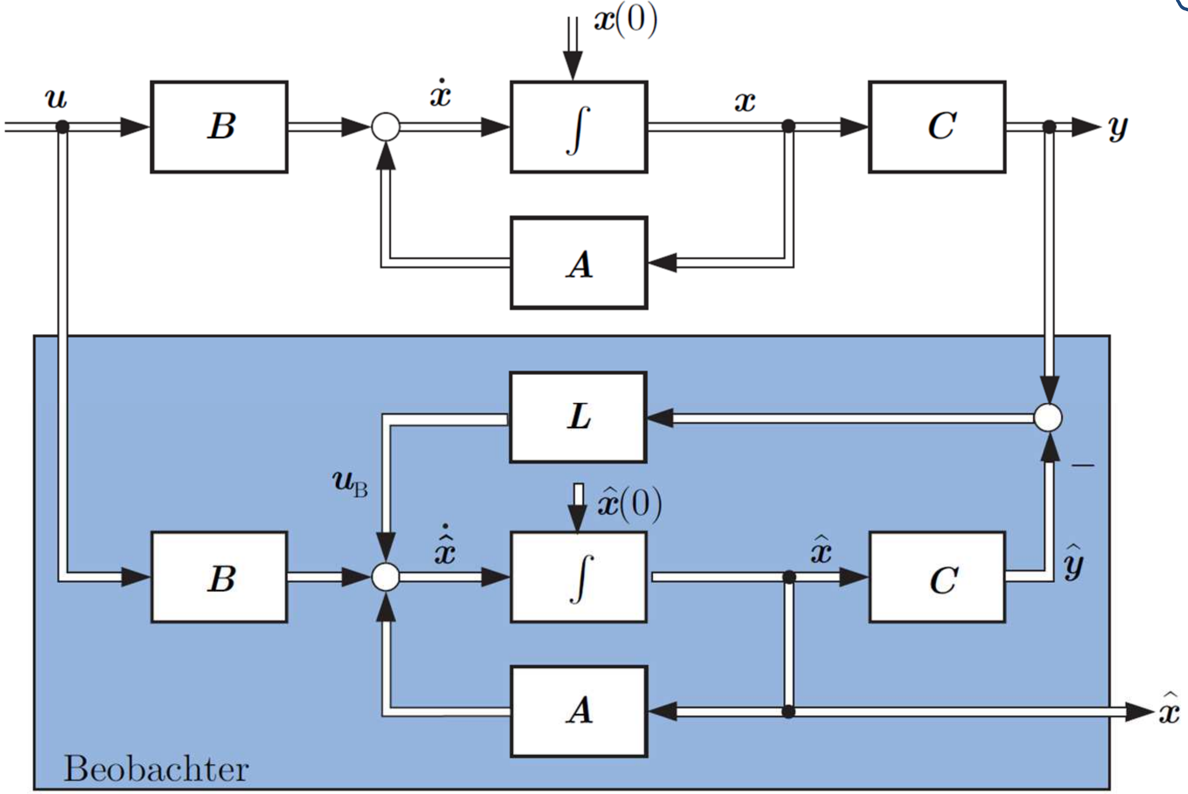
Lösung Regelstrecke: $\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}u\,d\tau$

-"- Modell : $\hat{\underline{x}}(t) = e^{\underline{A}t}\hat{\underline{x}}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}u\,d\tau$

Der Fehler $\underline{x}(t)-\hat{\underline{x}}(t) = e^{\underline{A}t}(\underline{x}_0-\hat{\underline{x}}_0)$ geht nur gegen Null, wenn $\underline{A}$ stabil

2. Nachteil: Störungen und Modellungenauigkeiten werden nicht kompensiert

Luenberger Beobachter
Struktur des Beobachters



Regelstrecke

$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$

$\underline{y}(t) = \underline{C}^{\prime}\,\underline{x}(t) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$

Beobachter

$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{A}\,\hat{\underline{x}}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + \underline{u}_B(t)$

$\hat{\underline{y}}(t) = \underline{C}^{\prime}\,\hat{\underline{x}}(t) \qquad \hat{\underline{x}}(0) = \hat{\underline{x}}_0$

$\underline{u}_B(t) = \underline{L}\,(\underline{y}(t) - \hat{\underline{y}}(t))$

$\Rightarrow \dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{A}\,\hat{\underline{x}}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + \underline{L}\,\underline{C}^{\prime}(\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t))$

