Fahrzeugmechatronik II

Strukturen und Eigenschaften von Mehrgrößenregelkreisen

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Möglichkeiten der Analyse

1. Liegt eine Zustandsraumbeschreibung vor

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{w}(t) + \overline{\mathbf{E}}\mathbf{d}(t) \quad \overline{\mathbf{x}}(0) = \overline{\mathbf{x}}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t)$$

kann die Zustandsstabilität über die Eigenwerte von $\overline{\mathbf{A}}$ überprüft werden.

2. Liegt eine E/A-Beschreibung vor

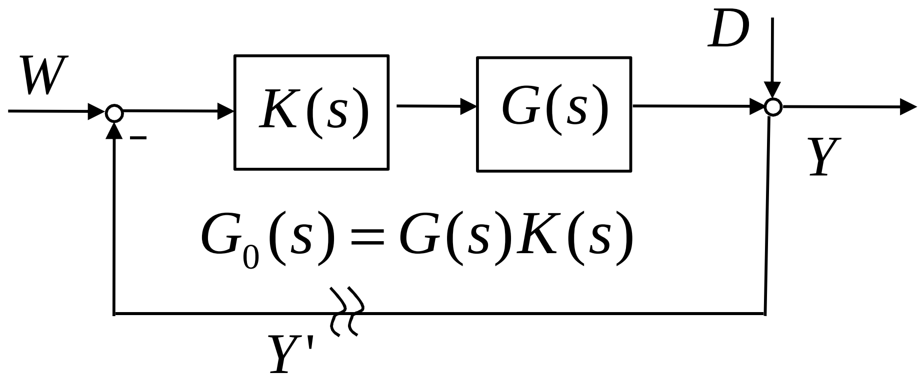
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_w(s)\mathbf{W}(s)$$

kann die E/A-Stabilität über die Pole von $\mathbf{G}_w(s)$ überprüft werden.

3. Nyquist-Kriterium für Überprüfung der E/A-Stabilität

Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

Rückführdifferenzfunktion



$$G_0(s) = G(s)K(s)$$

Eingangs- Ausgangsverhalten

$$Y(s) = G_w(s)W(s) + G_d(s)D(s)$$

mit $$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$$

$$G_d(s) = \frac{1}{1+G_0(s)}$$

$Y = G_0 (W - Y) \Rightarrow Y(1+G_0) = G_0 W$

$Y = -G_0 Y + D \Rightarrow Y(1+G_0) = D$

Außerdem gilt für W=D=0

$$Y(s) = -G(s)K(s)Y'(s) = -G_0(s)Y'(s)$$

Dann gilt für die Rückführdifferenz

$$Y' - Y = \underbrace{(1+G_0(s))}_{}Y'$$

Rückführdifferenzfunktion

$$F(s) = 1 + G_0(s)$$

Die Pole von $G_w(s)$ entsprechenden Nullstellen von $F(s)$.

Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

Interpretation

Mit

$$G_0(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)}$$

folgt

$$F(s) = 1 + \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + Z_0(s)}{N_0(s)}$$

Nullstellen von F(s): Pole des geschlossenen Kreises

Nullstellen von N_0(s): Pole des offenen Kreises

Also gilt

$$F(s) = k\,\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-\bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}$$

$$= |k|\,\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-\bar{s}_i|\,e^{j\Phi\bar{s}_i}}{\prod_{i=1}^{n}|s-s_i|\,e^{j\Phi s_i}}$$

