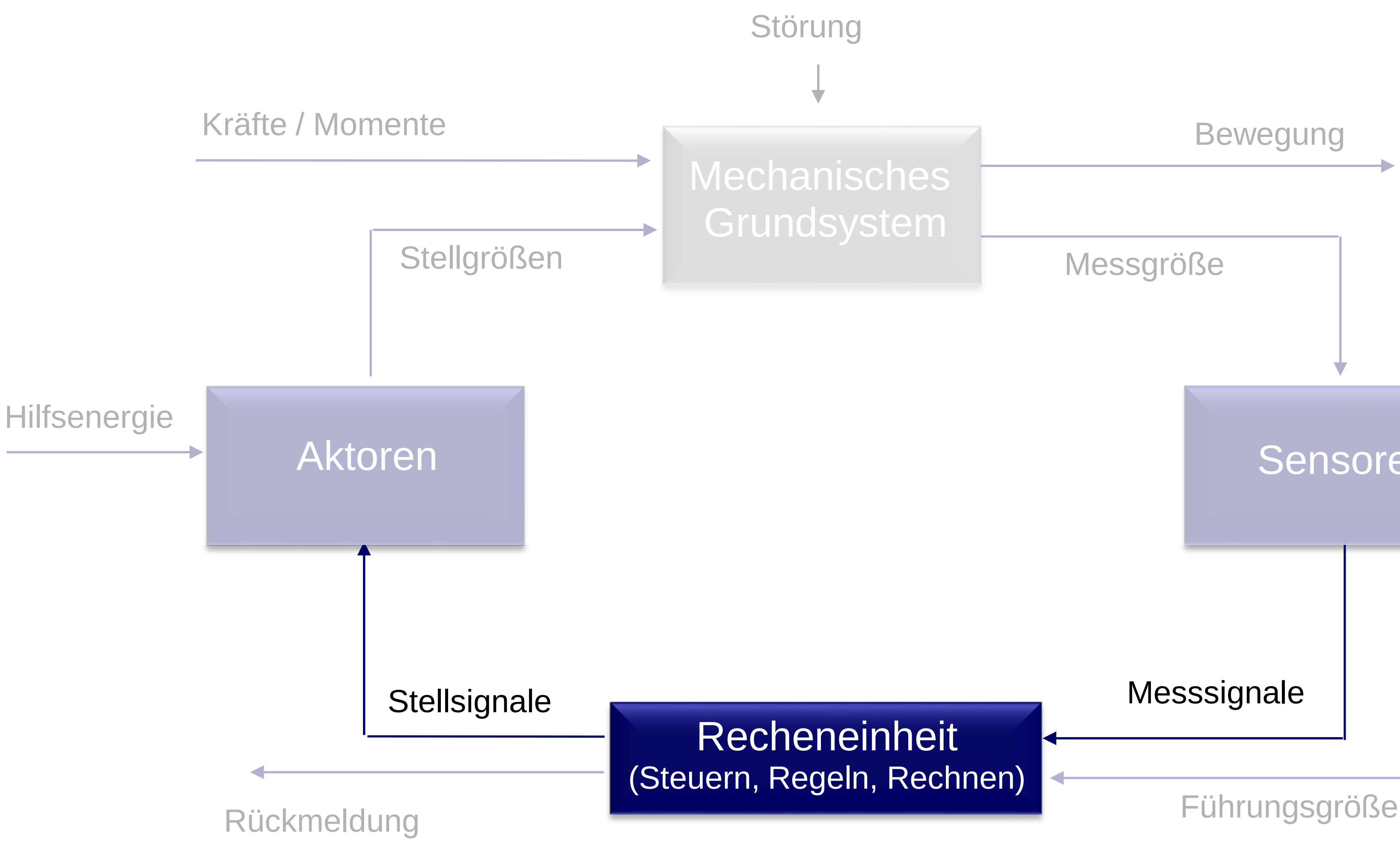
Fahrzeugmechatronik I
Signalverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M. Sc. Jochen Gallep et al.
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Übersicht
Mechatronisches System

