Fahrzeugmechatronik II
Reglerentwurf durch Polzuweisung

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Einleitung
Motivation

Da die **Eigenwerte des geschlossenen Kreises** die **Eigenbewegung** und das **E/A-Verhalten entscheidend beeinflussen**, versucht man durch **geeignete Wahl der Reglerparameter** diesen **Eigenwerten vorgegebene Werte zuzuweisen.**
Es werden behandelt:

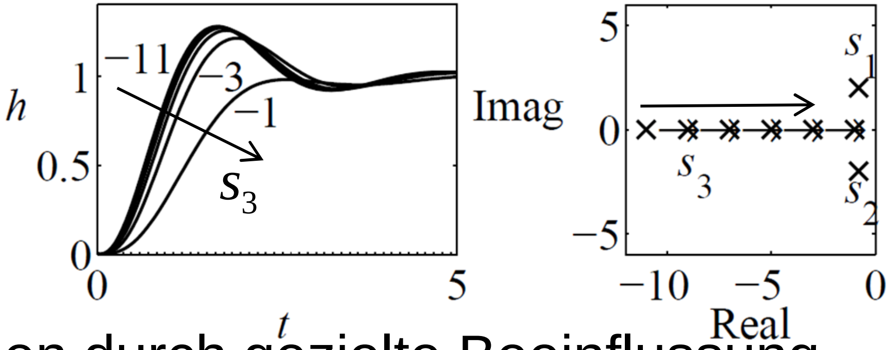
- **Berechnungsvorschriften** für Zustandsrückführungen
- **Ersetzen** der Zustands- **durch Ausgangsrückführung**

Regelerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen einschleifigen Regelkreises

Wird angenommen, dass das dynamische Regelverhalten durch ein dominierendes Polpaar bestimmt wird, z.B.

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2dTs + 1}$$

≙ Lehrsches Dämpfungsmaß



können dynamische Güteforderungen durch gezielte Beeinflussung dieses Polpaares erreicht werden.

$$s^2 + \frac{2d}{T}s + \frac{1}{T^2} = 0$$

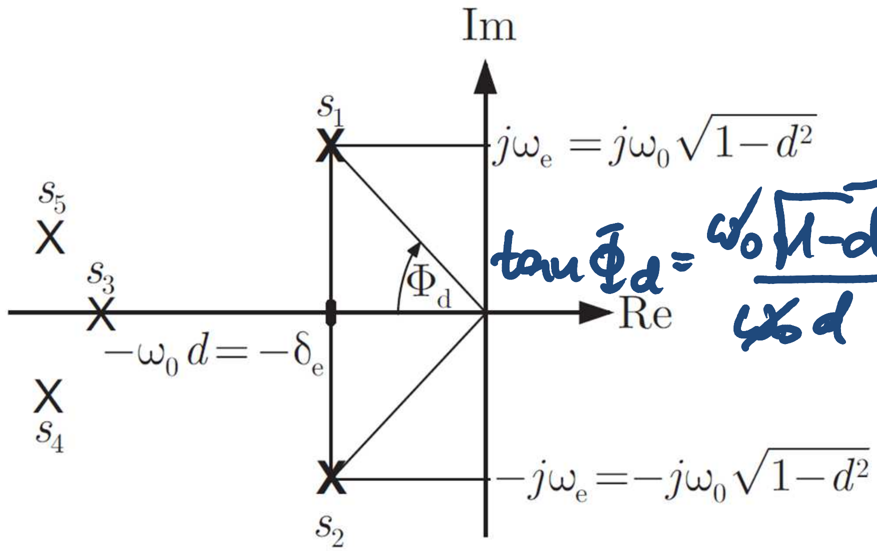
$$s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \underbrace{-d\omega_0}_{\delta_e} \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1-d^2}}_{\omega_e}$$

