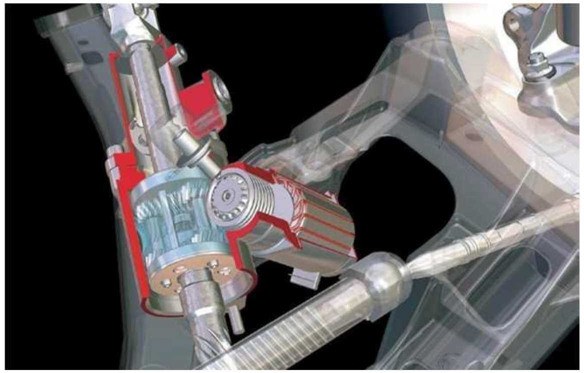
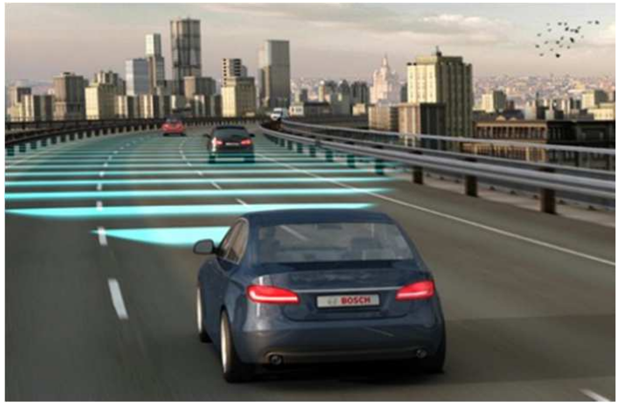
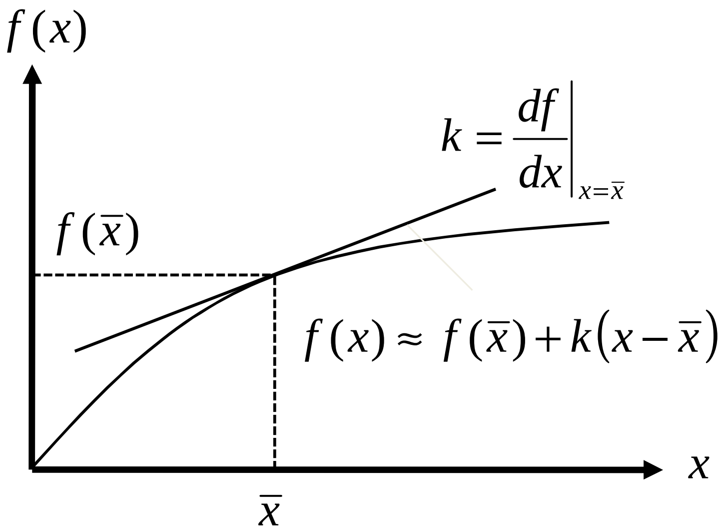
Fahrzeugmechatronik II
Beschreibung und Verhalten von Mehrgrößensystemen


Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Beschreibung im Zeitbereich

Linearisierung nichtlinearer Systeme



Ausgangspunkt ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$$

bzw.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_{n,}\right) \\ f_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_{n,}\right) \\ \dots \\ f_n\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_{n,}\right) \end{Bmatrix}$$

Festlegung eines Arbeitspunkte

$\underline{0} = \underline{f}(\bar{\underline{x}}, \bar{\underline{u}})$ $\quad$ $\bar{\underline{x}}$ - stationärer

$\bar{\underline{y}} = \underline{g}(\bar{\underline{x}}, \bar{\underline{u}})$ $\quad$ Zustand für $\bar{\underline{u}}$

Im linearisierten Modelle werden die Abweichungen $\delta\underline{x}$ um $\bar{\underline{x}}$ behandelt

$$\delta\underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \bar{\underline{x}}$$

$$\delta\underline{u}(t) = \underline{u}(t) - \bar{\underline{u}}$$

$$\delta\underline{y}(t) = \underline{y}(t) - \bar{\underline{y}}$$

Beschreibung im Zeitbereich
Linearisierung nichtlinearer Systeme

Somit folgt

$$\frac{d\,\delta \underline{x}(t)}{dt} = \frac{d\,\underline{x}(t)}{dt}$$

$$= \underline{f}(\bar{\underline{x}} + \delta\underline{x}(t), \bar{\underline{u}} + \delta\underline{u}(t))$$