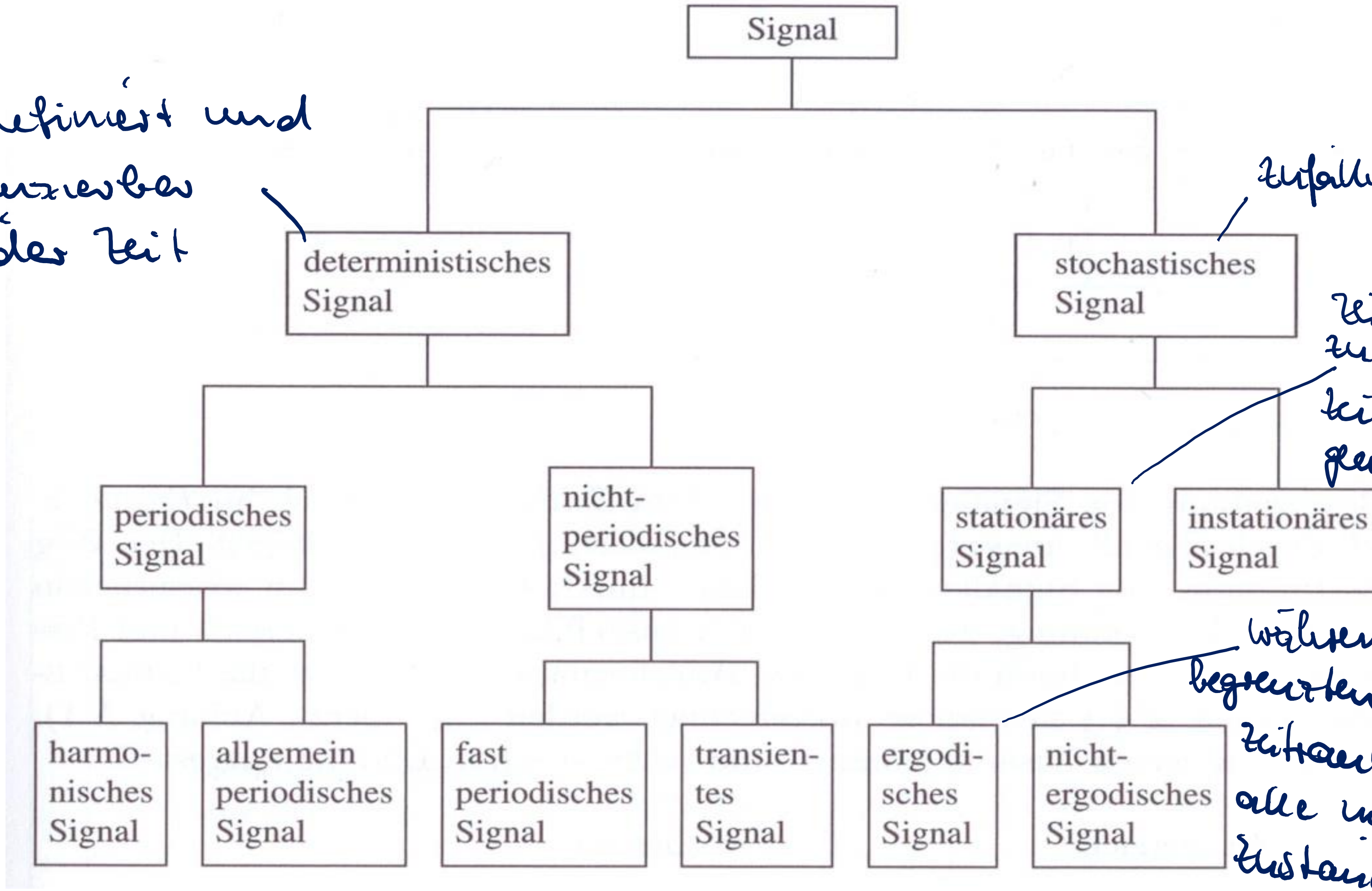


Übersicht
Definition Signal und Signalverarbeitung

Der Begriff „Signal“ kennzeichnet eine zeitveränderliche, **informationstragende Messgröße**. Signale werden in unterschiedliche **Klassen** eingeteilt und können durch **Kennwerte oder Kennfunktionen** beschrieben werden.

Unter dem Begriff **Signalverarbeitung** sind alle Bearbeitungsschritte zusammengefasst, die das Ziel haben, **Informationen aus einem Signal zu extrahieren** oder **für die Übertragung vorzubereiten**.

Übersicht
Klassifizierung von Signalen



definiert und reproduzierbar zu jeder Zeit

zufällig

Zeitreihe hat zu jedem Zeitpunkt gleiche statist. Eigenschaften

während eines begrenzten Beobachtungszeitraumes werden alle möglichen Zustände eingenommen

Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Statistische Kennwerte und -funktionen

Kennwerte

1. Schätzwert für den Erwartungswert – Arithmetischer bzw. lin. Mittelwert $\bar{x}$

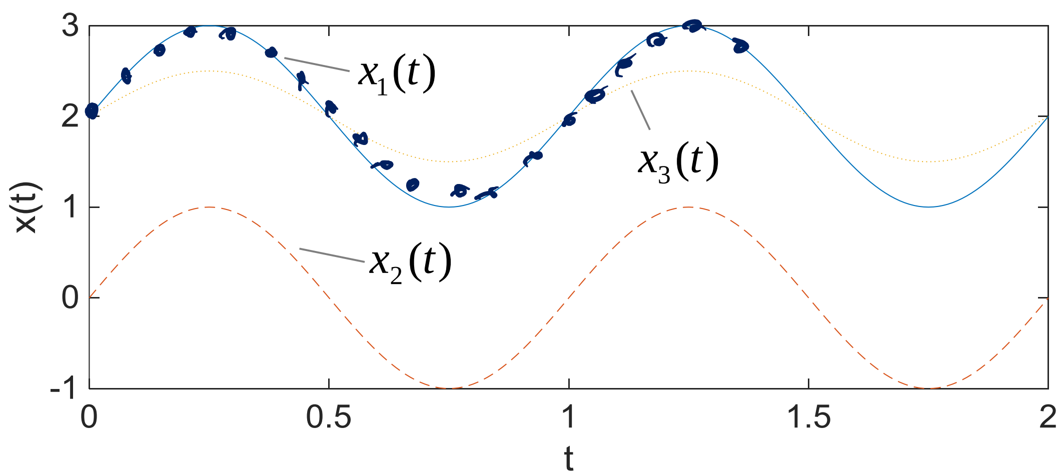
Diskret

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

Stetig

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$$

Beispiel



Bsp

$i = 1,3 \quad \bar{x}_i = 2$

$i = 2 \quad \bar{x}_i = 0$

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennwerte

2. Maß für die Streuung – Varianz σ_x^2

Diskret

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})^2$$

Stetig

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 \, dt$$

Bsp.:

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt \qquad \text{für } i = 1,2$$

$$= \frac{1}{T} \frac{1}{2} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t \right]_0^T = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i = 1,2 \\ \frac{1}{8} & \text{für } i = 3 \end{cases}$$

