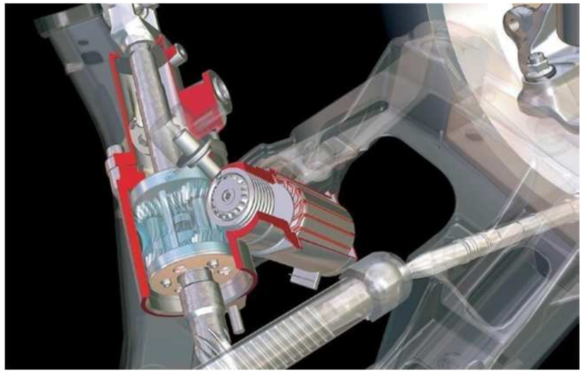
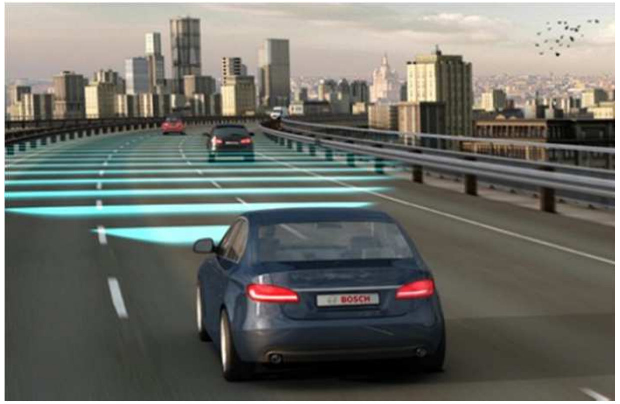
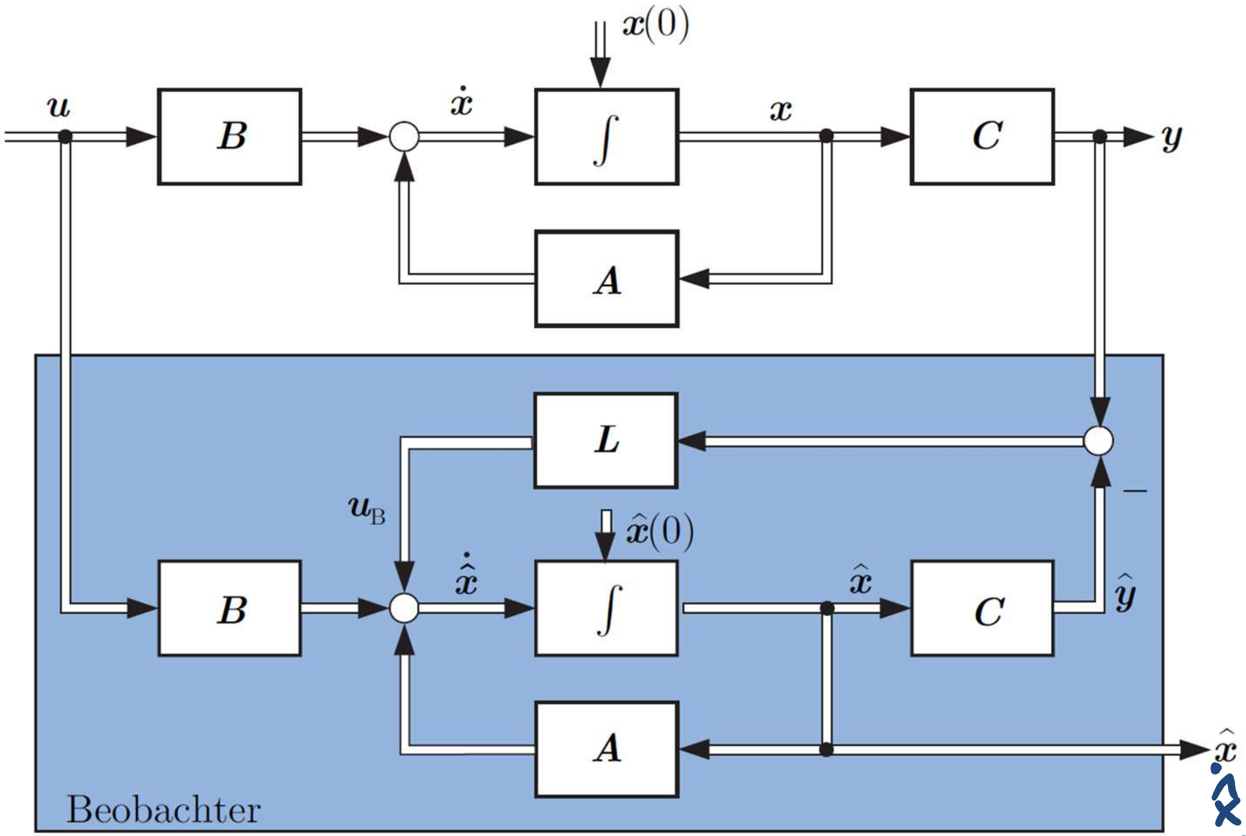
Fahrzeugmechatronik II
Beobachterentwurf


Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Luenberger Beobachter
Wiederholung: Struktur



Regelstrecke

$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + E\,d(t)$

$y(t) = C\,x(t) \qquad x(0) = x_0$

Beobachter

$\dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + u_B(t)$

$\hat{y}(t) = C\,\hat{x}(t) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$

$u_B(t) = L\,(y(t) - \hat{y}(t))$

Dann folgt

$\dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,C\,(x(t) - \hat{x}(t))$

Entwurfsaufgabe: Wie erreichen wir mit L, dass $\hat{x}(t) \to x(t)$?

Beobachterentwurf
Störverhalten des Beobachters

Für eine gestörte Strecke gilt

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + \underline{E}\,\underline{d}(t) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t)$$

Für den Beobachtungsfehler folgt dann

$$\dot{\underline{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{e}(t) + \underline{E}\,\underline{d}(t) \qquad \underline{e}(0) = \underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0 = \underline{e}_0$$

$\Rightarrow$ Entspricht einem durch eine Störung erregten System

$\Rightarrow$ Ob $\lim\limits_{t \to \infty} \|\underline{e}(t)\| = 0$, hängt vom Charakter der Störung ab

Störverhalten des Beobachters

Impulsförmige Störungen

Für den Beobachtungsfehler gilt

$$\dot{\underline{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{c}') \, \underline{e}(t) + \underline{E}\,\bar{\underline{d}}\,\delta(t)$$

Für die Lösung ergibt sich

$$\underline{e}(t) = e^{(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{c}')t}\,\underline{e}_0 + \underbrace{\int_0^t e^{(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{c}')(t-\cancelto{0}{\tau})}\,\underline{E}\,\bar{\underline{d}}\,\delta(\cancelto{0}{\tau})\,d\tau}_{e^{(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{c}')t}\,\underline{E}\,\bar{\underline{d}}}$$

$$= e^{(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{c}')t} \left(\underline{e}_0 + \underline{E}\,\bar{\underline{d}} \right)$$

⇒ Störung wirkt wie sprungförmige Änderung der AB

⇒ konvergiert, wenn ungestörtes System konvergiert

Störverhalten des Beobachters
Sprungförmige Störungen

Für den Beobachtungsfehler gilt

$$\dot{\underline{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{e}(t) + \underline{E}\,\bar{\underline{d}}\,\sigma(t)$$

1 für $t \geq 0$

für $t \to \infty$ gleich 0, falls $(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})$ stabil

Es folgt ein bleibender Beobachtungsfehler

$$\underline{e}(\infty) = -(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})^{-1}\,\underline{E}\,\bar{\underline{d}}$$

bzw.

$$\underline{y}(\infty) - \hat{\underline{y}}(\infty) = -\underline{C}\,(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})^{-1}\,\underline{E}\,\bar{\underline{d}} \neq 0$$

Falls $\dim \underline{y} = \dim \underline{d}$

Dann

$$\bar{\underline{d}} = \left(-\underline{C}\,(\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})^{-1}\,\underline{E}\right)^{-1}\left(\underline{y}(\infty) - \hat{\underline{y}}(\infty)\right)$$