Abklingfaktor

ω_e - EF des gedämpften Systems

$$\tan \Phi_d = \frac{\omega_0\sqrt{1-d^2}}{\omega_0 d}$$



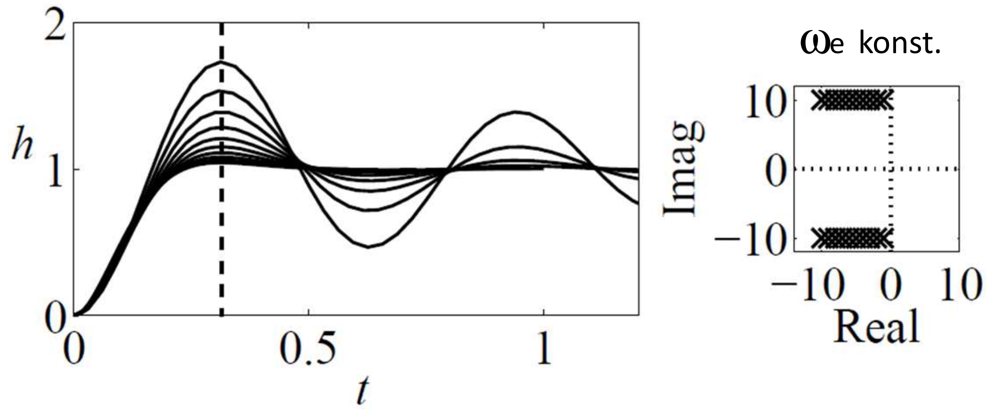
Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Regelerentwurf anhand des PN-Bildes des geschlossenen einschleifigen Regelkreises

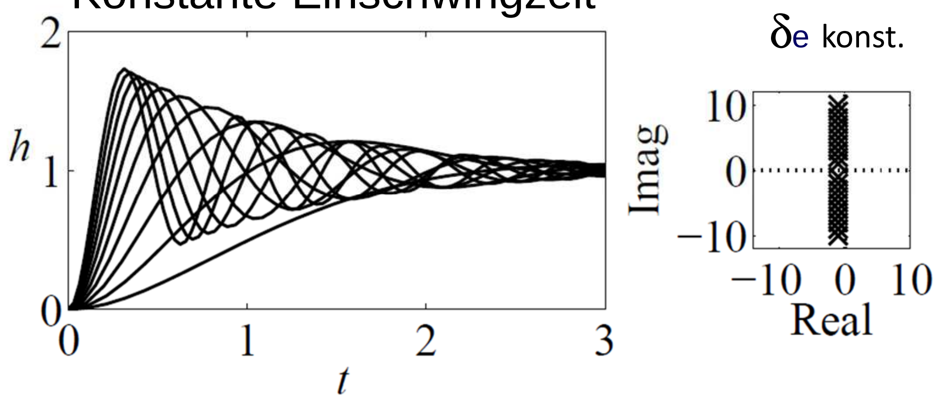
Auswirkungen der Beeinflussung des dominanten Polpaares auf das dynamische Regelverhalten

