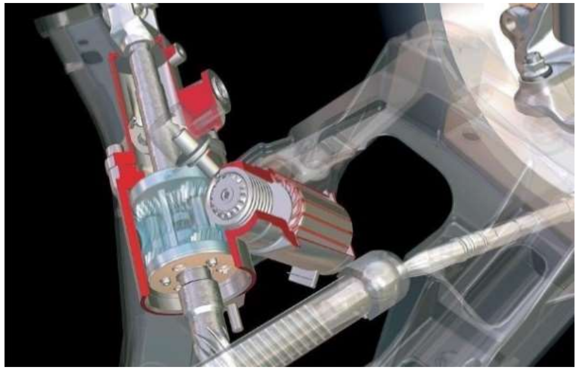
Fahrzeugmechatronik I
Modellbildung

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M. Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Kennwertermittlung
Massenparameter

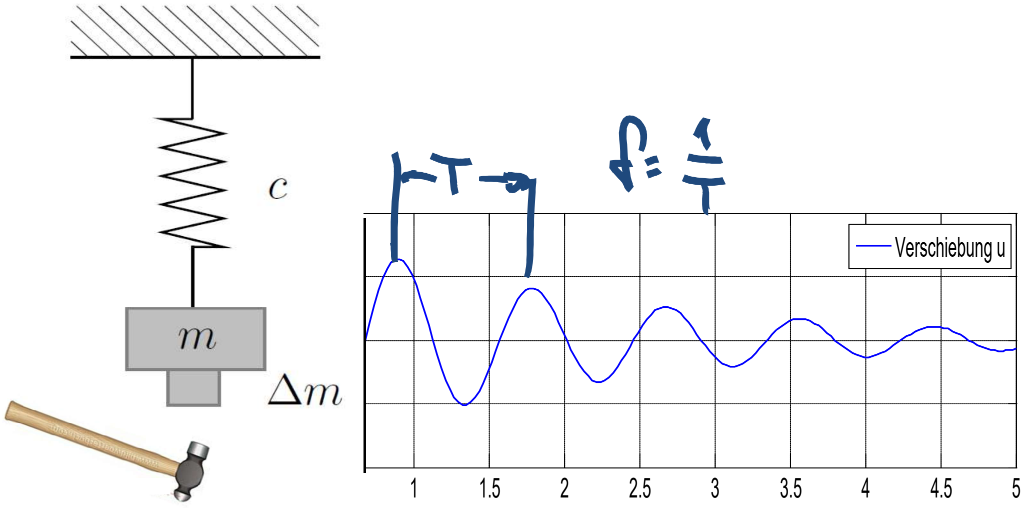
Parameter	
Masse	m
Schwerpunktlage	u_{xS}, u_{yS}, u_{zS}
Trägheitstensor	$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ sym & J_{yy} & J_{yz} \\ sym & sym & J_{zz} \end{bmatrix}$

Kennwertermittlung
Massenparameter

Parameter	Bestimmung über Zeichnung
Masse	Volumenbestimmung, Dichte, Zerlegung in Elementarkörper
Schwerpunktlage	Zerlegung in Elementarkörper
Massenträgheits-moment um eine Achse	Zerlegung in Elementarkörper, Satz von Steiner
Trägheitstensor	Transformationen

Ermittlung der Masse

Verfahren der Frequenzmessung – Variante 1



Eigenfrequenz ohne Zusatzmasse

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Eigenfrequenz mit Zusatzmasse

$$f_{\Delta m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m+\Delta m}}$$

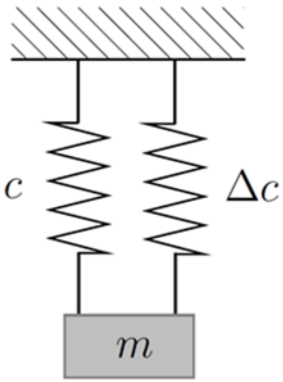
Nun

$$\frac{f^2}{f^2 - f_{\Delta m}^2} = \frac{c/m}{\frac{c}{m} - \frac{c}{m+\Delta m}} = \frac{1}{1-\frac{m}{m+\Delta m}} = \frac{m+\Delta m}{\Delta m}$$

