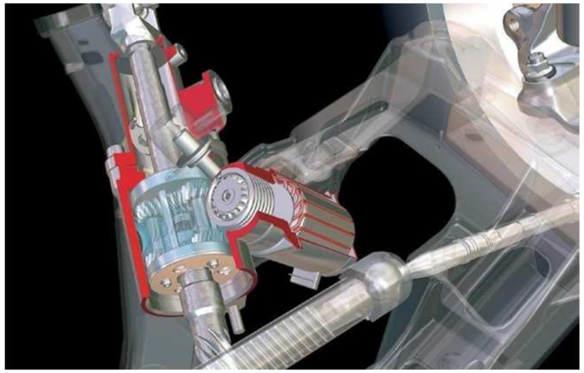
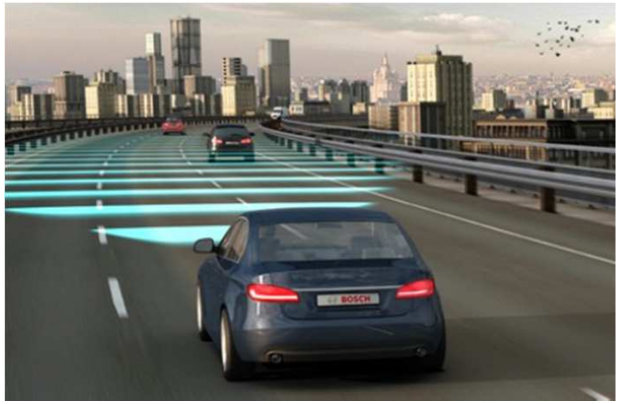
Fahrzeugmechatronik II
Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