Störverhalten des Beobachters

Stochastische Störungen

Für den Beobachtungsfehler gilt

$$\underline{\dot{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{e}(t) + \underline{E}\,\underline{d}(t)$$

⇒ ständige Erregung des Beobachtungsfehlers

Speziell für Messrauschen gilt darüber hinaus

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{v}(t)$$

Daraus folgt

$$\underline{\dot{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{L}\,\underline{C})\,\underline{e}(t) + \underline{L}\,\underline{v}(t)$$

Störgrößenbeobachter
Wiederholung: Störgrößenaufschaltung

Für

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{d}(t)$$

erhält man

$$\underline{\dot{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\underline{x}(t) + (\underline{E} - \underline{B}\,\underline{K}_d)\underline{d}(t)$$

Die Störung wird unterdrückt, falls

$$\underline{B}\,\underline{K}_d = \underline{E} \qquad \underline{B}^T\underline{B}\,\underline{K}_d = \underline{B}^T\underline{E}$$

[n x m]

bzw. $\underline{K}_d = (\underline{B}^T\underline{B})^{-1}\underline{B}^T\underline{E}$

[m x m]

Störgrößenbeobachter

Regelstrecke mit Störgrößenmodell

Für die Beobachtung der Störgröße wird ein Störgrößenmodell benötigt

$$\dot{\underline{x}}_d(t) = \underline{A}_d \, \underline{x}_d(t) \qquad \underline{x}_d(0) = \underline{x}_{d0}$$

$$\underline{d}(t) = \underline{C}_d \, \underline{x}_d(t)$$

Dann

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_d(t) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & \underline{E}\,\underline{C}_d \\ \hline \underline{0} & \underline{A}_d \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_d(t) \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \underline{B} \\ \hline \underline{0} \end{array} \right] \underline{u}(t) \qquad \begin{Bmatrix} \underline{x}(0) \\ \underline{x}_d(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_{d0} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_d(t) \end{Bmatrix}$$

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Störgrößenbeobachter
Anwendung Prinzip des Zustandsbeobachters

Mit dem Korrekturterm

$$\underline{u}_B(t) = \begin{bmatrix} \underline{L}_1 \\ \underline{L}_2 \end{bmatrix} \left(y(t) - \underline{C}\,\hat{\underline{x}} \right)$$

folgt für den Beobachter

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \hat{\underline{x}}(t) \\ \hat{\underline{x}}_d(t) \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} - \underline{L}_1 \underline{C} & \underline{E}\,\underline{C}_d \\ \hline -\underline{L}_2 \underline{C} & \underline{A}_d \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \hat{\underline{x}}(t) \\ \hat{\underline{x}}_d(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix} \underline{u}(t) + \begin{bmatrix} \underline{L}_1 \\ \hline \underline{L}_2 \end{bmatrix} y(t)$$