Somit

$$m = \Delta m\left(\frac{f^2}{f^2 - f_{\Delta m}^2} - 1\right)$$

Ermittlung der Masse
Verfahren der Frequenzmessung – Variante 2



Eigenfrequenz mit Zusatzfeder

$$f_{\Delta c} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c+\Delta c}{m}}$$

Nun

$$f^2 - f_{\Delta c}^2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{c}{m} - \frac{c+\Delta c}{m}\right)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{\Delta c}{m}$$

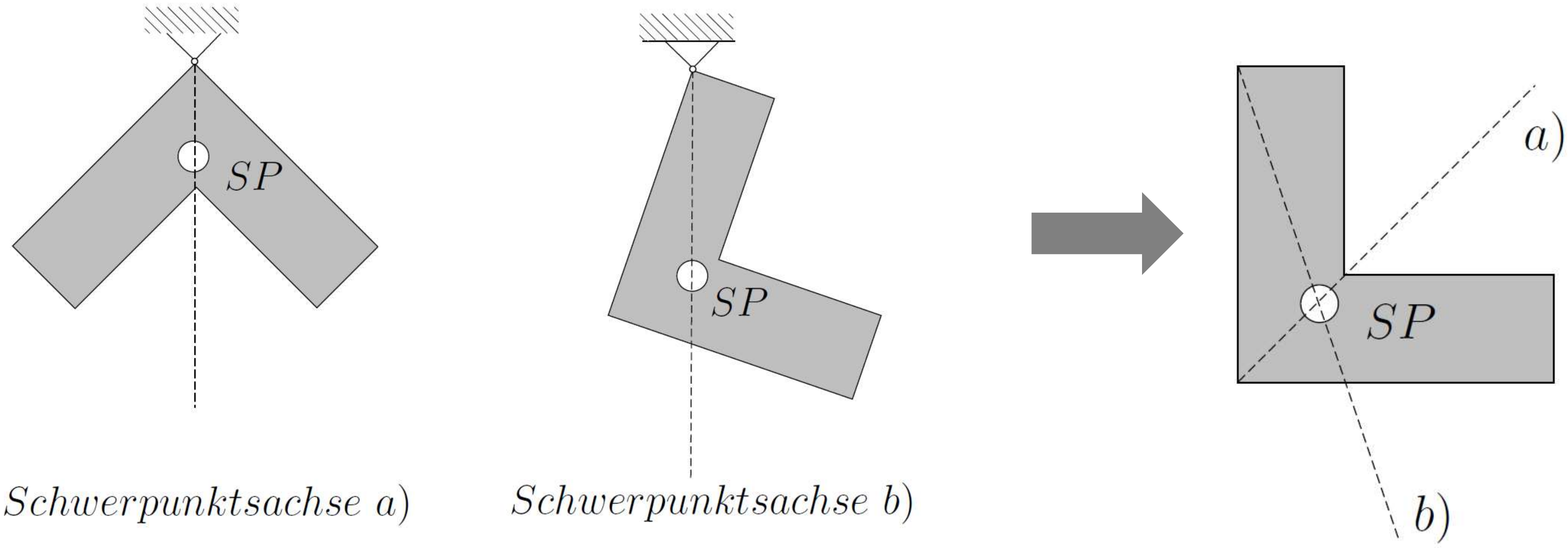
Somit

$$m = -\frac{\Delta c}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{\left(f^2 - f_{\Delta c}^2\right)} \quad //$$

Kennwertermittlung
Massenparameter

Parameter	Ermittlung durch Messung	Bestimmung über Zeichnung
Masse	• Wiegen • Frequenzmessung	Volumenbestimmung, Dichte, Zerlegung in Elementarkörper
Schwerpunktlage	• Aushängen • Ermittlung von Aufstandskräften	Zerlegung in Elementarkörper
Massenträgheits-moment um eine Achse	einfacher Pendelversuch	Zerlegung in Elementarkörper, Satz von Steiner
Trägheitstensor	Transformationen	Transformationen

