

Fahrzeugmechatronik II

Reglerentwurf durch Polzuweisung



Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller

M.Sc. Osama Al-Saidi

Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Einleitung

Motivation

Da die **Eigenwerte des geschlossenen Kreises** die **Eigenbewegung** und das **E/A-Verhalten entscheidend beeinflussen**, versucht man durch **geeignete Wahl der Reglerparameter** diesen **Eigenwerten vorgegebene Werte zuzuweisen**.

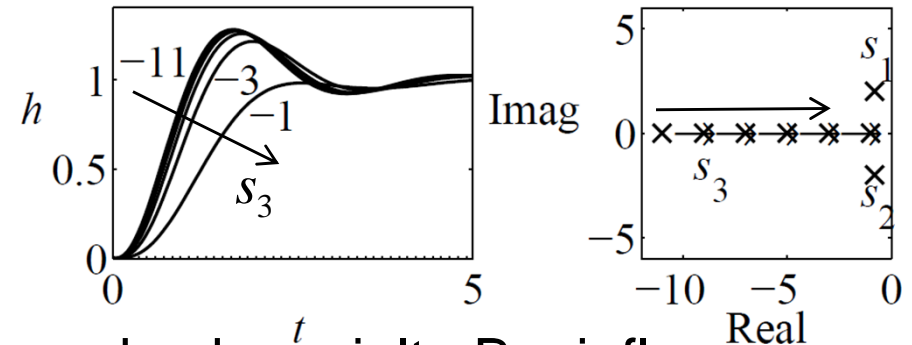
Es werden behandelt:

- **Berechnungsvorschriften** für Zustandsrückführungen
- **Ersetzen** der Zustands- **durch Ausgangsrückführung**

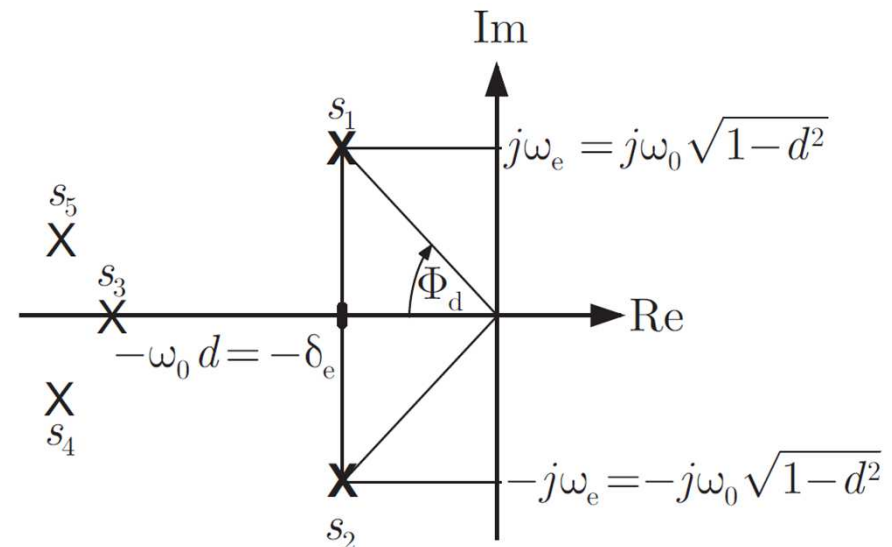
Regelerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen einschleifigen Regelkreises

Wird angenommen, dass das dynamische Regelverhalten durch ein dominierendes Polpaar bestimmt wird, z.B.

