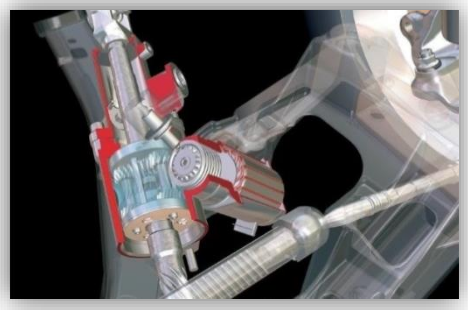



Fahrzeugmechatronik II (Übung): Grundlagen

Andreas Hartmann, M. Sc.

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

Organisatorisch

- **Andreas Hartmann, M. Sc.**
  Geb. TIB13, Raum 346A
  Email: andreas.hartmann@campus.tu-berlin.de (vorläufig)
  Tel.: -72990

- **Sprechstunde**:
  Termin per Email oder telefonisch

- **Zeitplan**

- **Konzept der Übung**

- **Gruppen**

Transponierte Matrizen

- Sei $\boldsymbol{A}$ eine n x m Matrix mit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$, gilt für die Transponierte dieser Matrix:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$ $\boldsymbol{A}^T$ ist dabei eine m x n Matrix

→ Um eine Matrix zu transponieren, müssen die Zeilen und Spalten vertauscht werden.

- Es gelten folgende Beziehungen:

$$\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T$$

$$(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$$

- Gilt : $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$ → $\boldsymbol{A}$ ist eine symmetrische Matrix

Adjungierte Matrizen

- Es gilt für die Adjungierte einer Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^* = \overline{(\boldsymbol{A}^T)} = (\overline{\boldsymbol{A}})^T$$

→ Um die Adjungierte einer Matrix $\boldsymbol{A}$ zu berechnen, muss die Matrix $\boldsymbol{A}$ transponiert und anschließend konjugiert werden.

- Es gelten folgende Beziehungen:

$$\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^*$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{A}^*$$

- Gilt : $\boldsymbol{A}^* = \mathbf{A}$ → $\boldsymbol{A}$ ist eine hermitesche Matrix
- Ist $\boldsymbol{A}$ eine reelle Matrix, dann ist die zu $\boldsymbol{A}$ adjungierte Matrix die Transponierte von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$$

- Eigenschaften einer symm. bzw. hermiteschen Matrix:
  1. Diagonalisierbar
  2. Determinante, Eigenwerte und Hauptdiagonale der Matrix sind reell

Inverse einer Matrix

- Es gilt für die Inverse einer Matrix $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}),$$

$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$ = Adjunkte der Matrix $\boldsymbol{A}$ (nicht mit Adjungierte verwechseln!)

= Transponierte der Kofaktormatrix $\widetilde{\boldsymbol{A}}$. → $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \widetilde{\boldsymbol{A}}^T$

- Kofaktormatrix:

$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (-1)^{i+j} \cdot \boldsymbol{M}_{ij}$, $\boldsymbol{M}_{ij}$ ist der Wert der Unterdeterminanten von $\boldsymbol{A}$, die durch Streichen der *i*-ten Zeile und der *j*-ten Spalte entstehen.

- Einfacher Fall (2 x 2 Matrix)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- Es gelten folgende Beziehungen: ($\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ seien dabei reguläre Matrizen)

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

Matrixexponentialfunktion

- Ausgangspunkt:

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2}{2!} t^2 + \cdots$$

- Analog wird eingeführt:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} t^2 + \cdots$$

- Ableitung:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\right) = \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{1!} t + \frac{\boldsymbol{A}^3}{2!} t^2 + \cdots = \boldsymbol{A} \cdot e^{\boldsymbol{A}t}$$

- Es gelten folgende Beziehungen:

$$\left(e^{\boldsymbol{A}t}\right)^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}t}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{-\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}(t-t)} = e^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}$$

Normen von Vektoren und Matrizen

- *p*-Norm
  - Die p-Norm eines reellen oder komplexen Vektors $x = [x_1, \dots, x_n]$ ist definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

  - 1-Norm (p = 1) : sog. Summennorm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

  - 2-Norm (p = 2) : sog. Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

  - ∞-Norm (p = ∞): sog. Maximumsnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Rang einer Matrix

- **Definition:** Der Rang einer Matrix ist die <u>maximale</u> Anzahl der linear <u>unabhängigen</u> Spalten- bzw. Zeilenvektoren einer Matrix.
- **Eigenschaften:**
  - rang($\boldsymbol{A}$) = rang($\boldsymbol{A}^T$)
  - Für eine n x m Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt: $0 \leq$ rang($\boldsymbol{A}$) $\leq min\{n, m\}$
  - Gilt rang($\boldsymbol{A}$) $= min\{n, m\}$ $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang
  - Gilt det$(\boldsymbol{A}) \neq 0$ $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang
- **Rang Ermittlung**
  - Untersuchung linearer Unabhängigkeit der Spalten- bzw. Zeilenvektoren, oder
  - Gauß-Algorithmus: Matrix so umformen, dass alle Elemente unterhalb (bzw. oberhalb) der Hauptdiagonale null sind. Der Rang ist dabei die <u>Anzahl</u> der Zeilenvektoren, die <u>ungleich</u> null sind.

Eigenwerte und -vektoren

- **Definition:** Ein Skalar λ heißt Eigenwert einer quadratischen reellen oder komplexen Matrix $\boldsymbol{A}$, wenn es einen Vektor $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) gibt, so dass die Gleichung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

  erfüllt ist. Der Vektor $\boldsymbol{v}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ.

- **Das charakteristische Polynom:**

$$P(\lambda) = det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$$

- **Berechnung der Eigenwerte:** Die Eigenwerte werden durch die Lösung des charakteristischen Polynoms berechnet:

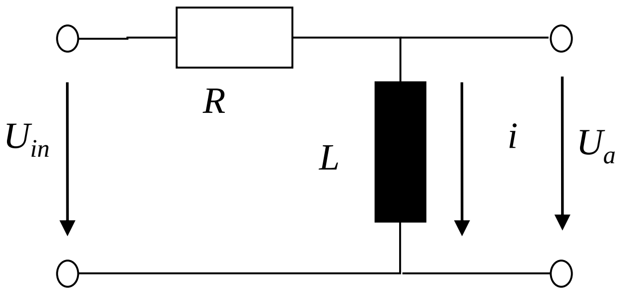
$$det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

- **Berechnung der Eigenvektoren:** Die Eigenvektoren lassen sich durch die Lösung folgender Gleichung

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

  bestimmen.

Lösung einer Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung



- Gegeben ist ein einfacher RL-Kreis, der das Übertragungsverhalten von Eingangsspannung nach Spulenstrom beschreibt:
  - Bestimmen Sie die zugehörige Differentialgleichung. Wie lautet die entsprechende allgemeine homogene und partikuläre Lösung? Wie bezeichnet man ein solches Übertragungsverhalten in der Signalverarbeitung ?
  - Zeigen Sie, dass ein solches Übertragungsverhalten auch für ein Einmasse-Dämpfer-System gültig ist (**Übung** ☺)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!