3. Standardabweichung σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

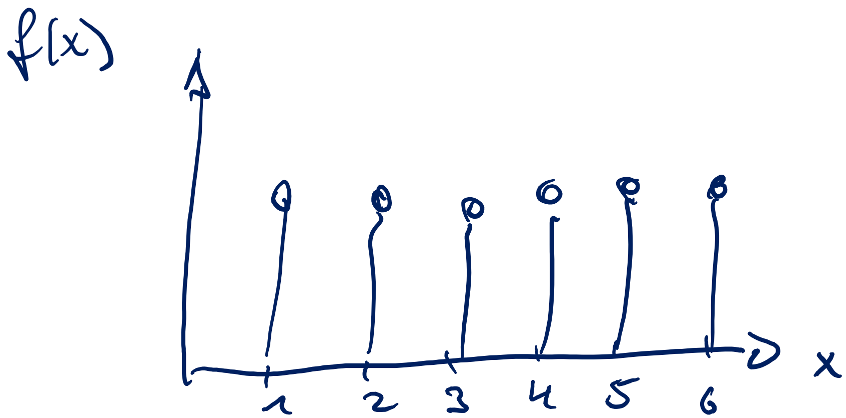
Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennfunktionen

4. Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion/-verteilungs-Dichtefunktion $f(x)$

$f(x)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X den Wert x annimmt.

<u>Bsp</u>: Bei einem Würfel gilt $f(x) = \frac{1}{6}$



Dabei gilt immer

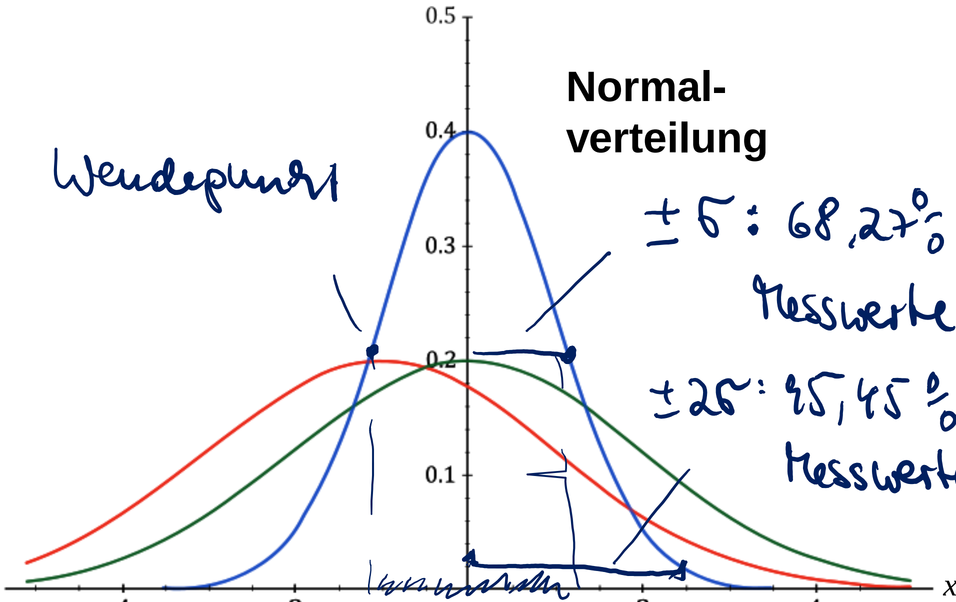
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Statistische Kennwerte und -funktionen
Kennfunktionen

Beispiele für Dichtefunktionen

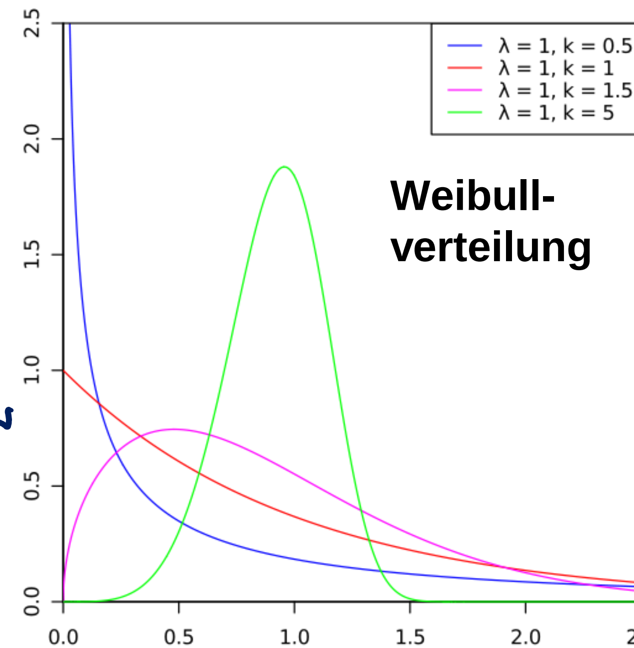
Wendepunkt



±σ: 68,27% aller Messwerte

±2σ: 95,45% aller Messwerte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$