$$= |F(s)|\cdot e^{j\Phi_F(s)}$$

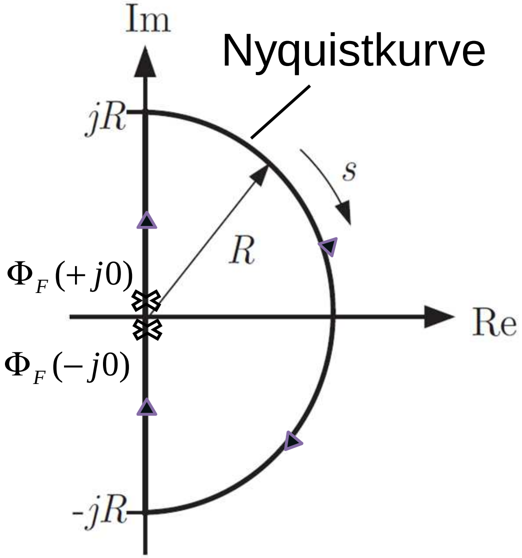
Somit

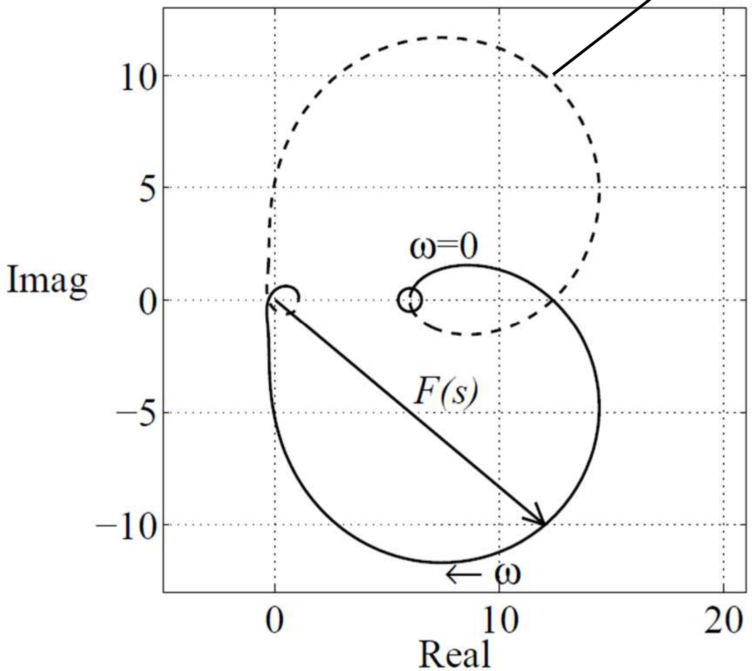
$$\Phi_F(s) = \sum_{i=1}^{n}\arg\Phi_{\bar{s}_i} - \sum_{i=1}^{n}\arg\Phi_{s_i}$$

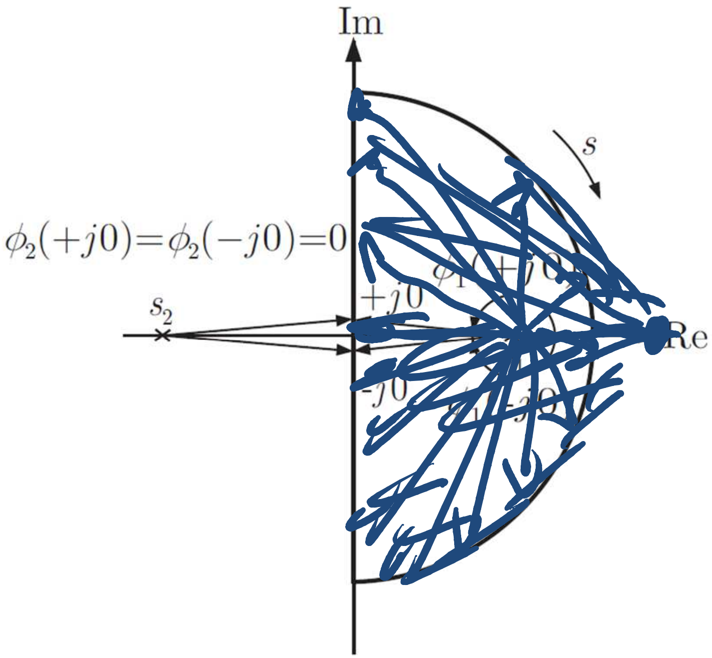
Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

