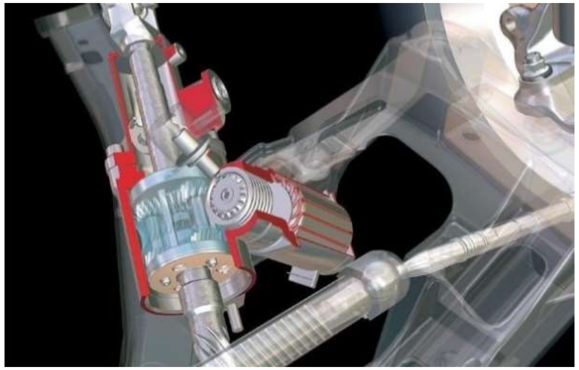
Fahrzeugmechatronik I
Modellbildung

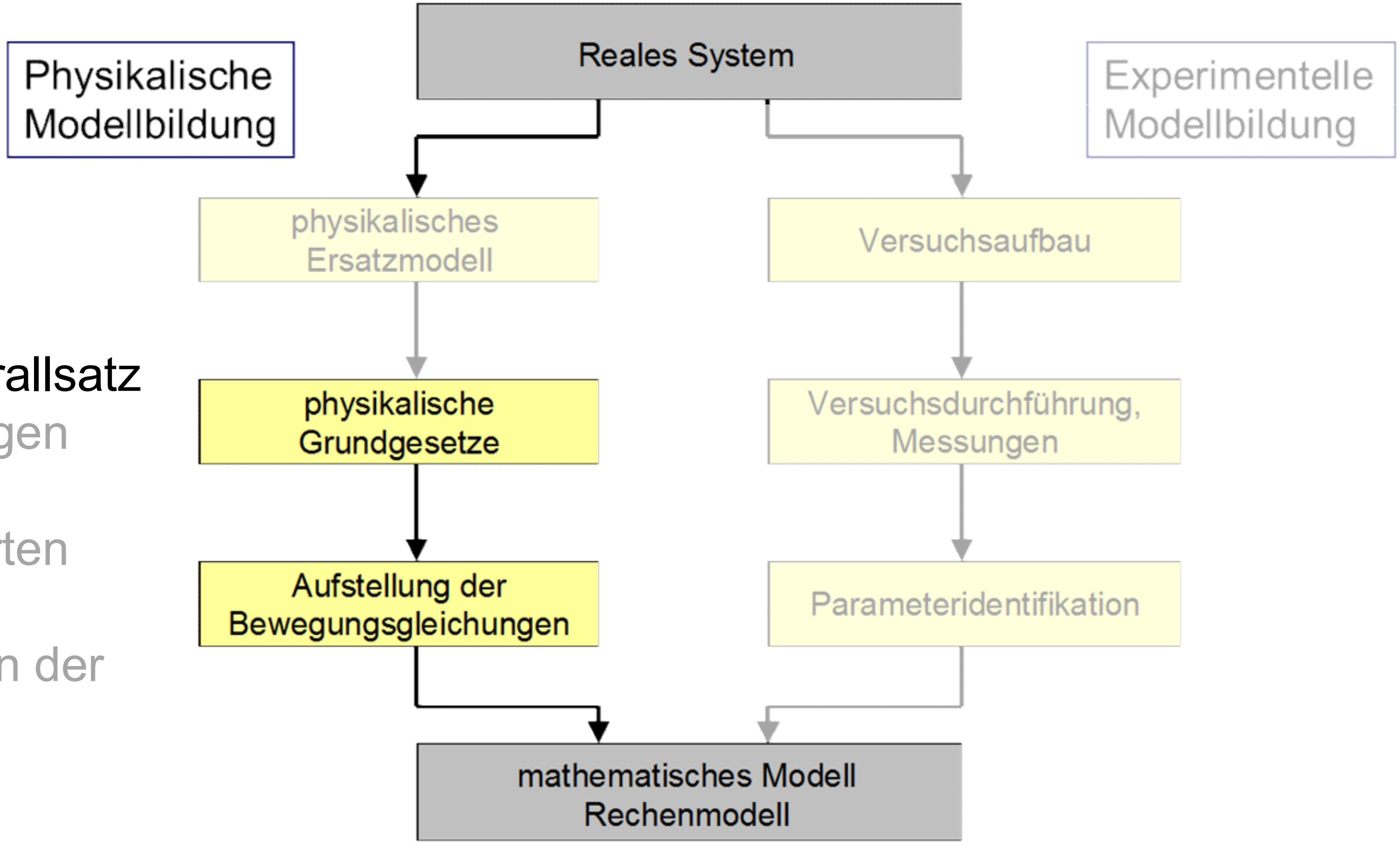
Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Übersicht
Methoden zur physikalischen Modellbildung