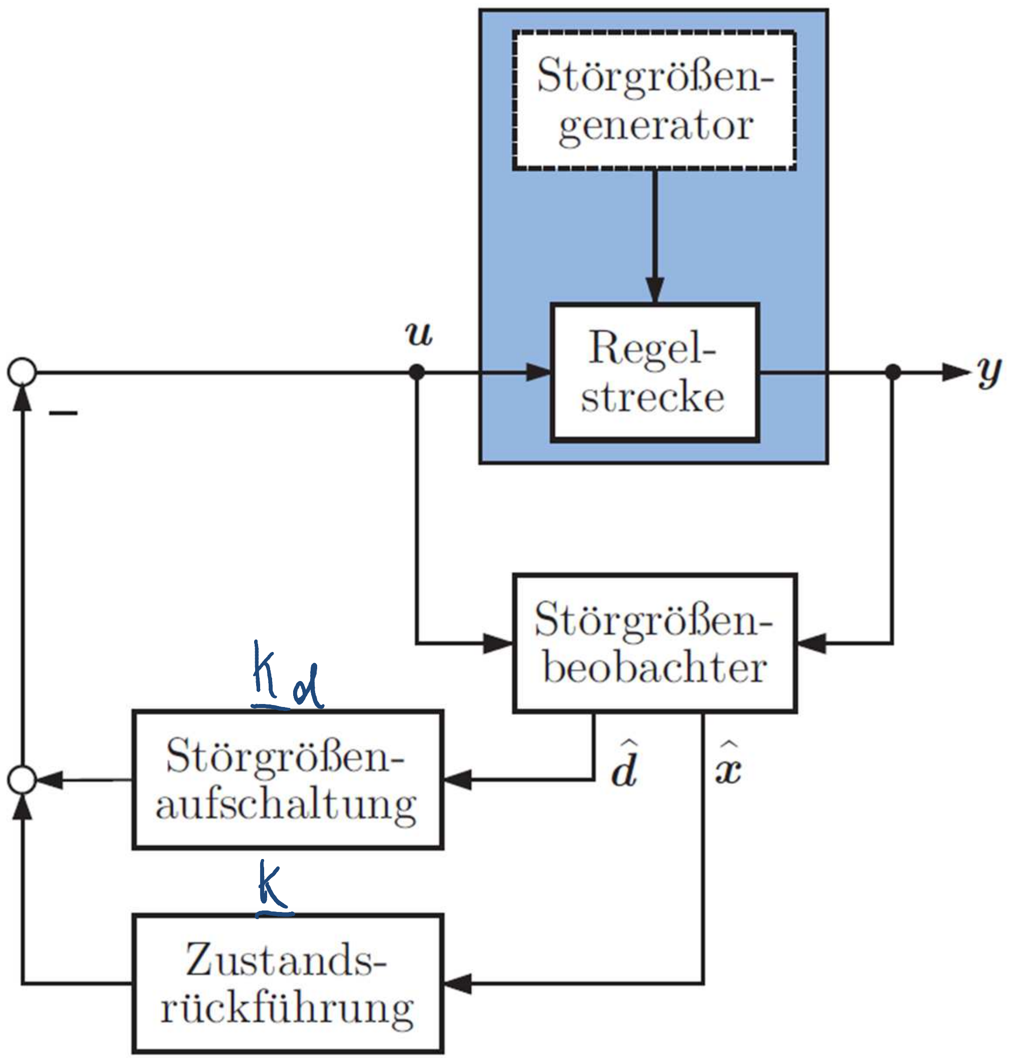
$$\dot{\hat{\underline{x}}}^* = \left(\underline{A}^* - \underline{L}^* \underline{C} \right) \hat{\underline{x}}^* + \underline{B}^* \underline{u} + \underline{L}^* y(t)$$

mit

$$\hat{\underline{d}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{C}_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\underline{x}}(t) \\ \hat{\underline{x}}_d(t) \end{Bmatrix}$$

