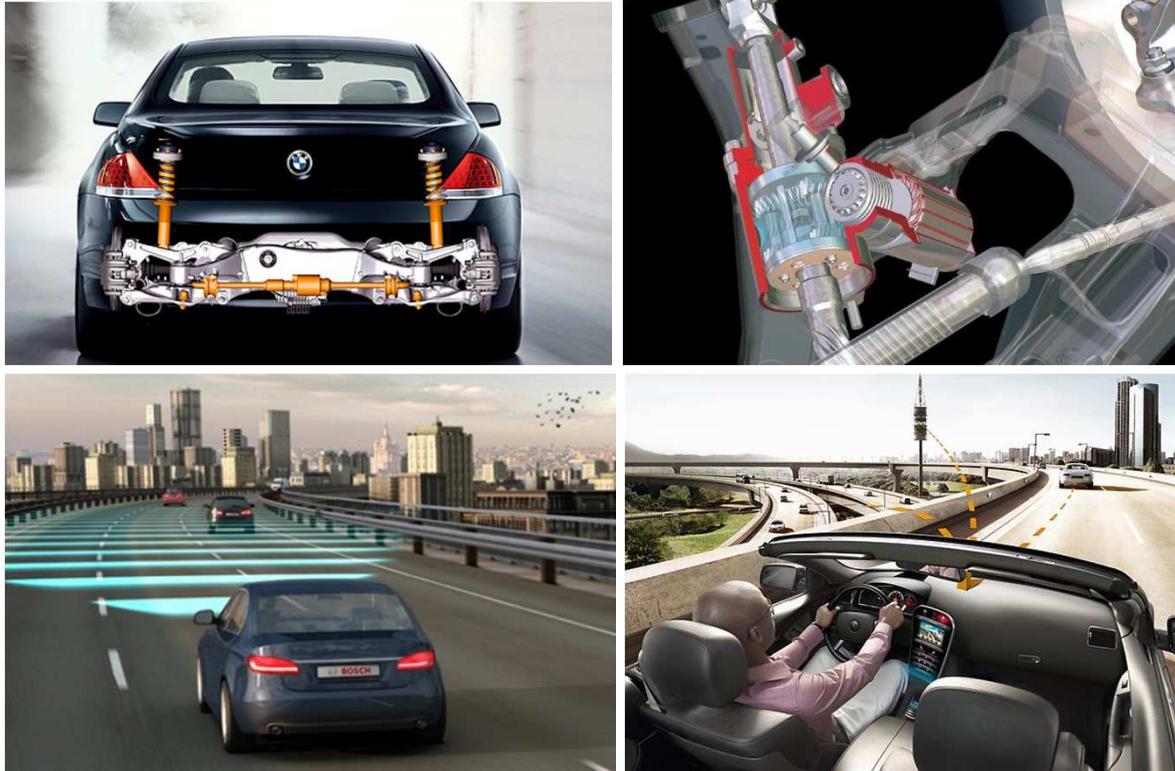


Fahrzeugmechatronik II

Optimale Regelung

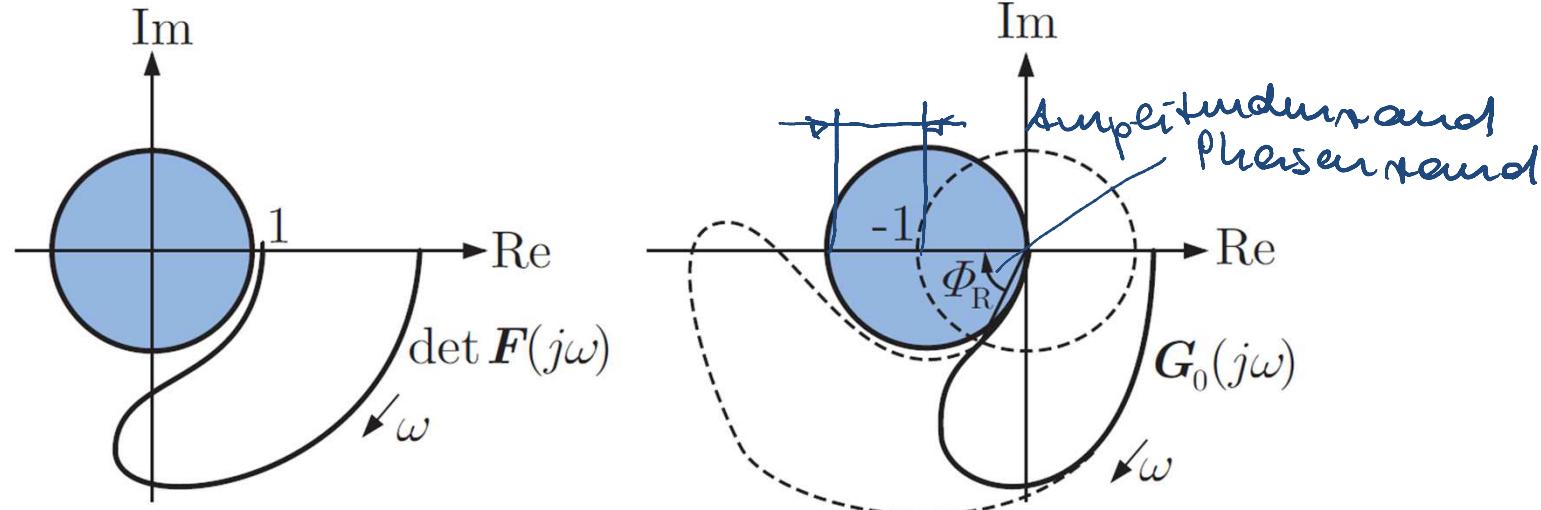


**Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin**

Eigenschaften des LQ-Regelkreises

Stabilität und Robustheit

- Wenn die in Satz 7.2 angegebenen Forderungen an die Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} erfüllt sind, ist der mit dem Optimalregler geschlossene Regelkreis **asympt. stabil**.
- Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass $|\det \mathbf{F}(j\omega)| \geq 1$



=> Bezuglich jeder einzelnen Stellgröße beträgt der Phasenrand mind. 60° und Amplitudenrand mind. 0.5.
=> **erhebliche Robustheit** ggü. Modellunsicherheiten

Eigenschaften des LQ-Regelkreises

Dynamik

- Das geregelte System ist tendenziell schneller als die Regelstrecke.

Für die unregelbare Strecke ergibt sich für das Gütekriterium

$$J = \int_0^\infty \underline{x}_0^T e^{At} \underline{Q} e^{At} \underline{x}_0 dt = \underline{x}_0^T \int_0^\infty e^{A^T t} \underline{Q} e^{At} dt \underline{x}_0$$

Der optimale Regler führt nun immer auf einen kleineren Wert von J

$$J = \underline{x}_0^T \int_0^\infty e^{\bar{A}^T t} \underline{Q} e^{\bar{A}t} dt \underline{x}_0 \Rightarrow e^{\bar{A}t} \text{ muss schnelle Polvergabe haben}$$

