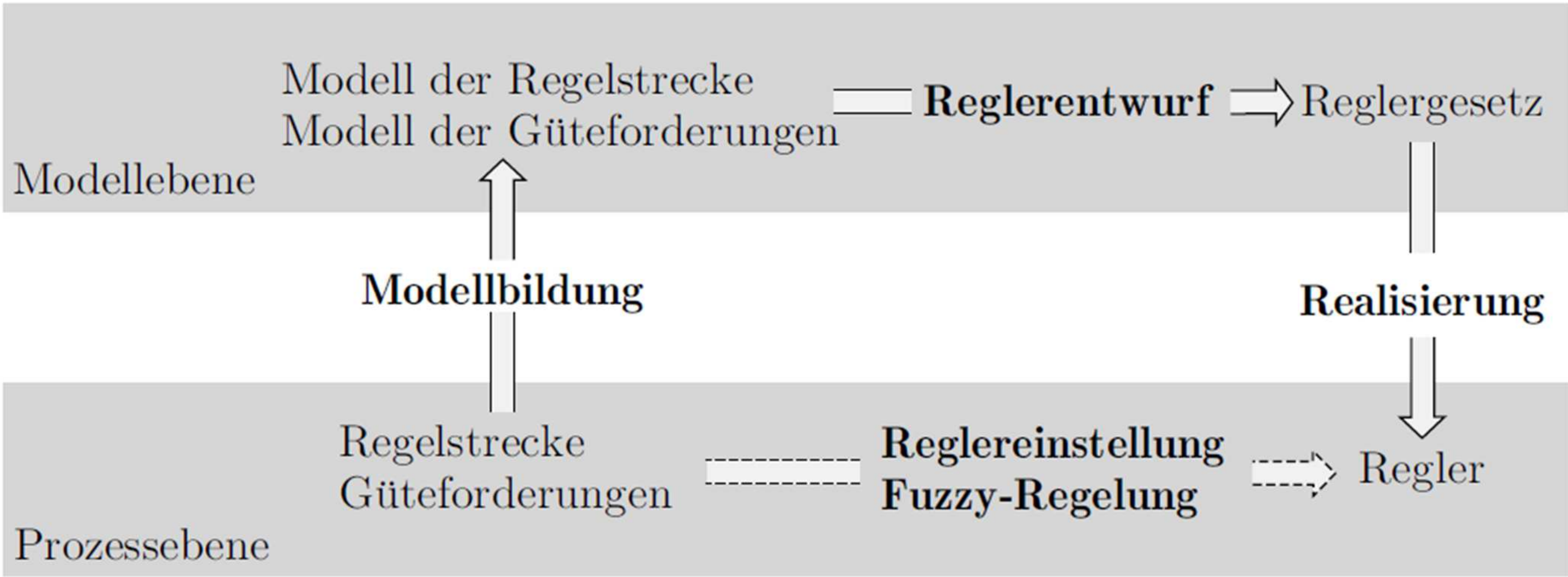
Fahrzeugmechatronik II
Beschreibung und Verhalten von Mehrgrößensystemen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

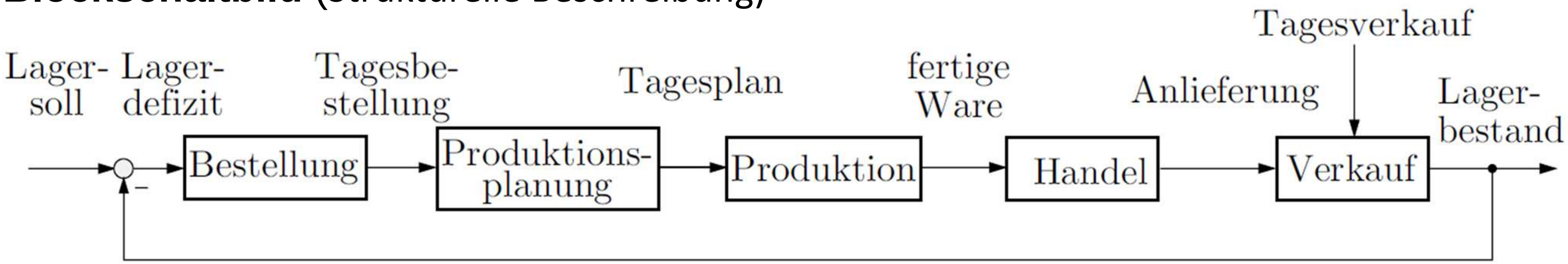
Überblick
Prozess zu Realisierung eines Reglers