Anwendung auf Nyquistkurve

Ortskurve von F(s)
(Abbildung der Nyquistkurve)







Forderung nach Stabilität des geschlossenen Kreises mit $n^+_{\bar{s}_i} = 0$

Def.: $\Delta \arg F(s) = \Phi_F(-j0) - \Phi_F(+j0)$

Es gilt $\Delta \arg F(s) = \Delta\Phi_F(s) = \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg \Phi \bar{s}_i - \sum_{i=1}^{n} \Delta \arg \Phi_{s_i} = (\cancel{n^+_{\bar{s}_i}} - n^+_{s_i}) 2\pi$

Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Nyquistkriterium für Eingrößensysteme

Satz 8.8 *Eine offene Kette mit der Übertragungsfunktion $G_0(s)$ führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis, wenn*

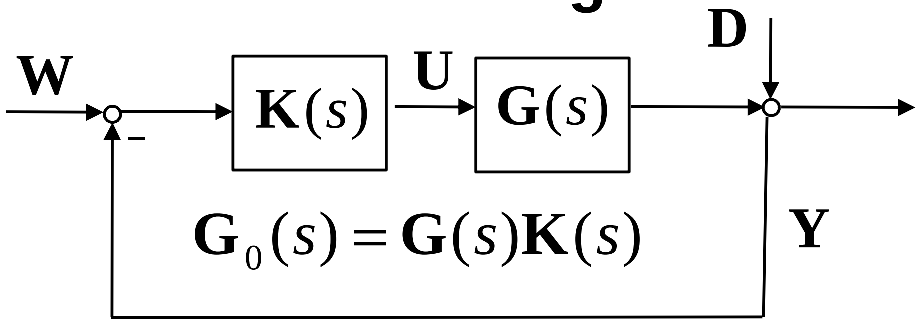
$$\Delta \arg F(s) = -2n^+\pi$$

gilt, d. h., wenn die Abbildung $F(s) = 1 + G_0(s)$ der Nyquistkurve den Ursprung der komplexen Ebene $-n^+$-mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $G_0(s)$ mit positivem Realteil.

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme

Einheitsrückführung



Führungsübertragungsfunktions-matrix $\underline{G}_w(s)$

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}_0(s)\left(\underline{W}(s) - \underline{Y}(s)\right)$$

$$\Rightarrow \underline{Y}(s) = \underbrace{\underbrace{\left[\underline{I} + \underline{G}_0(s)\right]^{-1}}_{\underline{F}(s)} \underline{G}_0(s)}_{\underline{G}_w(s)} \underline{W}(s)$$

Rückführ-differenz-matrix

Die Pole von $\underline{G}_w(s)$ ergeben sich aus den Nullstellen $\bar{s}_i$ der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(\underline{I} + \underline{G}_0(s)\right) = \det \underline{F}(s) = 0$$

Die Forderung nach E/A-Stabilität lautet

$$Re\{\hat{s}_i\} < 0$$

Hsu-Chen-Theorem

Es lässt sich zeigen, dass gilt

$$\det \underline{F}(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{n} (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s - s_i)}$$

Stabilität von MIMO-Regelkreisen

Determinante der Rückführdifferenzmatrix

Betrachtet wird ein zusammengefasstes System mit Einheitsrückführung

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{B}_0\mathbf{u}_0(t) \qquad \mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}_0\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{D}_0\mathbf{u}_0(t)$$

$$\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}_0(t)$$

Charakteristische Gleichung der offenen Kette ($\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{0}$)