$\lambda = \frac{1}{T}$

T- charakt. Lebensdauer

t=T: 63% d. Einheiten sind ausgefallen

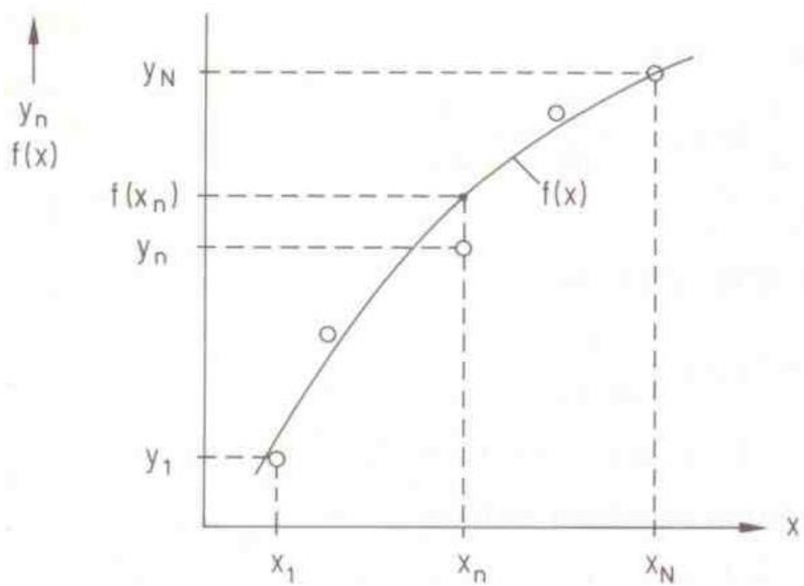
$$f(t) = \frac{k}{T^k}\, t^{k-1}\, e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^k}$$

Übersicht
Inhalte

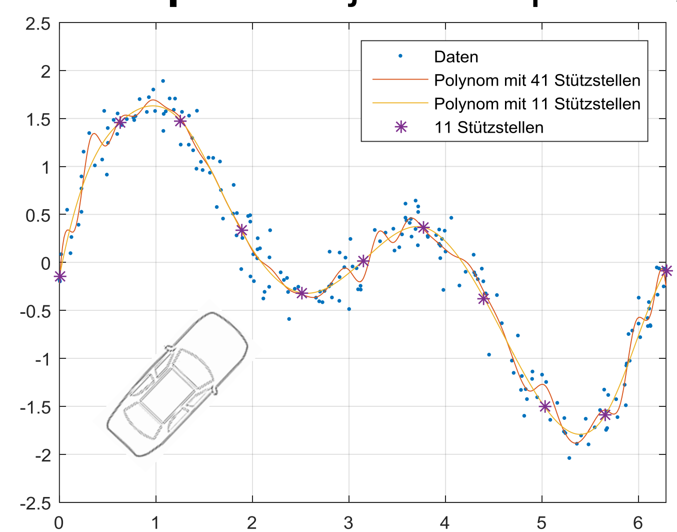
- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Ausgleichsrechnung
Einführung

Gegeben seien Wertepaare (x_n, y_n), wobei der Zählparameter n von 1 bis N läuft. **Durch die insgesamt N Wertepaare** ist eine **Kennfunktion** f(x) zu legen, so dass der Zusammenhang zwischen x_n und y_n **analytisch** angegeben werden kann.

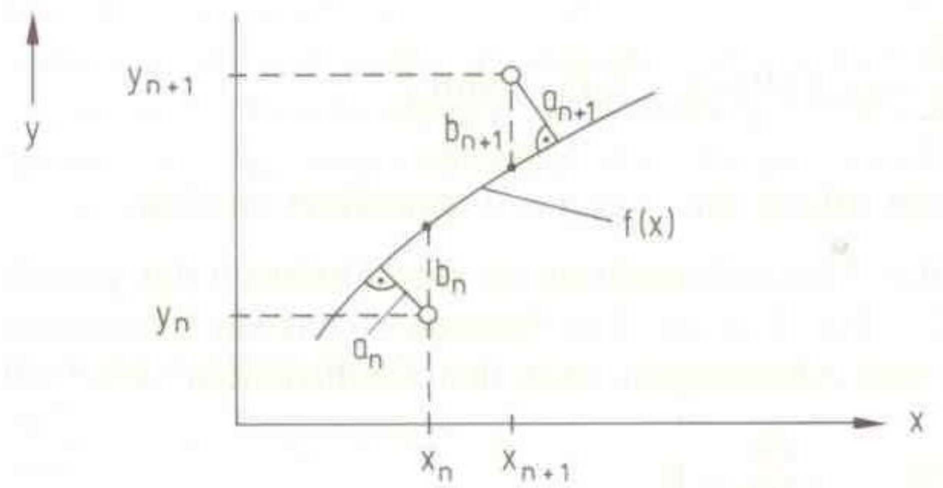


Beispiel: Trajektorienplanung



Ausgleichsrechnung
Einführung

Ermittlung der Ausgleichskurve $f(x)$ durch.



(1) L_1-Approximation

$$\sum_{n=1}^{N} \left| f(x_n) - y_n \right| \overset{!}{=} \min$$

(2) L_2-Approximation, Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$\sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - y_n \right)^2 \overset{!}{=} \min$$

(3) L_∞ Approximation

$$\max \left| f(x_n) - y_n \right| \overset{!}{\leq} D$$

Ausgleichsrechnung

Ausgleichspolynom – Method. d. kl. Fehlerq.

Ausgangspunkt sei ein Ausgleichspolynom 3. Grades

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Für die Residuen r_n gilt

$$r_n = f(x_n) - y_n$$

Dann ergibt die Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$S = \sum_{n=1}^{N} \cancel{w_n(x_n)} \left(f(x_n) - y_n\right)^2 \overset{!}{=} \mathrm{Min}$$

Wahl: 1

Ausgleichsrechnung

Ausgleichspolynom – Method. d. kl. Fehlerq.