Beispiele für physikalische Modellbildung für mechanische Systeme

- Schwerpunktsatz und Drallsatz
- Lagrangesche Gleichungen 2. Art
- Konzept der generalisierten Masse
- Prinzip von D'Alembert in der Fassung von Lagrange
- Energiesatz
- PdvV
- PdvK

…



Schwerpunktsatz und Drallsatz
Prinzipielle Vorgehensweise

- Ermittlung der Schwerpunktlage im Inertialsystem $\mathbf{r}_{0S/I}$
- Ermittlung der Schwerpunkt-geschwindigkeit im Inertialsystem $\dot{\mathbf{r}}_{0S/I}$
- Ermittlung der Schwerpunkt-beschleunigung im Inertialsystem $\ddot{\mathbf{r}}_{0S/I}$
- Ermittlung der zeitl. Ableitung des Dralls im Inertialsystem $\frac{d\mathbf{L}^0_{/I}}{dt}$

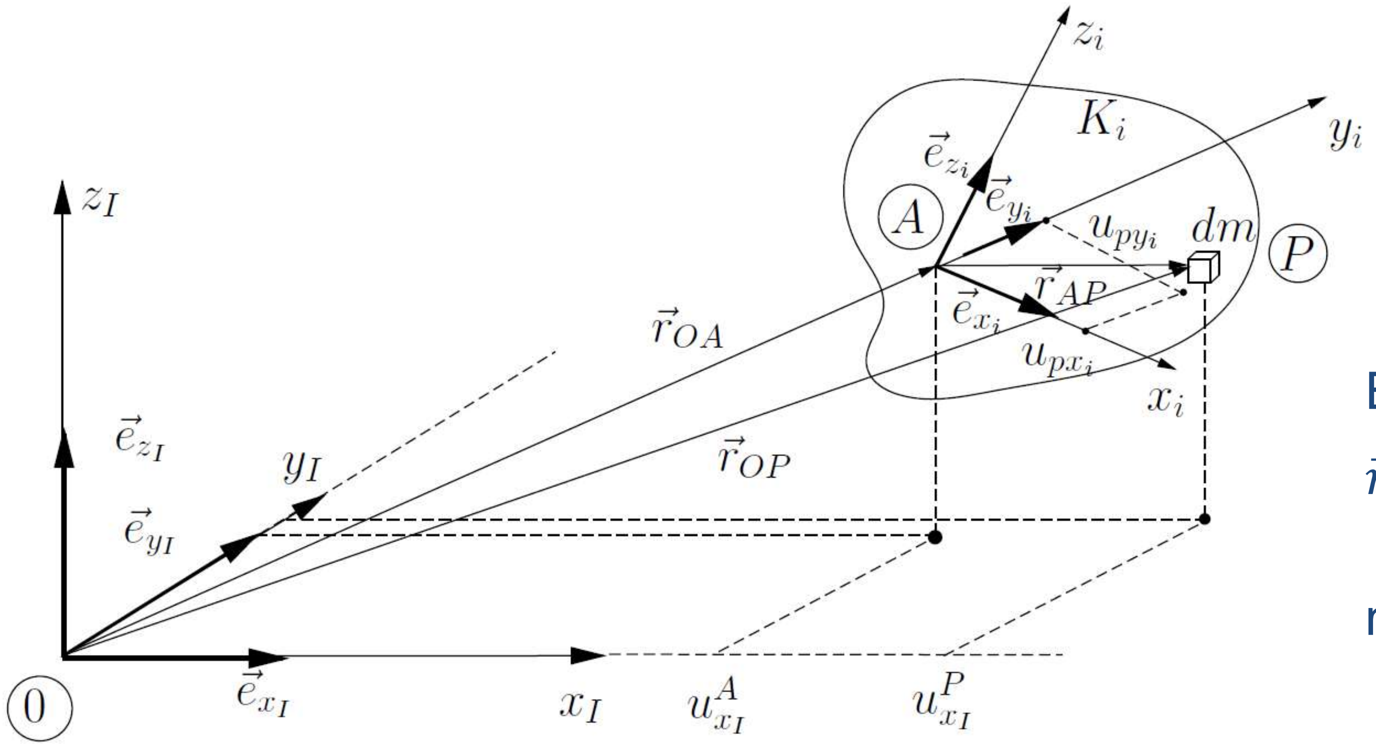
Schwerpunktsatz
Im Inertialsystem gilt

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{0S/I} = \mathbf{F}_{/I}$$

Drallsatz
Im Inertialsystem gilt

$$\frac{d\mathbf{L}^0_{/I}}{dt} = \mathbf{M}^0_{/I}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Ermittlung der Lage



Es gilt