- Überschwingzeit
- Einschwingzeit
- Überschwingweite

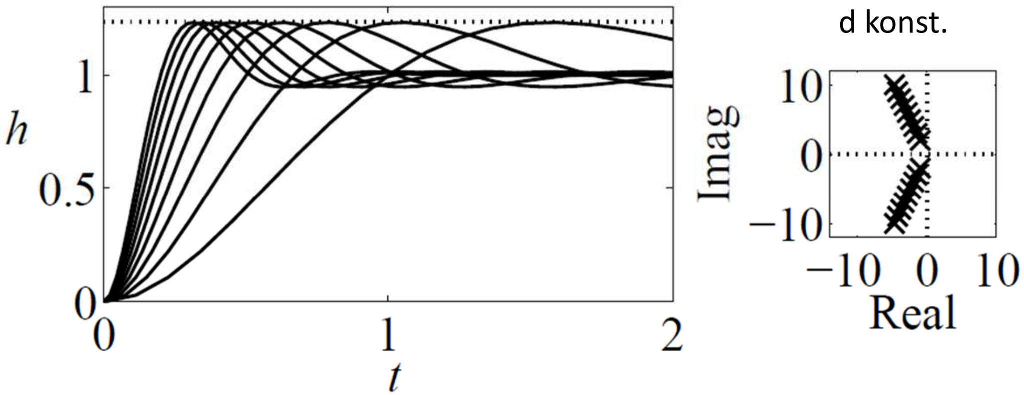
Konstante Überschwingzeit



Konstante Einschwingzeit



Konstante Überschwingweite



Einleitung
Zielstellung

Ausgehend von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

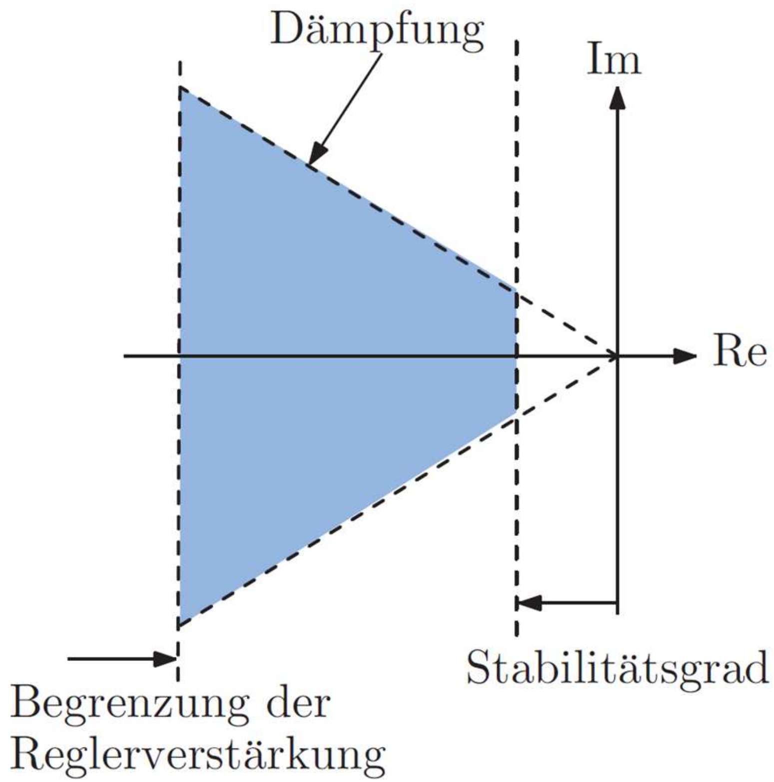
erhält man mit einer Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{V}\mathbf{w}(t)$$

die Zustandsgleichung des geschlossenen Kreises

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$



Ziel: Wähle $\underline{K}$ so, dass $\bar{\lambda}_i$ (EW von $\underline{\bar{A}} = (\underline{A} - \underline{B}\,\underline{K})$ in blauer Fläche.

Einleitung
Gegenüberstellung mit einschleifigen RKs

+ Es werden alle Eigenwerte und nicht nur das dominierende Polpaar betrachtet.
  -> größere Flexibilität

- Es müssen sämtliche Zustände gemessen (oder beobachtet) werden.

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Systeme in Regelungsnormalform mit einer Stellgröße

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_q \frac{\mathrm{d}^q u}{\mathrm{d}t^q} + \ldots + b_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u(t)$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{R}(t) = \frac{1}{b_0} \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Frobeniusmatrix

$$\boldsymbol{b}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}'_\mathrm{R} = (b_0 - b_n a_0,\ b_1 - b_n a_1,\ \ldots,\ b_{n-1} - b_n a_{n-1})$$

$$d = b_n.$$

Regelungs-
normalform

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\mathrm{R}(t) = \boldsymbol{A}_\mathrm{R} \boldsymbol{x}_\mathrm{R}(t) + \boldsymbol{b}_\mathrm{R} u(t), \qquad \boldsymbol{x}_\mathrm{R}(0) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{R}0}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}'_\mathrm{R} \boldsymbol{x}_\mathrm{R}(t) + d u(t)$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung

Systeme in Regelungsnormalform mit einer Stellgröße

EW-Aufgabe

$\underline{A}_R \underline{v} = \lambda \underline{v}$

$\Rightarrow (\lambda \underline{I} - \underline{A}_R) = 0$

Charakteristisches Polynom

z.B. $n=3$

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \underline{A}_R) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & \lambda + a_2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2 + a_2 \lambda + a_1) + a_0$$

$$= \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \overset{\text{allg.}}{=} \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Regleransatz

