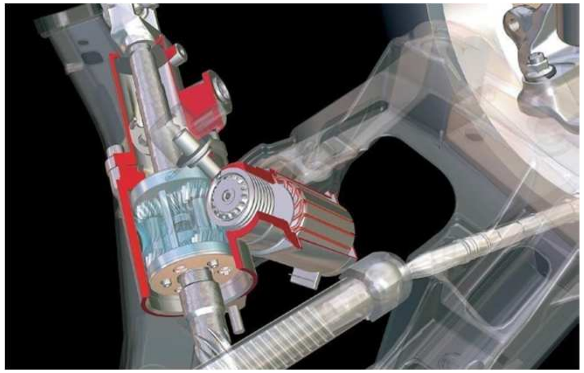
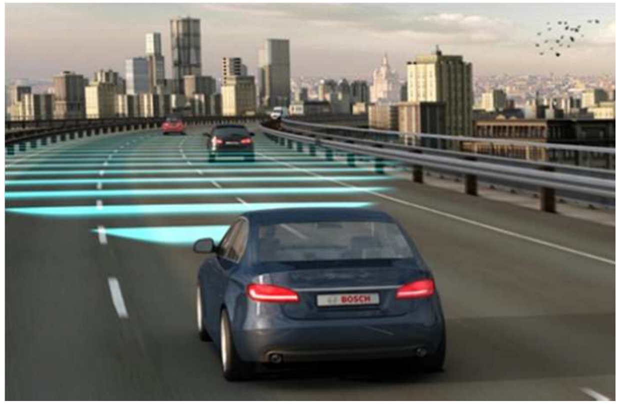
Fahrzeugmechatronik II
Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