$$\vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OA} + \vec{r}_{AP} = \boldsymbol{r}_{OP/I}^T \vec{\boldsymbol{e}}_I$$

mit

$$\vec{r}_{OA} = \left[u_{xI}^A, u_{yI}^A, u_{zI}^A\right] \begin{Bmatrix} \vec{e}_{xI} \\ \vec{e}_{yI} \\ \vec{e}_{zI} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{r}_{OA/I}^T \vec{\boldsymbol{e}}_I$$

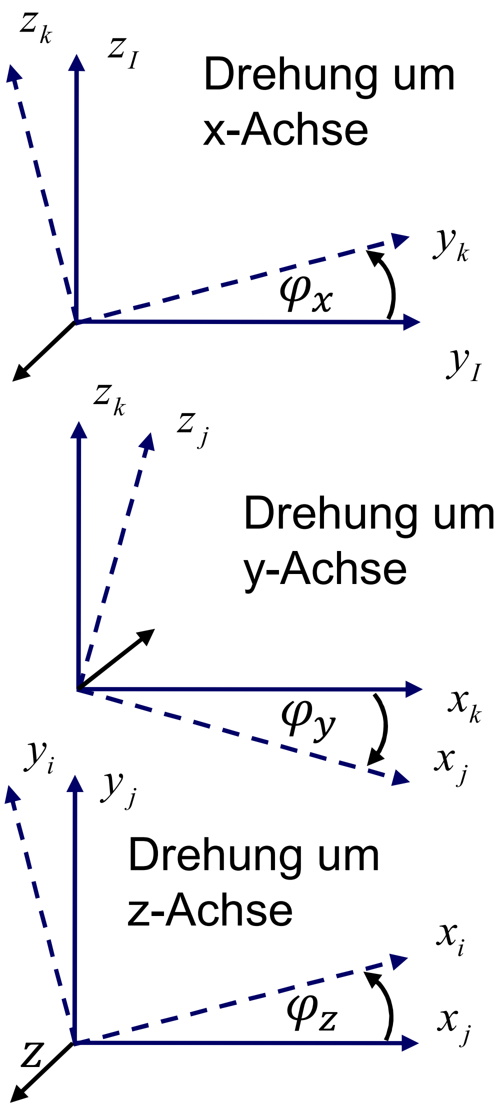
und

$$\vec{r}_{AP} = \left[u_{xi}^P, u_{yi}^P, u_{zi}^P\right] \begin{Bmatrix} \vec{e}_{xi} \\ \vec{e}_{yi} \\ \vec{e}_{zi} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{r}_{AP/i}^T \vec{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{r}_{AP/i}^T \boldsymbol{A}_{iI} \vec{\boldsymbol{e}}_I$$

Somit

$$\boxed{\boldsymbol{r}_{OP/I} = \boldsymbol{r}_{OA/I} + \overbrace{\boldsymbol{A}_{iI}^T}^{= \boldsymbol{A}_{Ii}} \boldsymbol{r}_{AP/i}}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Koordinatentransformation



$$\boldsymbol{r}_{/I} = \boldsymbol{A}_{Ik}\boldsymbol{r}_{/k}$$

$$\boldsymbol{A}_{Ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{bmatrix}$$