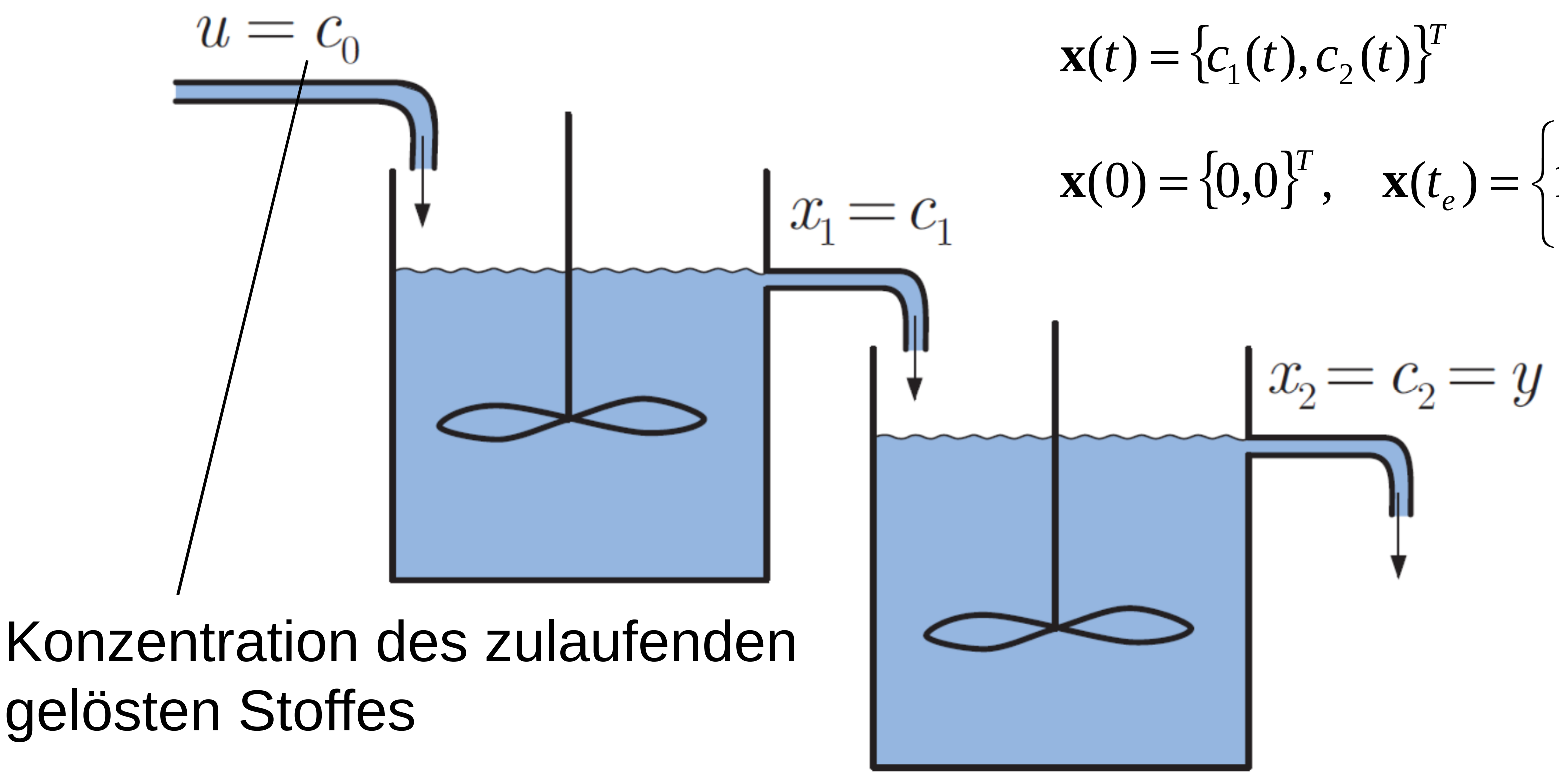

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Einleitung
Motivation

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind **grundlegende Eigenschaften** dynamischer Systeme, die die **Lösbarkeit von Regelungsaufgaben entscheidend beeinflussen**.

Steuerbarkeit
Motivation - Beispiel

Steuerbarkeit gekoppelter Rührkessel



z.B.

$$\mathbf{x}(t) = \{c_1(t), c_2(t)\}^T$$

$$\mathbf{x}(0) = \{0{,}0\}^T, \quad \mathbf{x}(t_e) = \left\{1\frac{mol}{l}, 5\frac{mol}{l}\right\}^T$$

Steuerbarkeit
Definition

Ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

heißt **vollständig steuerbar**, wenn es in endlicher Zeit t_e von jedem **beliebigen Anfangszustand** $\mathbf{x}_0$ durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ in einen **beliebig vorgegebenen Endzustand** $\mathbf{x}(t_e)$ überführt werden kann.

Steuerbarkeit
Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Satz:
Das System $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_S$ den Rang *n* hat:

$$\text{Rang}\,\mathbf{S}_S = n \quad mit$$
$$\mathbf{S}_S = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

Hierbei

$$\left\{\dot{\mathbf{x}}(t)\right\} = \left[\quad \mathbf{A} \quad\right]\left\{\mathbf{x}(t)\right\} + \left[\quad \mathbf{B} \quad\right]\left\{\mathbf{u}(t)\right\}$$

Steuerbarkeit

Steuerbarkeit in den Nullzustand

Vorüberlegungen für den Beweis

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}, \quad \mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$$

$$\mathbf{x}_e = e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0} + \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad \text{bzw.}$$

$$\int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_a = e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann auch gesetzt werden

$\mathbf{x_0} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ (Steuerbarkeit in den Nullzustand)

Steuerbarkeit
Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Beweis für Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Mit $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ergibt sich für die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau = -e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0}$$

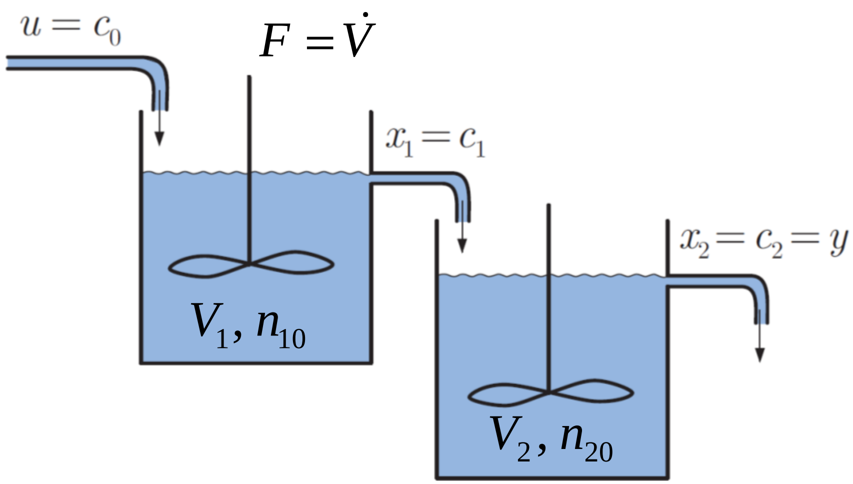
Es muss nun gezeigt werden, dass es eine Steuerung $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ gibt, die diese Gleichung erfüllt.