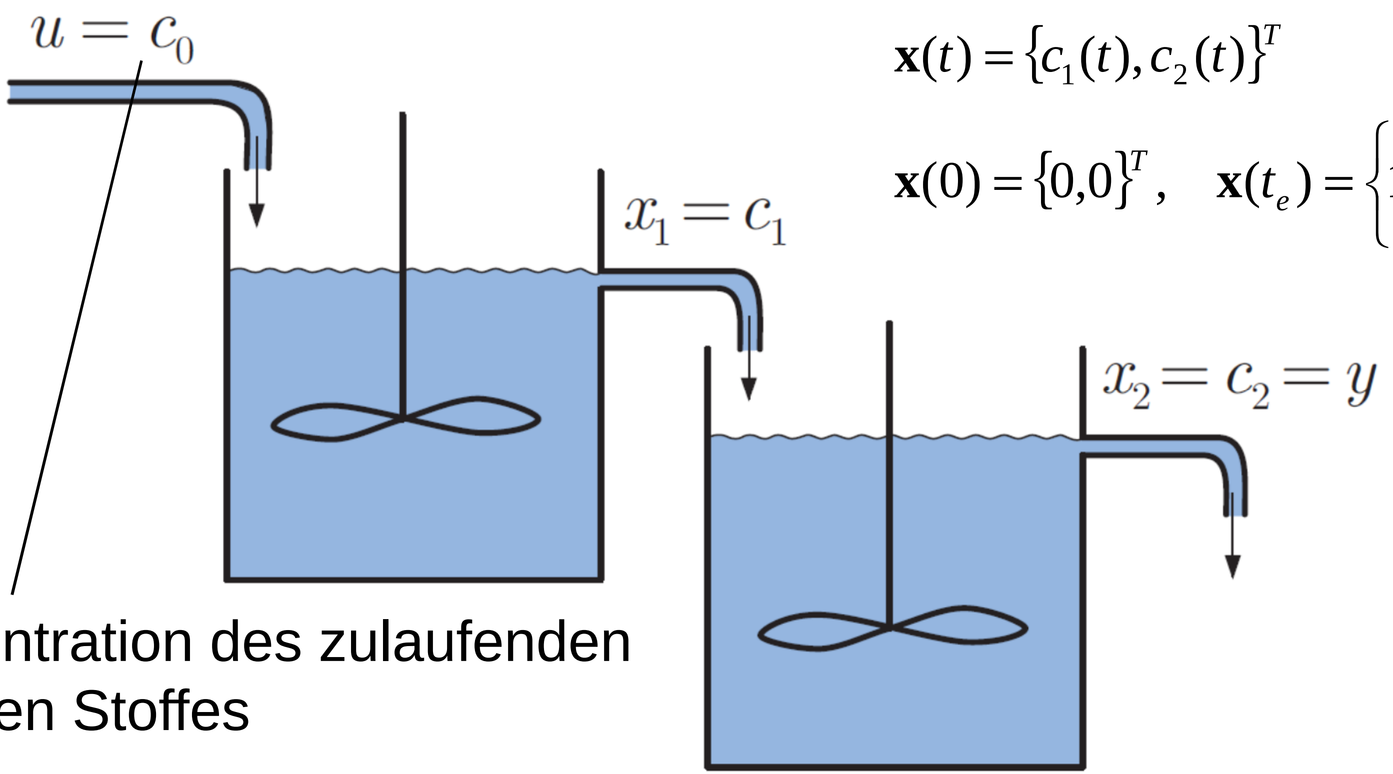

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Einleitung
Motivation

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind **grundlegende Eigenschaften** dynamischer Systeme, die die **Lösbarkeit von Regelungsaufgaben entscheidend beeinflussen**.

Steuerbarkeit
Motivation - Beispiel

Steuerbarkeit gekoppelter Rührkessel



Konzentration des zulaufenden gelösten Stoffes

z.B.

$$\mathbf{x}(t) = \{c_1(t), c_2(t)\}^T$$

$$\mathbf{x}(0) = \{0{,}0\}^T, \quad \mathbf{x}(t_e) = \left\{1\frac{mol}{l}, 5\frac{mol}{l}\right\}^T$$

Steuerbarkeit
Definition

Ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

heißt **vollständig steuerbar**, wenn es in endlicher Zeit t_e von jedem **beliebigen Anfangszustand** $\mathbf{x}_0$ durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ in einen **beliebig vorgegebenen Endzustand** $\mathbf{x}(t_e)$ überführt werden kann.

Steuerbarkeit
Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Satz:
Das System $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_S$ den Rang n hat:

$$\text{Rang}\,\mathbf{S}_S = n \quad mit$$

$$\mathbf{S}_S = \underbrace{\left[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]}_{[n \times n \cdot m]}$$

Hierbei

$$\{\dot{\mathbf{x}}(t)\} = \overset{\leftarrow n \rightarrow}{\left[\mathbf{A}\right]}_{\updownarrow n} \{\mathbf{x}(t)\} + \overset{\leftarrow m \rightarrow}{\left[\mathbf{B}\right]}_{\updownarrow n} \{\mathbf{u}(t)\}_{\updownarrow m}$$

Steuerbarkeit

Steuerbarkeit in den Nullzustand

Vorüberlegungen für den Beweis

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \quad \mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$$

$$\mathbf{x}_e = e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0} + \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \text{bzw.}$$

$$\int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_a = e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann auch gesetzt werden

$\mathbf{x_0} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ (Steuerbarkeit in den Nullzustand)

Steuerbarkeit
Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Beweis für Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Mit $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ergibt sich für die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = -e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x}_0$$

Es muss nun gezeigt werden, dass es eine Steuerung $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ gibt, die diese Gleichung erfüllt.

Umformen ergibt

$$-\underline{x}_0 = \int_0^{t_e} e^{-\underline{A}\tau}\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau = \int_0^{t_e}\left[\underline{I} - \underline{A}\tau + \frac{\underline{A}^2}{2!}\tau^2 - \dots\right]\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$= \underline{B}\underbrace{\int_0^{t_e}\underline{u}(\tau)\,d\tau}_{\underline{u}_0} - \underline{A}\,\underline{B}\underbrace{\int_0^{t_e}\underline{u}(\tau)\,\tau\,d\tau}_{\underline{u}_1} + \underline{A}^2\underline{B}\underbrace{\int_0^{t_e}\underline{u}(\tau)\frac{\tau^2}{2!}\,d\tau}_{\underline{u}_2} + \dots$$

Steuerbarkeit
Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Somit

$$-\underline{x}_0 = \underline{B}\,\underline{u}_0 + \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{u}_1 + \underline{A}^2\underline{B}\,\underline{u}_2 + \dots$$