Entwurf des LQ-Regelkreises

Optimalreglerentwurf

Zunächst soll kein Optimierungsproblem gelöst werden,
sondern es sollen die Güteforderungen erfüllt
werden \Rightarrow iterativer Reglerentwurf

Gegeben: Regelstrecke (A, B, C) , Güteforderungen

1. Aus den Güteforderungen an den geschlossenen Kreis werden Wichtungsmatrizen Q und R für das Gütfunktional (7.15) abgeleitet.
2. Es wird die Riccatigleichung (7.20) gelöst und der Optimalregler (7.19) bestimmt.
3. Das Zeitverhalten des geschlossenen Kreises wird simuliert. Entspricht das Verhalten nicht den gegebenen Güteforderungen, so wird der Entwurf mit veränderten Wichtungsmatrizen wiederholt.

Entwurf des LQ-Regelkreises

Empfehlungen zur Wahl der Wichtungsmatrizen

- Verwende Diagonalmatrizen
(Diagonalelemente positiv und ungleich Null)

- Verwende

- $\underline{Q} = \mathbf{C}^T \text{diag } q_{ii} \mathbf{C}$

dann

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^r q_{ii} y_i^2(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt$$

Werteberechnung

$$\begin{aligned} & x^T \cancel{\mathbf{C}}^T \text{diag } q_{ii} \cancel{\mathbf{C}} x \\ & y^T \cancel{\mathbf{Q}} y \\ & = y_i^2 q_{ii} \end{aligned}$$

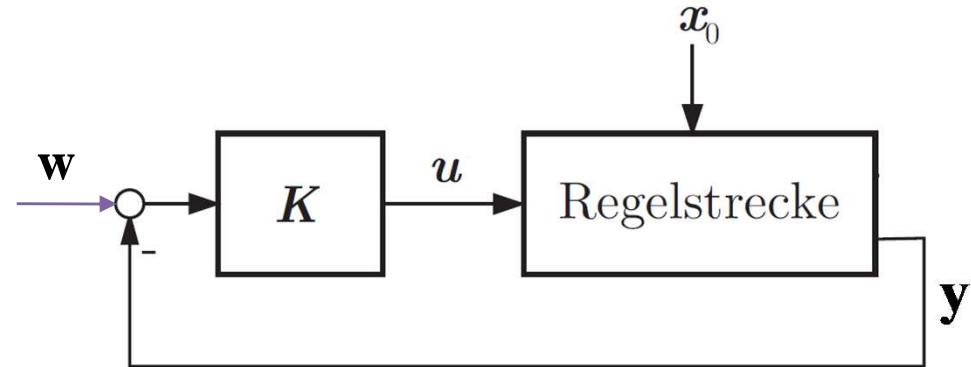
- ⇒
- Beachte den Wertebereich, ggf. normiere