Taylor-Reihenentwicklung

$$\frac{d\,\delta\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}(\bar{\underline{x}}, \bar{\underline{u}}) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\bigg|_{\underline{x}=\bar{\underline{x}},\, \underline{u}=\bar{\underline{u}}} \delta\underline{x}(t)$$

$$+ \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}}\bigg|_{\underline{x}=\bar{\underline{x}},\, \underline{u}=\bar{\underline{u}}} \delta\underline{u}(t) + \underline{r}(\delta\underline{x}, \delta\underline{u})$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{B}$$

Analog $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{C}$ und $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{D}$

Beschreibung im Zeitbereich
Linearisierung nichtlinearer Systeme

Somit folgt

$$\frac{d\,\delta\underline{x}(t)}{dt} \approx \underline{A}\,\delta\underline{x}(t) + \underline{B}\,\delta\underline{u}(t)$$

$$\cancel{\bar{\underline{y}}} + \delta\underline{y}(t) \approx \cancel{\underline{g}(\bar{\underline{x}},\bar{\underline{u}})} + \underline{C}\,\delta\underline{x}(t) + \underline{D}\,\delta\underline{u}(t)$$

$$\delta\underline{x}(t=0) = \underline{x}(t=0) - \bar{\underline{x}}$$

bzw.

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

Hierbei sind $\underline{x}$, $\underline{u}$ und $\underline{y}$ kleine Abweichungen um einen Arbeitspunkt $\bar{\underline{x}}$, $\bar{\underline{u}}$ und $\bar{\underline{y}}$.

Verhalten im Zeitbereich
Lösung der Zustandsgleichung

Gesucht ist die Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Allg. Lösung

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_h(t) + \underline{x}_p(t)$$

allg. spezieller

Homogene Lösung

Ansatz: $\underline{x}_h(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{k}$

Nebenbetrachtung

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2}{2!} t^2 + \ldots$$

$$e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2}{2!} t^2 + \ldots$$

$$\frac{d e^{\underline{A}t}}{dt} = \underline{A} + \underline{A}^2 t + \frac{\underline{A}^3}{2!} t^2 + \ldots = \underline{A}\, e^{\underline{A}t}$$

Einsetzen liefert ✓

$$\underline{A}\, e^{\underline{A}t}\,\underline{k} = \underline{A}\, e^{\underline{A}t}\,\underline{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{x}_h(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{k}}$$

Verhalten im Zeitbereich
Lösung der Zustandsgleichung

Inhomogene Lösung
(Variation der Konstanten)

$$\underline{x}_p(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{k}(t)$$

Einsetzen liefert

$$\underline{A}\,\cancel{e^{\underline{A}t}\underline{k}(t)} + e^{\underline{A}t}\dot{\underline{k}}(t)$$

$$= \underline{A}\,\cancel{e^{\underline{A}t}\underline{k}(t)} + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

DGL ist erfüllt, wenn

$$\dot{\underline{k}}(t) = e^{-\underline{A}t}\,\underline{B}\,\underline{u}(t)$$

Eine spezielle Lösung ergibt sich

$$\underline{k}(t) = \int_0^t e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Allg. Lösung

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\underline{k} + e^{\underline{A}t}\int_0^t e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Anpassen an die AB liefert

$$\boxed{\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau}$$

Verhalten im Zeitbereich
Freie Schwingung

$$\underline{V} = \left[\underline{v}_1 \middle| \underline{v}_2 \middle| \underline{v}_3 \middle| \dots \right]$$

$e^{\lambda_1 t}$ e^{λ_2} $e^{\lambda_3 t}$

Für die homogene Lösung gilt $\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$

Für die kanonische Normalform gilt $\hat{\underline{x}}_h = e^{\operatorname{diag} \lambda_i t}\, \hat{\underline{x}}_0$

mit

$$\underline{x}_h(t) = \underline{V}\, \hat{\underline{x}}_h(t)$$

Weiterhin ist

$$e^{\operatorname{diag} \lambda_i \underline{t}} \left[\underline{I} + \operatorname{diag} \lambda_i t + \frac{\operatorname{diag} \lambda_i^2 t^2}{2!} + \dots \right]$$

$$= \operatorname{diag} e^{\lambda_i t}$$

Somit ergibt sich für die freie Schwingung

$$\underline{x}_h(t) = \underline{V} \operatorname{diag} e^{\lambda_i t}\, \hat{\underline{x}}_0 \qquad \begin{Bmatrix} \hat{x}_1(0) \\ \hat{x}_2(0) \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$= \underline{v}_1 e^{\lambda_1 t} \hat{\underline{x}}_1(0) + \underline{v}_2 e^{\lambda_2 t} \underline{x}_2(0) + \dots$$

Interpretation

- Gilt für alle λ_i von $\underline{A}$ $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ mit $i = 1, 2, \dots n$, klingt die freie Schwingung für $t \to \infty$ ab („asymptotische Stabilität")
- Gilt für wenigstens ein λ_i $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$, so klingt $x_h(t)$ auf.