Steuerbarkeit

Steuerbarkeitskriterium von Kalman

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

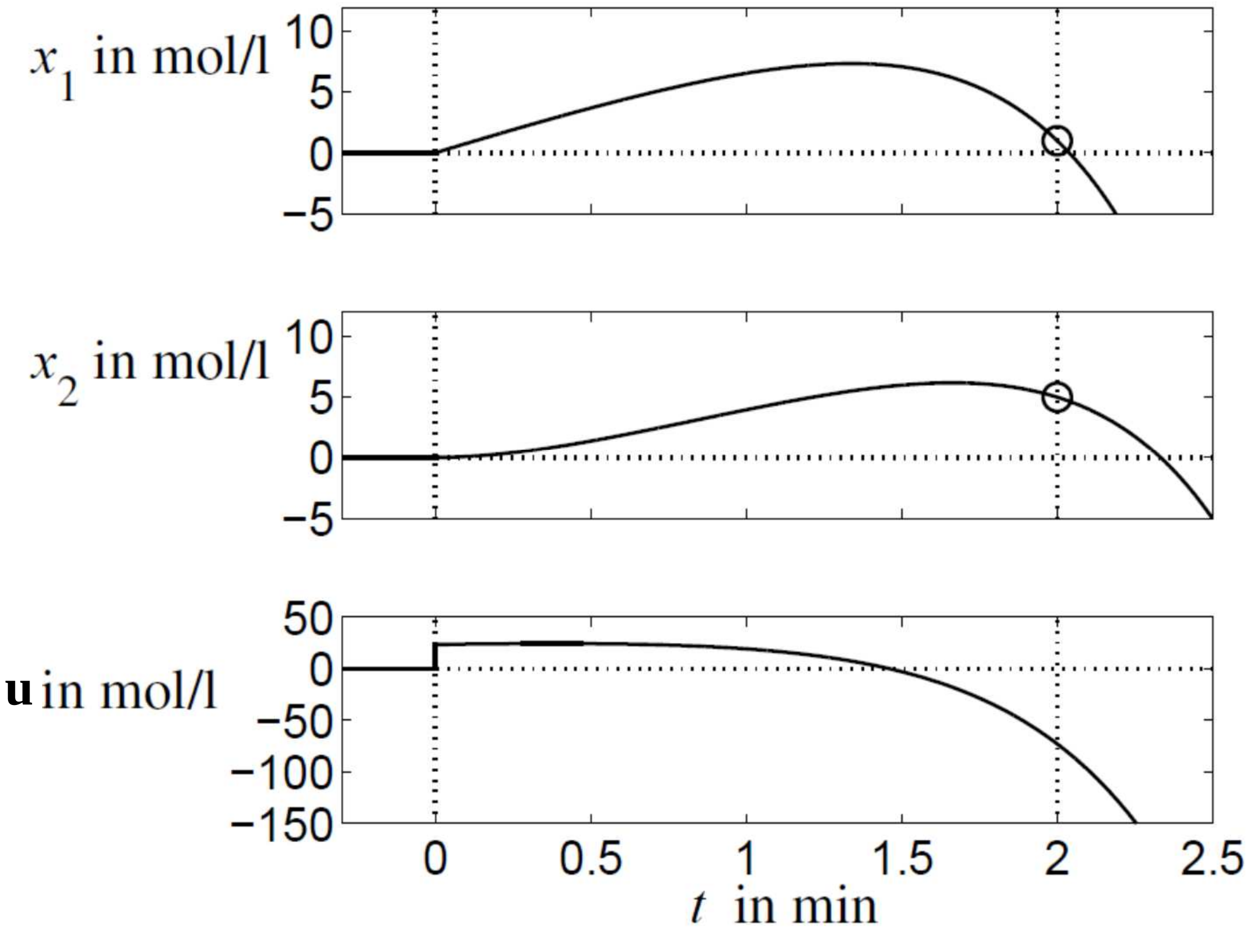
Steuerbarkeit
Beispiel gekoppelte Rührkessel



$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{Bmatrix} u(t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