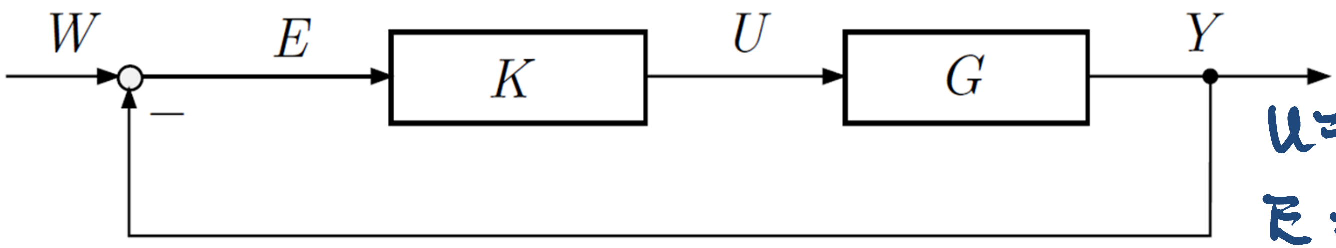
Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Modellbildung für Regelsysteme
Beschreibung als Blockschaltbild

Blockschaltbild (Strukturelle Beschreibung)



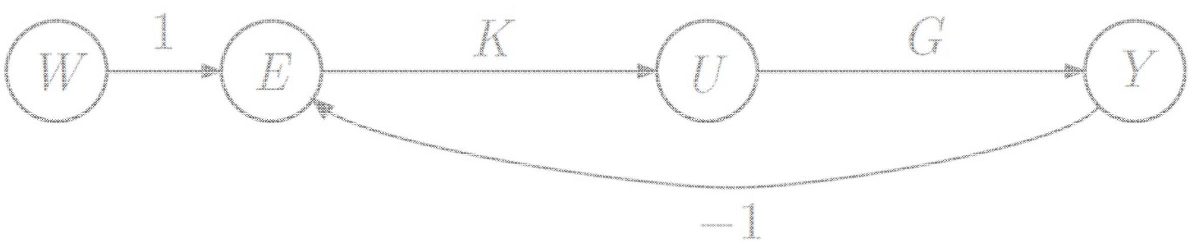
Blockschaltbild (Mathematische Beschreibung)



$U = K\,E$

$E = W - Y$

Signalflussgraf

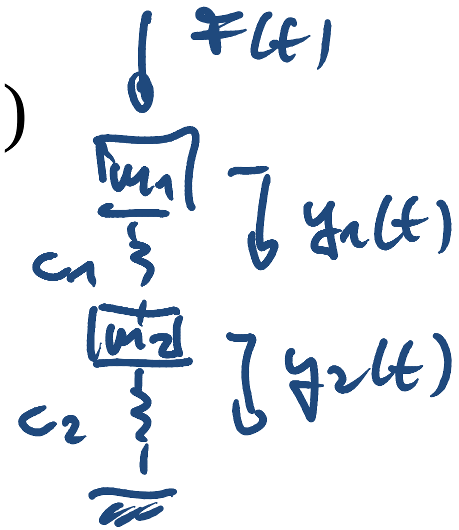


Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Beschreibung im Zeitbereich
Beschreibung als Differentialgleichung

- inhomogen
- n-ter Ordnung
- linear
- gewöhnlich
- implizit

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} \frac{d^j y_i}{dt^j} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{q} b_{kj} \frac{d^j u_k}{dt^j} \qquad (i = 1,2,\ldots,r)$$



mit den Anfangsbedingungen

$$\frac{d^j y_i}{dt^j}(0) = y_{0,ij} \qquad (i = 1,2,\ldots,r;\ j = 0,1,\ldots,n-1)$$

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{S}\,\underline{x} = \underline{f}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} r = 2 \\ n = 2 \\ q = 0 \end{matrix}$$