Zustandsrückführung

$$u(t) = -\underline{k}_R^T \underline{x}_R(t) = [k_{R1}\ k_{R2} \dots k_{Rn}]\ \underline{x}(t)$$

Es folgt für den geschlossenen Kreis

$$\dot{\underline{x}}_R(t) = (\underline{A} - \underline{b}_R \underline{k}_R^T)\ \underline{x}_R(t) = \bar{\underline{A}}_R\ \underline{x}_R(t)$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}[k_{R1}\ k_{R2} \dots k_{Rn}]$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - k_{\mathrm{R}1} & -a_1 - k_{\mathrm{R}2} & -a_2 - k_{\mathrm{R}3} & \cdots & -a_{n-1} - k_{\mathrm{R}n} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\bar{p}(\lambda) = \det(\lambda \underline{I} - \bar{\underline{A}}_R) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \bar{\lambda}_i)$$

Es wird vorgegeben

$$\bar{\underline{\sigma}}^T = \{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \dots, \bar{\lambda}_n\}$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Ermittlung der Reglerparameter

Somit ergibt sich

Sind bekannt, wenn $\bar{\underline{b}}^T$ gegeben

$$\lambda^n + (a_{n-1} + r_{Rn})\lambda^{n-1} + \dots + (a_0 + r_{R1}) = \lambda^n + \bar{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_0$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\bar{a}_0 = a_0 + r_{R1} \Leftrightarrow r_{R1} = \bar{a}_0 - a_0$$

$$\bar{a}_1 = a_1 + r_{R2} \Leftrightarrow r_{R2} = \bar{a}_1 - a_1$$

$$\vdots$$

$$\bar{a}_{n-1} = a_{n-1} + r_{Rn} \Leftrightarrow r_{Rn} = \bar{a}_{n-1} - a_{n-1}$$

Für die Reglerparameter folgt

$$\underline{r}_R^T = [\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}] - [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Erweiterung auf beliebige Modellformen

Ausgangspunkt ist (nur eine Stellgröße)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$ Gl. (6.18)

Mit

$$u(t) = -\underline{k}_R^T \underline{x}_R(t)$$

und

$$\underline{x}_R(t) = \underline{T}_R^{-1} \underline{x}(t)$$ Transformation in Regelungsnormalform

folgt

$$u(t) = -\underbrace{\underline{k}_R^T \underline{T}_R^{-1}}_{\underline{k}^T} \underline{x}(t)$$ Gl. (6.20)

somit

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{b}\, \underline{k}_R^T \underline{T}_R^{-1})\, \underline{x}(t)$$

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Ermittlung der Transformationsmatrix

Zunächst ermittelt man

$$\mathbf{S}_S = \left[\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right]$$

$[n \times n]$

Dann bildet man

muss existieren $\Leftrightarrow$ Rang $S_S = n$
$\Leftrightarrow$ $(\underline{A}, \underline{b})$ ist steuerbar

$' \equiv T$

$$s_R^T \hat{=} \boldsymbol{s}'_{\mathrm{R}} = (0 \;\; 0 \ldots 0 \;\; 1)\, \boldsymbol{S}_{\mathrm{S}}^{-1}$$

Hieraus folgt

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}'_{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{s}'_{\mathrm{R}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{s}'_{\mathrm{R}}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}'_{\mathrm{R}}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Ermittlung der Reglerparameter

Für den Regler gilt nun

$$\underline{k}_R^T = \underline{r}_R^T \underline{T}_R^{-1} = [\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}] \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \underbrace{- [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{}$$

$$\underline{s}_R^T \left(a_0 \underline{A}^0 + a_1 \underline{A}^1 + \dots + a_{n-1} \underline{A}^{n-1}\right) = -\underline{s}_R^T \underline{A}^n$$

(Cayley-Hamilton-Theorem)

Somit lässt sich schreiben

$$\underline{k}_R^T = [\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n-1}, 1] \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^{n} \end{bmatrix} = \underline{s}_R^T \left[\bar{a}_0 \underline{I} + \bar{a}_1 \underline{A} + \dots + \bar{a}_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \underline{A}^n\right]$$

"Ackermann-Formel"
(Gl. 6.22)

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Diskussion der Lösung

Satz (Polverschiebbarkeit)
Wenn das System (**A**,**b**) vollständig steuerbar ist, können die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises durch eine Zustands-rückführung $u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)$ beliebig festgelegt werden.