Somit $\boxed{\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C}^{\prime})\,\hat{\underline{x}}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + \underline{L}\,\underline{y}(t)}$

Luenberger Beobachter
Konvergenz des Beobachters

Mit dem Beobachtungsfehler $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \underline{\hat{x}}(t)$ folgt

$$\boxed{\underline{\dot{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{e}(t)}$$

mit $\underline{e}(0) = \underline{x}_0 - \underline{\hat{x}}_0$

Satz 8.1 (Beobachter)
Für den Beobachtungsfehler

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

eines Luenbergerbeobachters gilt die Beziehung

$$\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{e}(t)\| = 0$$

für beliebige Anfangszustände des Systems und des Beobachters genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})$ *negativen Realteil haben.*

Luenberger Beobachter
Wahl der Rückführmatrix L

Die Eigenwerte von $(\underline{A}-\underline{L}\,\underline{C})$ und $(\underline{A}-\underline{L}\,\underline{C})^T = (\underline{A}^T - \underline{C}^T \underline{L}^T)$ sind identisch. Die Aufgabe $\underline{L}$ so zu wählen, dass $(\underline{A}-\underline{L}\,\underline{C})$ stabil ist, kann in die Entwurfsaufgabe einer Zustandsrückführung überführt werden

$$\dot{\underline{x}}_T = \underline{A}^T \underline{x}_T(t) + \underline{C}^T \underline{u}_T(t) \qquad (\text{„Duales System"})$$

$$\underline{u}_T(t) = -\underline{L}^T \underline{x}_T(t)$$

Ist das System $(\underline{A}^T, \underline{C}^T)$ vollständig steuerbar, dann können die Eigenwerte durch $\underline{L}$ beliebig platziert werden.
(folgt aus Satz zur Polverschiebbarkeit)

Luenberger Beobachter
Nebenbetrachtung: Duales System

Primales System

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t)$$

Duales System

$$\dot{\underline{x}}_T(t) = \underline{A}^T \underline{x}_T(t) + \underline{C}^T \underline{u}_T(t)$$

$$\underline{y}_T(t) = \underline{B}^T \underline{x}_T(t)$$

Steuerbarkeit (primal)

$$\text{Rang}\,[\underline{B} \;\; \underline{A}\underline{B} \;\; \ldots] = n$$

Steuerbarkeit (dual)

$$\text{Rang}\,[\underline{C}^T \;\; \underline{A}^T\underline{C}^T \;\; \ldots] \;\; [\ldots]^T$$

$$= \text{Rang}\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

„Äquivalenz"

Beobachtbarkeit (primal)

$$\text{Rang}\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \vdots \end{bmatrix} = n$$

Beobachtbarkeit (dual)

$$\text{Rang}\begin{bmatrix} \underline{B}^T \\ \underline{B}^T\underline{A}^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \text{Rang}\,[\underline{B} \;\; \underline{A}\underline{B} \;\; \ldots] = n$$

