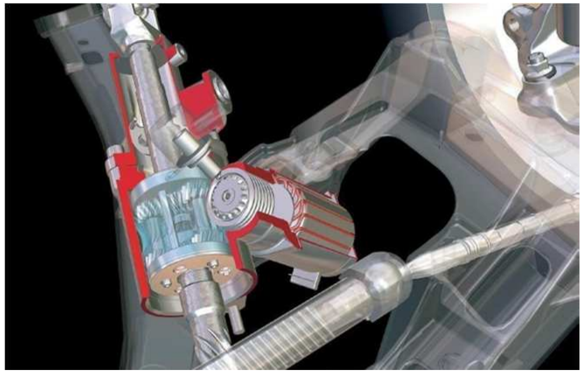
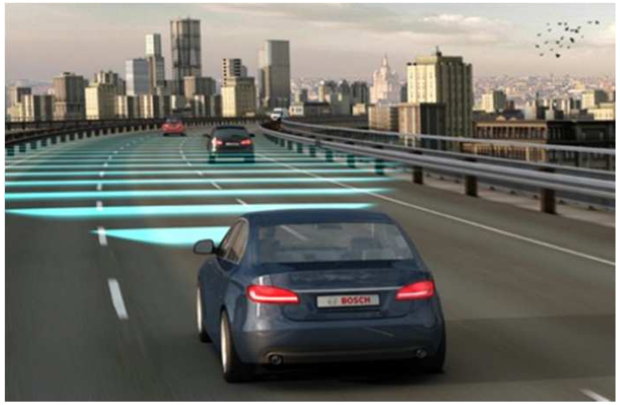
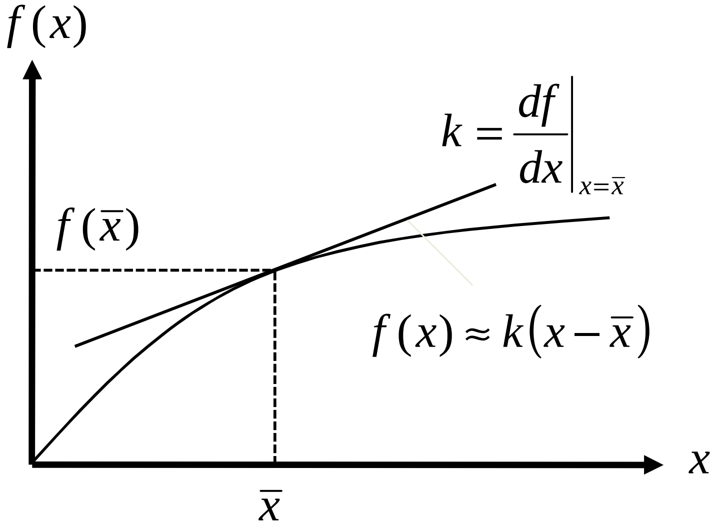
Fahrzeugmechatronik II
Beschreibung und Verhalten von Mehrgrößensystemen


Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Beschreibung im Zeitbereich
Linearisierung nichtlinearer Systeme



Ausgangspunkt ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$$

bzw.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_{n,}\right) \\ f_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_{n,}\right) \\ \dots \\ f_n\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_{n,}\right) \end{Bmatrix}$$

Beschreibung im Zeitbereich
Linearisierung nichtlinearer Systeme

mit

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{B}$$

Analog $\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{C}$ und $\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{D}$

Beschreibung im Zeitbereich
Linearisierung nichtlinearer Systeme

Verhalten im Zeitbereich
Lösung der Zustandsgleichung

Gesucht ist die Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Verhalten im Zeitbereich
Lösung der Zustandsgleichung

Verhalten im Zeitbereich
Freie Schwingung

Für die homogene Lösung gilt $\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$

Verhalten im Zeitbereich
Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Ausgangspunkt ist $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Für die Anregung gilt $\mathbf{u}(t) = \overline{\mathbf{u}} e^{\mu t}$.

