Fahrzeugmechatronik II
Optimale Regelung

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
Dipl.-Ing. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Einleitung
Motivation

Werden die Güteforderungen an den Regelkreis durch ein **Gütefunktional** ausgedrückt, das den Verlauf der Stell- und Regelgrößen bewertet, so kann der Regler als **Lösung eines Optimierungsproblems** gefunden werden**.**
Es werden behandelt:

- **Grundgedanke** der optimalen Regelung
- Ermittlung der **optimalen Zustandsrückführung**
- **Eigenschaften** und **Anwendungsgebiete** des Reglers

Grundgedanke der optimalen Regelung
Aufgabenstellung

Im Gegensatz zur *PI-Regelung* oder *Polzuweisung* sollen nun **Güteforderungen für den gesamten Verlauf der Stell- und Regelgrößen** erfüllt werden.

Zunächst wird gefordert, dass die **Regel- und Stellgrößen für die Überführung von y(t=0) nach y(t=t_e) über den gesamten Verlauf möglichst klein** werden.
Das **Entwurfsziel** kann dann als **Optimierungsaufgabe** formuliert werden.

Grundgedanke der optimalen Regelung
Optimierungsaufgabe

Die Optimierungsaufgabe lautet

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J_e\big(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}(t)\big) = J_e\big(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}^*(t)\big)$$

mit

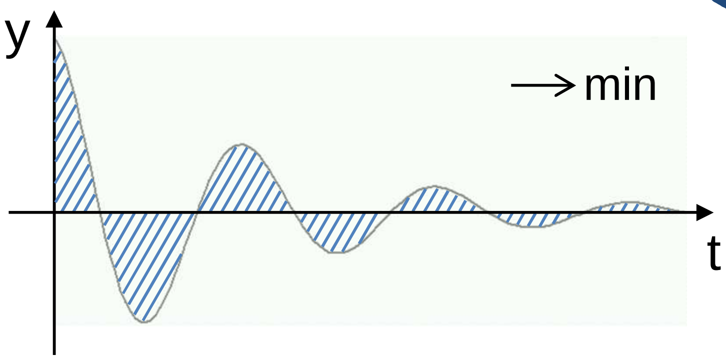
symmetrisch, pos. semidefinit

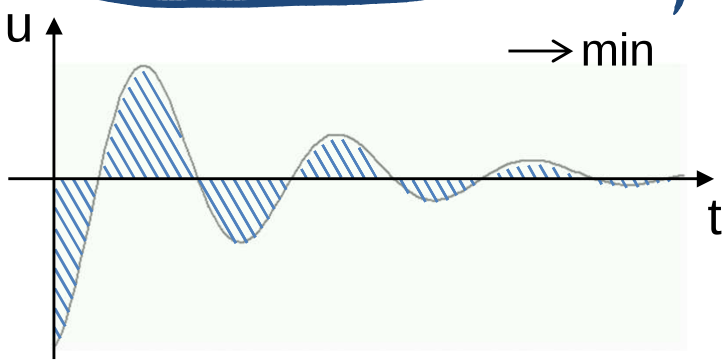
$$J_e\big(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}(t)\big) = \mathbf{y}^T(t_e)\mathbf{S}\mathbf{y}(t_e) + \int_0^{t_e}\Big(\mathbf{y}^T(t)\mathbf{Q}_y\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\Big)\,dt$$

Definition von pos. Semidefinitheit

(1) $\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \geq 0$

(2) $\lambda_i(\underline{A}) \geq 0$





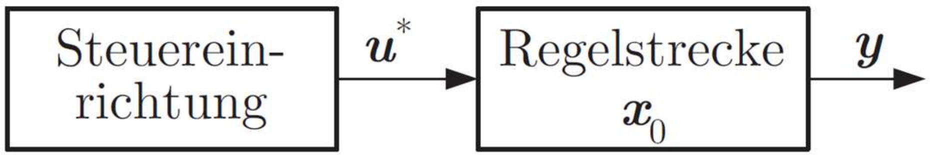
Grundgedanke der optimalen Regelung
Umformung des Optimierungsproblems

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf

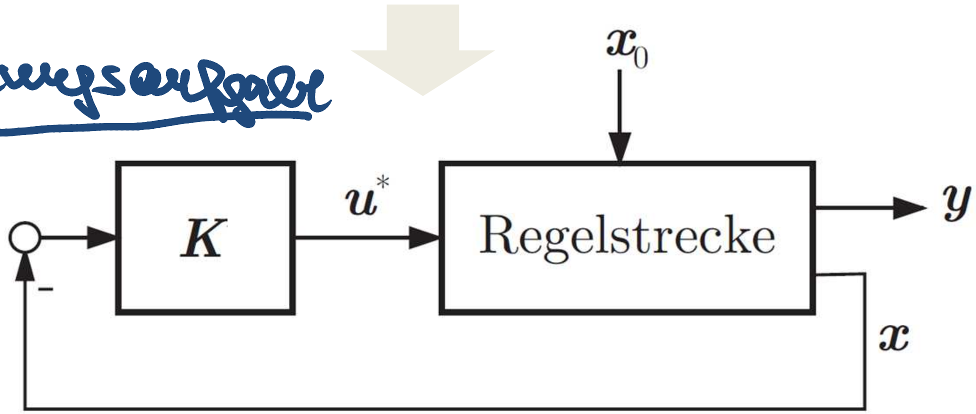
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Steueraufgabe