- Variiere am Anfang in 10er-Potenzen

- Erhöhung von \underline{Q} führt zu stärker gedämpftem
Einschwingen, Erhöhung von \mathbf{R} zu höherer Robustheit

Optimale Folgeregelung

Einführung eines Führungsgrößenmodells



Für die Führungsgröße $\underline{w}(t)$ soll gelten

$$\dot{\underline{x}}_w(t) = \underline{A}_w \underline{x}_w(t) \quad \underline{x}_w(0) = \underline{x}_{w0}$$

$$\underline{w}(t) = \underline{G}_w \underline{x}_w(t)$$

- ▷ EW von \underline{A}_w sind instabile (andernfalls würde $\underline{w}(t)$ abrutschen)
- ▷ $\underline{A}_w, \underline{G}_w$ bekannt, \underline{x}_{w0} i. Akg. unbekannt, $\underline{w}(t)$ messbar

Optimale Folgeregelung

Beispiele für einfache Führungsgrößenmodelle

(1) Konstanz West W

$$\underline{\omega}(t) = \underline{I} \underline{\omega}$$

(2) Sprungföhre West W

$$\underline{\Omega} = \underline{\Omega} \underline{\omega} \underline{\Sigma}(t) \quad x_{\omega}(0) = 0$$

$$\underline{\omega}(t) = \underline{\underline{\omega}} \underline{\Sigma}(t)$$

(2) Sinusförmige Sollwert-Vorgabe

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{w_1} \\ \dot{x}_{w_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{w_1} \\ x_{w_2} \end{Bmatrix} \quad AB : \dots$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{w_1} \\ x_{w_2} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\ddot{w}}{1 - \sum c_i} = F(t) \quad \Downarrow \quad \begin{aligned} \omega(t) &= x_{\omega_1} \\ \dot{\omega}(t) &= x_{\omega_2} \end{aligned}$$

$$\dot{m}\ddot{w}(t) + c w(t) = 0$$

Optimale Folgeregelung

Erweiterung von Regelstrecke und Funktional

Erweiterte Regelstrecke

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_w(t) \end{Bmatrix} = \left[-\frac{\underline{A}}{\underline{Q}} + \frac{\underline{G}}{\underline{A}_w} \right] \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_w(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{B} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \underline{u}(t)$$

Erweitertes Funktional

$$G = \underline{C} \underline{x}(t) + C_w \underline{x}_w(t)$$

$$J = \int_0^{\infty} \left((\underline{y}(t) - \underline{w}(t))^T \underline{Q}_y (\underline{y}(t) - \underline{w}(t)) + \underline{u}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) \right) dt \rightarrow \min_{\underline{u}}$$

$$= \int_0^{\infty} \left([\underline{x}^T(t), \underline{x}_w^T(t)] \begin{bmatrix} \underline{C}^T \underline{Q}_y \underline{C} & -\underline{C}^T \underline{Q}_y \underline{C}_w \\ -\underline{C}_w^T \underline{Q}_y \underline{C} & \underline{C}_w^T \underline{Q}_y \underline{C}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_w(t) \end{Bmatrix} + \underline{y}^T(t) \underline{R} \underline{u}(t) \right) dt \rightarrow \min_{\underline{u}}$$

Optimale Folgeregelung

Erweiterung der Matrix-Riccatigleichung

Statt

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

lautet die Matrix-Riccatigleichung nun

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_w \end{bmatrix} - \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & -\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_w \\ -\mathbf{C}_w^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} & \mathbf{C}_w^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C}_w \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Optimale Folgeregelung

Ermittlung des optimalen Folgereglers

Schreibt man für die Lösung der Riccatigleichung

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad \text{mit } P_{11} \text{ } n \times n \text{-Matrix}$$

erhält man für den Regler

$$u = -\underline{R}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T}_{K} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ x_w(t) \end{Bmatrix}$$

i.A. nicht bereinigt

$$= -\underline{R}^{-1} \underline{B}^T P_{11} x(t) - \underline{R}^{-1} \underline{B}^T P_{12} x_w(t)$$

↳ Führungsgrößen-
beobachtbar

(Analog
Störgrößenbeobachtbar)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!