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right) = 0$$

Charakteristische Gleichung der geschlossenen Kette

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\mathbf{C}_0\right)$$

$$\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\mathbf{C}_0\right)$$

$$= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)\left(\mathbf{I} + \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\mathbf{C}_0\right)$$

$$= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)\det\left(\mathbf{I} + \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)^{-1}\mathbf{B}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\mathbf{C}_0\right)$$

$$= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)\det\left(\mathbf{I} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\mathbf{C}_0\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)^{-1}\mathbf{B}_0\right)$$

$$= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\det\left(\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right) + \mathbf{C}_0\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)^{-1}\mathbf{B}_0\right)$$

$$= \det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\det\left(\mathbf{I} + \mathbf{G}_0\right)$$

$\underline{G}_0$

Hieraus folgt

$$\det\mathbf{F}(s) = \det\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)\frac{\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0\left(\mathbf{I} + \mathbf{D}_0\right)^{-1}\mathbf{C}_0\right)}{\det\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_0\right)}$$

$$= k\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(s - \bar{s}_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s - s_i\right)}$$

Stabilität von MIMO-Regelkreisen
Nyquistkriterium für Mehrgrößensysteme

- Die offene Kette ist nicht sprungfähig, d.h.
  $\mathbf{D}_0 = 0$

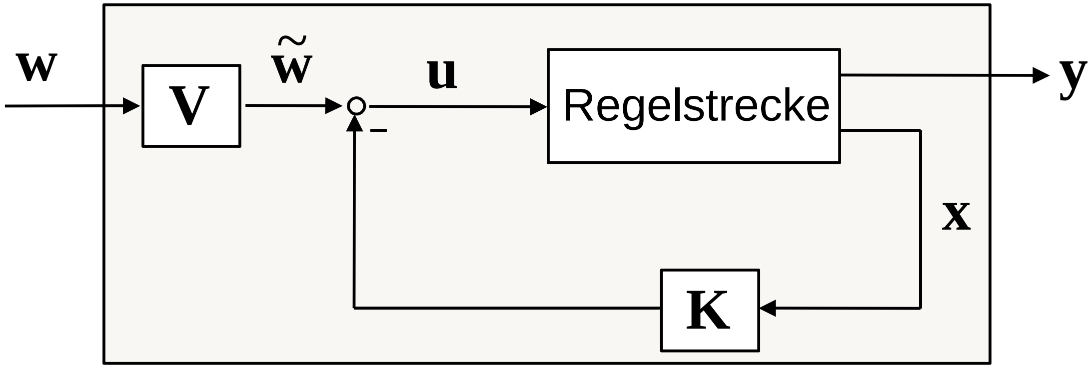
- Die offenen Kette hat keine Pole auf der Imaginärachse

Satz 4.2 *(***Verallgemeinertes Nyquistkriterium***)*
Eine offene Kette mit der Übertragungsfunktionsmatrix $\boldsymbol{G}_0(s)$ führt genau dann auf einen stabilen Regelkreis, wenn

$$\Delta \arg \det \boldsymbol{F}(s) = -2n^+\pi$$

gilt, d. h., wenn die Abbildung $\det \boldsymbol{F}(s) = \det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}_0(s))$ der Nyquistkurve den Ursprung der komplexen Ebene $-n^+$-mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet n^+ die Zahl der Pole von $\boldsymbol{G}_0(s)$ mit positivem Realteil.

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen
Sollwertfolge und Störunterdrückung



Die Forderung nach Sollwertfolge und Störunterdrückung bedeutet, dass

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbf{w}(t)-\mathbf{y}(t)\right)=\mathbf{0}$$

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen
Sollwertfolge und Störunterdrückung

Mit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{w}}(t)$$

folgt für das stationäre (statische) Verhalten

$$\underline{0} = (\underline{A} - \underline{B}\underline{K})\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\tilde{\underline{w}}(t) + \underline{E}\,\underline{d}(t)$$

bzw.

$$\underline{y}(t) = \underbrace{-\underline{C}\,(\underline{A} - \underline{B}\underline{K})^{-1}\underline{B}\,\tilde{\underline{w}}(t)}_{\text{Mit } \tilde{w}(t) = \underline{w}(t) \text{ tritt bleibende Regelabweichung auf}} - \underbrace{\underline{C}\,(\underline{A} - \underline{B}\underline{K})^{-1}\underline{E}\,\underline{d}(t)}_{\text{Störung wird i.A. nicht unterdrückt}}$$

