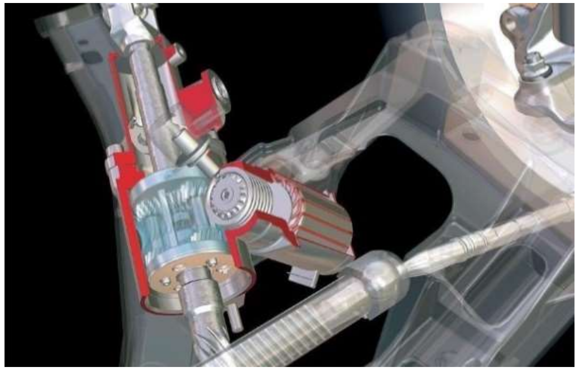
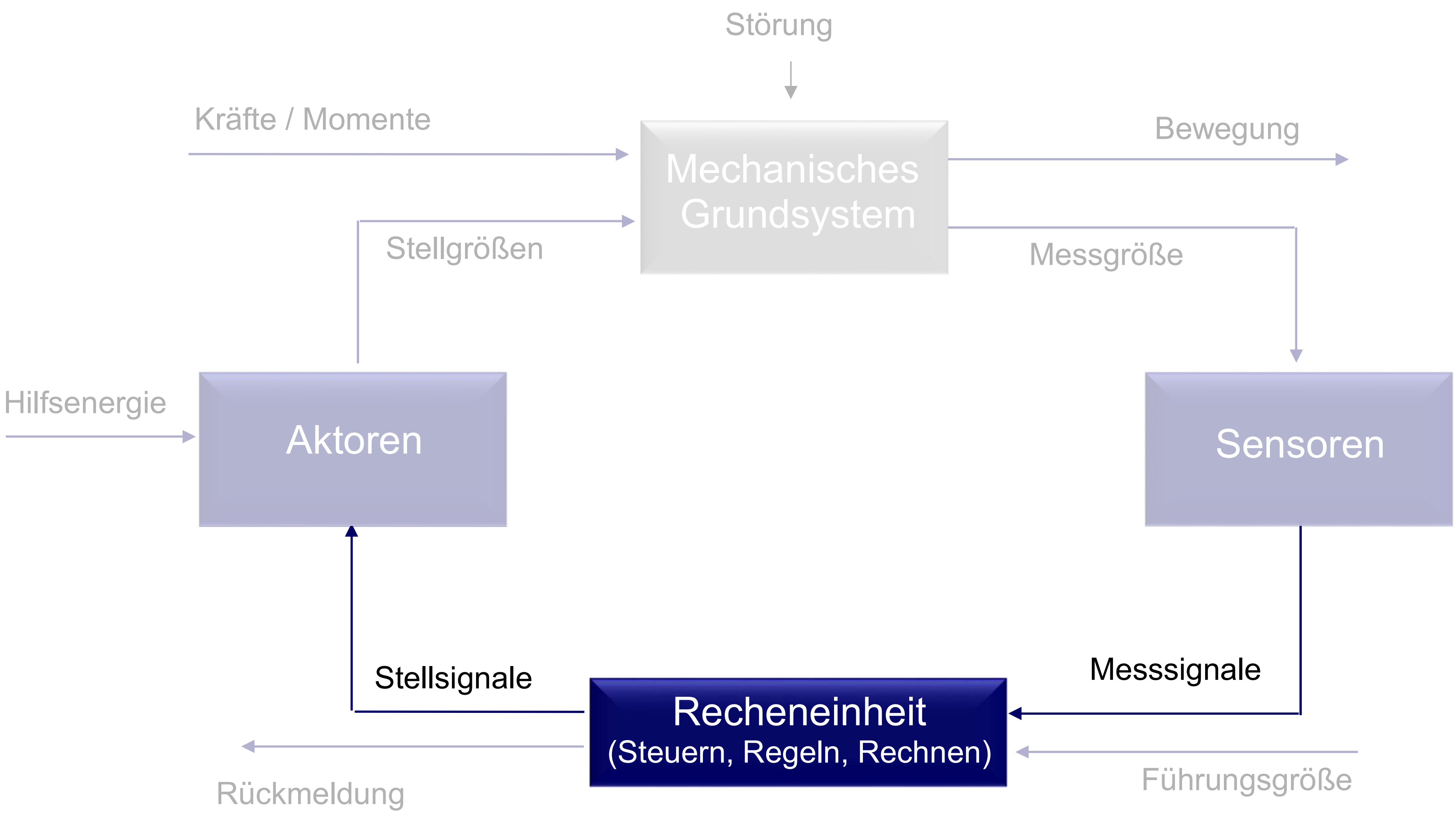
Fahrzeugmechatronik I
Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Übersicht
Mechatronisches System



Übersicht
Definition Signal und Signalverarbeitung

Der Begriff „Signal“ kennzeichnet eine zeitveränderliche, **informationstragende Messgröße**. Signale werden in unterschiedliche **Klassen** eingeteilt und können durch **Kennwerte oder Kennfunktionen** beschrieben werden.