S(a, b, c, d) hat ein Extremum für

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(a + b x_n + c x_n^2 + d x_n^3 - y_n\right) 1$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\quad - \text{''} - \quad \right) x_n$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\quad - \text{''} - \quad \right) x_n^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial d} = 0 = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\quad - \text{''} - \quad \right) x_n^3$$

Es lässt sich zeigen, dass dies Extremum immer Minimum (s. Schrüfer, S. 75)

Ausgleichsrechnung
Ausgleichspolynom – Method. d. kl. Fehlerq.

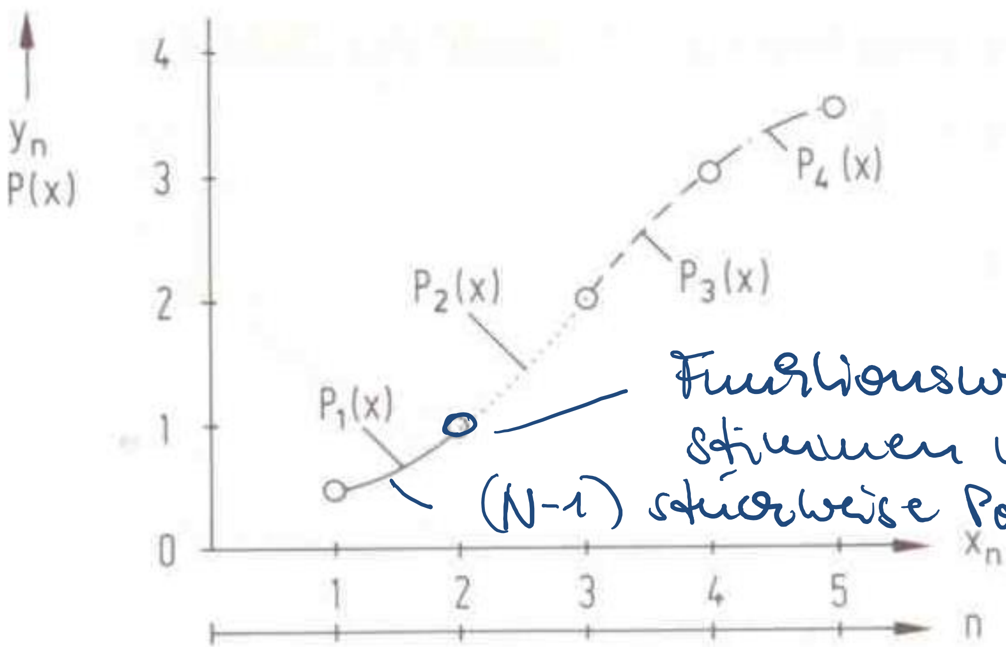
a, b, c und d folgen dann aus

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_n & \sum x_n^2 & \sum x_n^3 \\ \sum x_n & \sum x_n^2 & \sum x_n^3 & \sum x_n^4 \\ \sum x_n^2 & \sum x_n^3 & \sum x_n^4 & \sum x_n^5 \\ \sum x_n^3 & \sum x_n^4 & \sum x_n^5 & \sum x_n^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_n \\ \sum x_n y_n \\ \sum x_n^2 y_n \\ \sum x_n^3 y_n \end{Bmatrix}$$

Falls Ausgleich durch Polynome 3. Ordnung unzureichend:

Ausgleichspolynome höherer Ordnung neigen zu Welligkeiten und großen Abweichungen zwischen den Stützstellen -> **Ausgleich durch Splines**

Ausgleichsrechnung
Splines



Funktionswert und Ableitungen stimmen überein

(N-1) stückweise Polynome

Wird ein Polynom 3. Grades zwischen x_n und x_{n+1} angesetzt

$$P_n(x) = a_n + b_n (x - x_n) + c_n (x - x_n)^2 + d_n (x - x_n)^3$$

für $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ und $n = 1, 2, \ldots, N-1$

Ausgleichsrechnung
Splines

Mit $h_n = x_{n+1} - x_n$ ergibt sich an den Stützstellen

$$P_n(x_n) = a_n = y_n$$

$$P_n(x_{n+1}) = a_n + b_n h_n + c_n h_n^2 + d_n h_n^3 = y_{n+1}$$

$$P_n'(x_n) = b_n = y_n'$$

$$P_n'(x_{n+1}) = b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 = y_{n+1}'$$

$$P_n''(x_n) = 2c_n = y_n''$$

$$P_n''(x_{n+1}) = 2c_n + 6d_n h_n = y_{n+1}''$$

Ausgleichsrechnung
Splines

a_n, b_n, c_n und d_n lassen sich durch die gegebenen Stützwerte und die noch unbekannten 2. Ableitungen ausdrücken

1 $$a_n = y_n$$

$P_n(x_{n+1})$ 4 $$b_n = \frac{1}{h_n}\left(y_{n+1} - y_n\right) - \frac{1}{6} h_n \left(y''_{n+1} + 2y''_n\right)$$