Ermittlung der Schwerpunktlage
Aushängen

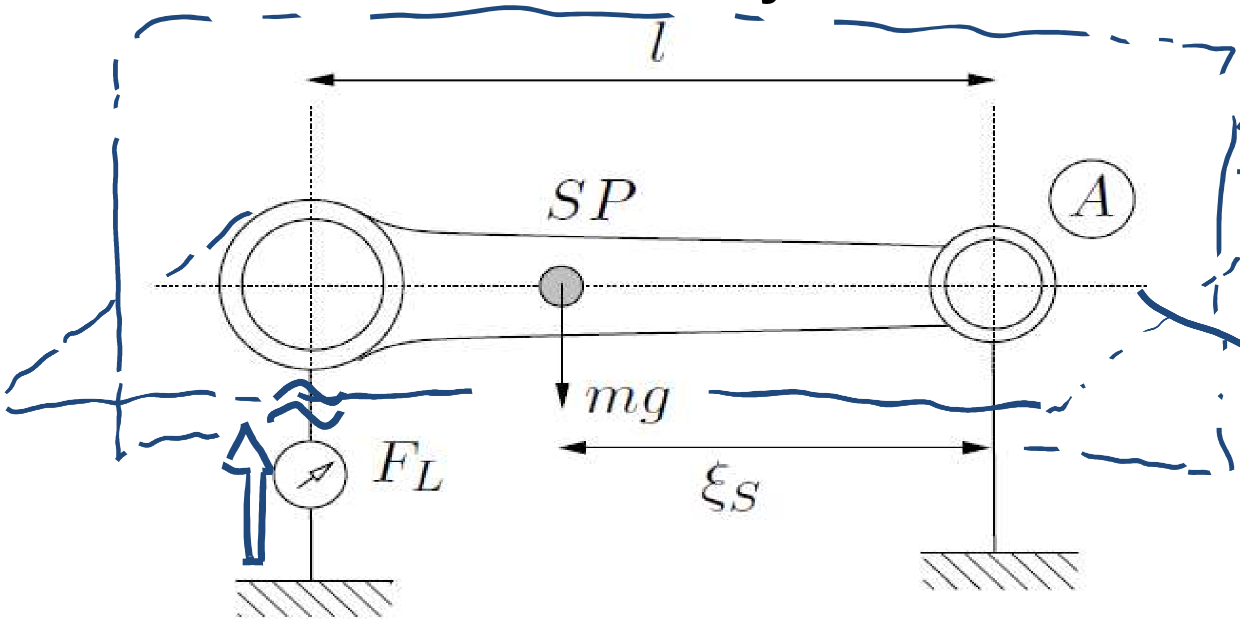


Kennwertermittlung
Massenparameter

Parameter	Ermittlung durch Messung	Bestimmung über Zeichnung
Masse	• Wiegen • Frequenzmessung	Volumenbestimmung, Dichte, Zerlegung in Elementarkörper
Schwerpunktlage	• Aushängen • Ermittlung von Aufstandskräften	Zerlegung in Elementarkörper
Massenträgheits-moment um eine Achse	einfacher Pendelversuch	Zerlegung in Elementarkörper, Satz von Steiner
Trägheitstensor	Transformationen	Transformationen