Cayley-Hamilton-Theorem

$\Rightarrow$ Spalten von $\underline{R}$ linear abh. von Spalten von $\underline{S}_s$

z.B. ergibt sich für $n=4$, $m=2$

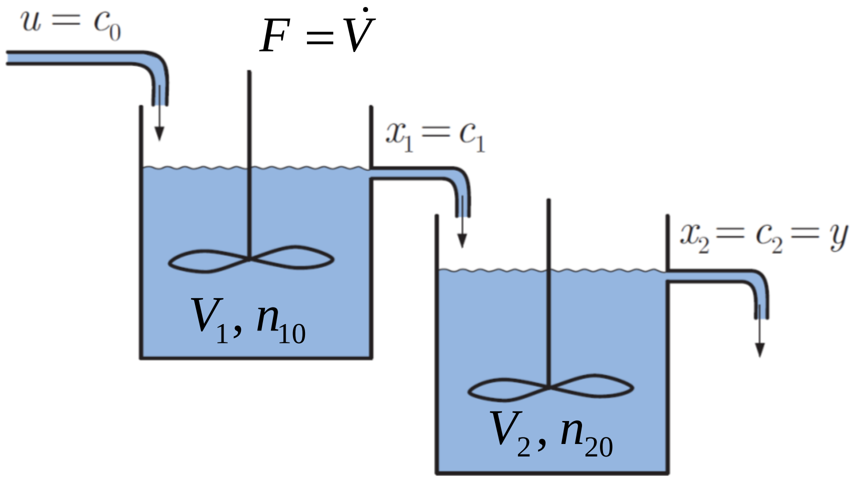
$$\begin{Bmatrix} -x_{01} \\ -x_{02} \\ -x_{03} \\ -x_{04} \end{Bmatrix} = \left[\underline{b}_1 \,\vdots\, \underline{b}_2 \right] \begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{Bmatrix} + \left[\underline{A}\underline{b}_1 \,\vdots\, \underline{A}\underline{b}_2 \right] \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} + \dots = \underline{S}_s \begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \vdots \\ u_{32} \end{Bmatrix} + \underline{R} \begin{Bmatrix} u_{41} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

mit

$$\underline{S}_s = \underbrace{\left[\underline{b}_1 \,\vert\, \underline{b}_2 \,\vert\, \underline{A}\underline{b}_1 \,\vert\, \underline{A}\underline{b}_2 \,\vert\, \underline{A}^2\underline{b}_1 \,\vert\, \underline{A}^2\underline{b}_2 \,\vert\, \underline{A}^3\underline{b}_1 \,\vert\, \underline{A}^3\underline{b}_2 \right]}_{n \cdot m} \Big\} n$$

muss Rang n haben

Steuerbarkeit
Beispiel gekoppelte Rührkessel



$n = 2$ $\qquad$ $m = 1$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\underline{B}} u(t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix}, \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