Regelungsaufgabe



Schritt 1

Es werden nur Steuerungen betrachtet, die sich als Zustandsrückführung realisieren lassen, d.h. $\underline{u}^*(t) = -\underline{K}\,\underline{x}(t)$

Schritt 2

Die Optimierung wird für einen unendlichen Optimierungshorizont durchgeführt. Damit je endlich gilt $\underline{x}(t) = 0$ für $t \to \infty$.

Grundgedanke der optimalen Regelung
Formulierung des Optimierungsproblems

Für die Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

und das Reglergesetz

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

soll das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{K}} J$$

gelöst werden, mit

$$J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right) dt$$

▷ Mit $\underline{Q} = \underline{C}^T \underline{Q}\, \underline{C}$

folgt $\underline{x}^T(t)\, \underline{Q}\, \underline{x}(t) = \underline{y}^T(t)\, \underline{Q}_y\, \underline{y}(t)$

▷ Wegen $\underline{x}(t \to \infty) = \underline{0}$ gilt

(1) $\lim\limits_{t_e \to \infty} \underline{y}^T(t_e)\, \underline{S}\, \underline{y}(t_e) = 0$

(2) Lösung des Optimierungs-problems führt immer auf ein asymptotisch stabiles System!

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Neuer Gütewert für die ungeregelte Strecke

Es wird zunächst das ungeregelte System ($\underline{u}(t) = \underline{0}$) betrachtet und Stabilität der Regelstrecke vorausgesetzt. Dann

$$J = \int_0^\infty \underline{x}^T(t)\, \underline{Q}\, \underline{x}(t)\, dt = \int_0^\infty \underline{x}_0^T \underbrace{e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}}_{f}\, \underbrace{e^{\underline{A} t}}_{\dot{g}}\, \underline{x}_0\, dt = \underline{x}_0^T\, \underline{P}\, \underline{x}_0$$

mit

$$\underline{P} = \underbrace{e^{\underline{A}^T t} \underline{Q}}_{f}\, \underbrace{\underline{A}^{-1} e^{\underline{A} t}}_{g} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{\underline{A}^T e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}}_{\dot{f}}\, \underbrace{\underline{A}^{-1} e^{\underline{A} t}}_{g}\, dt \qquad \text{(partielle Integration)}$$

$$= -\underline{Q}\,\underline{A}^{-1} - \underline{A}^T \int_0^\infty e^{\underline{A}^T t}\, \underline{Q}\, e^{\underline{A} t}\, dt\, \underline{A}^{-1} = -\underline{Q}\,\underline{A}^{-1} - \underline{A}^T \underline{P}\, \underline{A}^{-1}$$

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems

Neuer Gütewert für die ungeregelte Strecke

Es ergibt sich

$$\boxed{\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} = -\underline{Q}}$$

Ljapunowgleichung Gl. (7.16)

Satz 7.1 (Stabilitätsanalyse mit der Ljapunowgleichung)
Die Ljapunowgleichung (7.16) hat genau dann für eine beliebige gegebene symmetrische, positiv definite Matrix $\boldsymbol{Q}$ *eine symmetrische, positiv definite Lösung* $\boldsymbol{P}$, *wenn die Matrix* $\boldsymbol{A}$ *asymptotisch stabil ist.*

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Neuer Gütewert für die geregelte Strecke

Für den Regelkreis mit Zustandsrückführung gilt

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\underline{x}(t) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$= \underline{\bar{A}}\,\underline{x}(t)$$

dann folgt

$$J = \int_0^\infty \left(\underline{x}^T(t)\,\underline{Q}\,\underline{x}(t) + (-\underline{K}\,\underline{x}(t))^T\,\underline{R}\,(-\underline{K}\,\underline{x}(t))\right)dt = \int_0^\infty \underline{x}^T(t)\,\underbrace{(\underline{Q} + \underline{K}^T\underline{R}\,\underline{K})}_{\underline{\bar{Q}}}\,\underline{x}(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \underline{x}^T(t)\,\underline{\bar{Q}}\,\underline{x}(t)\,dt = \underline{x}_0^T\,\underline{P}\,\underline{x}_0$$

mit

$$\underline{\bar{A}}^T\underline{P} + \underline{P}\,\underline{\bar{A}} = -\underline{\bar{Q}} \qquad (\text{„Ljapunowgl.})$$

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Ableitung der Optimalitätsbedingung