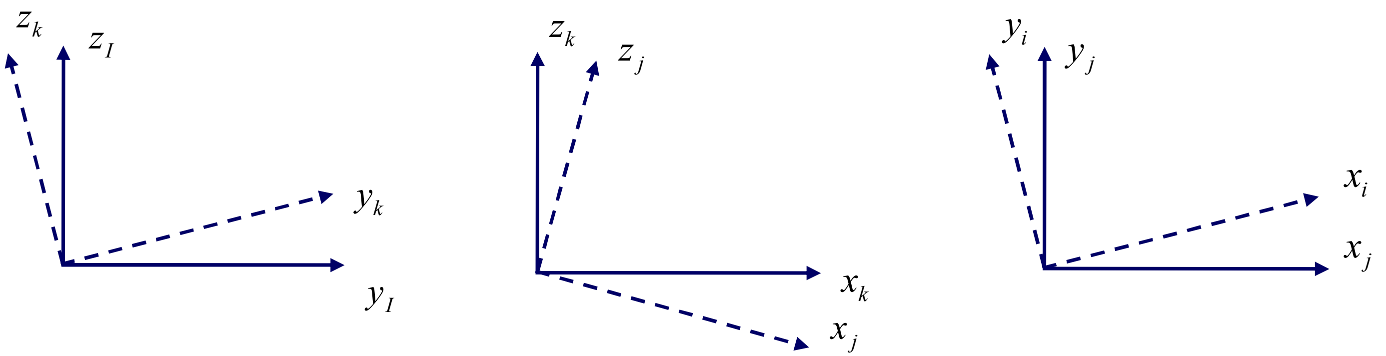
$$\boldsymbol{r}_{/k} = \boldsymbol{A}_{kj}\boldsymbol{r}_{/j}$$

$$\boldsymbol{A}_{kj} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{bmatrix}$$

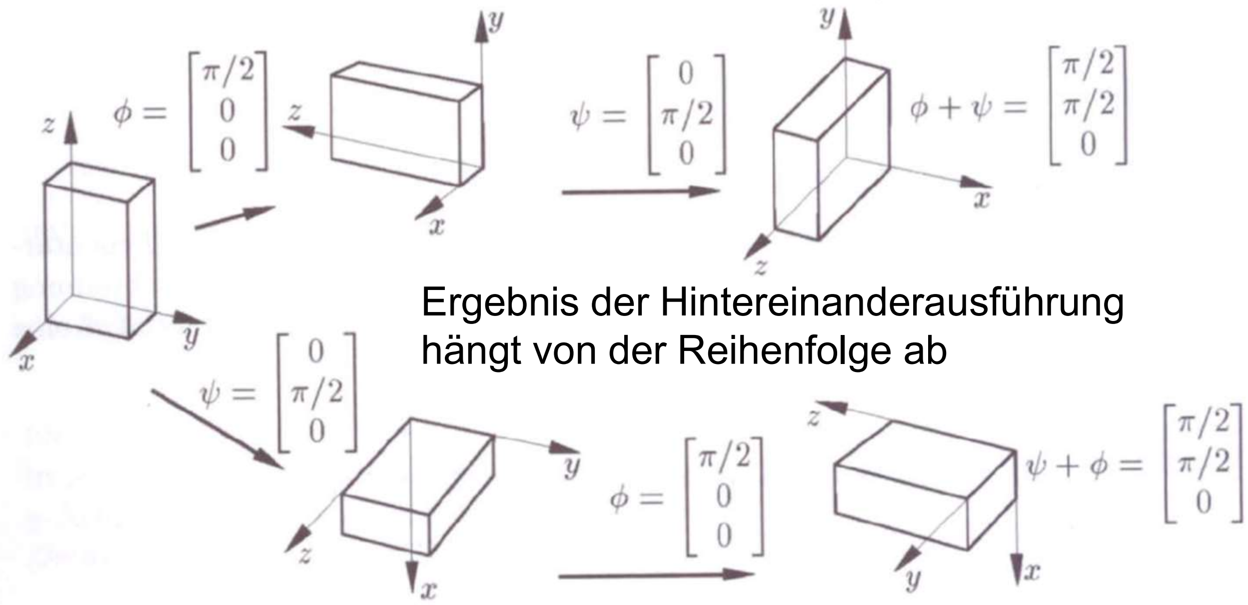
$$\boldsymbol{r}_{/j} = \boldsymbol{A}_{ji}\boldsymbol{r}_{/i}$$

$$\boldsymbol{A}_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Hintereinanderausführung von Transformationen



$$\boldsymbol{A}_{Ii} = \qquad \boldsymbol{A}_{Ik} \qquad \boldsymbol{A}_{kj} \qquad \boldsymbol{A}_{ji}$$