Störgrößenbeobachter

Zustandsrückführung mit Störgrößenaufschaltung



Führungsgrößenbeobachter

Zustandsrückführung mit Führungsgrößenaufschaltung

s. Hierzu Lunze II S. 358

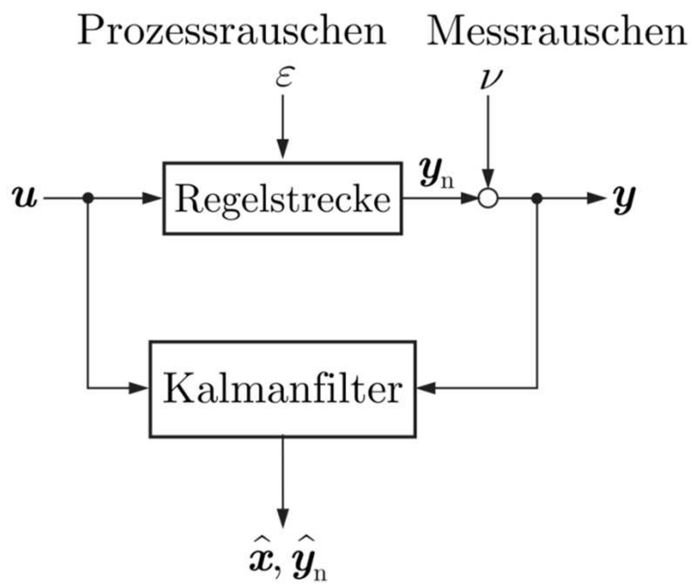
Kalmanfilter - Schätzproblem
Motivation

Beobachter können bei impulsförmigen und ggf. bei sprungartigen Störungen sinnvoll eingesetzt werden. **Für fortwährende stochastische Störungen verbleiben** von der Störung und vom System abhängige **Beobachtungsfehler**.

Für spezielle fortwährende stochastische Störungen können **Beobachterfehler** aber mit Hilfe eines sogenannten **Kalmanfilters** zumindest **minimiert** werden.

Kalmanfilter - Schätzproblem
Motivation

Ausgangspunkt ist



bzw.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \varepsilon(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \nu(t),$$

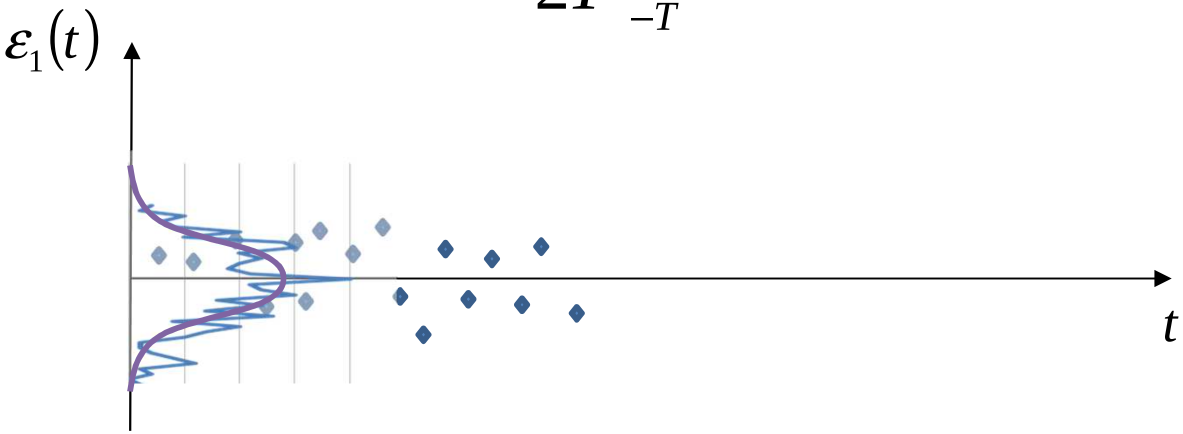
Kalmanfilter - Schätzproblem
Anforderungen an die stochastischen Störungen

Die stochastische Störung entspricht „weißem gaußschen Rauschen“, d.h. Gaußsche Normalverteilung und

1. der Erwartungswert der Störungen ist Null

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad E\{\boldsymbol{\upsilon}(t)\} = \mathbf{0}$$

mit z.B. $$\bar{\varepsilon}_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon_1(t)\, dt = 0$$



Kalmanfilter - Schätzproblem
Anforderungen an die stochastischen Störungen

2. Aufeinander folgende Werte dürfen nicht korreliert sein

$$\mathrm{cov}\{\boldsymbol{\varepsilon}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\} = E\{(\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau))\} = \mathbf{Q}\,\delta(t-\tau)$$
$$\mathrm{cov}\{\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(\tau)\} = E\{(\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau))\} = \mathbf{R}\,\delta(t-\tau)$$

wegen

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau)\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11,xx} & \cdots & \varepsilon_{1n,xx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1,xx} & \cdots & \varepsilon_{nn,xx} \end{bmatrix}$$