Verhalten im Zeitbereich
Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Ausgangspunkt ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Für die Anregung gilt $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} e^{\mu t}$.

Für $\mathbf{y}(t)$ ergibt sich

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}e^{\mu\tau}d\tau + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}e^{\mu t}$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{\mu\tau}\mathbf{I}e^{-\mathbf{A}\tau}d\tau\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}e^{\mu t}$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})\tau}d\tau\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}e^{\mu t} \qquad \text{wegen} \quad e^{\mu\tau}\mathbf{I} = e^{\mu\mathbf{I}\tau}$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\left[(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})\tau}\right]_0^t\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}e^{\mu t}$$

$$= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o + \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\left(e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})t} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}e^{\mu t}$$

Verhalten im Zeitbereich
Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Mit

$$e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})t} \quad \text{wegen} \quad e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^{-1}=\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\ldots\right)\mathbf{A}^{-1}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t)&=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o+\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\left(e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})t}-\mathbf{I}\right)\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}+\mathbf{D}\overline{\mathbf{u}}e^{\mu t}\\
&=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o+\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})t}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}-\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}+\mathbf{D}\overline{\mathbf{u}}e^{\mu t}\\
&=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o+\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}e^{(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}-\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}}+\mathbf{D}\overline{\mathbf{u}}e^{\mu t}\\
&=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_o+\left(\mathbf{C}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right)\overline{\mathbf{u}}e^{\mu t}-\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(\mu\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\overline{\mathbf{u}} \quad \text{mit} \quad e^{\mu\tau}\mathbf{I}=e^{\mu\mathbf{I}\tau}
\end{aligned}$$

Beschreibung im Frequenzbereich
E/A-Beschreibung - Übertragungsfunktionsmatrix

Ausgangspunkt ist
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \underline{E}\,\underline{d}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \underline{F}\,\underline{d}(t)$$

Laplace-Transformation liefert

$$s\,\underline{X}(s) = \underline{A}\,\underline{X}(s) + \underline{B}\,\underline{U}(s)$$
$$(s\underline{I} - \underline{A})\underline{X}(s) = \underline{B}\,\underline{U}(s)$$
$$\underline{X}(s) = (s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}\,\underline{U}(s)$$

Außerdem gilt

$$\underline{Y}(s) = \underline{C}\,\underline{X}(s) + \underline{D}\,\underline{U}(s)$$

somit

$$\underline{Y}(s) = \underbrace{\left(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}\right)}_{\underline{G}(s)}\underline{U}(s)$$

Falls $\underline{d}(t) \neq \underline{0}$

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}(s)\underline{U}(s) + \left(\underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{E} + \underline{F}\right)\underline{D}(s)$$

Beschreibung im Frequenzbereich
Übertragungsfunktionsmatrix eines EMS

Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Für den EMS gilt

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + cy(t) = F(t)$$

Laplace-Transformation

$$y(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + c} F(s) = G(s)\, F(s)$$

Im Zustandsraum gilt

$$\underline{c}^T = [1 \quad 0] \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/m & -d/m \end{bmatrix} \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Weiterhin

$$(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s-0 & -1 \\ c/m & s+d/m \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s^2 + s\frac{d}{m} + \frac{c}{m}} \begin{bmatrix} s+\frac{d}{m} & 1 \\ -\frac{c}{m} & s \end{bmatrix}$$

Somit

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + s\frac{d}{m} + \frac{c}{m}} \begin{bmatrix} 1/m \\ s/m \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + ds + c}$$

Pole von Mehrgrößensystemen
Definition

SISO-Systeme

Die Pole s_i sind die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich $G(s)$.

MIMO-Systeme

Die Pole s_i sind die Menge aller Nullstellen der Nennerpolynome der Übertragungsfunktionen $G_{ij}(s)$.

Es lässt sich zeigen (s. z.B. Lunze I):

- Pole von $\mathbf{G}(s)$ stimmen mit den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ überein.
- Nicht jeder Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist ein Pol von $\mathbf{G}(s)$.