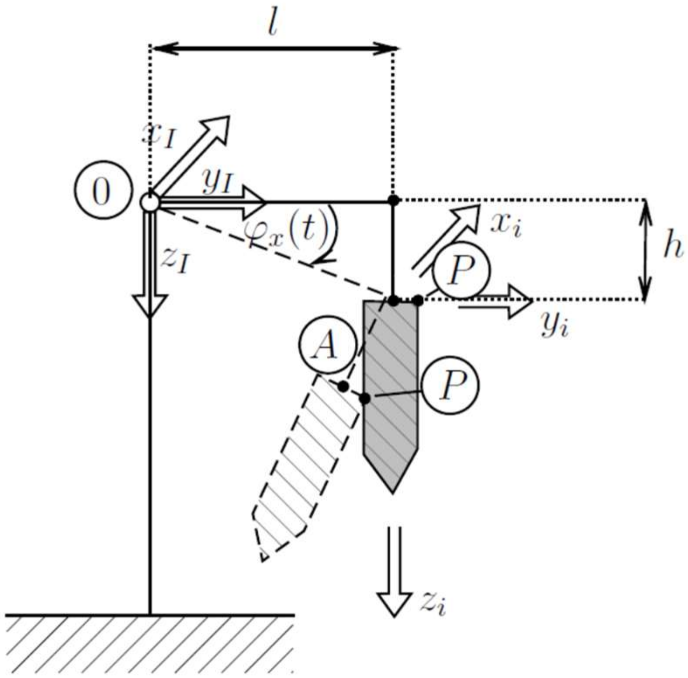


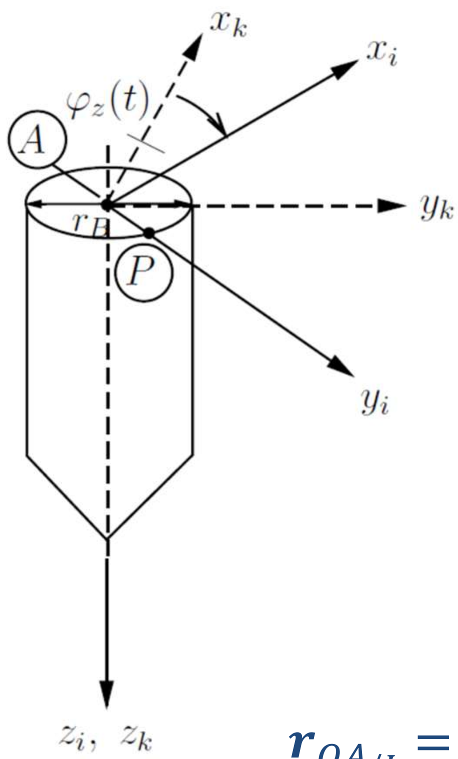
Ergebnis der Hintereinanderausführung hängt von der Reihenfolge ab

Prinzipiell gilt

$$\boldsymbol{A}_{ji} = \boldsymbol{A}_{iI}^{-1} = \boldsymbol{A}_{iI}^{T}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Ermittlung der Lage - Beispiel





$$\boldsymbol{r}_{OA_{/I}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ l\cos\varphi_x - h\sin\varphi_x \\ l\sin\varphi_x + h\cos\varphi_x \end{Bmatrix}$$

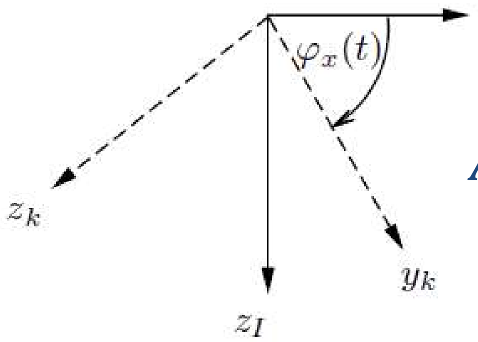
Für die Lage des Punktes P gilt

$$\boldsymbol{r}_{OP_{/I}} = \boldsymbol{r}_{OA} + \boldsymbol{A}_{Ii}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}}$$

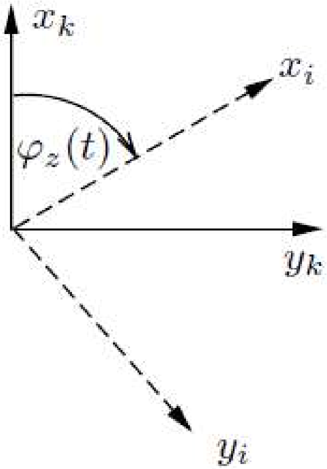
$$\boldsymbol{r}_{AP_{/i}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_B \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz

Ermittlung der Lage - Beispiel



$$\boldsymbol{A}_{Ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{A}_{ki} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{Ii} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \cos\varphi_x \sin\varphi_z & \cos\varphi_x \cos\varphi_z & -\sin\varphi_x \\ \sin\varphi_x \sin\varphi_z & \sin\varphi_x \cos\varphi_z & \cos\varphi_x \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_{OP/I} = \begin{Bmatrix} -r_B \sin\varphi_z \\ l\cos\varphi_x - h\sin\varphi_x + r_B \cos\varphi_x \cos\varphi_z \\ l\sin\varphi_x + h\cos\varphi_x + r_B \sin\varphi_x \cos\varphi_z \end{Bmatrix}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Prinzipielle Vorgehensweise

- Ermittlung der Schwerpunktlage im Inertialsystem $\mathbf{r}_{0P/I}$ (P=S)
- Ermittlung der Schwerpunkt-geschwindigkeit im Inertialsystem $\dot{\mathbf{r}}_{0P/I}$ (P=S)
- Ermittlung der Schwerpunkt-beschleunigung im Inertialsystem $\ddot{\mathbf{r}}_{0P/I}$ (P=S)
- Ermittlung der zeitl. Ableitung des Dralls im Inertialsystem $\frac{d\mathbf{L}^0_{/I}}{dt}$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Ermittlung der Geschwindigkeit

Zunächst gilt

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{OP_{/I}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} + \dot{\boldsymbol{A}}_{Ii}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}} + \boldsymbol{A}_{Ii}\cancel{\dot{\boldsymbol{r}}_{AP_{/i}}}^{=0}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass

$$\dot{r}_{AP_{/i}} = 0$$

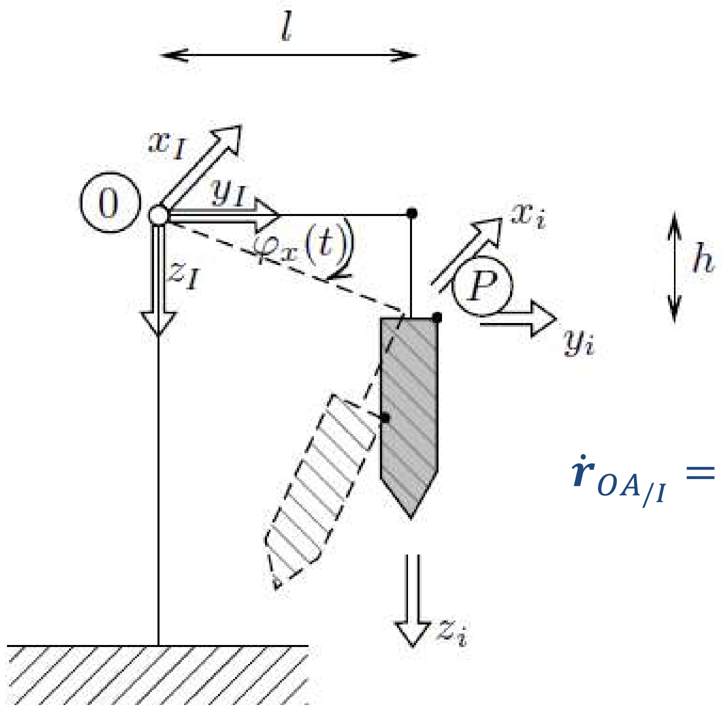
bzw.

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{r}}_{OP_{/I}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} + \boldsymbol{A}_{Ii}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}}}$$

mit

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_i} & \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} & 0 & -\omega_{x_i} \\ -\omega_{y_i} & \omega_{x_i} & 0 \end{bmatrix}$$ schiefsymmetrische Matrix

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Ermittlung der Geschwindigkeit - Beispiel



Es gilt

$$\boldsymbol{v}_{OP_{/I}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} + \boldsymbol{A}_{Ii}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}}$$