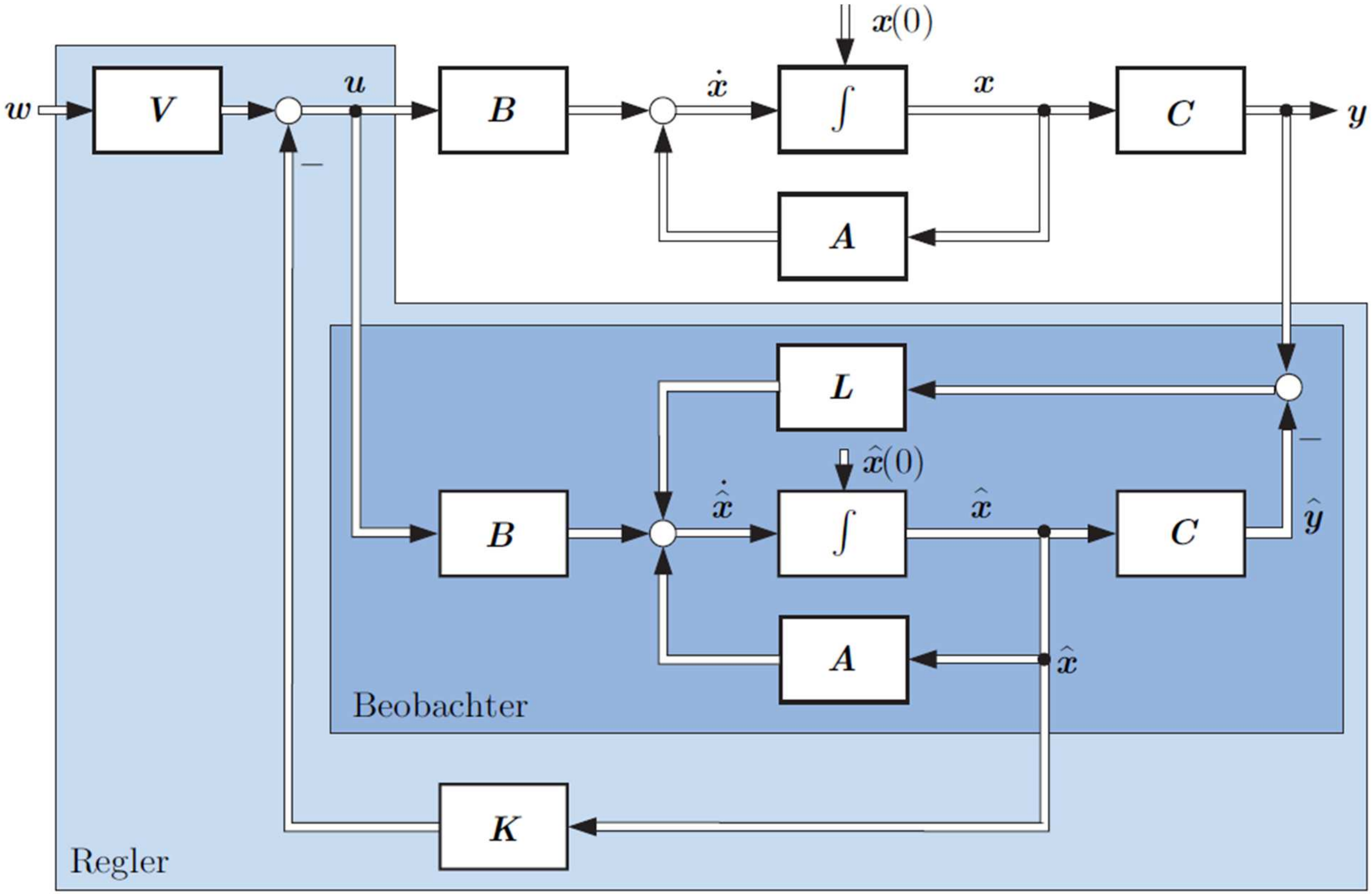
Luenberger Beobachter
Duales Entwurfsproblem

- Die Eigenwerte von (**A**-**LC**) können durch eine geeignete Wahl von **L** genau dann beliebig verschoben werden, wenn das System (**A**,**C**) vollständig beobachtbar ist.
- Damit der Beobachtungsfehler schneller abklingt als das Übergangsverhalten des zu beobachtenden Systems, müssen die Eigenwerte möglichst weit links in der komplexen Ebene platziert werden.

Aber zu großes L verstärkt Messfehler in y(t)

- Soll eine Zustandsrückführung **K** realisiert werden, wählt man die Beobachtereigenwerte im Vergleich zu den Eigenwerten der Matrix (**A**-**BK**)

Luenberger Beobachter mit Zust.-rückführung
Realisierung einer Zustandsrückführung



Luenberger Beobachter mit Zust.-rückführung

Beschreibung des Regelkreises

$\underline{A}\,\underline{x} = \lambda x$

$(\lambda \underline{I} - \underline{A})\,\underline{x} = \underline{0}$

Gleichung für die Regelstrecke und den Beobachtungsfehler

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Reglergesetz

$$\underline{u}(t) = -\underline{K}\,\hat{\underline{x}}(t) + \underline{V}\,\underline{w}(t) = -\underline{K}\,(\underline{x}(t) - \underline{e}(t)) + \underline{V}\,\underline{w}(t)$$

Dies führt auf

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{K}\,\underline{e}(t) + \underline{B}\,\underline{V}\,\underline{w}(t)$$

bzw.

$$\begin{Bmatrix} \underline{x}(0) \\ \underline{e}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{e}(t) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K} & \underline{B}\,\underline{K} \\ \hline \underline{0} & \underline{A} - \underline{L}\,\underline{C} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{e}(t) \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \underline{B}\,\underline{V} \\ \hline \underline{0} \end{array}\right] \underline{w}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{e}(t) \end{Bmatrix}$$