Ermittlung der Schwerpunktlage
Bestimmung von Aufstandskräften

Bauteil mit 2 Struktursymmetrieebenen



Symmetrieebene

SP befindet sich immer auf dieser Schnittlinie

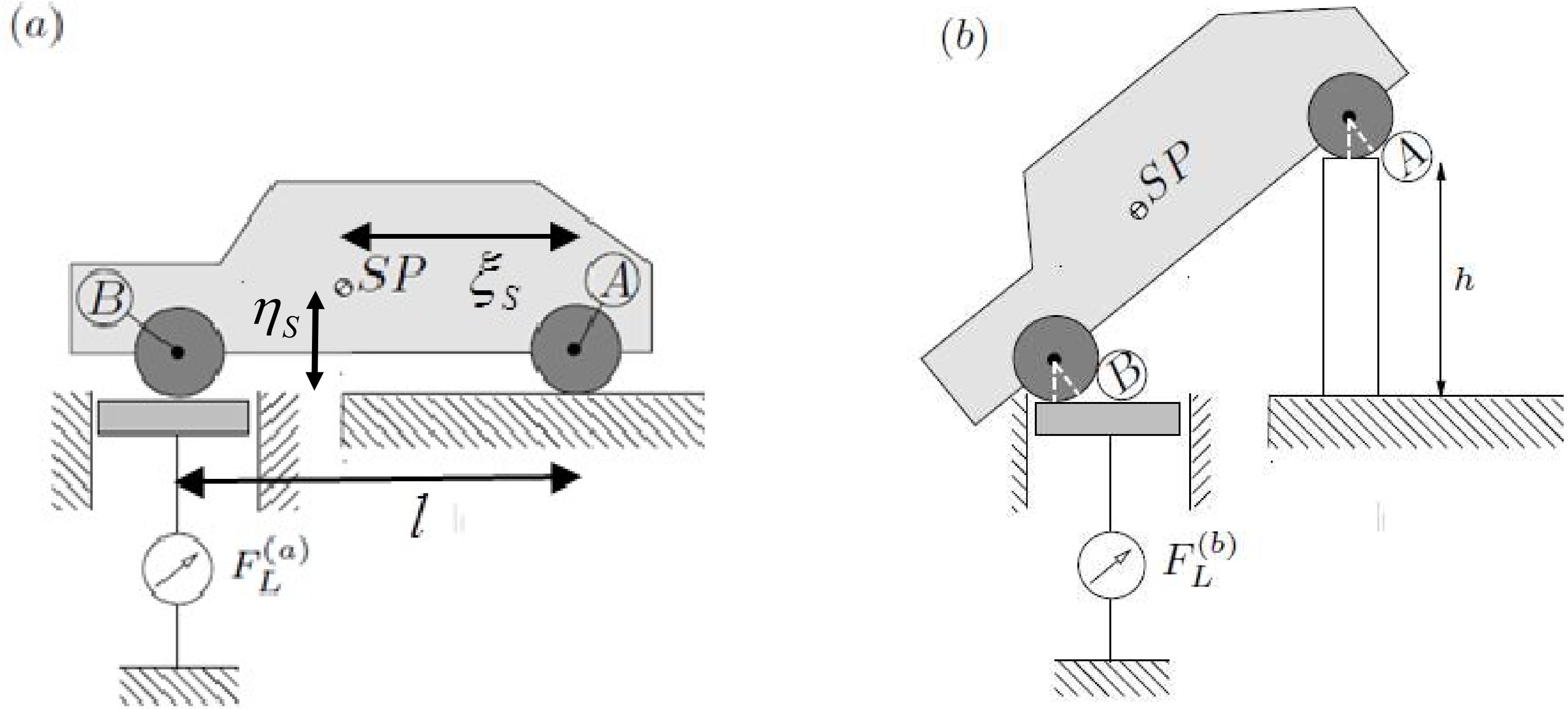
Statisches Momenten-GG um A

$$F_L l = mg\,\xi_S \Rightarrow \xi_S = \frac{F_L l}{mg}$$

Ermittlung der Schwerpunktlage

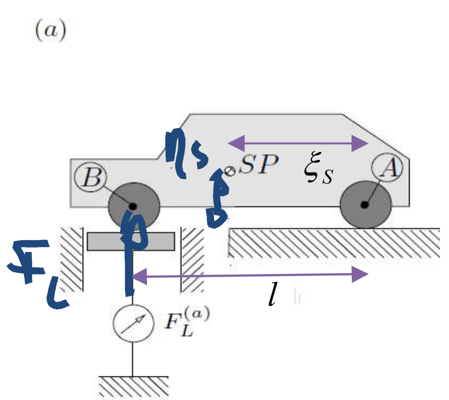
Bestimmung von Aufstandskräften

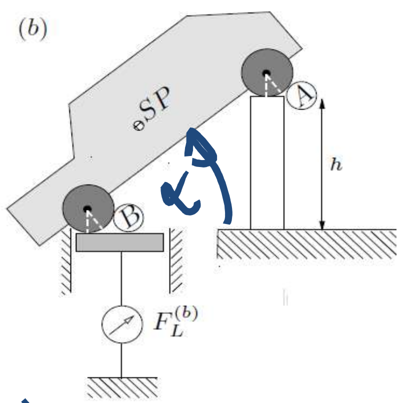
Bauteile ohne Struktursymmetrie

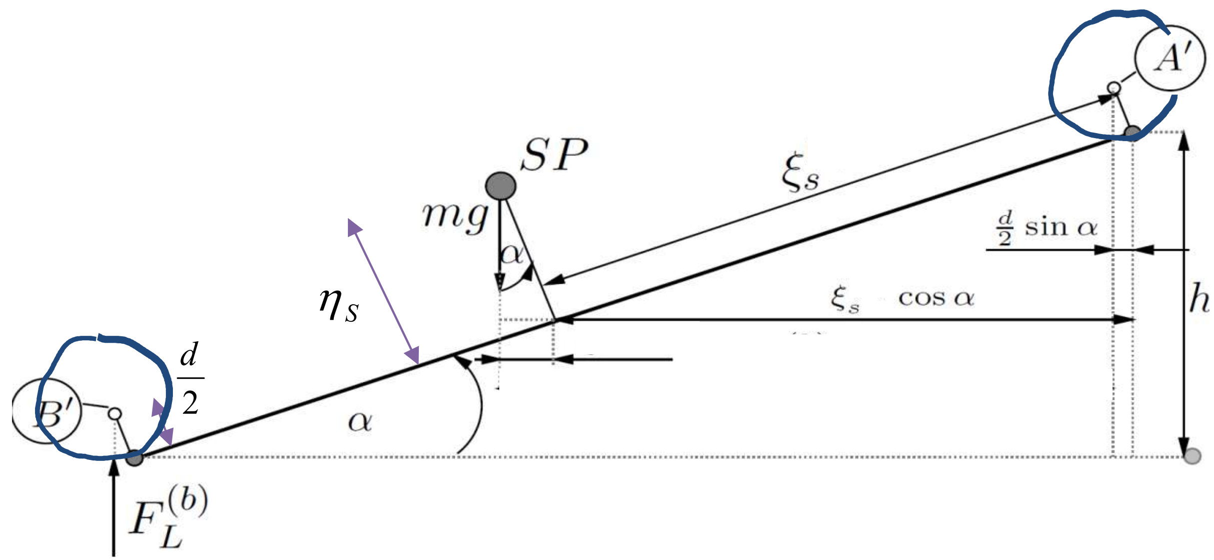


Ermittlung der Schwerpunktlage
Bestimmung von Aufstandskräften

Bauteile ohne Struktursymmetrie