Steuerbarkeitsmatrix

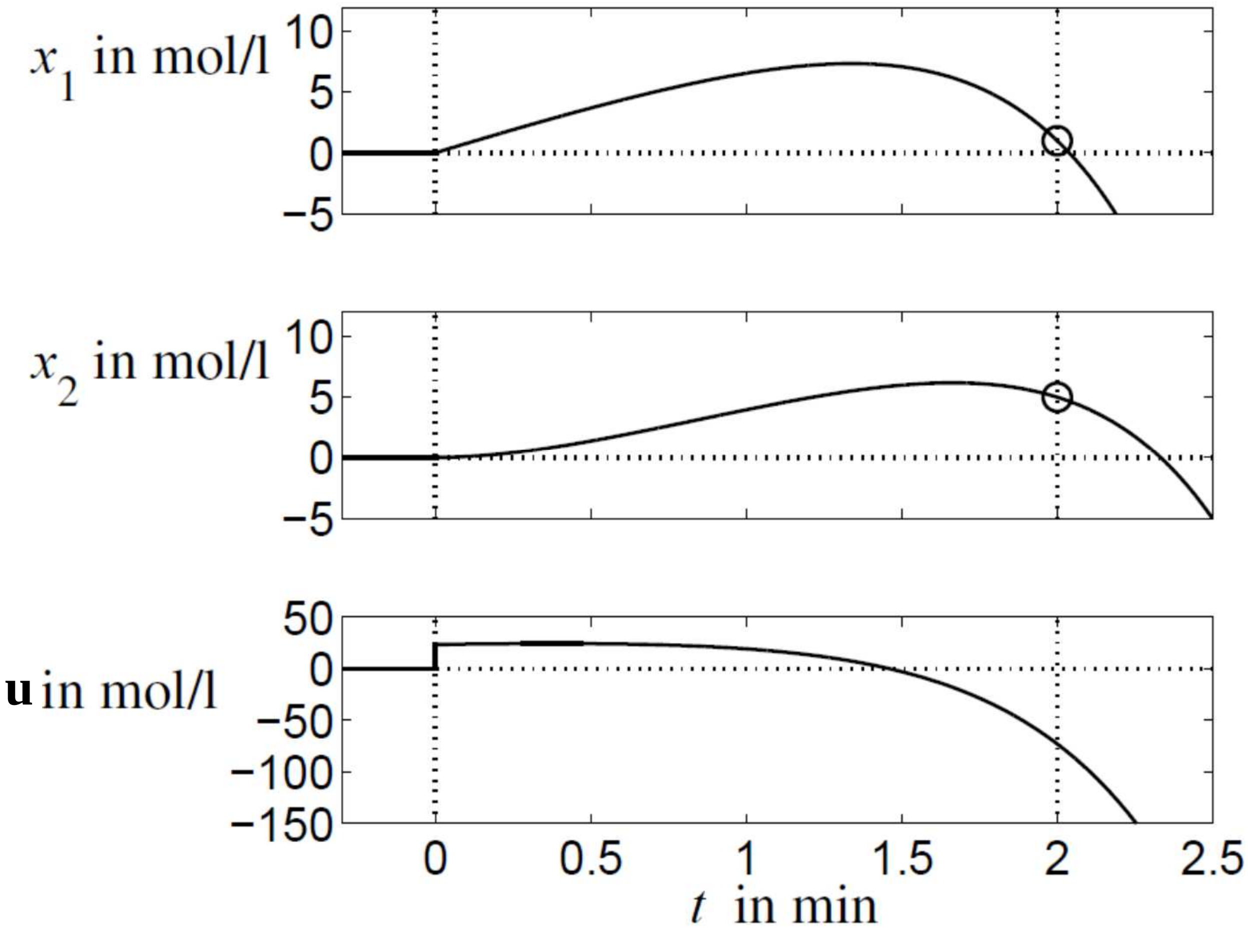
$$\underline{S}_s = \begin{bmatrix} F/V_1 & -F^2/V_1^2 \\ 0 & F^2/V_1V_2 \end{bmatrix}$$

$[2 \times 2]$

$$= [\underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B}]$$

$\Rightarrow \underline{S}_s$ hat Rang $= 2$?