Steuerbarkeit
Beispiel gekoppelte Rührkessel

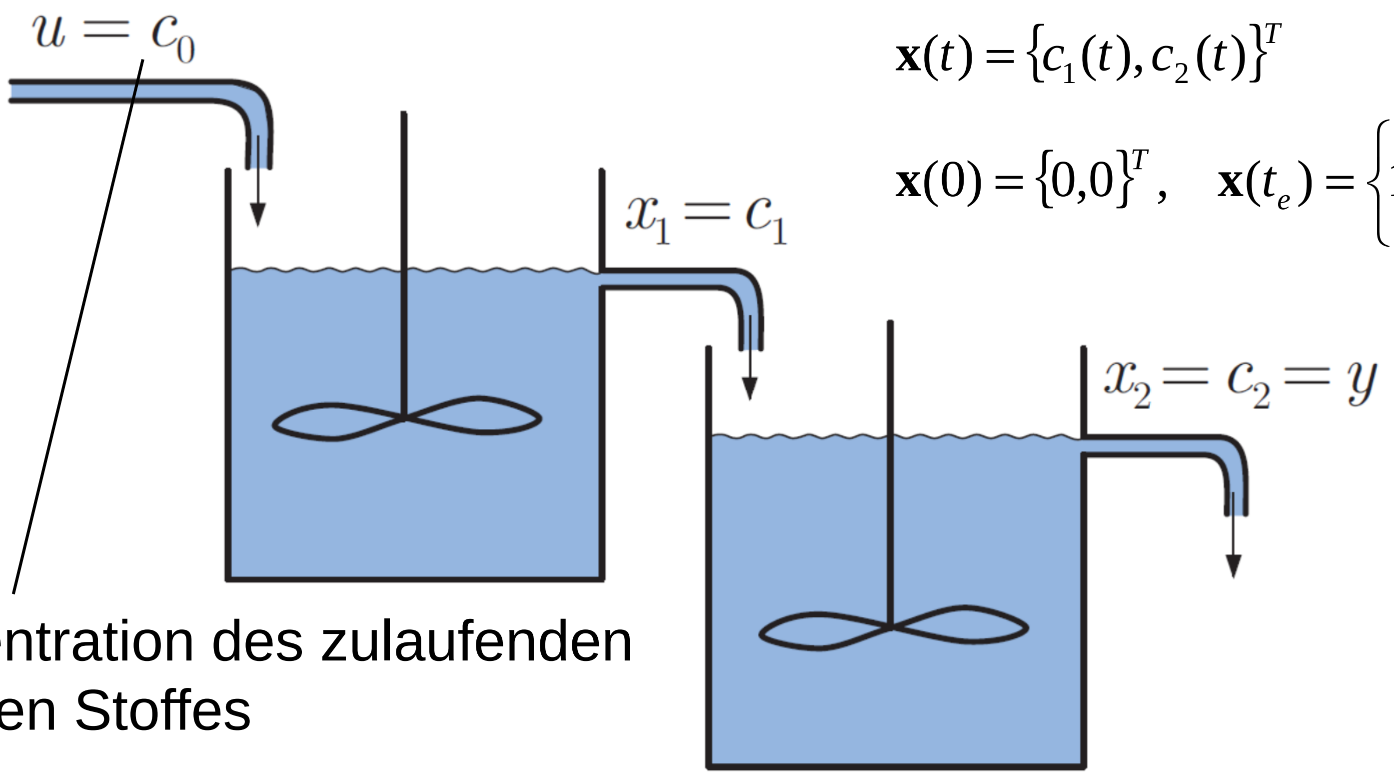


$$V_1 = 6l$$
$$V_2 = 1l$$
$$F = 2\frac{l}{\min}$$

$$\mathbf{x}(t) = \{c_1(t), c_2(t)\}^T$$
$$\mathbf{x}(0) = \{0,0\}^T$$
$$\mathbf{x}(t_e) = \left\{1\frac{mol}{l}, 5\frac{mol}{l}\right\}^T$$

Beobachtbarkeit
Motivation - Beispiel

Beobachtbarkeit gekoppelter Rührkessel



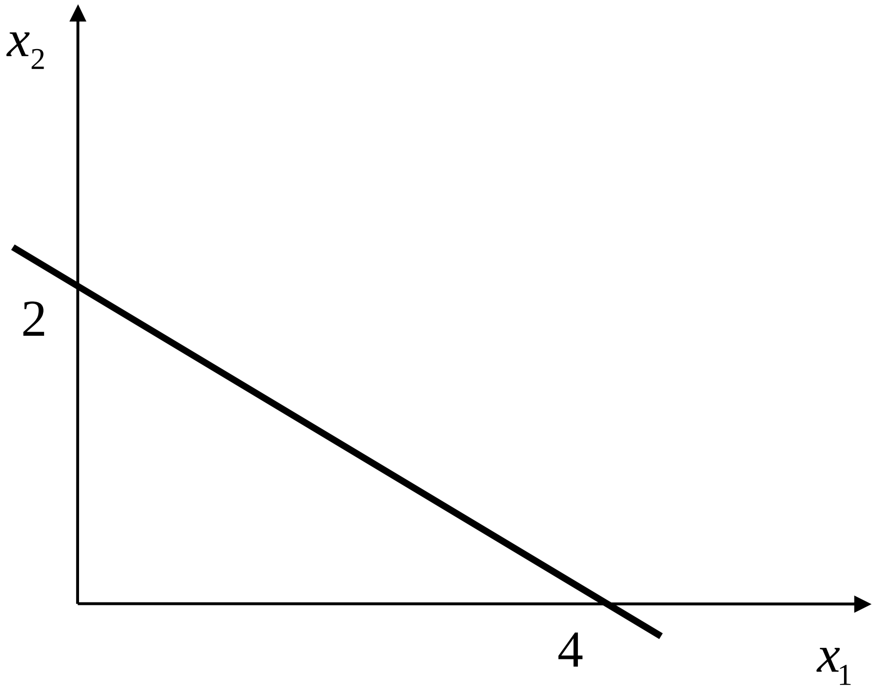
Konzentration des zulaufenden gelösten Stoffes