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

Vorfilter zur Sicherung der Sollwertfolge

Für $\underline{d}(t) = \underline{0}$ gilt für die bleibende Regelabweichung mit Vorfilter

$$\underline{e}(\infty) = \underline{w}(\infty) - \underline{y}(\infty) = \left(\underline{I} + \underline{C}\,(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})^{-1}\,\underline{B}\,\underline{V}\right)\underline{w}(\infty)$$

Mit der Forderung $\underline{e}(\infty) \overset{!}{=} \underline{0}$ folgt für $\underline{V}$

$$\underline{V} = -\left(\underline{C}\,(\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})^{-1}\,\underline{B}\right)^{-1}$$

Analog kann $\underline{V}$ auch für Ausgangsrückführungen ermittelt werden.

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen
Anmerkungen zur Verwendung des Vorfilters

- Für $\mathbf{d}(t) \neq \mathbf{0}$ ergibt sich weiterhin eine bleibende Regelabweichung
  (Ausnahme: inpulsförmige Störung klingt bei stabilem RK ab)

- Regelkreis mit Vorfilter ist nicht robust gegenüber Änderungen im Streckenverhalten.

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen
Störgrößenaufschaltung

Für

[n x m]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_d\mathbf{d}(t)$$

erhält man

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})\,\underline{x}(t) + (\underline{E} - \underline{B}\,\underline{K}_d)\,\underline{d}(t)$$

Die Störung wird unterdrückt, falls

$$\underline{B}\,\underline{K}_d = \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{B}^T\underline{B}\,\underline{K}_d = \underline{B}^T\underline{E}$$

$$\text{bzw. } \underline{K}_d = (\underline{B}^T\underline{B})^{-1}\underline{B}^T\underline{E}$$

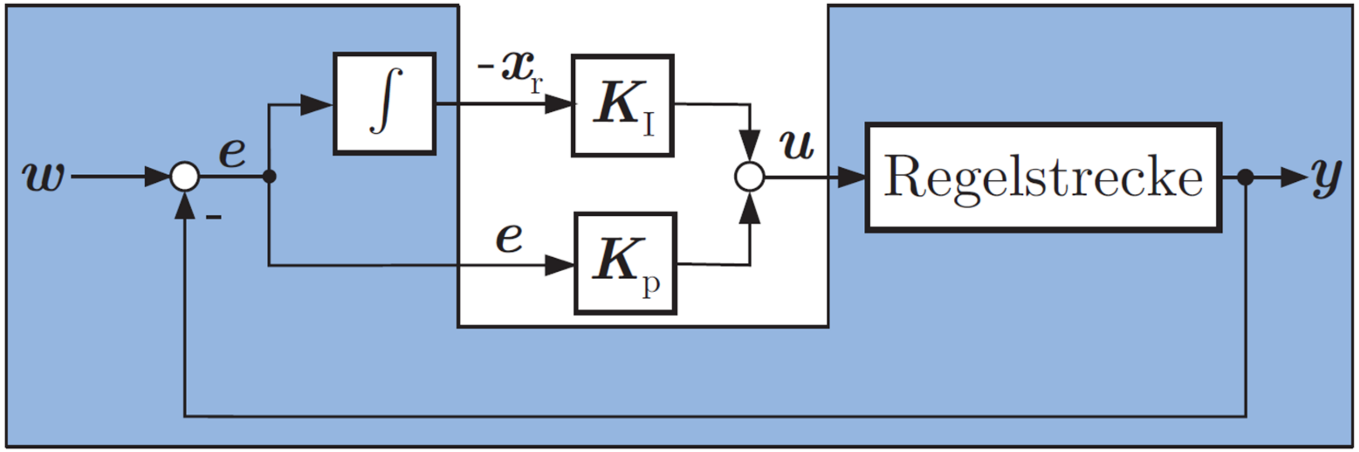
Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen
Anmerkungen zur Störgrößenaufschaltung

- Für die Realisierung einer Störgrößenaufschaltung muss die Störung $\mathbf{d}(t)$ bekannt sein.

- Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung ist nicht robust gegenüber Änderungen im Streckenverhalten.

=> Häufig Kombination mit Regler, der die verbleibende Wirkung der Störung auf die Regelstrecke beseitigt.

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen
PI-Mehrgrößenregler

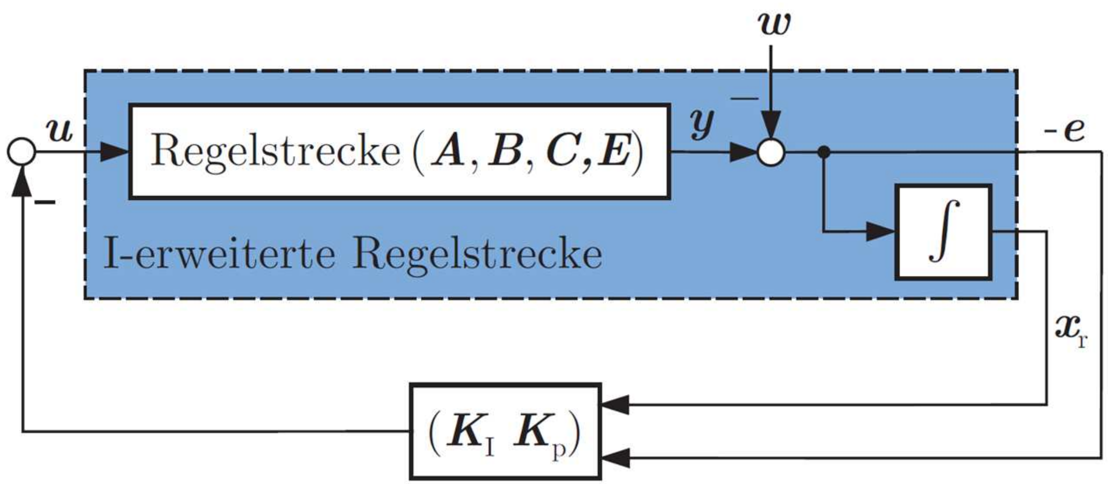


- r Integratoren sichern auf den Signalwegen
  $w_i(t) \mapsto y_i(t) \quad (i = 1,\ldots,r)$ Sollwertfolge

=> Ein stabiler Regelkreis mit PI-Regler erfüllt für beliebige sprungförmige Führungs- und Störungssignale die Forderung nach Sollwertfolge und ist robust gegenüber Modellunsicherheiten.

Stationäres Verhalten von MIMO-Regelkreisen

Mehrgrößenregelkreis mit I-erweiterter Strecke



Es gilt

$$\dot{\underline{x}}_r(t) = -\underline{e}(t) = \underline{y}(t) - \underline{w}(t)$$

und

$$\underline{u}(t) = -\left[\underline{K}_p \ \ \underline{K}_I\right] \begin{bmatrix} -\underline{e}(t) \\ \underline{x}_r(t) \end{bmatrix}$$

Zustandsgleichung der I-erweiterten Strecke

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{x}}_r(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & \underline{0} \\ \hline \underline{C} & \underline{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix} \underline{u}(t) + \begin{bmatrix} \underline{E} \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix} \underline{d}(t) + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \hline -\underline{I} \end{bmatrix} \underline{w}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{C} & \underline{0} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_r(t) \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} -\underline{e}(t) \\ \underline{x}_r(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{C} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{I} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{x}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{I} \\ \hline \underline{0} \end{bmatrix} \underline{w}(t)$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!