Steuerbarkeit
Beispiel gekoppelte Rührkessel



$$V_1 = 6l$$

$$V_2 = 1l$$

$$F = 2\frac{l}{\min}$$

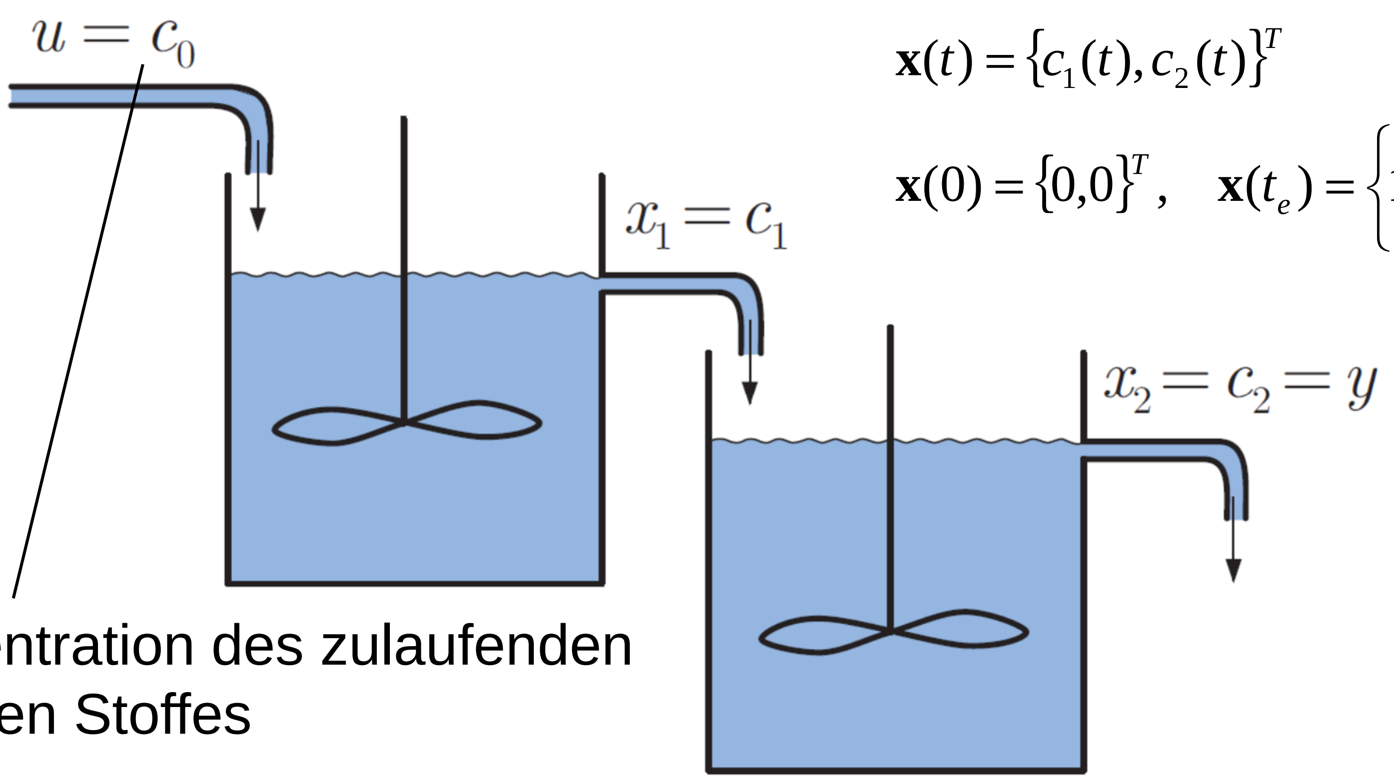
$$\mathbf{x}(t) = \{c_1(t), c_2(t)\}^T$$

$$\mathbf{x}(0) = \{0,0\}^T$$

$$\mathbf{x}(t_e) = \left\{1\frac{mol}{l}, 5\frac{mol}{l}\right\}^T$$

Beobachtbarkeit
Motivation - Beispiel

Beobachtbarkeit gekoppelter Rührkessel



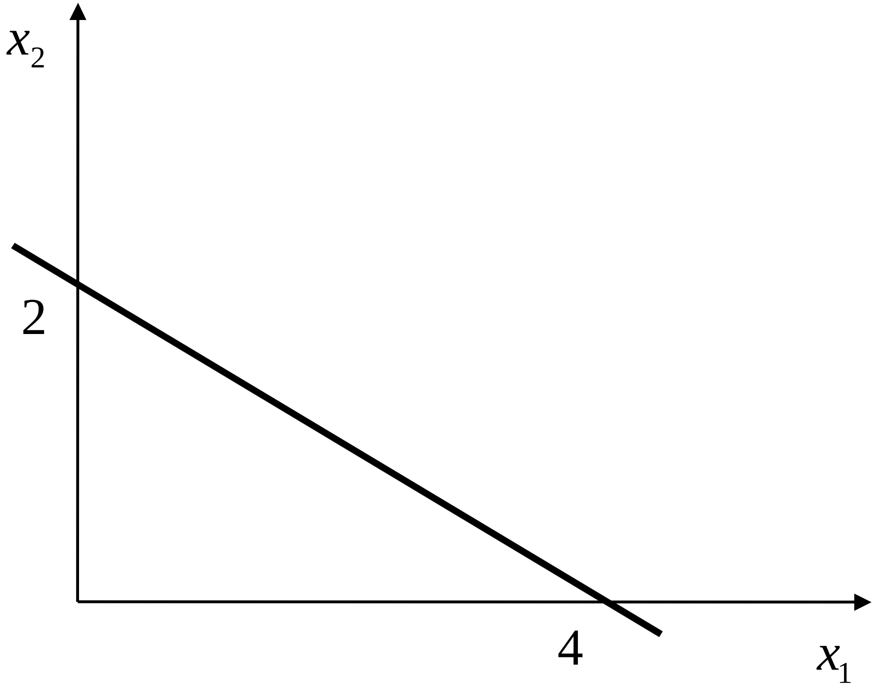
Konzentration des zulaufenden gelösten Stoffes