Unter dem Begriff **Signalverarbeitung** sind alle Bearbeitungsschritte zusammengefasst, die das Ziel haben, **Informationen aus einem Signal zu extrahieren** oder **für die Übertragung vorzubereiten**.

Übersicht
Klassifizierung von Signalen

- Signal
  - deterministisches Signal
    - periodisches Signal
      - harmonisches Signal
      - allgemein periodisches Signal
    - nicht-periodisches Signal
      - fast periodisches Signal
      - transientes Signal
  - stochastisches Signal
    - stationäres Signal
      - ergodisches Signal
      - nicht-ergodisches Signal
    - instationäres Signal

definiert und reproduzierbar zu jeder Zeit

zufällig

Zeitreihe hat zu jedem Zeitpunkt gleiche statist. Eigenschaften

während eines begrenzten Beobachtungszeitraumes werden alle möglichen Zustände eingenommen

Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennwerte

1. Schätzwert für den Erwartungswert - Arithmetischer bzw. lin Mittelwert $\bar{x}$

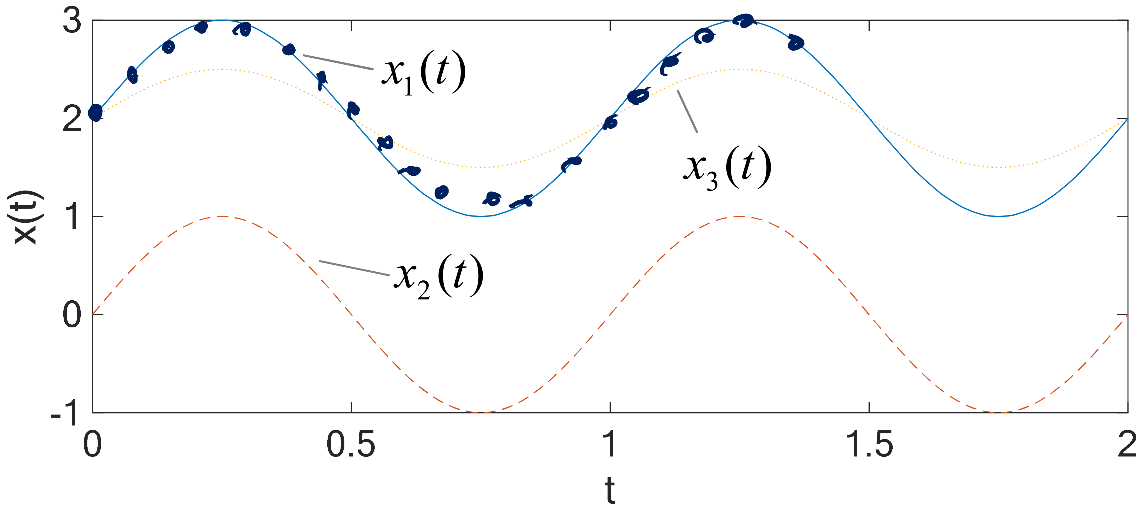
Diskret

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

Stetig

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$

Beispiel



Bsp

$i = 1,3 \quad \bar{x}_i = 2$

$i = 2 \quad \bar{x}_i = 0$

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennwerte

2. Maß für die Streuung – Varianz σ_x^2

Diskret

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\bar{x})^2$$

Stetig

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-\bar{x})^2\,dt$$

Bsp.:
$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad \text{für } i=1,2$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{1}{2}\left[t-\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t\right]_0^T = \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{für } i=1,2\\ \frac{1}{8} & \text{für } i=3\end{cases}$$

3. Standardabweichung σ_x

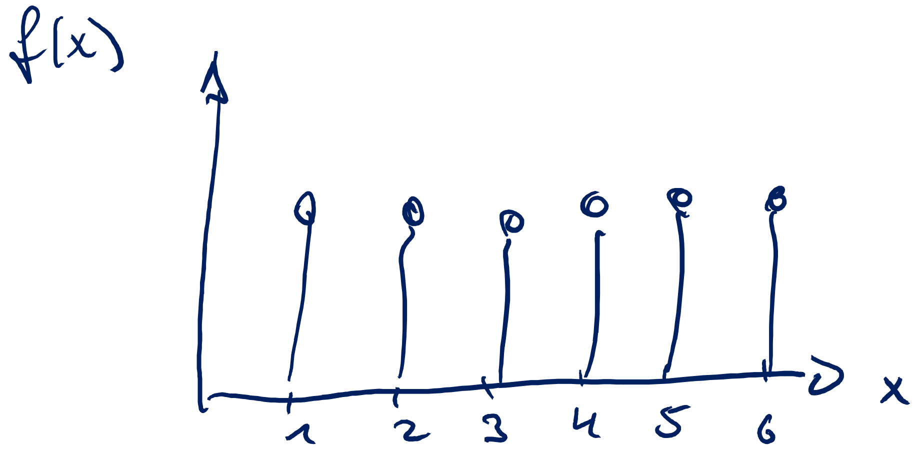
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennfunktionen

4. Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion/-verteilung-
Dichtefunktion $f(x)$

$f(x)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt.

Bsp: Bei einem Würfel gilt $f(x) = \frac{1}{6}$



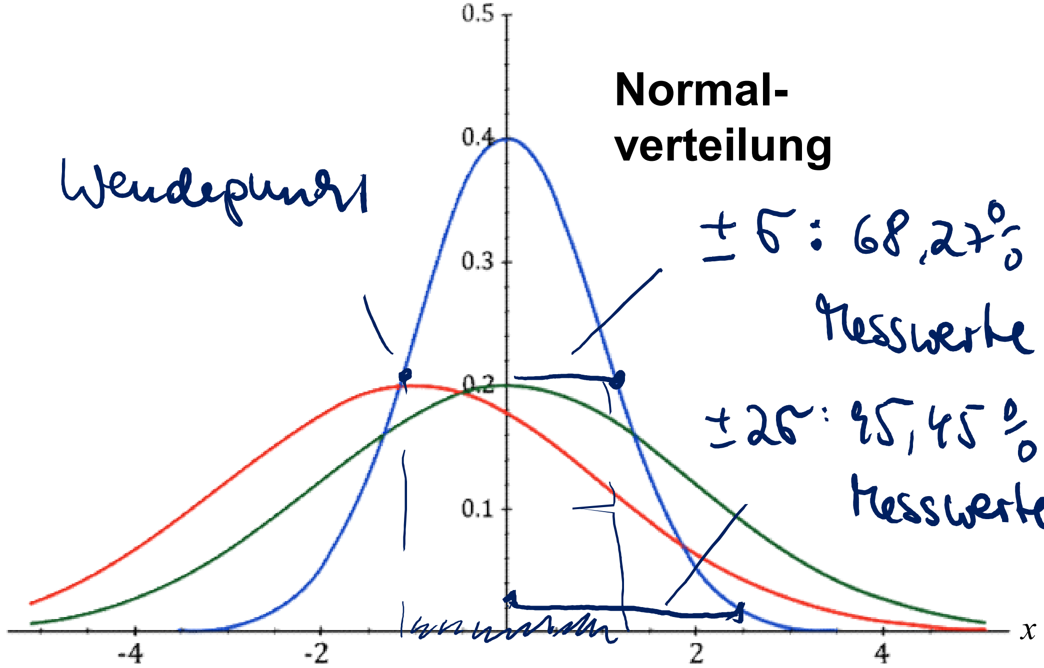
Dabei gilt immer

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennfunktionen

Beispiele für Dichtefunktionen

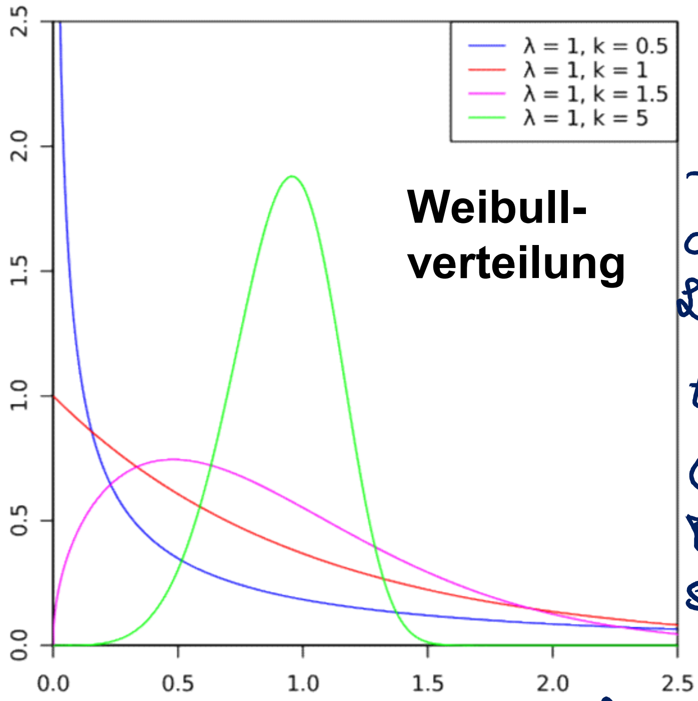
Wendepunkt



± σ: 68,27% aller Messwerte

± 2σ: 95,45 % aller Messwerte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$