Im Fall (a) gilt: $F_L^{(a)} l = mg\,\xi_s \Rightarrow \xi_s$

Im Fall (b) gilt: $\dfrac{F_L^{(b)} l\cos\alpha}{mg\sin\alpha} = \cancel{mg}\left(\dfrac{\xi_s\cos\alpha}{\sin\alpha} + \eta_s\cancel{\sin\alpha} - \dfrac{d}{2}\cancel{\sin\alpha}\right)$

$(\Sigma M^{A'})$

$$\Rightarrow \eta_s = \frac{F_L^{(b)}\, l\cos\alpha}{mg\sin\alpha} - \frac{F_L^{(a)}\, l}{mg}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{d}{2}$$

mit $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$

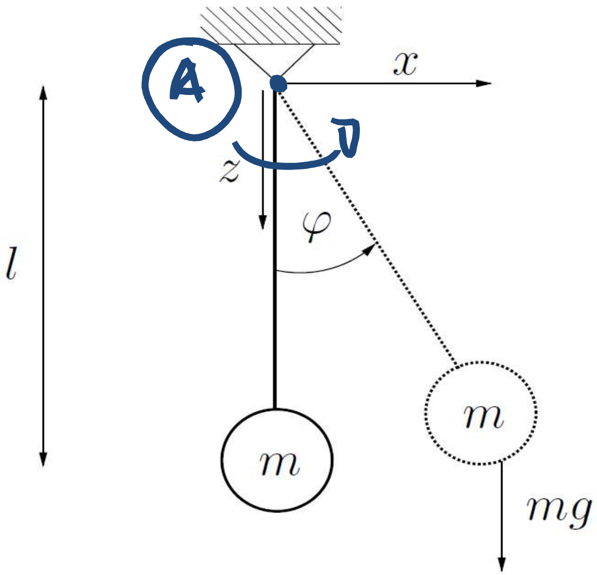
$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{l^2-h^2}{l^2}} = \sqrt{1-\dfrac{h^2}{l^2}}$ //