2 $$c_n = \frac{1}{2} y''_n$$

$P''_n(x_{n+1})$: 3 $$d_n = \frac{1}{6h_n}\left(y''_{n+1} - y''_n\right)$$

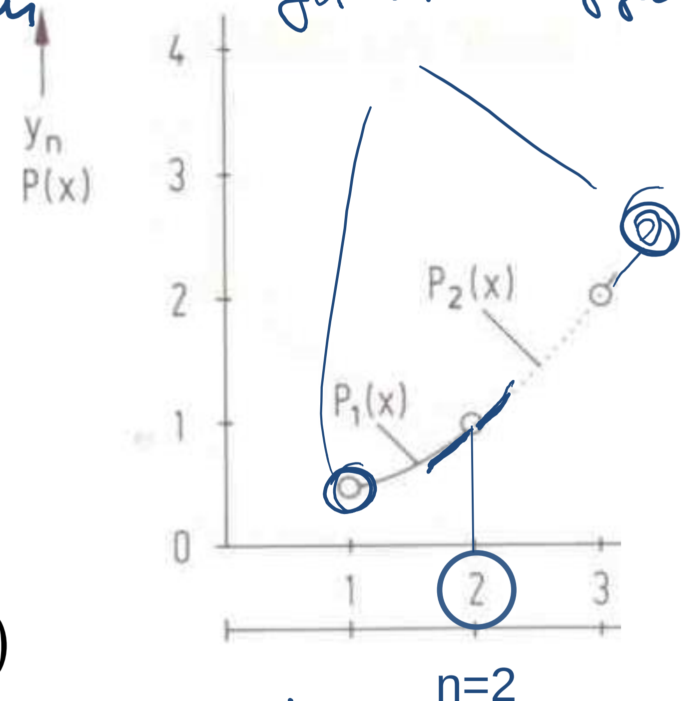
Ausgleichsrechnung
Splines

die außeren y_n'' werden vorgegeben

Forderung : (N-2) Gleichungen

$$P'_{n-1}(x_n) = P'_n(x_n) \Rightarrow \text{für } y_n''$$

für $n=2,\dots,N-1$



Einsetzen liefert

$$P'_n(x_{n+1}) = \frac{1}{h_n}(y_{n+1} - y_n) + \frac{1}{6}h_n(2y''_{n+1} + y''_n)$$

und somit

$$P'_{n-1}(x_n) = \frac{1}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) + \frac{1}{6}h_{n-1}(2y''_n + y''_{n-1})$$

z.B. Vorgabe von

$y_1'' = 0$, $y_N'' = 0$

("natürlicher Spline")

Außerdem

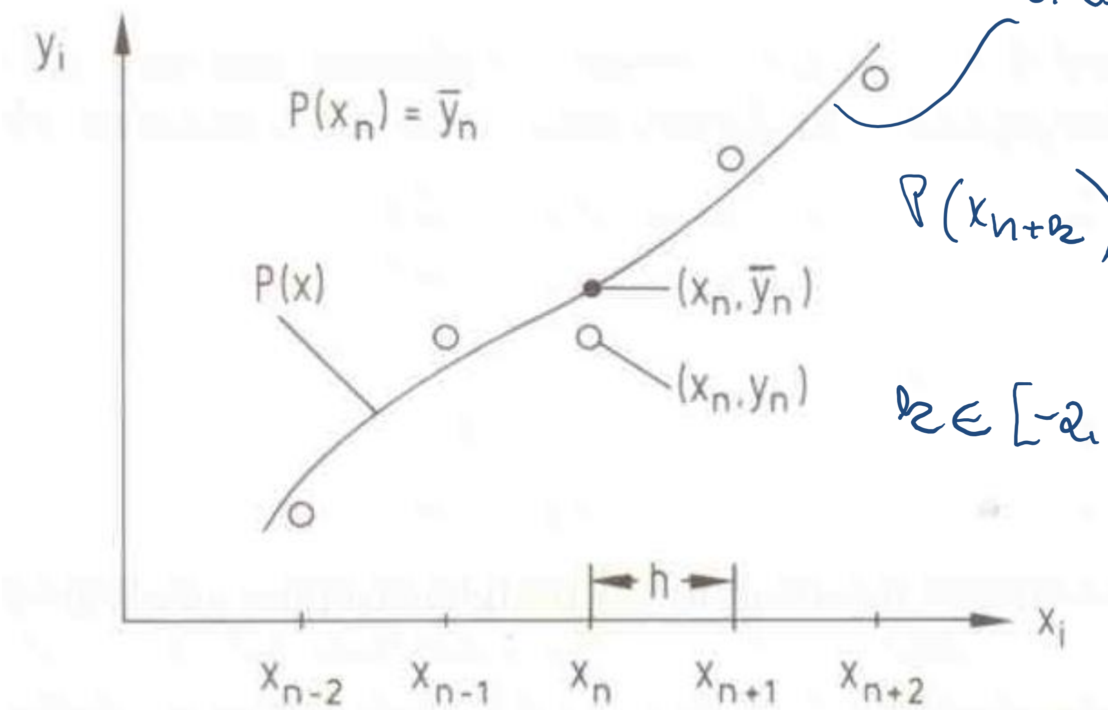
$$P'_n(x_n) = b_n = \frac{1}{h_n}(y_{n+1} - y_n) - \frac{1}{6}h_n(y''_{n+1} + 2y''_n)$$

Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Numerisches Glätten
Ausgleichspolynom

Sollen **verstreute Messwerte** y_n weiterverarbeitet werden ist es sinnvoll, diese **vor einer Weiterverarbeitung** zu **glätten**, d.h. auszumitteln.



z.B. Ausgleichspolynom 3. Grades durch 5 Punkte

$$P(x_{n+k}) = a + b(x_{n+k} - x_n) + c(x_{n+k} - x_n)^2 + d(x_{n+k} - x_n)^3$$

$k \in [-2, 2]$

mit

$$P(x_n) = a = \bar{y}_n$$

Numerisches Glätten
Ausgleichspolynom

Im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$S_n = \sum_k \left(P\left(x_{n+k}\right) - y_{n+k}\right)^2$$

und mit

$$\frac{\partial S_n}{\partial a} = 0, \ldots \quad \text{und} \quad x_k = x_{n+k} - x_n$$