Die notwendige Bedingung für $\min_{\underline{K}} J$ lautet

$$\frac{\partial J}{\partial k_{ij}} \overset{!}{=} 0 \qquad i = 1, \ldots, m \; ; \; j = 1, \ldots, n$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\underline{x}_0^T \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} \underline{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} \overset{!}{=} \underline{0}$$

Ableitung der Ljapunow-Gleichung des Regelkreises liefert

(mit $\frac{\partial \underline{P}}{\partial k_{ij}} = \underline{0}$)

$$\frac{\partial \bar{\underline{A}}^T}{\partial k_{ij}} \underline{P} + \underline{P} \frac{\partial \bar{\underline{A}}}{\partial k_{ij}} = - \frac{\partial \bar{\underline{Q}}}{\partial k_{ij}}$$

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Ableitung der Optimalitätsbedingung

Dann ergibt sich mit $\bar{\underline{A}} = \underline{A} - \underline{B}\,\underline{K}$ und $\bar{\underline{Q}} = \underline{Q} + \underline{K}^T \underline{R}\,\underline{K}$

$$-\frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}} \underline{B}^T \underline{P} - \underline{P}\,\underline{B} \frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} = -\frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}} \underline{R}\,\underline{K} - \underline{K}^T \underline{R} \frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}}$$

bzw.

$$\frac{\partial \underline{K}^T}{\partial k_{ij}} \left(\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \underline{P}\right) + \left(\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \underline{P}\right)^T \frac{\partial \underline{K}}{\partial k_{ij}} = \underline{0}$$

, da $\underline{R}$ und $\underline{P}$ symmetrisch

mit

$$\left((-\underline{P}\,\underline{B})^T + (\underline{K}^T \underline{R})^T\right)^T = \left(\underline{R}^T \underline{K} - \underline{B}^T \underline{P}^T\right) = \left(\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \underline{P}\right)$$

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Ableitung der Optimalitätsbedingung

Somit gilt die Bedingung

$$\underline{R}\,\underline{K} - \underline{B}^T \underline{P} = \underline{0}$$

und es folgt

$$\boxed{\underline{K} = \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}}$$

$\underline{P}$ ist zunächst noch unbekannt

$\underline{R}^{-1}$ existiert, falls $\underline{R}$ pos. definit

Einsetzen in Ljapunow-Gleichung des Regelkreises ergibt

$$\boxed{\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P}\,\underline{A} - \underline{P}\,\underline{B}\,\underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} + \underline{Q} = \underline{0}}$$

„Matrix-Riccatigleichung"

$\rightarrow \underline{P}$

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Hinreichende Optimalitätsbedingung

Damit die Optimalitätsbedingung hinreichend wird, muss sichergestellt sein, dass

(a) unabh. von den Anfangsbedingungen alles was dem System einfallen kann in J sichtbar wird

$$J = \int_0^\infty \underline{x}^T(t)\,\underline{Q}\,\underline{x}(t)\,dt = \int_0^\infty \underline{x}^T(t)\,\underbrace{\bar{\underline{Q}}^T\,\bar{\underline{Q}}}_{\underline{Q}}\,\underline{x}(t)\,dt = \int_0^\infty \bar{\underline{y}}^T(t)\,\bar{\underline{y}}(t)\,dt$$

$\Rightarrow$ Mit

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t)$$
$$\bar{\underline{y}}(t) = \bar{\underline{Q}}\,\underline{x}(t)$$

muss $(\underline{A}, \bar{\underline{Q}})$ beobachtbar sein!

(b) die Zustandsrückführung $-\underline{K}\,\underline{x}$ zu einem stabilen Rk. führen kann $\Rightarrow$ die Regelstrecke muss steuerbar sein!

Lösung des LQ-Problems

Praxis

Ist $\underline{Q}$ pos. definit, ist $(\underline{A}, \underline{\bar{Q}})$ immer beobachtbar

Satz 7.2 (Optimalregler)
Betrachtet wird eine vollständig steuerbare Regelstrecke

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

und ein Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}'(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t$$

mit symmetrischer, positiv semidefiniter Wichtungsmatrix $\boldsymbol{Q}$ *und symmetrischer, positiv definiter Wichtungsmatrix* $\boldsymbol{R}$. *Unter der Voraussetzung, dass das Paar* $(\boldsymbol{A}, \bar{\boldsymbol{Q}})$ *vollständig beobachtbar ist, wobei die Matrix* $\bar{\boldsymbol{Q}}$ *aus der Zerlegung*

$$\boldsymbol{Q} = \bar{\boldsymbol{Q}}'\bar{\boldsymbol{Q}}$$

der Wichtungsmatrix $\boldsymbol{Q}$ *hervorgeht, ist die Lösung des Optimierungsproblems*

$$\min_{\boldsymbol{K}} J$$

durch die Zustandsrückführung

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{x}(t)$$

mit

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}$$

gegeben. $\boldsymbol{P}$ *ist dabei die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Riccatigleichung*

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{O}.$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!