z.B.

$$\mathbf{x}(t) = \{c_1(t), c_2(t)\}^T$$

$$\mathbf{x}(0) = \{0,0\}^T, \quad \mathbf{x}(t_e) = \left\{1\frac{mol}{l}, 5\frac{mol}{l}\right\}^T$$

Beobachtbarkeit
Problemstellung



Beispiel:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 8$$

Beobachtbarkeit
Definition

Ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

heißt **vollständig beobachtbar**, wenn der Anfangszustand $\mathbf{x}_0$ aus dem über einem endlichen Intervall $[0, t_e]$ bekannten Verlauf der Eingangsgröße $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ und der Ausgangsgröße $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$ bestimmt werden kann.

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Satz:
Das System $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$ den Rang *n* hat:

$$\text{Rang}\,\mathbf{S}_B = n \quad mit$$

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \ldots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Hierbei

$$\left\{ \mathbf{y}(t) \right\} = \left[\quad \mathbf{C} \quad \right] \left\{ \mathbf{x}(t) \right\}$$

Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeit des ungestörten Systems

Vorüberlegungen für den Beweis

Die Lösung der Bewegungsgleichung des Systems lautet

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_e}\mathbf{x_0} + \int_0^{t_e} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t_e-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeit des ungestörten Systems

Vorüberlegungen für den Beweis

Für den Nachweis der Beobachtbarkeit ist es somit ausreichend, das freie System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

zu betrachten.

Ist das freie System beobachtbar, ist auch das gestörte System beobachtbar.

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Beweis:

Das Beobachtbarkeitsproblem ist gelöst, falls

$$\mathbf{y}_{frei}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0}$$

nach $\mathbf{x}_0$ auflösbar ist.

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

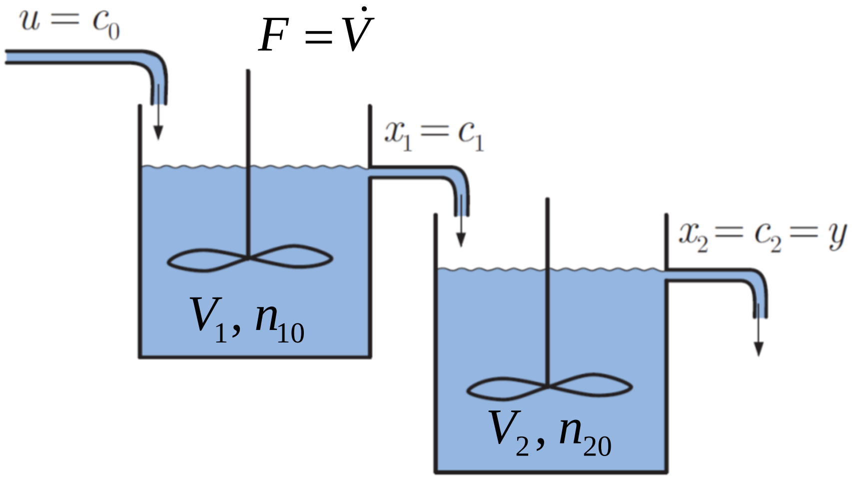
Für **einen** Ausgang $y_{frei}(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0}$ ergibt sich für unterschiedliche Messzeitpunkte

Beobachtbarkeit
Beobachtbarkeitskriterium von Kalman

Für r Ausgänge $\mathbf{y}_{frei}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x_0}$ ergibt sich für unterschiedliche Messzeitpunkte (z.B. r=2)

$$\begin{Bmatrix} y_{frei,1}(t_1) \\ y_{frei,2}(t_1) \\ y_{frei,1}(t_2) \\ y_{frei,2}(t_2) \\ \hline y_{frei,1}(t_n) \\ y_{frei,2}(t_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_2} \\ \hline \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t_n} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

Beobachtbarkeit
Beispiel gekoppelte Rührkessel



$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{Bmatrix} u(t)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{Bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!