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2dT s + 1}$$



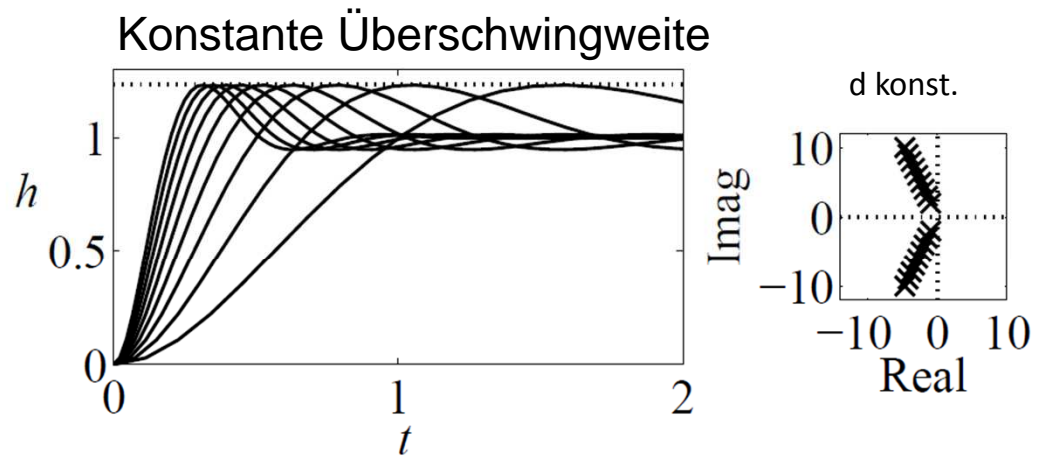
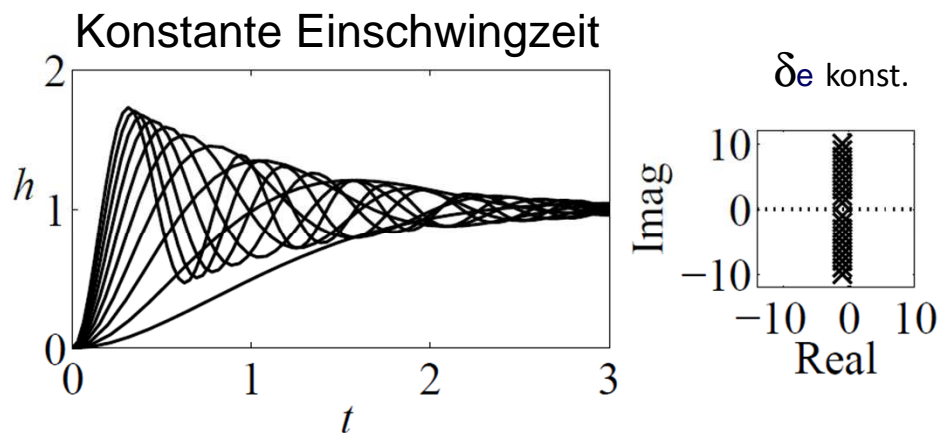
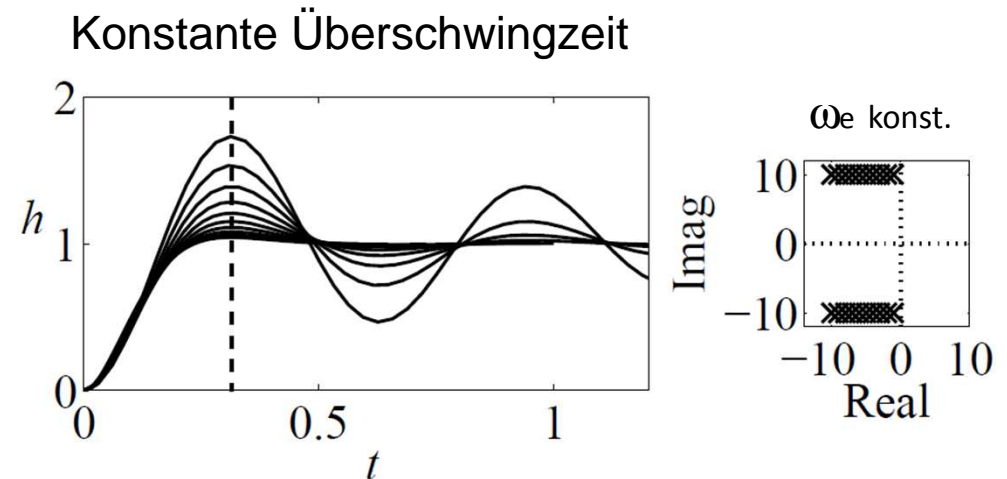
können dynamische Güteforderungen durch gezielte Beeinflussung dieses Polpaares erreicht werden.



Regelerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen einschleifigen Regelkreises

Auswirkungen der Beeinflussung des dominanten Polpaares auf das dynamische Regelverhalten

- Überschwingzeit
- Einschwingzeit
- Überschwingweite



Einleitung

Zielstellung

Ausgehend von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

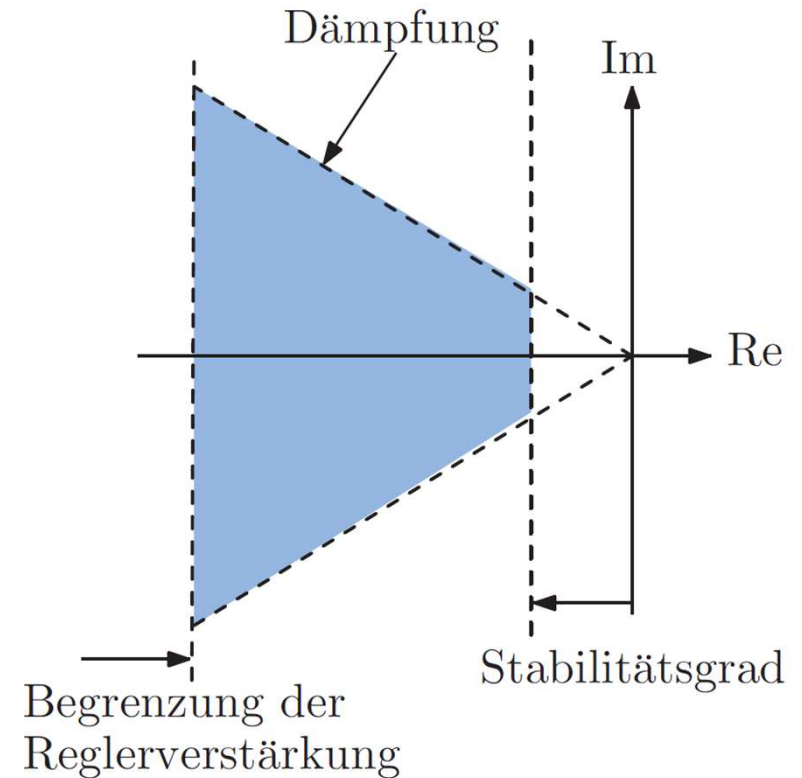
erhält man mit einer
Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t)$$

die Zustandsgleichung des
geschlossenen Kreises

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$



Einleitung

Gegenüberstellung mit einschleifigen RKs

- + Es werden alle Eigenwerte und nicht nur das dominierende Polpaar betrachtet.
-> größere Flexibilität
- Es müssen sämtliche Zustände gemessen (oder beobachtet) werden.

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Systeme in Regelungsnormalform mit einer Stellgröße

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

$$\mathbf{x}_R(t) = \frac{1}{b_0} \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{b}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frobeniusmatrix

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}'_R = (b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1})$$

$$d = b_n.$$

Regelungs-
normalform

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{b}_R u(t), \quad \mathbf{x}_R(0) = \mathbf{x}_{R0}$$

$$y(t) = \mathbf{c}'_R \mathbf{x}_R(t) + d u(t)$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Systeme in Regelungsnormalform mit einer Stellgröße

Charakteristisches Polynom

$$\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Regleransatz

$$\bar{A}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_{R1} & -a_1 - k_{R2} & -a_2 - k_{R3} & \cdots & -a_{n-1} - k_{Rn} \end{pmatrix}$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Ermittlung der Reglerparameter