Hierbei ist

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} = \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} 0 \\ l\cos\varphi_x - h\sin\varphi_x \\ l\sin\varphi_x + h\cos\varphi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -l\dot{\varphi}_x\sin\varphi_x - h\dot{\varphi}_x\cos\varphi_x \\ l\dot{\varphi}_x\cos\varphi_x - h\dot{\varphi}_x\sin\varphi_x \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{/i} = \boldsymbol{A}_{iI}\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_{xI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \boldsymbol{A}_{ik}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_{zk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_x\cos\varphi_z \\ -\dot{\varphi}_x\sin\varphi_z \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_z & -\dot{\varphi}_z\sin\varphi_z \\ \dot{\varphi}_z & 0 & -\dot{\varphi}_x\cos\varphi_z \\ \dot{\varphi}_x\sin\varphi_z & \dot{\varphi}_x\cos\varphi_z & 0 \end{bmatrix}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Prinzipielle Vorgehensweise

- Ermittlung der Schwerpunktlage im Inertialsystem $\mathbf{r}_{0P/I}$ (P=S)
- Ermittlung der Schwerpunkt-geschwindigkeit im Inertialsystem $\dot{\mathbf{r}}_{0P/I}$ (P=S)
- Ermittlung der Schwerpunkt-beschleunigung im Inertialsystem $\ddot{\mathbf{r}}_{0P/I}$ (P=S)
- Ermittlung der zeitl. Ableitung des Dralls im Inertialsystem $\frac{d\mathbf{L}^{0}_{/I}}{dt}$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Ermittlung der Beschleunigung

Ausgehend von

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{OP_{/I}} = \dot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} + \boldsymbol{A}_{Ii}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}}$$

Ergibt sich die Ableitung nach der Zeit

$$\mathbf{0}, falls\ \dot{\boldsymbol{r}}_{AP_{/i}} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{OP_{/I}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} + \dot{\boldsymbol{A}}_{Ii}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}} + \boldsymbol{A}_{Ii}\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{/i}\boldsymbol{r}_{AP_{/i}} + \ldots$$

$$\boldsymbol{A}_{Ii}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}$$

somit

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{r}}_{OP_{/I}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{OA_{/I}} + \boldsymbol{A}_{Ii}\left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{/i}\right)\boldsymbol{r}_{AP_{/i}}}$$

Schwerpunktsatz und Drallsatz
Prinzipielle Vorgehensweise

- Ermittlung der Schwerpunktlage im Inertialsystem $\mathbf{r}_{0P/I}$ (P=S)

- Ermittlung der Schwerpunkt-geschwindigkeit im Inertialsystem $\dot{\mathbf{r}}_{0P/I}$ (P=S)

- Ermittlung der Schwerpunkt-beschleunigung im Inertialsystem $\ddot{\mathbf{r}}_{0P/I}$ (P=S)

- Ermittlung der zeitl. Ableitung des Dralls im Inertialsystem $\dfrac{d\mathbf{L}^{0}_{/I}}{dt}$