$\lambda = \frac{1}{\tau}$

T- charakt. Lebensdauer

t=T: 63% d. Einheiten sind ausgefallen

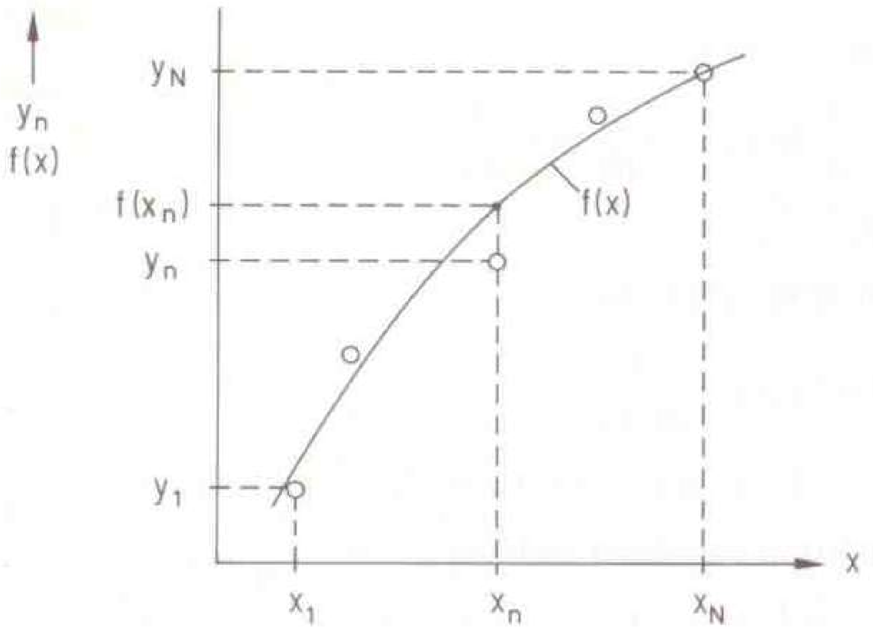
$$f(t) = \frac{b}{T^b}\, t^{b-1}\, e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Ausgleichsrechnung
Einführung

Gegeben seien Wertepaare (x_n, y_n), wobei der Zählparameter n von 1 bis N läuft. **Durch die insgesamt N Wertepaare** ist eine **Kennfunktion** f(x) zu legen, so dass der Zusammenhang zwischen x_n und y_n **analytisch** angegeben werden kann.



Ausgleichsrechnung
Einführung

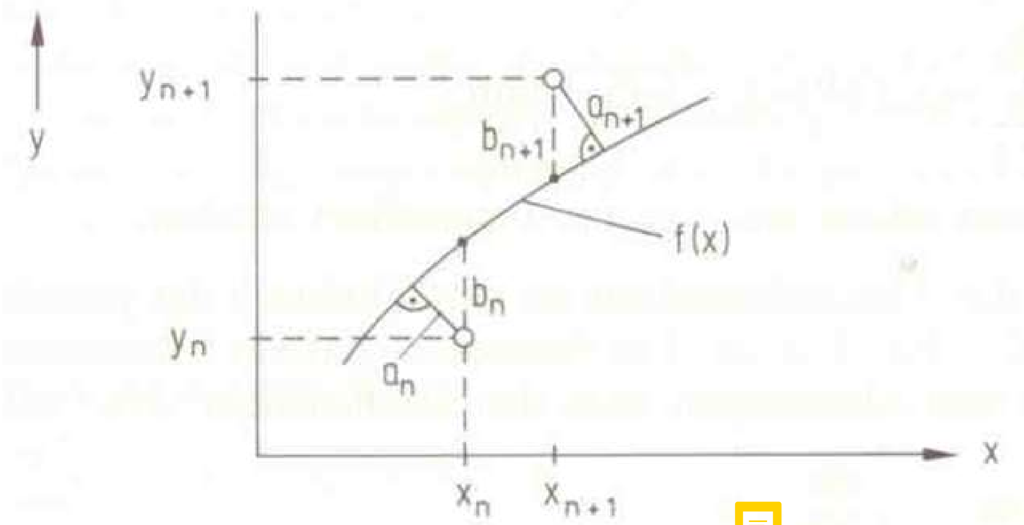
Ermittlung der Ausgleichskurve f(x) durch:

(1) L_1- Approximation

$$\sum_{n=1}^{N} |f(x_n) - y_n| \overset{!}{=} \min$$

(2) L_2- Approximation, Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$\sum_{n=1}^{N} (f(x_n) - y_n)^2 \overset{!}{=} \min$$



(3) L_∞ Approximation

$$\max |f(x_n) - y_n| \overset{!}{\leq} D$$

Ausgleichsrechnung
Ausgleichspolynom

Ausgangspunkt sei ein Ausgleichspolynom 3. Grades

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Für die Residuen r_n gilt

$$r_n = f(x_n) - y_n$$

Dann ergibt die Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$S = \sum_{n=1}^{N} w_n(x_n) \left(f(x_n) - y_n\right)^2 \overset{!}{=} \mathrm{Min}$$

Wahl: 1

Ausgleichsrechnung
Ausgleichspolynom

$S(a,b,c,d)$ hat ein Extremum für

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(a + bx_n + cx_n^2 + dx_n^3 - y_n\right)1$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\quad - " - \quad \right)x_n$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\quad - " - \quad \right)x_n^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial d} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\quad - " - \quad \right)x_n^3$$

Es lässt sich zeigen, dass dies Extremum immer Minimum (s. Schreiber, S. 75)

Ausgleichsrechnung
Ausgleichspolynom

a, b, c und d folgen dann aus

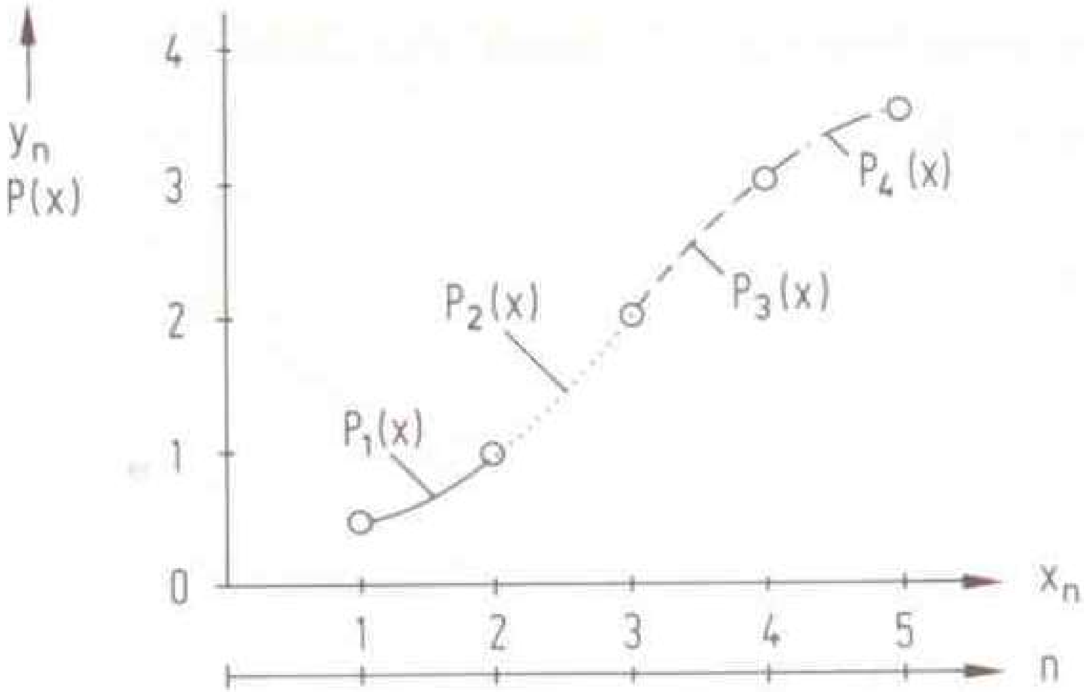
$$\begin{bmatrix} N & \sum x_n & \sum x_n^2 & \sum x_n^3 \\ \sum x_n & \sum x_n^2 & \sum x_n^3 & \sum x_n^4 \\ \sum x_n^2 & \sum x_n^3 & \sum x_n^4 & \sum x_n^5 \\ \sum x_n^3 & \sum x_n^4 & \sum x_n^5 & \sum x_n^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_n \\ \sum x_n y_n \\ \sum x_n^2 y_n \\ \sum x_n^3 y_n \end{Bmatrix}$$

Falls Ausgleich durch Polynome 3. Ordnung unzureichend:

Ausgleichspolynome höherer Ordnung neigen zu Welligkeiten und großen Abweichungen zwischen den Stützstellen -> **Ausgleich durch Splines**

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Ausgleichsrechnung
Splines



Ausgleichsrechnung
Splines

Ausgleichsrechnung
Splines

a_n, b_n, c_n und d_n lassen sich durch die gegebenen Stützwerte und die noch unbekannten 2. Ableitungen ausdrücken

$$a_n = y_n$$

$$b_n = \frac{1}{h_n}\left(y_{n+1} - y_n\right) - \frac{1}{6} h_n \left(y''_{n+1} + 2y''_n\right)$$