Kennwertermittlung
Massenparameter

Parameter	Ermittlung durch Messung	Bestimmung über Zeichnung
Masse	• Wiegen • Frequenzmessung	Volumenbestimmung, Dichte, Zerlegung in Elementarkörper
Schwerpunktlage	• Aushängen • Ermittlung von Aufstandskräften	Zerlegung in Elementarkörper
Massenträgheits-moment um eine Achse	einfacher Pendelversuch	Zerlegung in Elementarkörper, Satz von Steiner
Trägheitstensor	Transformationen	Transformationen

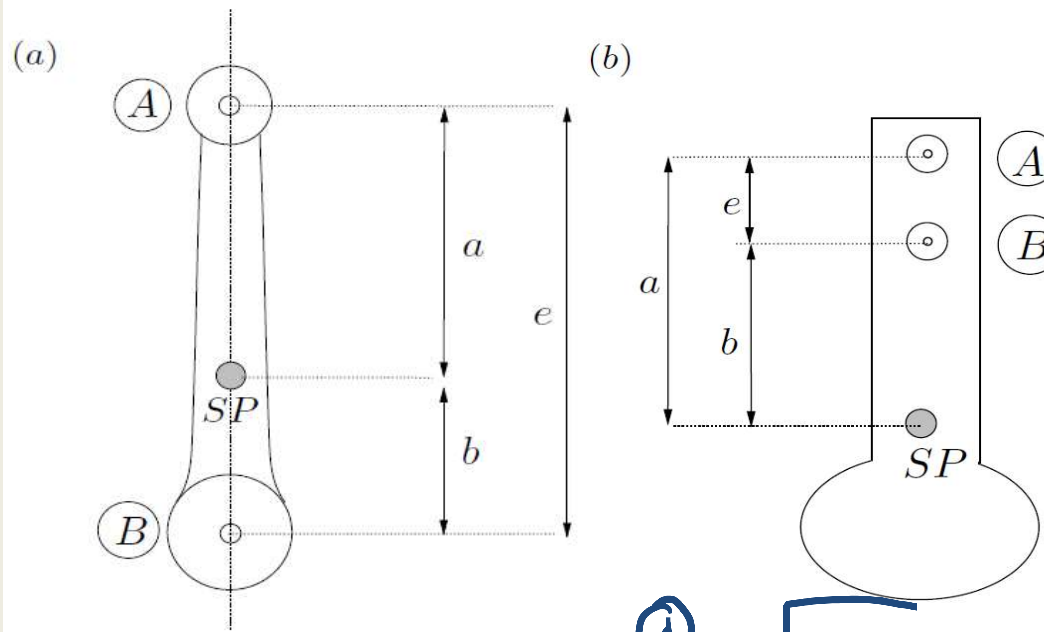
Ermittlung eines Massenträgheitsmomentes
Einfacher Pendelversuch

m, e seien bekannt



$$\underbrace{m}_{\hat{m}}\ddot{\varphi} + \hat{c}\varphi = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\hat{c}}{\hat{m}}}$$



Es gilt

$$\underbrace{J_y^{(A)}}_{\hat{m}}\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi = -\underbrace{mgl}_{\hat{c}}\varphi$$

Somit folgt für die Eigenfrequenz

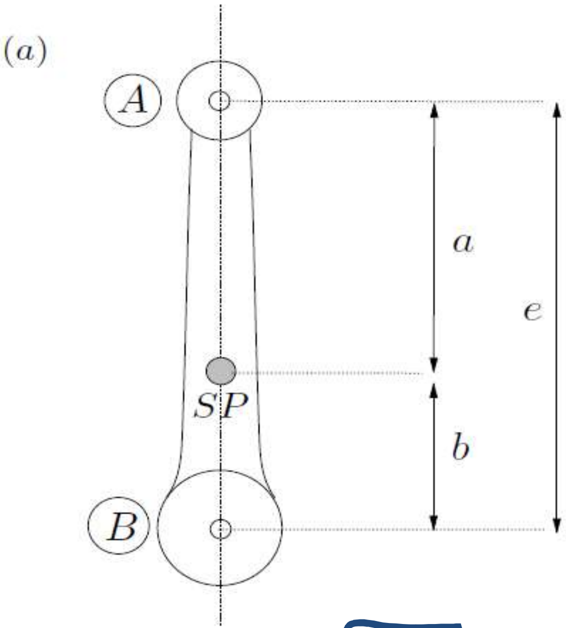
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J_y^{(A)}}}$$