Luenberger Beobachter mit Zust.-rückführung
Ermittlung der K-Matrix - Separationstheorem

$$\det \begin{bmatrix} \lambda \underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}) & -\underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{0} & \lambda \underline{I} - (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C}) \end{bmatrix} \overset{\text{nach Schur}}{=} \det\left(\lambda \underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\right) \cdot \det\left(\lambda \underline{I} - (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\right) = 0$$

Satz 8.2 (Separationstheorem)
Die Eigenwerte des Regelkreises, in dem eine Zustandsrückführung mit einem Beobachter realisiert ist, setzen sich aus den Eigenwerten der Matrix $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$, *die einen Regelkreis mit Zustandsrückführung und ohne Beobachter beschreibt, und den Eigenwerten der Systemmatrix* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$ *des Beobachters zusammen.*

$\Rightarrow$ Man kann die Zustandsrückführung vollkommen unabh. davon entwerfen, ob sie mit oder ohne Beobachter realisiert wird.

Luenberger Beobachter mit Zust.-rückführung
E/A-Verhalten für Regelkreis mit Beobachter

Für die Inverse einer Blockdreiecksmatrix gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Für die Übertragungsfunktionsmatrix des Regelkreises mit Beobachter gilt

$$\underline{y} = \underline{G}_w \underline{w}$$

mit

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{E} \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{Bmatrix} \underline{x} \\ \underline{E} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} (s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}))^{-1} & X \\ \hline \underline{0} & X \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \underline{B}\,\underline{V} \\ \hline \underline{0} \end{Bmatrix} \underline{w}$$

$$= \underbrace{\underline{C}\,(s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}))^{-1}\,\underline{B}\,\underline{V}}_{\underline{G}_w}\,\underline{w}$$

▷ EW unabh. vom Beobachter

▷ E/A-Verhalten –"–

▷ Zeitverhalten abh. vom Beobachter

Luenberger Beobachter mit Zust.-rückführung
Entwurfsverfahren für RK mit Beobachter

Entwurfsverfahren 8.1 *Entwurf einer Zustandsrückführung und eines Beobachters*

Gegeben: Regelstrecke $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, Güteforderungen

1. Es wird überprüft, dass die Regelstrecke vollständig steuerbar und beobachtbar ist.
2. Mit bekannten Verfahren wird eine Zustandsrückführung

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{V}\boldsymbol{w}(t)$$

   entworfen, mit der die an den Regelkreis gestellten Güteforderungen erfüllt sind (vgl. z. B. die Algorithmen 6.1 auf S. 239 und 7.1 auf S. 301).
3. Anhand der Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ werden die Beobachtereigenwerte festgelegt.
4. Mit einem Verfahren zur Polverschiebung wird für die vorgegebenen Beobachtereigenwerte die Rückführmatrix $\boldsymbol{L}$ entworfen. Dabei wird z. B. das Entwurfsverfahren 6.1 auf S. 239 auf das duale System mit den Matrizen $\boldsymbol{A}'$ und $\boldsymbol{B}'$ angewendet, um $\boldsymbol{L}'$ zu berechnen.
5. Das Verhalten des geschlossenen Kreises wird anhand von Simulationsuntersuchungen bewertet.

Ergebnis: Zustandsrückführung, Beobachter.

Luenberger Beobachter mit Zust.-rückführung
Wahl der Beobachtereigenwerte

Prinzipiell können die EW λ_{Bi} von $(\underline{A}-\underline{L}\,\underline{C})$ frei gewählt werden, aber

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{r}(t) \rightarrow \text{Messrauschen}$$

führt

$$\underline{\dot{e}}(t) = (\underline{A}-\underline{L}\,\underline{C})\,\underline{e}(t) - \underline{L}\,\underline{r}(t)$$

> Man wählt die Beobachtereigenwerte λ_{Bi} so aus, dass sie in der linken komplexen Halbebene deutlich links von den Eigenwerten der Regelstrecke bzw. des geschlossenen Kreises liegen. Der Betrag der Realteile soll 2 bis 6 mal so groß sein wie der Betrag der Realteile der dominierenden Eigenwerte, wobei der kleinere Faktor für großes Messrauschen gilt.

Bei dieser Wahl klingen die Eigenvorgänge des Beobachters zwei- bis sechsmal so schnell ab wie die Eigenvorgänge der Strecke bzw. des Regelkreises. Die durch die Zustandsrückführung erzeugten Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ sind deshalb für das Regelkreisverhalten mit Beobachter maßgebend.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!