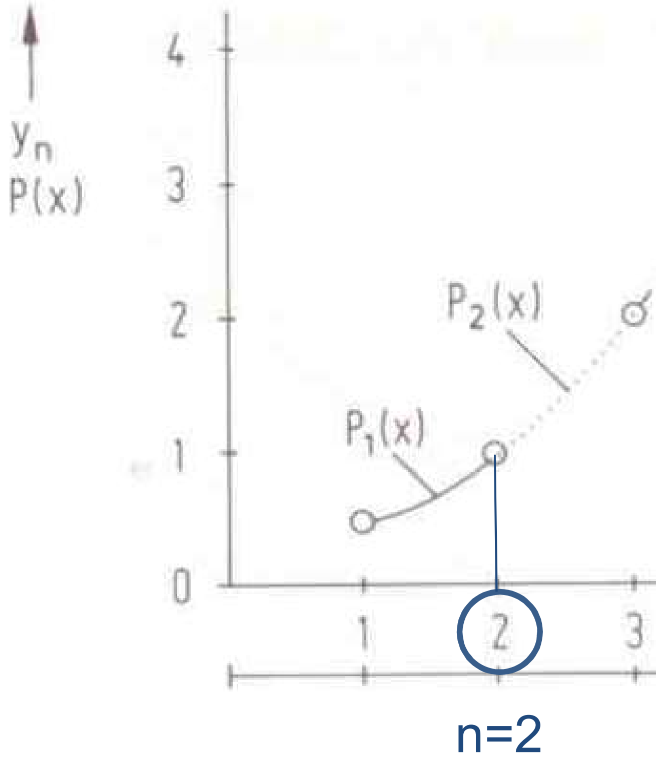
$$c_n = \frac{1}{2} y''_n$$

$$d_n = \frac{1}{6h_n}\left(y''_{n+1} - y''_n\right)$$

Ausgleichsrechnung
Splines

Forderung:

$$P'_{n-1}(x_n) = P'_n(x_n)$$



Einsetzen liefert

$$P'_n(x_{n+1}) = \frac{1}{h_n}(y_{n+1} - y_n) + \frac{1}{6}h_n(2y''_{n+1} + y''_n)$$

und somit

$$P'_{n-1}(x_n) = \frac{1}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) + \frac{1}{6}h_{n-1}(2y''_n + y''_{n-1})$$

Außerdem

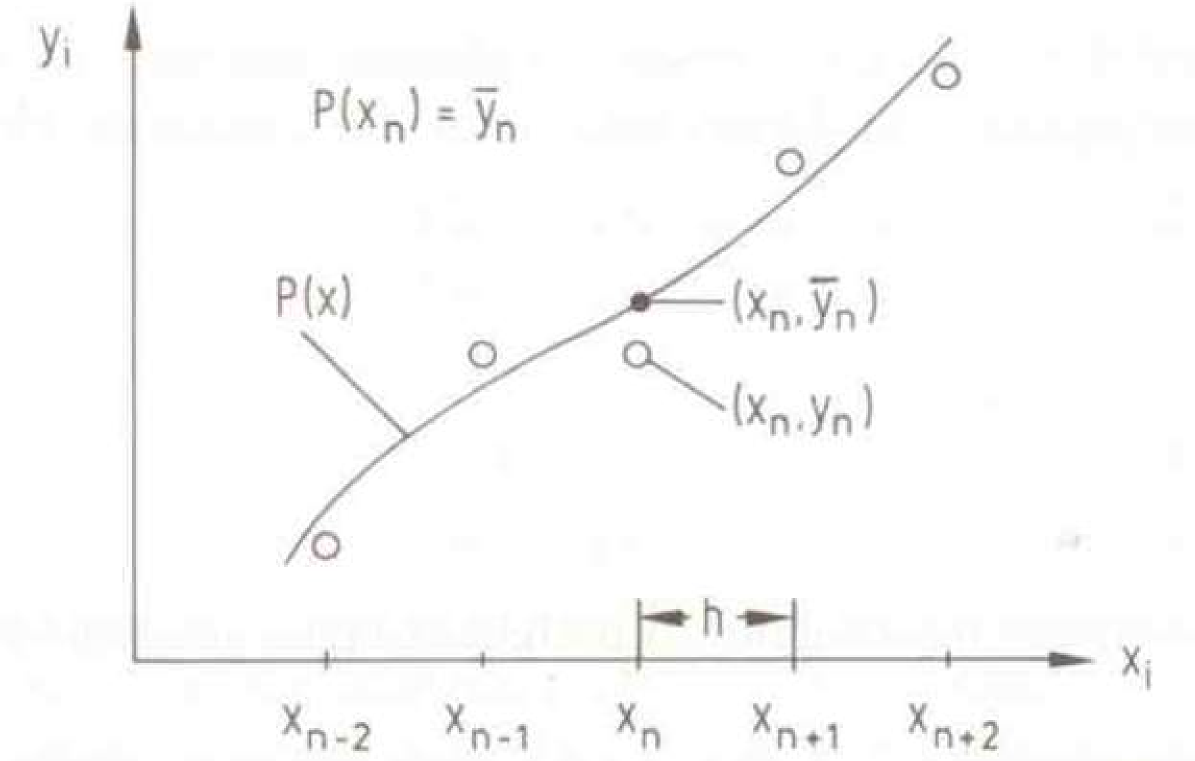
$$P'_n(x_n) = b_n = \frac{1}{h_n}(y_{n+1} - y_n) - \frac{1}{6}h_n(y''_{n+1} + 2y''_n)$$

Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Numerisches Glätten
Ausgleichspolynom

Sollen **verstreute Messwerte** y_n weiterverarbeitet werden ist es sinnvoll, diese **vor einer Weiterverarbeitung** zu **glätten**, d.h. auszumitteln.



Numerisches Glätten
Ausgleichspolynom

Im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$S_n = \sum_k \left(P(x_{n+k}) - y_{n+k}\right)^2$$

und mit

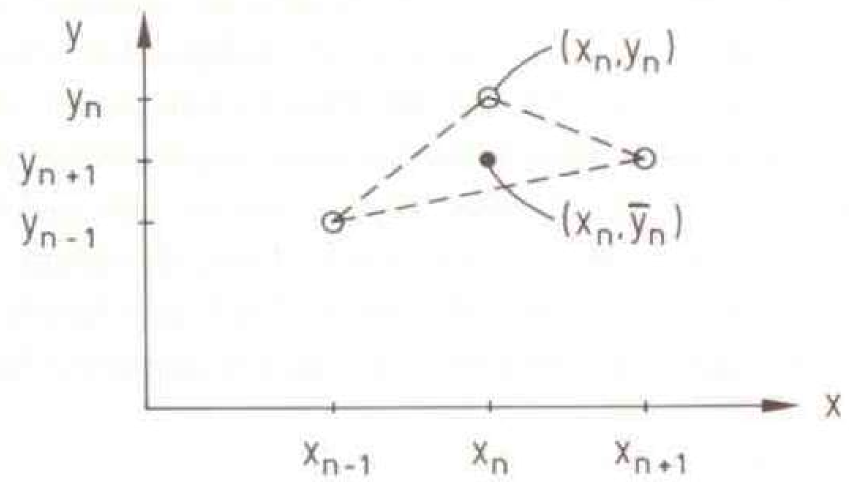
$$\frac{\partial S_n}{\partial a} = 0, \ldots \quad \text{und} \quad x_k = x_{n+k} - x_n$$

folgt

$$\begin{bmatrix} \sum_k 1 & \sum_k x_k & \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k^3 \\ \sum_k x_k & \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k^3 & \sum_k x_k^4 \\ \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k^3 & \sum_k x_k^4 & \sum_k x_k^5 \\ \sum_k x_k^3 & \sum_k x_k^4 & \sum_k x_k^5 & \sum_k x_k^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_k y_{n+k} \\ \sum_k x_k y_{n+k} \\ \sum_k x_k^2 y_{n+k} \\ \sum_k x_k^3 y_{n+k} \end{Bmatrix}$$

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Numerisches Glätten
Ausgleichspolynom