Pendeln um (A): $\omega_0^{(A)} = \sqrt{\frac{mga}{J^{(A)}}}$

Pendeln um (B): $\omega_0^{(B)} = \sqrt{\frac{mgb}{J^{(B)}}}$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Ermittlung eines Massenträgheitsmomentes
Einfacher Pendelversuch



$$T^{(A)} = 2\pi\sqrt{\frac{J^{(A)}}{mga}} \qquad T^{(B)} = 2\pi\sqrt{\frac{J^{(B)}}{mgb}}$$

Satz von Steiner

$$J^{(A)} = J^{(S)} + ma^2 \qquad J^{(B)} = J^{(S)} + mb^2$$

$$T^{(A)2} = 4\pi^2\frac{J^{(A)}}{mga} = 4\pi^2\frac{\left(J^{(S)} + me^2\right)}{mga}$$

$$T^{(B)2} = \frac{4\pi^2\left(J^{(S)} + m(e-a)^2\right)}{mg(e-a)} \qquad (1)$$

zunächst gilt für $J^{(S)}$

$$J^{(S)} = \frac{mgaT^{(A)2}}{4\pi^2} - ma^2 \qquad (2)$$

Mit (1) und (2) folgt

$$a = \frac{\left(T^{(B)2} - e\frac{4\pi^2}{g}\right)e}{\left(T^{(B)2} - T^{(A)2} - 2e\frac{4\pi^2}{g}\right)}$$

Ermittlung eines Massenträgheitsmomentes

Einfacher Pendelversuch - Praxiseinsatz

Bild 5: Einspannvorrichtung für die Messung der tatsächlichen Massenträgheit des Autos

Figure 5: Inertia jig used to measure the real inertia of the complete car (driver included)

Quelle: ATZ Extra 12/08, Formular Student Germany, „Konstruktion einer Radaufhängung“, Team Quebec

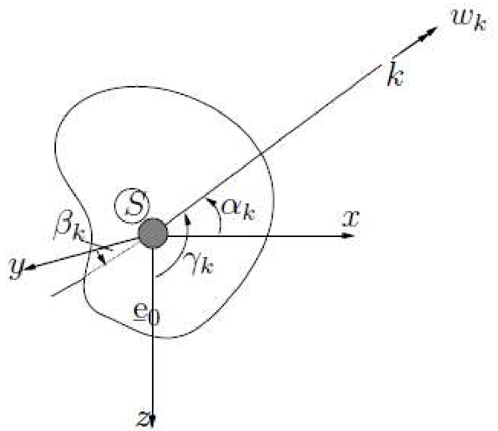
Kennwertermittlung
Massenparameter

Parameter	Ermittlung durch Messung	Bestimmung über Zeichnung
Masse	• Wiegen • Frequenzmessung	Volumenbestimmung, Dichte, Zerlegung in Elementarkörper
Schwerpunktlage	• Aushängen • Ermittlung von Aufstandskräften	Zerlegung in Elementarkörper
Massenträgheits-moment um eine Achse	einfacher Pendelversuch	Zerlegung in Elementarkörper, Satz von Steiner
Trägheitstensor	Transformationen	Transformationen

Ermittlung des Trägheitstensors
Verfahren des Energievergleichs

Für die Ermittlung des Trägheitstensors sind 6 Werte zu bestimmen

$$\mathbf{J}^S = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{yx} & J_{zx} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{zy} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$