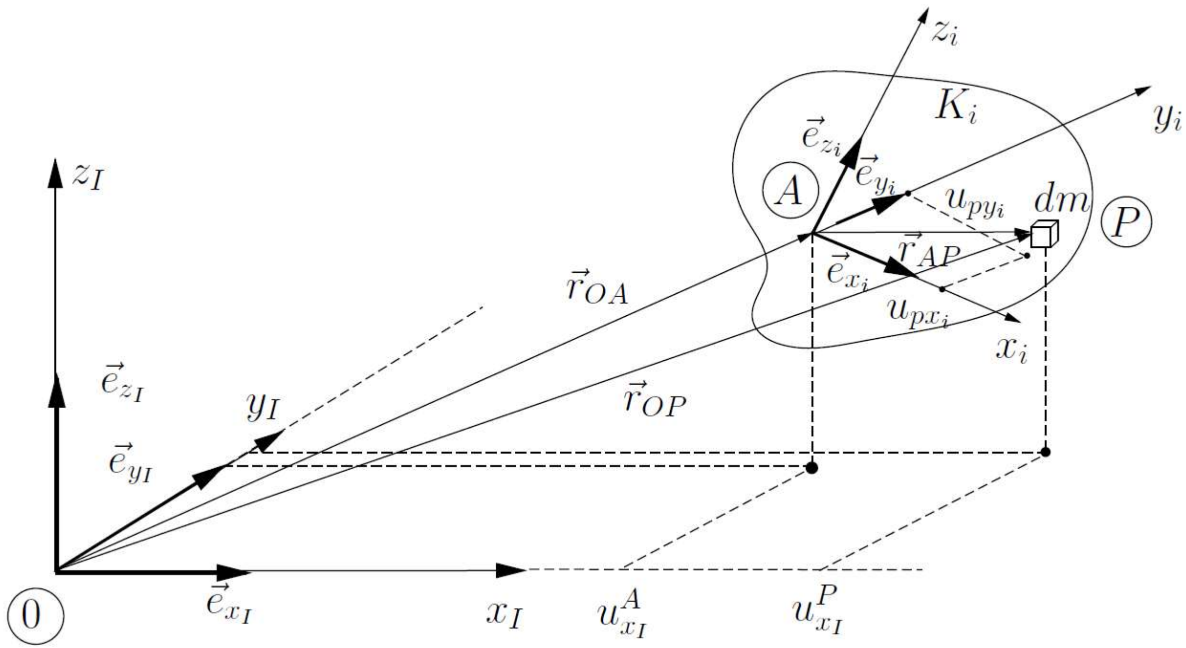
Schwerpunktsatz und Drallsatz

Ermittlung der zeitlichen Ableitung des Dralls

Drallsatz (Momentensatz)

Im Inertialsystem gilt für den Schwerpunkt

$$\frac{d\mathbf{L}^S_{/I}}{dt} = \frac{d\left(\mathbf{J}^S_{/I}\omega_{/I}\right)}{dt} = \mathbf{M}^S_{/I}$$



Schwerpunktsatz und Drallsatz
Drallsatz für SP oder raumfesten Punkt

Ist (P) der Schwerpunkt oder ein raumfester Punkt, gilt im mitbewegten Koordinatensystem

$$\boldsymbol{J}^P_{/i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{/i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{/i}\boldsymbol{J}^P_{/i}\boldsymbol{\omega}_{/i} = \boldsymbol{M}^P_{/i}$$

mit

$$\boldsymbol{J}^P_{/i} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ & J_{yy} & J_{yz} \\ symm & & J_{zz} \end{bmatrix} = const.$$

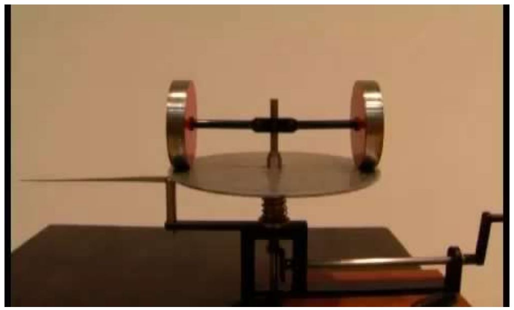
Schwerpunktsatz und Drallsatz
Drallsatz im Hauptachsensystem

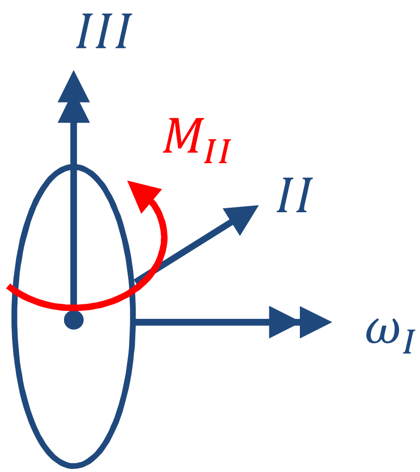
Ist (P) Schwerpunkt oder raumfester Punkt und ist das Koordinatensystem darüber hinaus Hauptachsensystem, so folgen die bekannten Euler-Gleichungen

$$\begin{bmatrix} J_I^P & & \\ & J_{II}^P & \\ & & J_{III}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot\omega_I \\ \dot\omega_{II} \\ \dot\omega_{III} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{III} & \omega_{II} \\ \omega_{III} & 0 & -\omega_I \\ -\omega_{II} & \omega_I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J_I^P & \omega_I \\ J_{II}^P & \omega_{II} \\ J_{III}^P & \omega_{III} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_I^P \\ M_{II}^P \\ M_{III}^P \end{Bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{aligned} J_I^P \dot\omega_I &- \omega_{III}\omega_{II}(J_{II}^P - J_{III}^P) = M_I^P \\ J_{II}^P \dot\omega_{II} &- \omega_{III}\omega_I(J_{III}^P - J_I^P) = M_{II}^P \\ J_{III}^P \dot\omega_{III} &- \omega_{II}\omega_I(J_I^P - J_{II}^P) = M_{III}^P \end{aligned}$$





Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!