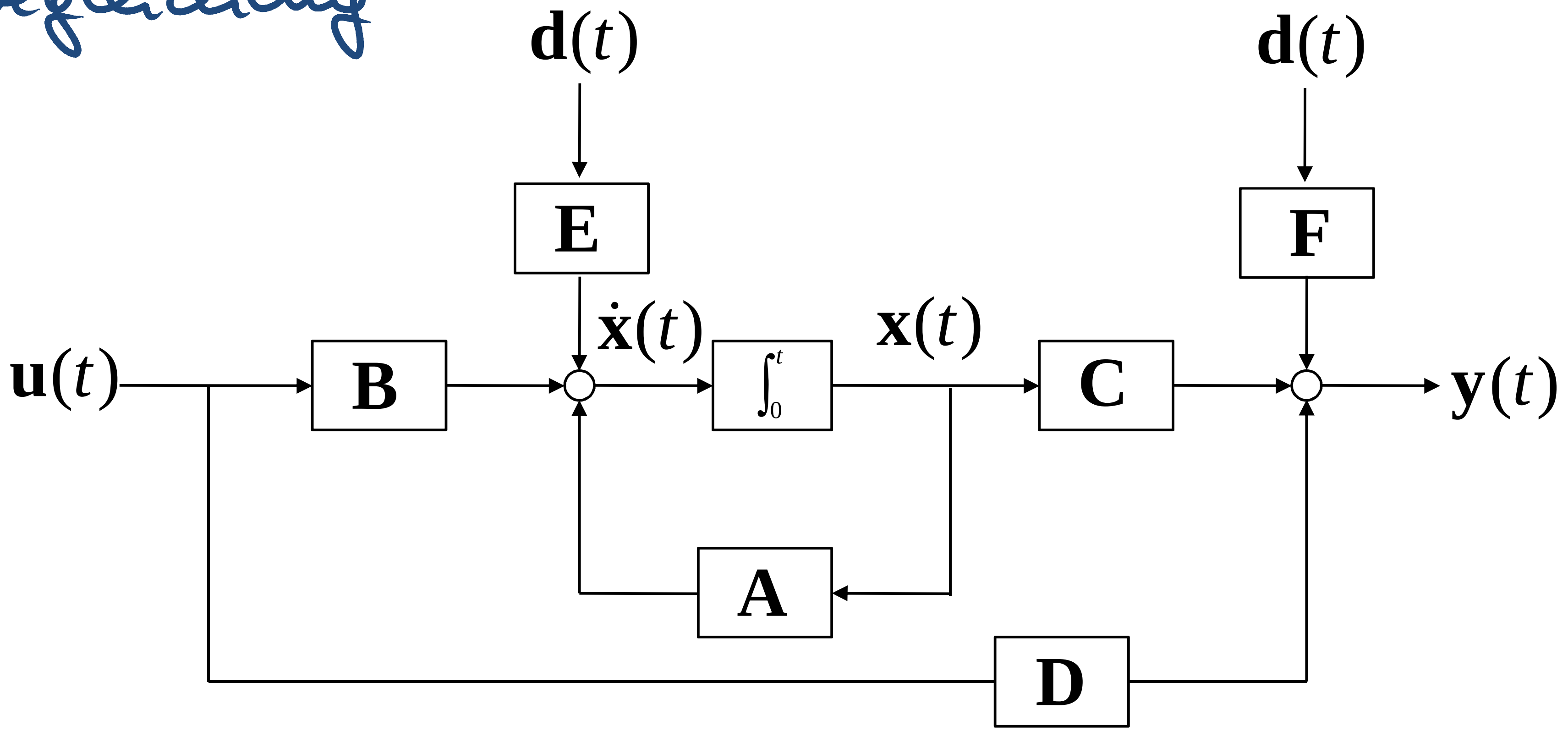
Beschreibung im Zeitbereich
Beschreibung im Zustandsraum

Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}(t)$$

Ausgabegleichung



Beschreibung im Zeitbereich
Ableitung aus einem DGL-System 2. Ordnung

Ausgangspunkt sei

$$\underline{M}\,\ddot{\underline{v}} + \underline{D}\,\dot{\underline{v}} + \underline{S}\,\underline{v} = \underline{f} \quad \text{mit} \quad \underline{v}(t=0) = \underline{v}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\underline{v}}(t=0) = \dot{\underline{v}}_0$$

Dann folgt für eine Zustandsraumdarstellung

$$\left[\begin{array}{c|c} -\underline{S} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{M} \end{array}\right] \dot{\begin{Bmatrix} \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} \end{Bmatrix}} + \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{S} \\ \hline \underline{S} & \underline{D} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{f} \end{Bmatrix}$$