=> Pole von $\mathbf{G}(s)$ sind Untermenge der Eigenwerte von $\mathbf{A}$

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Allgemein

Stabilität

Zustandsstabilität

Das System kehrt von einer **Auslenkung $\mathbf{x}_0$ des Zustandes aus der Gleichgewichtslage** in die Gleichgewichtslage zurück.

Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Das System besitzt bei **Erregung durch** eine **beschränkte Eingangsgröße** eine **beschränkte Ausgangsgröße**.

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Definition Zustandsstabilität

Definition (Zustandsstabilität)

Der Gleichgewichtszustand $\boldsymbol{x}_g = 0$ *des Systems* *heißt* stabil *(im Sinne von* LJAPUNOW*) oder* zustandsstabil, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $\delta > 0$ *existiert, so dass bei einem beliebigen Anfangszustand, der die Bedingung*

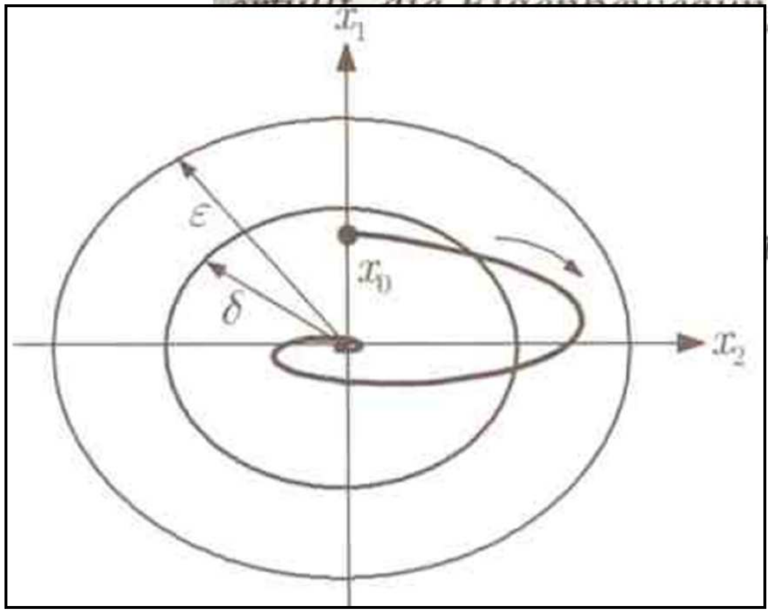
$$\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$$

… *g des Systems* *die Bedingung*

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t > 0$$

… *tszustand heißt* asymptotisch stabil, *wenn er stabil ist*

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0$$



Stabilität von Mehrgrößensystemen

Kriterien für Zustandsstabilität (ohne Beweis)

Satz (Kriterium für die Zustandsstabilität)

- *Der Gleichgewichtszustand* $\boldsymbol{x}_\mathrm{g} = \mathbf{0}$ *des Systems ist stabil, wenn die Matrix* $\boldsymbol{A}$ *diagonalähnlich ist und alle Eigenwerte der Matrix* $\boldsymbol{A}$ *die Bedingung*

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen.

- *Der Gleichgewichtszustand* $\boldsymbol{x}_\mathrm{g} = \mathbf{0}$ *des Systems ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix* $\boldsymbol{A}$ *die Bedingung*

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen.

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Definition Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Definition 2.4 (Eingangs-Ausgangs-Stabilität)
Ein lineares System (2.72), (2.73) heißt eingangs-ausgangs-stabil (E/A-stabil), wenn für verschwindende Anfangsauslenkungen $\boldsymbol{x}_o = \mathbf{0}$ *und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal*

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| < u_{\max} \quad \text{für alle } t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| < y_{\max} \quad \text{für alle } t > 0. \tag{2.74}$$

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Kriterien für Eingangs-Ausgangs-Stabilität
(ohne Beweis)

- Das System (2.72), (2.73) ist genau dann E/A-stabil, wenn sämtliche Pole s_i seiner Übertragungsfunktionsmatrix $\boldsymbol{G}(s)$ die Bedingung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2.76}$$

erfüllen.

➡ Ist das System asymptotisch stabil, so ist es auch E/A-stabil.

➡ Ist das System E/A-stabil ist es nicht notwendigerweise asymptotisch stabil

➡ Gilt $\mathrm{Re}(s_i) \leq 0$ (i=1,2,…,n) kann das System noch zustandsstabil sein

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!