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Erweiterung auf beliebige Modellformen

Ausgangspunkt ist (nur eine Stellgröße)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Ermittlung der Transformationsmatrix

Zunächst ermittelt man

$$\mathbf{S}_S = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$$

Dann bildet man

$$\mathbf{s}'_R = (0 \quad 0 \dots 0 \quad 1) \mathbf{S}_S^{-1}$$

Hieraus folgt

$$\mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{s}'_R \\ \mathbf{s}'_R \mathbf{A} \\ \mathbf{s}'_R \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}'_R \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Ermittlung der Reglerparameter

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Diskussion der Lösung

Satz (Polverschiebbarkeit)

Wenn das System (\mathbf{A}, \mathbf{b}) vollständig steuerbar ist, können die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises durch eine Zustandsrückführung $u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$ beliebig festgelegt werden.

Schlussfolgerungen

- Ist die Regelstrecke nicht vollständig steuerbar, gehören aber alle instabilen Eigenwerte zum steuerbaren Teil, kann die Regelstrecke zumindest stabilisiert werden.
- Um die Eigenwerte des Regelkreises beliebig platzieren zu können, reicht eine Stellgröße aus, wenn die Strecke über diese Stellgröße vollständig steuerbar ist.

Polzuweisung durch Zustandsrückführung Entwurfsv erfahren

Voraussetzungen:

- Die Regelstrecke ist vollständig steuerbar.
 - Die Regelstrecke hat nur eine Stellgröße ($m = 1$).
 - Die Güteforderungen betreffen nur die Eigenbewegung des Regelkreises bzw. das Übergangsverhalten des Regelkreises.
1. Anhand der Güteforderungen an die Eigenbewegung des Regelkreises werden Werte für die Pole des geschlossenen Kreises festgelegt.
 2. Die Reglerparameter werden mit Gl. (6.22) berechnet.
 3. Es wird das Modell des geschlossenen Regelkreises (6.18), (6.20) berechnet.
 4. Die Eigenbewegung des Regelkreises wird für verschiedene Anfangszustände berechnet und anhand der gegebenen Güteforderungen bewertet. Sind die Güteforderungen nicht erfüllt, so werden die Schritte 1–4 unter Verwendung anderer Vorgaben für die Pole des geschlossenen Kreises wiederholt.

Ergebnis: Zustandsrückführung

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Erweiterung auf mehrere Stellgrößen

Ausgangspunkt ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

mit $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ (Annahme: Strecke vollständig steuerbar)

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Steuerbarkeit der reduzierten Strecke

Satz (Steuerbarkeit der reduzierten Regelstrecke)

Wenn das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vollständig steuerbar und die Matrix \mathbf{A} zyklisch ist (heißt: Transformation in Frobeniusform ist möglich), dann gibt es einen Vektor \mathbf{q} , so dass das Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{q})$ vollständig steuerbar ist.

Praxis:

Unter den genannten Bedingungen führen fast alle \mathbf{q} auf ein steuerbares Paar $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{q})$.

\mathbf{q} wird daher zunächst beliebig festgelegt. Dann wird die Steuerbarkeit geprüft. Falls diese nicht gegeben ist, wird \mathbf{q} geringfügig verändert.

Näherung einer ZRF durch eine ARF

Einleitung

Ausgangspunkt ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t)$$

Annahme:

- (\mathbf{A}, \mathbf{B}) ist vollständig steuer- und beobachtbar.

Behauptungen:

- Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises können im Allgemeinen nicht mehr beliebig vorgegeben werden, sobald nur eine Zustandsgröße nicht gemessen werden kann.
- Wenn die Regelung um dynamische Elemente, z.B. einen Beobachter erweitert wird, können die Eigenwerte auch bei einer Ausgangsrückführung wieder zielgerichtet platziert werden.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!