Schlussfolgerungen

- Ist die Regelstrecke nicht vollständig steuerbar, gehören aber alle instabilen Eigenwerte zum steuerbaren Teil, kann die Regelstrecke zumindest stabilisiert werden.
- Um die Eigenwerte des Regelkreises beliebig platzieren zu können, reicht eine Stellgröße aus, wenn die Strecke über diese Stellgröße vollständig steuerbar ist.

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Entwurfsverfahren

Voraussetzungen:

- Die Regelstrecke ist vollständig steuerbar.
- Die Regelstrecke hat nur eine Stellgröße $(m = 1)$.
- Die Güteforderungen betreffen nur die Eigenbewegung des Regelkreises bzw. das Übergangsverhalten des Regelkreises.

1. Anhand der Güteforderungen an die Eigenbewegung des Regelkreises werden Werte für die Pole des geschlossenen Kreises festgelegt.
2. Die Reglerparameter werden mit Gl. (6.22) berechnet.
3. Es wird das Modell des geschlossenen Regelkreises (6.18), (6.20) berechnet.
4. Die Eigenbewegung des Regelkreises wird für verschiedene Anfangszustände berechnet und anhand der gegebenen Güteforderungen bewertet. Sind die Güteforderungen nicht erfüllt, so werden die Schritte 1–4 unter Verwendung anderer Vorgaben für die Pole des geschlossenen Kreises wiederholt.

Ergebnis: Zustandsrückführung

Prof. Dr.-Ing.
S. Müller

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Erweiterung auf mehrere Stellgrößen

Ausgangspunkt ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

mit $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ (Annahme: Strecke vollständig steuerbar)

Statt

$$\underline{u}(t) = -\underline{K}\,\underline{x}(t)$$

schreiben wir

$$\underline{u}(t) = \underbrace{-\underline{q}\,\tilde{\underline{q}}^T}_{\underline{K}}\overbrace{\underline{x}(t)}^{-\tilde{u}(t)} = \underline{q}\,\tilde{u}(t)$$

"Dyadische Regelung"

Einsetzen in das Streckenmodell liefert

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underbrace{\underline{B}\,\underline{q}}_{\tilde{\underline{b}}}\,\tilde{u}(t) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t)$$

Nun haben wir wieder die selbe Struktur wie mit einer Eingangsgröße mit

$$\tilde{u}(t) = -\tilde{\underline{q}}^T\underline{x}(t)$$

Polzuweisung durch Zustandsrückführung
Steuerbarkeit der reduzierten Strecke

Satz (Steuerbarkeit der reduzierten Regelstrecke)
Wenn das Paar (**A**,**B**) vollständig steuerbar und die Matrix **A** zyklisch ist (heißt: Transformation in Frobeniusform ist möglich), dann gibt es einen Vektor **q**, so dass das Paar (**A**,**Bq**) vollständig steuerbar ist.

Praxis:
Unter den genannten Bedingungen führen fast alle **q**
auf ein steuerbares Paar (**A**,**Bq**).
q wird daher zunächst beliebig festgelegt. Dann wird die Steuerbarkeit geprüft. Falls diese nicht gegeben ist, wird **q** geringfügig verändert.

Näherung einer ZRF durch eine ARF
Einleitung

Ausgangspunkt ist $$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_y \mathbf{y}(t)$$

Annahme:

- (**A**,**B**) ist vollständig steuer- und beobachtbar.

Bsp.: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t)$

$u(t) = -k_y\, y(t)$

$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - k_y\, \underline{b}\, \underline{c}^T)\, \underline{x}(t)$

Behauptungen:

- Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises können im Allgemeinen nicht mehr beliebig vorgegeben werden, sobald nur eine Zustandsgröße nicht gemessen werden kann.
- Wenn die Regelung um dynamische Elemente, z.B. einen Beobachter erweitert wird, können die Eigenwerte auch bei einer Ausgangsrückführung wieder zielgerichtet platziert werden.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!