z.B.

$$\mathbf{x}(t) = \{c_1(t), c_2(t)\}^T$$

$$\mathbf{x}(0) = \{0{,}0\}^T, \quad \mathbf{x}(t_e) = \left\{1\frac{mol}{l}, 5\frac{mol}{l}\right\}^T$$

Beobachtbarkeit
Problemstellung



Beispiel:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 8$$

$$= 2x_1(t) + 4x_2(t)$$

Beobachtbarkeit
Definition

Ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

heißt **vollständig beobachtbar**, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus dem über einem endlichen Intervall $[0, t_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$ bestimmt werden kann.

Dann kann über

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,dt$$

auch jeder Zustand $\underline{x}(t)$ ermittelt werden.

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Satz:
Das System $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$ den Rang *n* hat:

$$\mathrm{Rang}\,\mathbf{S}_B = n \quad mit$$

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$[m \times n]$

Hierbei

$$m\ \left\{ \mathbf{y}(t) \right\} = \begin{array}{c} \leftarrow n \rightarrow \\ m \begin{bmatrix} \quad \mathbf{C} \quad \end{bmatrix} \end{array} \left\{ \mathbf{x}(t) \right\}\ n$$

Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeit des ungestörten Systems

Vorüberlegungen für den Beweis

Die Lösung der Bewegungsgleichung des Systems lautet

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0} + \int_0^{t_e} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Wenn gezeigt wird, dass $\underline{x}_0$ aus $\underline{y}_{frei}$

$\underline{y}_{frei} = \underline{C}\, e^{\underline{A}t_e} \underline{x}_0$

ermittelt werden kann, kann $\underline{x}_0$ wegen

$\underline{y}_{frei}(t) = \underline{y}_{gem}(t) - \int_0^{t_e} \underline{C}\, e^{\underline{A}(t_e-\tau)} \underline{B}\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$

auch aus $y_{gem}(t)$ ermittelt werden.

Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeit des ungestörten Systems

Vorüberlegungen für den Beweis

Für den Nachweis der Beobachtbarkeit ist es somit ausreichend, das freie System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

zu betrachten.

Ist das freie System beobachtbar, ist auch das gestörte System beobachtbar.

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Beweis:

Das Beobachtbarkeitsproblem ist gelöst, falls

$$\mathbf{y}_{frei}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0}$$

nach $\mathbf{x}_0$ auflösbar ist.

Problem

$$\begin{bmatrix} y_{1\,frei}(t_i) \\ y_{2\,frei}(t_i) \\ \vdots \\ y_{r\,frei}(t_i) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{C}_i \\ [r,n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\underline{A}t_i} \\ [n,n] \end{bmatrix}}^{[r,n]} \overset{[n,1]}{\begin{bmatrix} \underline{x}_0 \end{bmatrix}}$$

Da $r < n$, ist Rang $(\underline{C}_i\, e^{\underline{A}t_i}) < n \Rightarrow$ GLS nicht nach $\underline{x}_0$ lösbar

Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Nach Cayley-Hamilton bringen mehr Glieder der Reihe keinen lin. unabh. Vektoren

$$\left[I + A t_1 + \frac{A^2}{2!} t_1^2 + \dots \right]$$

Für **einen** Ausgang $y_{frei}(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x_0}$ ergibt sich für unterschiedliche Messzeitpunkte

$$\begin{bmatrix} y_{frei}(t_1) \\ y_{frei}(t_2) \\ \vdots \\ y_{frei}(t_n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}^T e^{\underline{A} t_1} \\ \underline{c}^T e^{\underline{A} t_2} \\ \vdots \\ \underline{c}^T e^{\underline{A} t_n} \end{bmatrix}}_{[n,n]} \underline{x}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0(t_1)\underline{c}^T + c_1(t_1)\underline{c}^T\underline{A} + \dots + c_{n-1}(t_1)\underline{c}^T\underline{A}^{n-1} + \dots \\ \hline c_0(t_2)\underline{c}^T + c_1(t_2)\underline{c}^T\underline{A} + \dots + \dots \\ \hline \text{bestehen Linearkombinationen} \\ \text{von } \underline{c}^T, \underline{c}^T\underline{A}, \underline{c}^T\underline{A}^2, \dots \end{bmatrix}}_{\underline{M}\,[n,n]} \underline{x}_0$$

Damit alle n Zeilen lin. unabh., müssen die n Zeilenvektoren $\underline{c}^T, \underline{c}^T\underline{A}, \underline{c}^T\underline{A}^2, \dots, \underline{c}^T\underline{A}^{n-1}$ lin. unabh. sein. Also: Rang $\underline{S}_B = n$

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Für r Ausgänge $\mathbf{y}_{frei}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0}$ ergibt sich für unterschiedliche Messzeitpunkte (z.B. r=2)

$$\begin{Bmatrix} y_{frei,1}(t_1) \\ y_{frei,2}(t_1) \\ y_{frei,1}(t_2) \\ y_{frei,2}(t_2) \\ \hline y_{frei,1}(t_n) \\ y_{frei,2}(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_2} \\ \hline \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_n} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

$$\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T e^{\underline{A}t_1} \\ \underline{c}_2^T e^{\underline{A}t_1} \end{bmatrix}$$

$M \; [r \cdot n, n]$

Ermittlung von $\underline{x}_0$

Mit $[r \cdot n, n]$

$\underline{y} = \underline{M} \, \underline{x}_0$

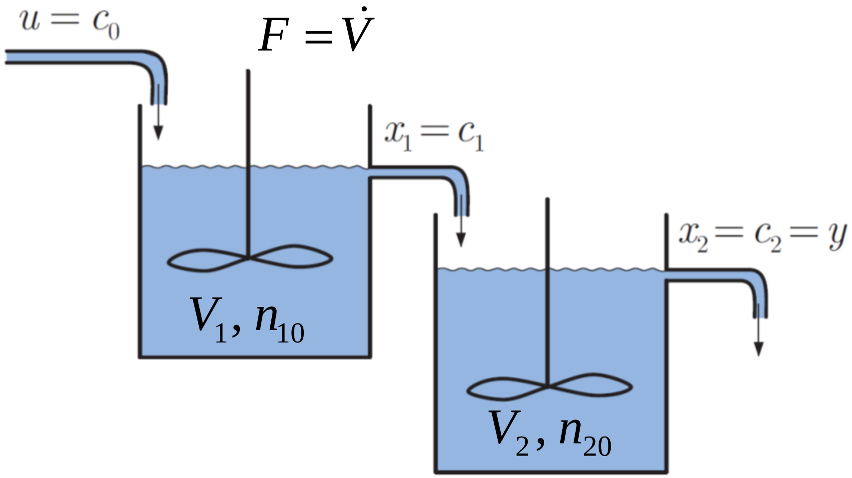
folgt $[n \times n]$

$\underline{M}^T \underline{y} = \underbrace{\underline{M}^T \underline{M}} \, \underline{x}_0$

$\underline{x}_0 = (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T \underline{y}$

Analog zu $r=1$ muss Rang $\underline{M} = n$ und somit Rang $\underline{S}_B = n$

Beobachtbarkeit
Beispiel gekoppelte Rührkessel



$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{F}{V_1} & 0 \\ \dfrac{F}{V_2} & -\dfrac{F}{V_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{F}{V_1} \\ 0 \end{Bmatrix} u(t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix}, \quad y(t) = [0 \quad 1] \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

Es gilt

$$\underline{S_B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline F/V_2 & -F/V_2 \end{array}\right]$$

Rang $\underline{S}_B = 2$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!