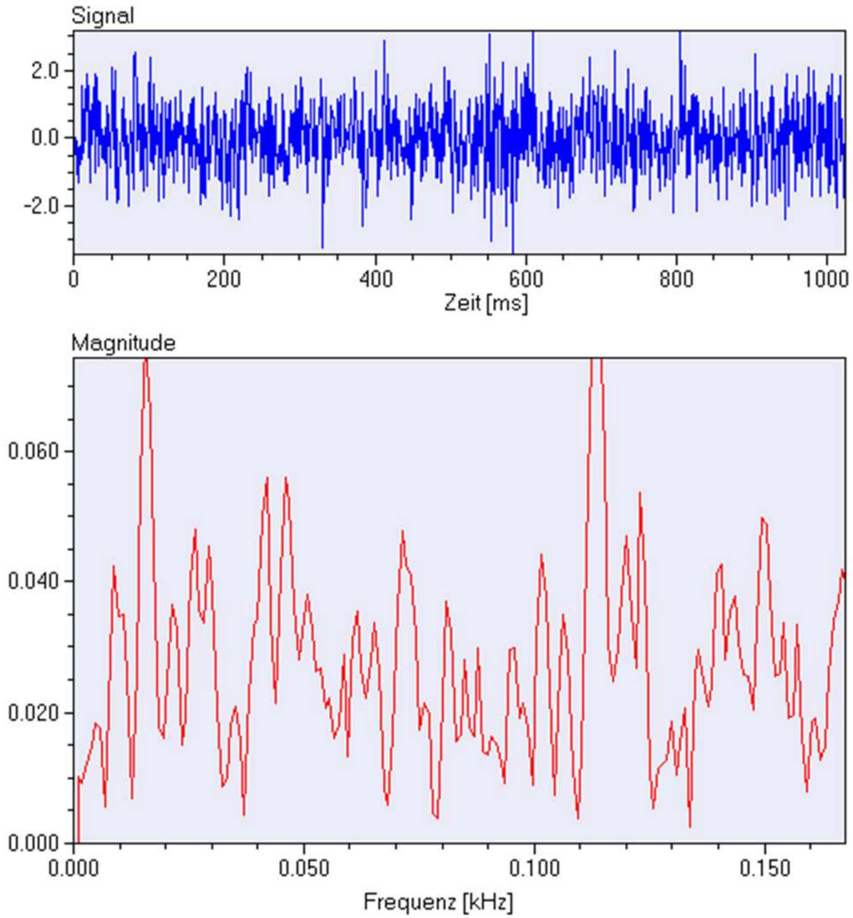
Matrix der Autokorrelationen

und z.B.

$$\varepsilon_{11,xx} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(\tau)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ für } \tau \neq 0 \\ \varepsilon_{1,eff}^2 \text{ für } \tau = t \end{cases}$$

Kalmanfilter - Schätzproblem
Anforderungen an die stochastischen Störungen

3. Das Amplituden- und Leistungsdichtespektrum ist konstant



Kalmanfilter - Schätzproblem

Ergebnisse der Herleitung des Kalmanfilters

Mit

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t))$$

folgt für die Fehlerdynamik

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{e}(t) + \varepsilon(t) - \boldsymbol{L}\nu(t), \qquad \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}_0$$

Dann führt das Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{L}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\{e_i^2\} = \min_{\boldsymbol{L}} \sum_{i=1}^{n} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e_i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

auf die Lösung

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}}$$

mit $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{P}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{O}$

Kalmanfilter - Schätzproblem

Diskussion der Lösung für den Kalmanfilters

- Rückführmatrix **L** wird wie Optimalregler ermittelt, allerdings
  - für das Duale System,
  - Dann muss (**A,C**) beobachtbar sein
  - mit den „Wichtungsmatrizen“ **Q** und **R** (bekannt oder wie Wichtungsmatrizen für Optimalregler verwenden)
- Wie beim Luenberger Beobachter gilt auch beim Kalmanfilter das Separationstheorem
  - Für Reglerentwurf zunächst Zustandsregler entwerfen, dann Entscheidung über Beobachter- oder Kalmanfilterentwurf
- Optimalregler + Kalmanfilter = **L**(inear)**Q**(uadratic)**G**(aussian)-Regler

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!