

# Fahrzeugmechatronik II

## Strukturen und Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen



**Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller**

**M.Sc. Osama Al-Saidi**

**Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin**

---

# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Möglichkeiten der Analyse

1. Liegt eine Zustandsraumbeschreibung vor

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{w}(t) + \bar{\mathbf{E}}\mathbf{d}(t) \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t)$$

kann die Zustandsstabilität über die Eigenwerte von  $\bar{\mathbf{A}}$  überprüft werden.

2. Liegt eine E/A-Beschreibung vor

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_w(s)\mathbf{W}(s)$$

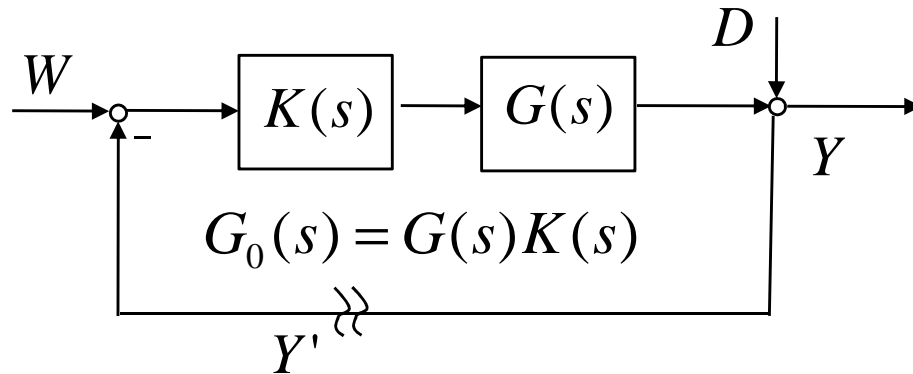
kann die E/A-Stabilität über die Pole von  $\mathbf{G}_w(s)$  überprüft werden.

3. Nyquist-Kriterium für Überprüfung der E/A-Stabilität

# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

### Rückführdifferenzfunktion



Eingangs- Ausgangsverhalten

$$Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s)$$

mit 
$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$G_d(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)}$$

Außerdem gilt für  $W=D=0$

$$Y(s) = -G(s)K(s)Y'(s) = -G_0(s)Y'(s)$$

Dann gilt für die Rückführdifferenz

$$Y' - Y = \underbrace{(1 + G_0(s))}_{\text{Rückführdifferenzfunktion}} Y'$$

Rückführdifferenzfunktion

$$F(s) = 1 + G_0(s)$$

# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

### Interpretation

Mit

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}$$

folgt

$$F(s) = 1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)}$$

**Nullstellen von  $F(s)$ :** Pole des geschlossenen Kreises

**Nullstellen von  $N_0(s)$ :** Pole des offenen Kreises

Also gilt

$$\begin{aligned} F(s) &= k \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \\ &= |k| \frac{\prod_{i=1}^n |s - \bar{s}_i| e^{j\Phi_{\bar{s}_i}}}{\prod_{i=1}^n |s - s_i| e^{j\Phi_{s_i}}} \\ &= |F(s)| \cdot e^{j\Phi_F(s)} \end{aligned}$$