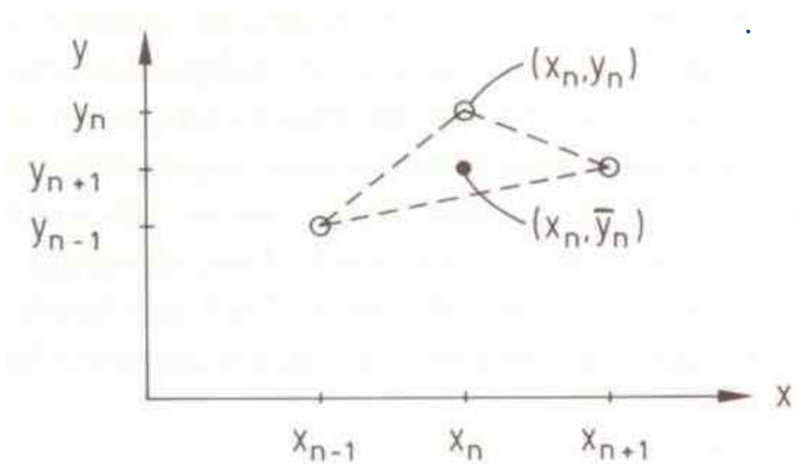
folgt

$$\begin{bmatrix} \sum_k 1 & \sum_k x_k & \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k^3 \\ \sum_k x_k & \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k^3 & \sum_k x_k^4 \\ \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k^3 & \sum_k x_k^4 & \sum_k x_k^5 \\ \sum_k x_k^3 & \sum_k x_k^4 & \sum_k x_k^5 & \sum_k x_k^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_k y_{n+k} \\ \sum_k x_k y_{n+k} \\ \sum_k x_k^2 y_{n+k} \\ \sum_k x_k^3 y_{n+k} \end{Bmatrix}$$

Numerisches Glätten
Ausgleichspolynom

Für eine Ausgleichsgerade durch 3 Punkte folgt dann z.B.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \\ \ldots\ldots \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{y}_n = a = \frac{y_{n-1} + y_n + y_{n+1}}{3}$$



Für zweimaliges Glätten

$$\bar{\bar{y}}_n = \frac{\bar{y}_{n-1} + \bar{y}_n + \bar{y}_{n+1}}{3}$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

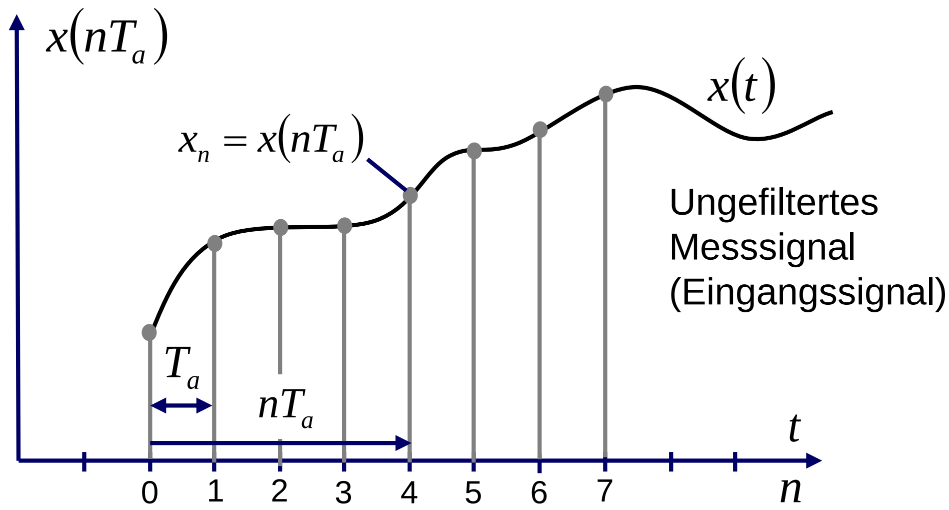
Übersicht
Inhalte

- Statistische Kenngrößen und –funktionen
- Kennfunktionen - Ausgleichsrechnung
- Numerisches Glätten
- Digitale Filterung

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Bei nichtrekursiven Filtern **hängt** das **Ausgangssignal** des Filters **nur von den Eingangssignalen ab**, nicht von den zurückliegenden Werten des Ausgangssignals (rekursive Filter).
Wegen dieser fehlenden Rückkopplung kann das nichtrekursive Filter nicht schwingen, es ist **immer stabil** und hat hierdurch eine **endliche Impulsantwort**.
Es wird daher auch als **F**inite **I**mpulse **R**esponse (FIR) Filter bezeichnet.

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter



Ansatz

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N} = \sum_{k=0}^{N} a_k x_{n-k}$$ Filter N-ter Ordnung

bzw. im folgenden aus rechentechnischen Gründen

$$y_n = a_{-N} x_{n+N} + a_{-N+1} x_{n+N-1} + \dots + a_N x_{n-N} = \sum_{k=-N}^{N} a_k x_{n-k}$$ Filter 2N-ter Ordnung

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Für die Ermittlung der Übertragungsfunktion sei

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad x(nT_a) = e^{j\omega n T_a}$$

Für die Antwort des Filters folgt

$$y_n = \sum_{k=-N}^{N} a_k \, e^{j\omega (n-k) T_a}$$

$$x_n \longrightarrow \boxed{G_d(j\omega)} \longrightarrow y_n$$

Die diskrete Übertragungsfunktion ist dann

$$\boxed{G_d(j\omega) = \frac{y_n}{x(nT_a)} = \sum_{k=-N}^{N} a_k \, e^{-j\omega k T_a}}$$