Für ein körperfestes Koordinatensystem $\underline{e}_0$ gilt für die kinetische Energie einer reinen Drehung um den Schwerpunkt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{J}^S \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{yx} & J_{zx} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{zy} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x^{\ 2} + J_{yy}\omega_y^{\ 2} + J_{zz}\omega_z^{\ 2} + 2J_{yx}\omega_y\omega_x + 2J_{zx}\omega_z\omega_x + 2J_{zy}\omega_z\omega_y \right)$$

Ermittlung des Trägheitstensors
Verfahren des Energievergleichs

Mit dem Massenträgheitsmoment J_{kk} um eine Achse gilt für die kinetische Energie

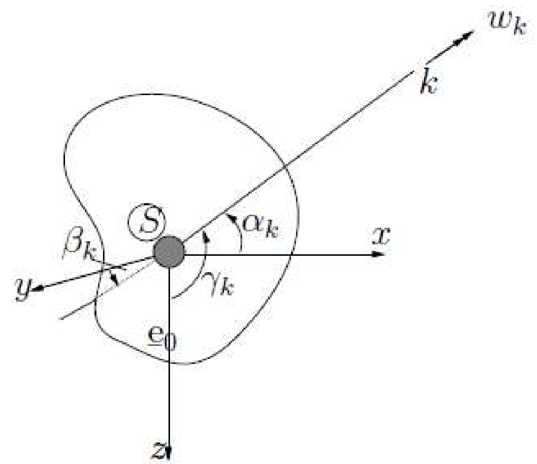
$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_{kk} \cdot \omega_k^2$$

Für die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ ausgedrückt im $\underline{e}_0$ –Koordinatensystem ergibt sich

$$\omega_x = \omega_k \cos \alpha_k$$

$$\omega_y = \omega_k \cos \beta_k$$

$$\omega_z = \omega_k \cos \gamma_k$$



Die Winkel α_k,β_k und γ_k müssen gemessen werden.

Ermittlung des Trägheitstensors
Verfahren des Energievergleichs

Die kinetische Energie bei einer Drehung um die k-Achse ist gleich der kinetischen Energie der gleichen Drehung ausgedrückt im $\underline{e}_0$ –System

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_{kk} \cdot \omega_k^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2}\left(J_{xx}\omega_x{}^2 + J_{yy}\omega_y{}^2 + J_{zz}\omega_z{}^2 + 2J_{yx}\omega_y\omega_x + 2J_{zx}\omega_z\omega_x + 2J_{zy}\omega_z\omega_y \right)$$

Daraus folgt:

$$J_{kk} = J_{xx}\cos^2\alpha_k + J_{yy}\cos^2\beta_k + J_{zz}\cos^2\gamma_k$$
$$+ 2J_{yx}\cos\alpha_k\cos\beta_k + 2J_{zx}\cos\alpha_k\cos\gamma_k + 2J_{zy}\cos\beta_k\cos\gamma_k$$

Werden nun 6 Versuche durchgeführt, ergeben sich 6 Bestimmungs-gleichungen für die 6 unbekannten Tensorkomponenten.

Ermittlung des Trägheitstensors
Verfahren des Energievergleichs

Es werden i=1,…,K Versuche um K k_i-Achsen durchgeführt und die Messgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

aufgestellt. Hierbei sind

$$\mathbf{y} = \left[J_{11}, J_{22}, \ldots, J_{KK}\right]^T$$

$$\mathbf{x} = \left[J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{yx}, J_{zx}, J_{zy}\right]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_1 & \cos^2\beta_1 & \cos^2\gamma_1 & 2\cos\alpha_1\cos\beta_1 & 2\cos\alpha_1\cos\gamma_1 & 2\cos\beta_1\cos\gamma_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos^2\alpha_K & \cos^2\beta_K & \cos^2\gamma_K & 2\cos\alpha_K\cos\beta_K & 2\cos\alpha_K\cos\gamma_K & 2\cos\beta_K\cos\gamma_K \end{bmatrix}$$

Ermittlung des Trägheitstensors
Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Gesucht ist **x**, so dass der Messfehler minimal wird. Hierzu

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{y} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Dann

$$\mathbf{\Delta}^T \cdot \mathbf{\Delta} \stackrel{!}{=} Min$$

Somit

$$Q(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{y} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\right)^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} \stackrel{!}{=} Min$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \dfrac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_6} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!