Dann:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\dot{\begin{Bmatrix} \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} \end{Bmatrix}} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{I} \\ \hline -\underline{M}^{-1}\underline{S} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1} \end{Bmatrix} \underline{f}$$

Beschreibung im Zeitbereich
Zustandsgrößen eines dynamischen Systems

Definition: Zustand eines dynamischen Systems

Ein Vektor $\mathbf{x}$ *wird Zustand eines Systems genannt, wenn für eine beliebige Zeit* $t_e \geq 0$ *die Elemente* $x_i(0)$ *von* $\mathbf{x}$ *zum Zeitpunkt 0 zusammen mit dem Verlauf der Eingangsgröße* $u(\tau)$ *für* $0 \leq \tau \leq t_e$ *den Wert* $\mathbf{x}(t_e)$ *und den Wert der Ausgangsgröße* $\mathbf{y}(t_e)$ *eindeutig bestimmen.* $\mathbf{x}$ *heißt auch Zustandsvektor und die Komponenten* $x_i(t)$ *von* $\mathbf{x}$ *Zustandsvariable oder Zustandsgrößen.*

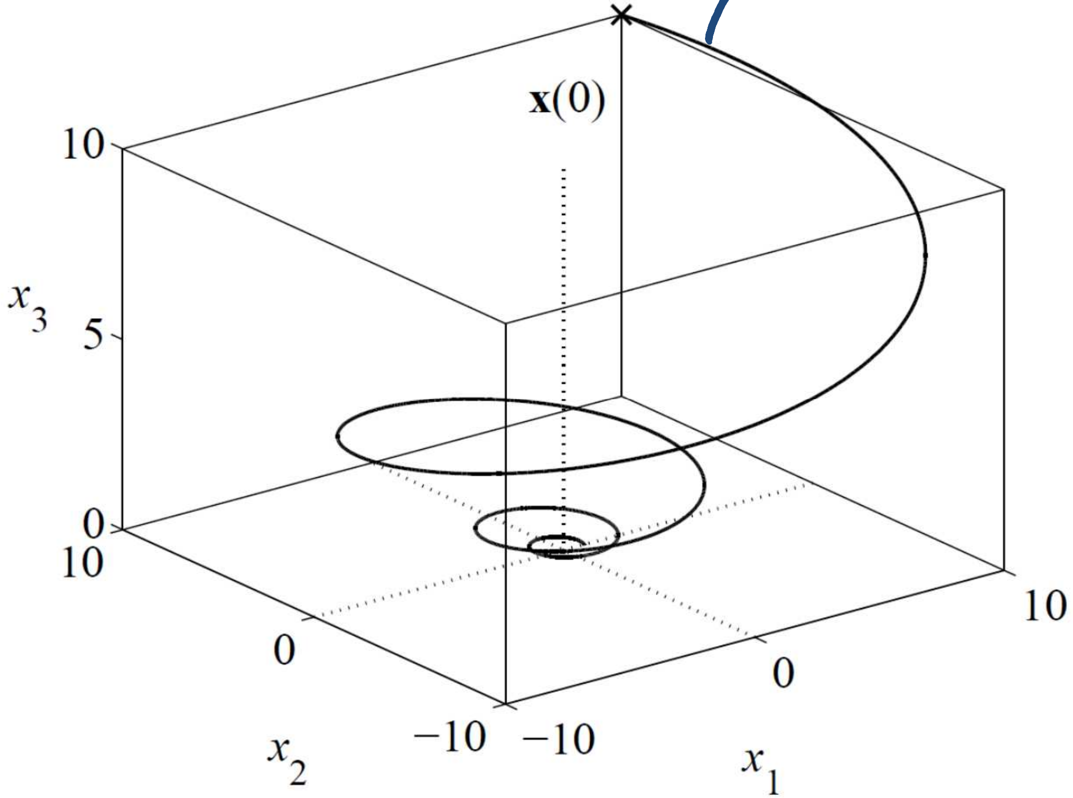
- **Typische Zustandsgrößen** sind: Strom, Spannung, Wege, Geschwindigkeiten.

- Die **Wahl der Zustände** ist im allg. nicht eindeutig. Es können auch physikalisch nicht interpretierbare Zustände gewählt werden.