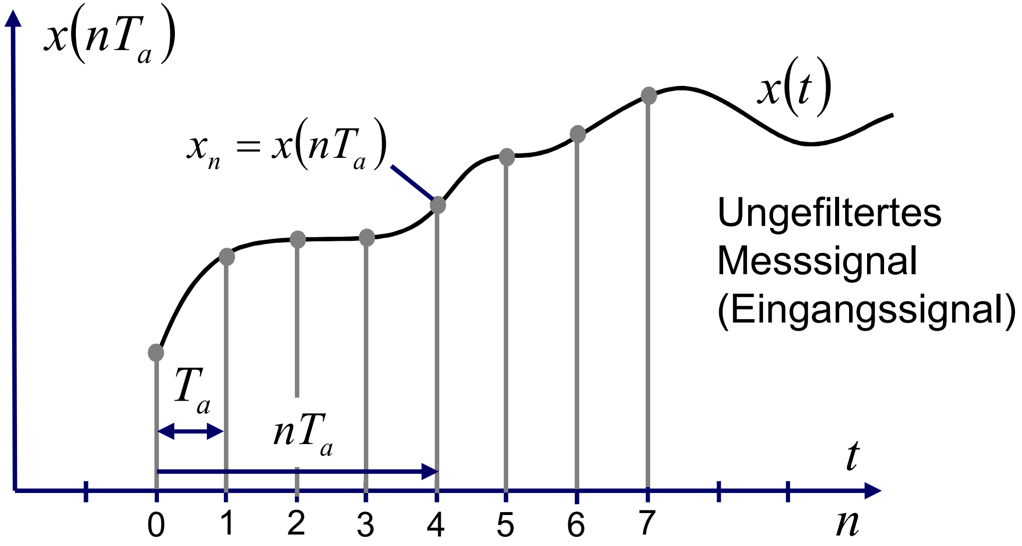
Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Bei nichtrekursiven Filtern **hängt** das **Ausgangssignal** des Filters **nur von den Eingangssignalen ab**, nicht von den zurückliegenden Werten des Ausgangssignals (rekursive Filter).
Wegen dieser fehlenden Rückkopplung kann das nichtrekursive Filter nicht schwingen, es ist **immer stabil** und hat hierdurch eine **endliche Impulsantwort**.
Es wird daher auch als **F**inite **I**mpulse **R**esponse (FIR) Filter bezeichnet.

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter



Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Wiederholung: Fourier-Reihenentwicklung im Zeitbereich

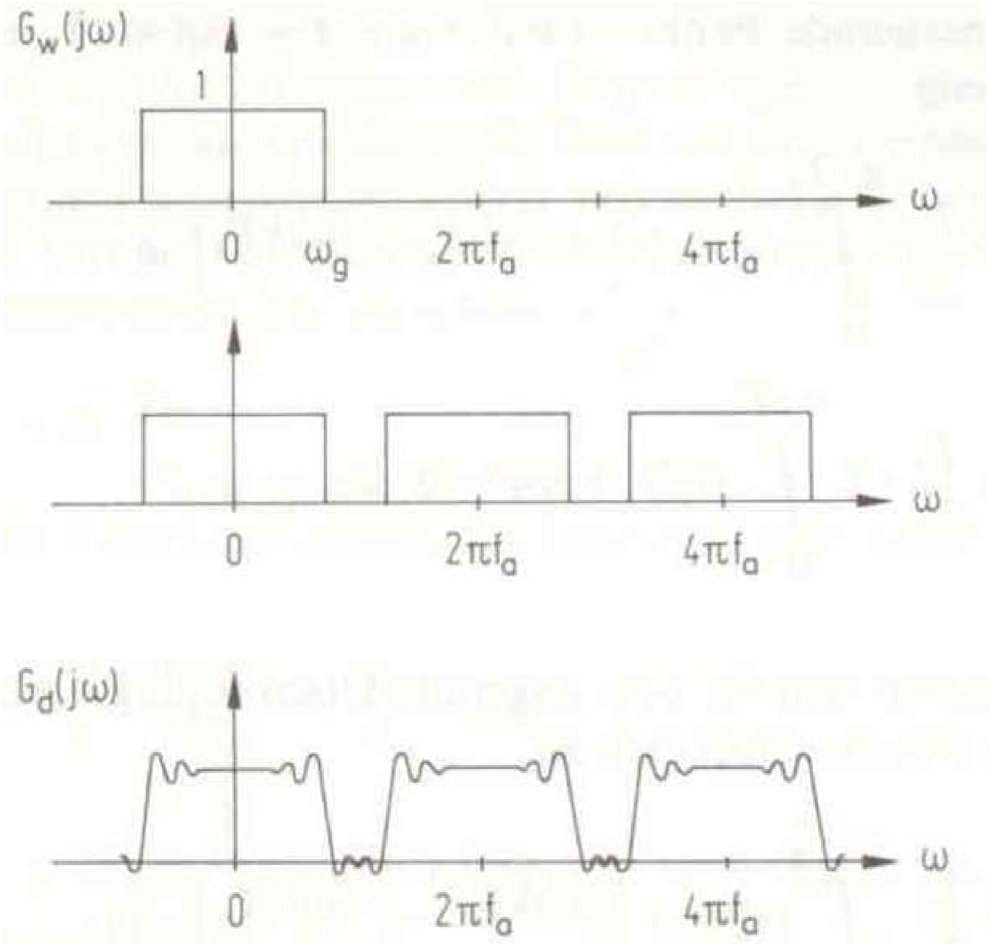
$$f(t) \approx \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$G_d(j\omega) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-jkT_a\omega}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Beispiel: Tiefpassfilter mit Eckfrequenz ω_g



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!