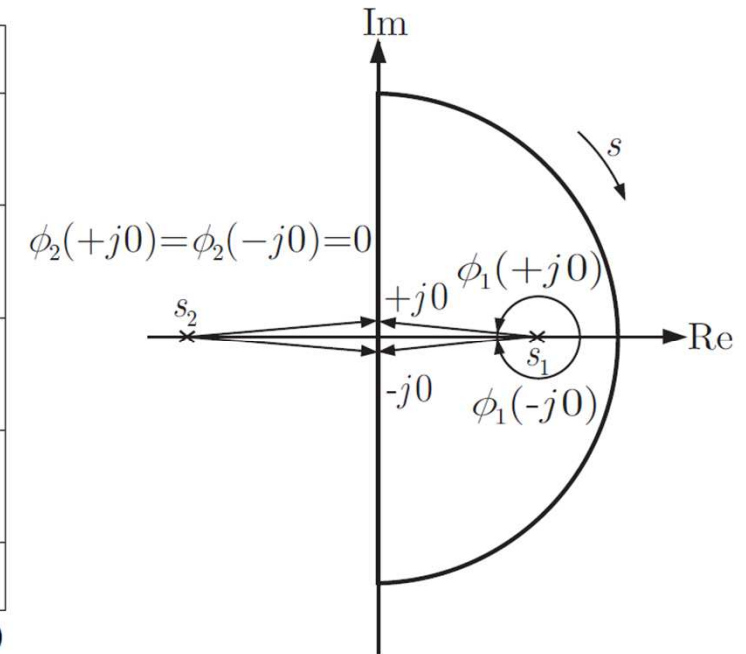
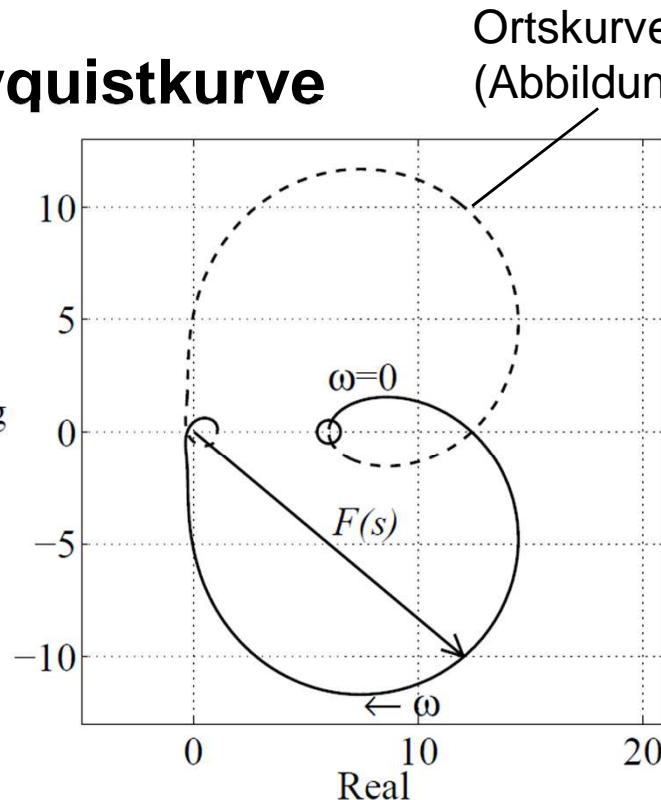
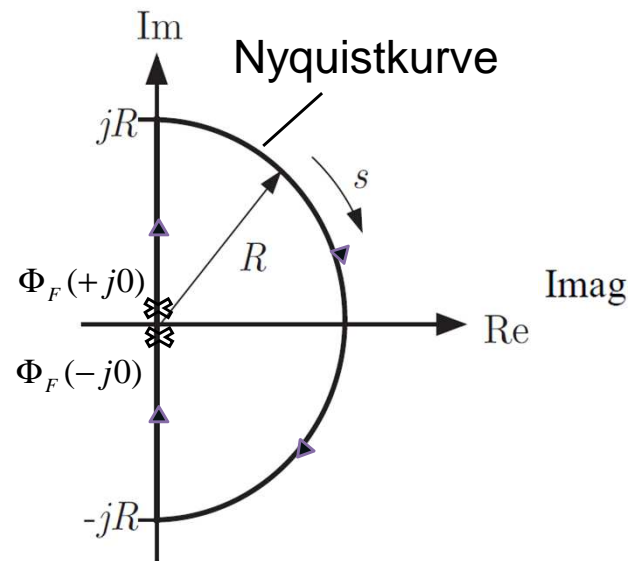
Somit

$$\Phi_F(s) = \sum_{i=1}^n \arg \Phi_{\bar{s}_i} - \sum_{i=1}^n \arg \Phi_{s_i}$$

# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

### Anwendung auf Nyquistkurve



**Def.:**  $\Delta \arg F(s) = \Phi_F(-j0) - \Phi_F(+j0)$

Es gilt  $\Delta \arg F(s) = \Delta \Phi_F(s) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg \Phi_{\bar{s}_i} - \sum_{i=1}^n \Delta \arg \Phi_{s_i} = (\cancel{n_{\bar{s}_i}^+} - n_{s_i}^+) 2\pi$

Forderung nach Stabilität des geschlossenen Kreises mit  $n_{\bar{s}_i}^+ = 0$

# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

**Satz 8.8** *Eine offene Kette mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis, wenn*

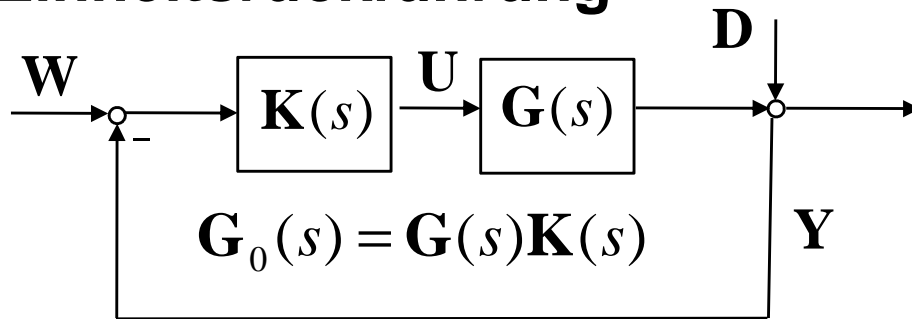
$$\Delta \arg F(s) = -2n^+ \pi$$

*gilt, d. h., wenn die Abbildung  $F(s) = 1 + G_0(s)$  der Nyquistkurve den Ursprung der komplexen Ebene  $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet  $n^+$  die Zahl der Pole von  $G_0(s)$  mit positivem Realteil.*

# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme

### Einheitsrückführung



# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Determinante der Rückführdifferenzmatrix

Betrachtet wird ein zusammengefasstes System mit Einheitsrückführung

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_0(t) \quad \mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{D}_0 \mathbf{u}_0(t)$$

$$\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}_0(t)$$

Charakteristische Gleichung der offenen Kette ( $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{0}$ )

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) = 0$$

Charakteristische Gleichung der geschlossenen Kette

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{C}_0)$$

$$\begin{aligned} & \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{C}_0) \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \det(\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{B}_0(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{C}_0) \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \det(\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{B}_0(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{C}_0) \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \det(\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{C}_0(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{B}_0) \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1} \det((\mathbf{I} + \mathbf{D}_0) + \mathbf{C}_0(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)^{-1}\mathbf{B}_0) \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1} \det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{F}(s) &= \det(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0) \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0)^{-1}\mathbf{C}_0)}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0)} \\ &= k \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \end{aligned}$$



# Stabilität von MIMO-Regelkreisen

## Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme

- Die offene Kette ist nicht sprungfähig, d.h.  
 $\mathbf{D}_0 = 0$
- Die offene Kette hat keine Pole auf der Imaginärachse

### Satz 4.2 (Verallgemeinertes Nyquistkriterium)

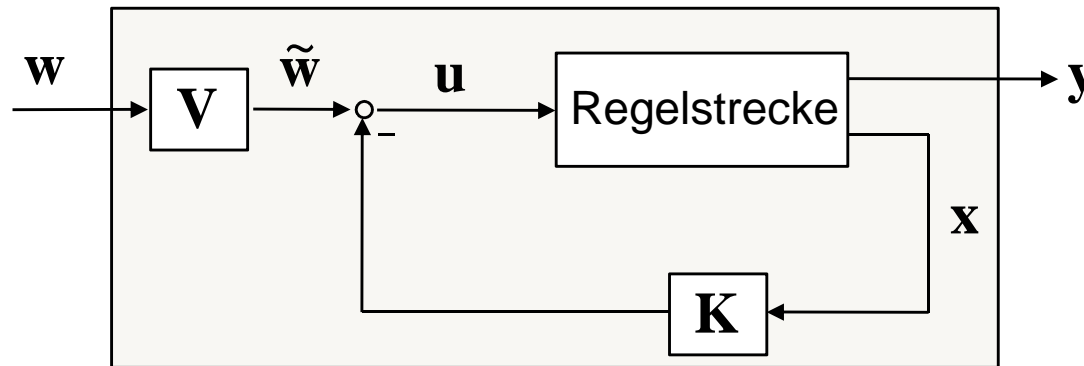
*Eine offene Kette mit der Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{G}_0(s)$  führt genau dann auf einen stabilen Regelkreis, wenn*

$$\Delta \arg \det \mathbf{F}(s) = -2n^+ \pi$$

*gilt, d. h., wenn die Abbildung  $\det \mathbf{F}(s) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0(s))$  der Nyquistkurve den Ursprung der komplexen Ebene  $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet  $n^+$  die Zahl der Pole von  $\mathbf{G}_0(s)$  mit positivem Realteil.*

# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## Sollwertfolge und Störunterdrückung



Die Forderung nach Sollwertfolge und Störunterdrückung bedeutet, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - y(t)) = \mathbf{0}$$

# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## Sollwertfolge und Störunterdrückung

Mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{w}}(t)$$

folgt für das stationäre (statische) Verhalten

# **Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen**

## **Vorfilter zur Sicherung der Sollwertfolge**

# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## Anmerkungen zur Verwendung des Vorfilters

- Für  $d(t) \neq 0$  ergibt sich weiterhin eine bleibende Regelabweichung  
(Ausnahme: impulsförmige Störung klingt bei stabilem RK ab)
- Regelkreis mit Vorfilter ist nicht robust gegenüber Änderungen im Streckenverhalten.

# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## Störgrößenaufschaltung

Für

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{d}(t)$$

erhält man

Die Störung wird unterdrückt, falls

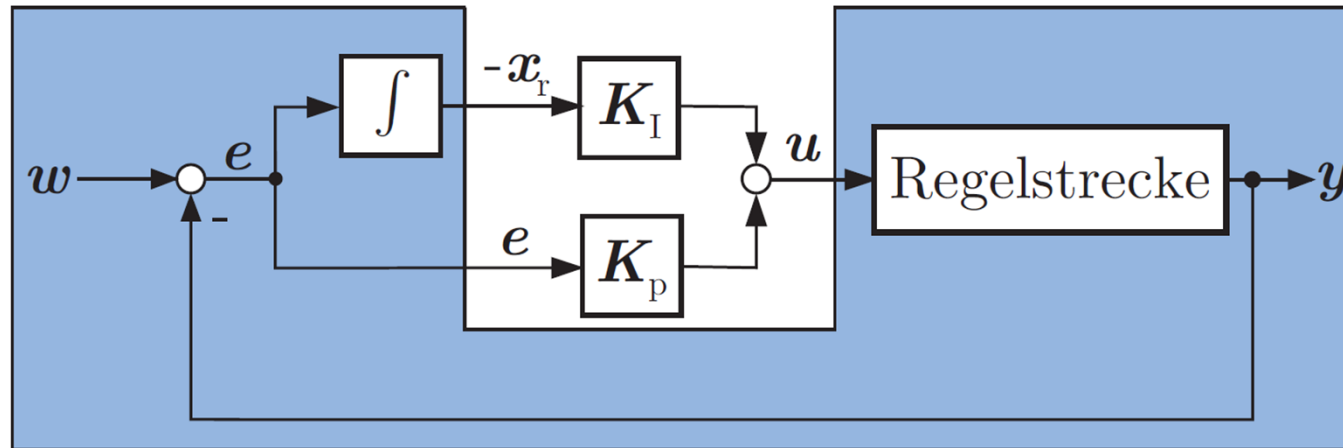
# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## Anmerkungen zur Störgrößenaufschaltung

- Für die Realisierung einer Störgrößenaufschaltung muss die Störung  $\mathbf{d}(t)$  bekannt sein.
  - Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung ist nicht robust gegenüber Änderungen im Streckenverhalten.
- => Häufig Kombination mit Regler, der die verbleibende Wirkung der Störung auf die Regelstrecke beseitigt.

# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## PI-Mehrgrößenregler



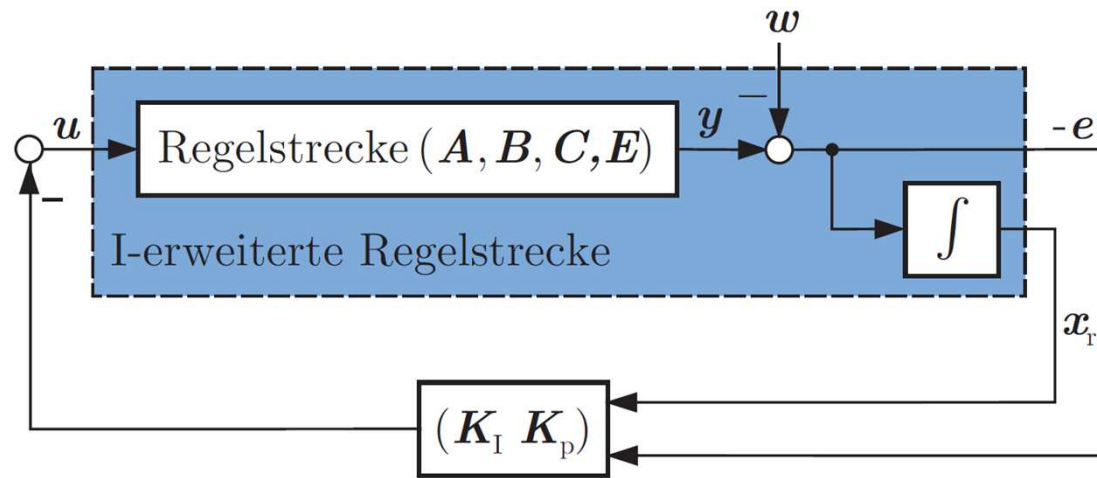
➤  $r$  Integratoren sichern auf den Signalwegen  
 $w_i(t) \mapsto y_i(t) \quad (i = 1, \dots, r)$  Sollwertfolge

=> Ein stabiler Regelkreis mit PI-Regler erfüllt für beliebige sprungförmige Führungs- und Störungssignale die Forderung nach Sollwertfolge und ist robust gegenüber Modellunsicherheiten.



# Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

## Mehrgrößenregelkreis mit I-erweiterter Strecke



Zustandsgleichung der I-erweiterten Strecke

# **Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**