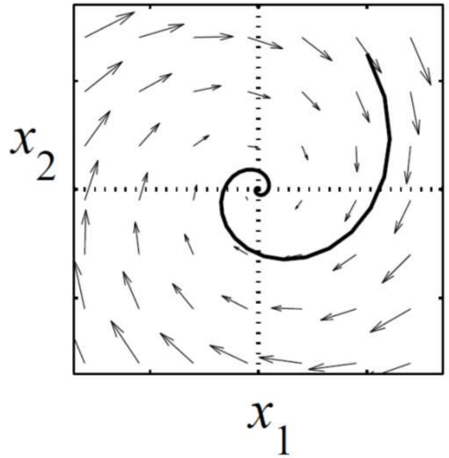
- Die **Anzahl der Zustände n** stimmt mit der Anzahl der Speicherelemente (Kapazität, Induktivität, Masse, Feder) des Systems überein.

Beschreibung im Zeitbereich
Zustandsraum

Trajektorie
Zustandskurve



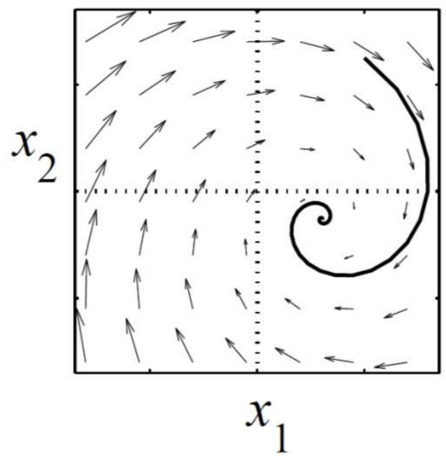
Homogenes System $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t)$



▷ Je größer $\underline{x}(t)$ desto größer $\dot{\underline{x}}(t)$

▷ Für den Ruhepunkt $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{0}$ gilt $\underline{x}(t) = \underline{0}$

Inhomogenes System $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}$



▷ Für den Ruhepunkt gilt

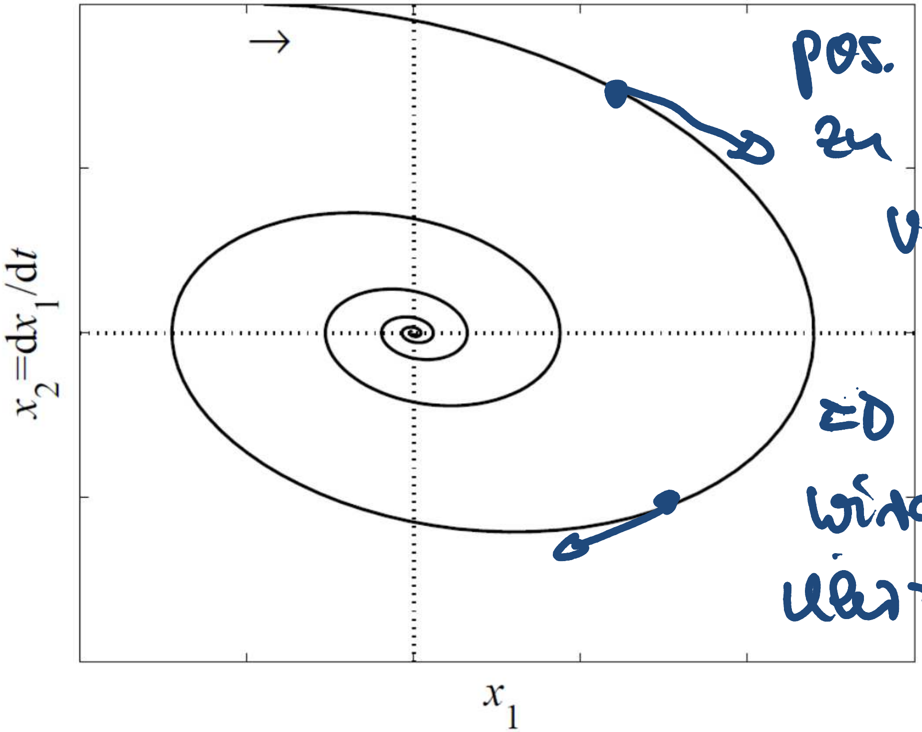
$$\underline{x} = -\underline{A}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}$$