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Eigenschaften der diskreten Übertragungsfunktion

(A) $G_d(j\omega)$ ist periodisch mit $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_a}$

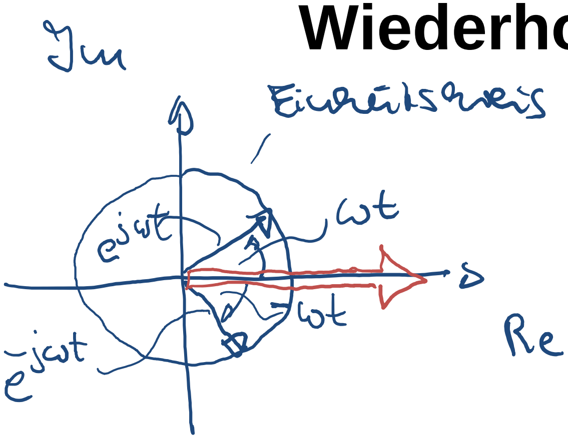
Beh.: $G_d(j\omega) = G_d\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T_a}\right)\right)$

Bew.: $$G_d\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T_a}\right)\right) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \underbrace{e^{-j\left(\omega + \frac{2\pi}{T_a}\right)kT_a}}_{e^{-j\omega k T_a}\cdot \cancelto{1}{e^{-jk2\pi}}}$$ q.e.d.

(B) $G_d(j\omega)$ kann als Fourierreihenentwicklung im Frequenzbereich interpretiert werden

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Wiederholung: Fourier-Reihenentwicklung im Zeitbereich



$$f(t) \approx \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad t$$

$$G_d(j\omega) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-jkT_a\omega}$$

Also: $T_0 \hat{=} \frac{2\pi}{T_a}$

Somit

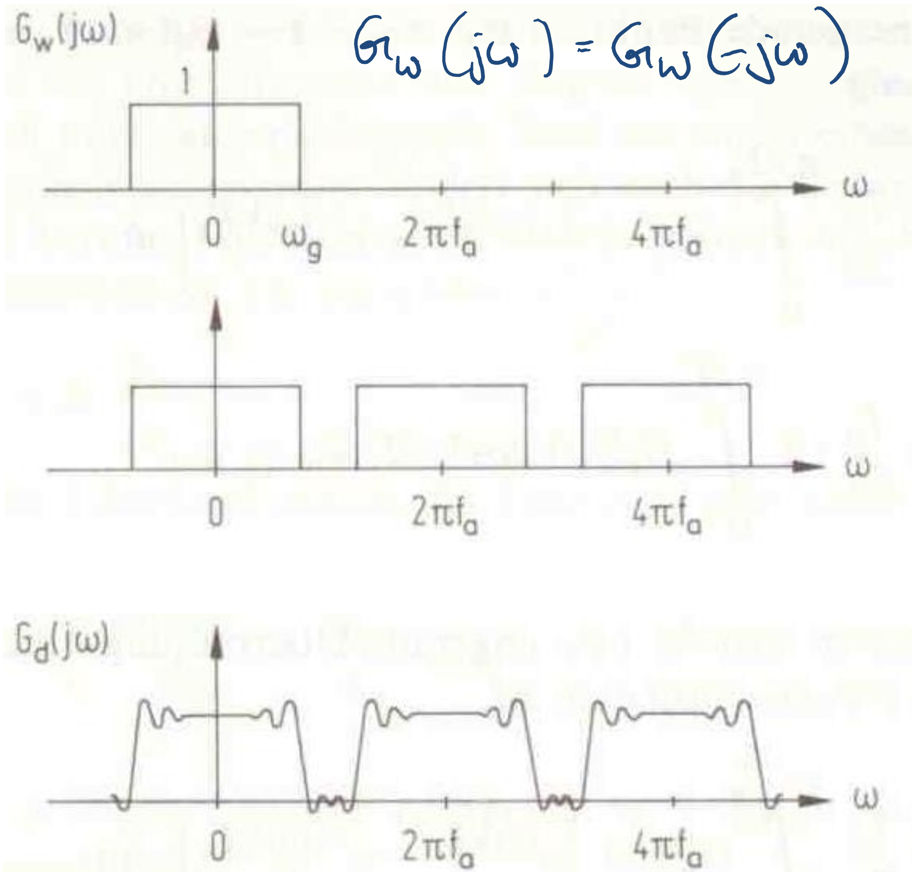
$$a_k = \frac{T_a}{2\pi} \int_{-\pi/T_a}^{\pi/T_a} G_d(j\omega) e^{jkT_a\omega} d\omega$$

$$= \frac{T_a}{2\pi} \int_{0}^{\pi/T_a} G_d(j\omega) e^{jkT_a\omega} d\omega + \frac{T_a}{2\pi} \int_{0}^{\pi/T_a} G_d(-j\omega) e^{-jkT_a\omega} d\omega$$

Digitales Filter
Nichtrekursive Filter

Beispiel: Tiefpassfilter mit Eckfrequenz ω_g

$G_w(j\omega) = G_w(-j\omega)$



Die Filterkoeffizienten ergeben sich aus

$$a_k = \frac{T_a}{2\pi}\int_0^{\pi/T_a} G_w(j\omega)\left[e^{jkT_a\omega} + e^{-jkT_a\omega}\right] d\omega$$

$$= \frac{T_a}{\pi}\int_0^{\pi/T_a} G_w(j\omega)\cos(kT_a\omega)\, d\omega$$

$$= a_{-k}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!