Beschreibung im Zeitbereich
Phasenportrait

Für **2-dim Systeme** (z.B. 1-Massenschwinger) mit

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

heißt der Zustandsraum **Phasenraum** und die Trajektorie **Phasenporträt.**



pos. x_2-Werte führen zu Vergrößerung von x_1

$\Rightarrow$ Phasenportrait wird immer im Uhrzeigersinn durchlaufen

Beschreibung im Zeitbereich
Ähnlichkeitstransformation

Ausgangspunkt ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Transformation des Zustandsvektors

$$\underline{\tilde{x}}(t) = \underline{T}^{-1}\,\underline{x}(t)$$

$\underline{T}$ sei regulär und konstant

Somit

$$\underline{x}(t) = \underline{T}\,\underline{\tilde{x}}(t)$$

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{T}\,\underline{\dot{\tilde{x}}}(t)$$

Beschreibung im Zeitbereich
Ähnlichkeitstransformation

Somit ergibt sich für

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

folgende äquivalente Beziehung

$$\dot{\tilde{\underline{x}}} = \underbrace{\underline{T}^{-1}\underline{A}\,\underline{T}}_{\tilde{\underline{A}}}\,\tilde{\underline{x}}(t) + \underbrace{\underline{T}^{-1}\underline{B}}_{\tilde{\underline{B}}}\,\underline{u}(t) \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{x}}(0) = \underline{T}^{-1}\underline{x}_0$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{T}\,\tilde{\underline{x}}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)$$

Insbesondere

- ▷ y ist gleich
- ▷ EW sind gleich

Beschreibung im Zeitbereich
Kanonische Normalform – EW-Aufgabe

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{A}$ ergeben sich aus der EW-Aufgabe

$$\underline{A}\,\underline{v}_i = \lambda_i\,\underline{v}_i \quad \Rightarrow \quad (\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\,\underline{v}_i = \underline{0}$$

Charakt. Polynom

$$\det(\underline{A} - \lambda_i \underline{I}) = 0$$

Mit

$$\underline{V} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n] \qquad \operatorname{diag} \lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \underline{0} \\ & \lambda_2 & & \\ \underline{0} & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

folgt

$$\underline{A}\,\underline{V} = \underline{V} \operatorname{diag} \lambda_i$$

bzw.

$$\underline{V}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{V} = \operatorname{diag} \lambda_i$$

Beschreibung im Zeitbereich
Kanonische Normalform - Transformation

Ausgangspunkt ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Transformation mit

$$\underline{V} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, v_n] \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{x}}(t) = \underline{V}^{-1}\underline{x}(t)$$

liefert

$$\dot{\underline{\tilde{x}}}(t) = \underline{V}^{-1}\underline{A}\,\underline{V}\,\underline{\tilde{x}}(t) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \underline{x}(0) = \underline{V}^{-1}\underline{x}_0$$

$$= \operatorname{diag} \lambda_i \; \underline{\tilde{x}}(t) + \underline{V}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{V}\,\underline{\tilde{x}}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)$$

Beschreibung im Zeitbereich
Regelungsnormalform - Transformation

Ausgangspunkt ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t)$$

n - Dimension von A (Anzahl d. Zeilen und Spalten)

Transformation mit

$$\underline{x}_R(t) = \underline{T}_R^{-1}\, \underline{x}(t)$$

Hierbei ist

$$\underline{T}_R = \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \text{ mit}$$

Steuerbarkeits-matrix

$$\underline{s}_R^T = [0, 0, \ldots, 1]\, \underline{S}_S^{-1}$$

$$\underline{S}_S = \left[\underline{b} \,\vdots\, \underline{A}\underline{b} \,\vdots\, \underline{A}^2\underline{b} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{A}^{n-1}\underline{b}\right]$$

muss invertierbar sein

Beschreibung im Zeitbereich
Regelungsnormalform - Transformation

Aus der Transformation folgt

$$\dot{\underline{x}}_R(t) = \underline{A}_R \underline{x}_R(t) + \underline{b}_R u(t) \qquad \underline{x}_R(0) = \underline{x}_{R0}$$

$$y(t) = \underline{c}_R' \underline{x}_R(t) + d\, u(t)$$

mit

$$\underline{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dabei gilt

$$\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}_R) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

← Koeffizienten d. charakt. Polynoms

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!