Verhalten im Zeitbereich
Übergangsverhalten und stationäres Verhalten

Beschreibung im Frequenzbereich
E/A-Beschreibung - Übertragungsfunktionsmatrix

Ausgangspunkt ist

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Beschreibung im Frequenzbereich
Übertragungsfunktionsmatrix eines EMS

Übertragungsfunktionsmatrix

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Pole von Mehrgrößensystemen
Definition

SISO-Systeme
Die Pole s_i sind die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich $G(s)$.

MIMO-Systeme
Die Pole s_i sind die Menge aller Nullstellen der Nennerpolynome der Übertragungsfunktionen $G_{ij}(s)$.

Es lässt sich zeigen (s. z.B. Lunze I):

- Pole von $\mathbf{G}(s)$ stimmen mit den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ überein.
- Nicht jeder Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist ein Pol von $\mathbf{G}(s)$.

=> Pole von $\mathbf{G}(s)$ sind Untermenge der Eigenwerte von $\mathbf{A}$

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Allgemein

Stabilität

Zustandsstabilität

Das System kehrt von einer **Auslenkung $\mathbf{x}_0$ des Zustandes aus der Gleichgewichtslage** in die Gleichgewichtslage zurück.

Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Das System besitzt bei **Erregung durch** eine **beschränkte Eingangsgröße** eine **beschränkte Ausgangsgröße**.

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Definition Zustandsstabilität

Definition (Zustandsstabilität)
Der Gleichgewichtszustand $\boldsymbol{x}_{\mathrm{g}} = 0$ *des Systems* *heißt* stabil *(im Sinne von* LJAPUNOW*) oder* zustandsstabil, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $\delta > 0$ *existiert, so dass bei einem beliebigen Anfangszustand, der die Bedingung*

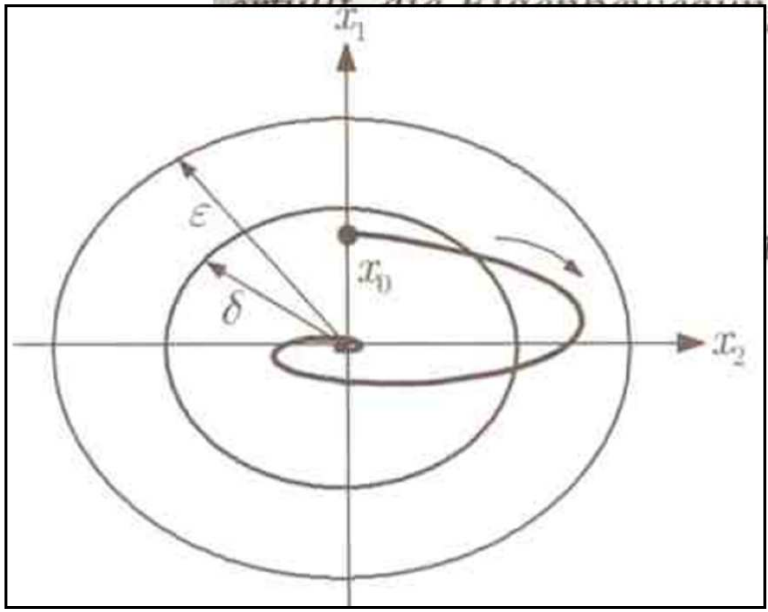
$$\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$$

…g des Systems die Bedingung

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t > 0$$

…tszustand heißt asymptotisch stabil, *wenn er stabil ist*

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = 0$$



Stabilität von Mehrgrößensystemen

Kriterien für Zustandsstabilität (ohne Beweis)

Satz (Kriterium für die Zustandsstabilität)

- *Der Gleichgewichtszustand* $\boldsymbol{x}_{\mathrm{g}} = 0$ *des Systems ist stabil, wenn die Matrix* $\boldsymbol{A}$ *diagonalähnlich ist und alle Eigenwerte der Matrix* $\boldsymbol{A}$ *die Bedingung*

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \le 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

  erfüllen.
- *Der Gleichgewichtszustand* $\boldsymbol{x}_{\mathrm{g}} = 0$ *des Systems ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix* $\boldsymbol{A}$ *die Bedingung*

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

  erfüllen.

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Definition Eingangs-Ausgangs-Stabilität

Definition 2.4 (Eingangs-Ausgangs-Stabilität)
Ein lineares System (2.72), (2.73) heißt eingangs-ausgangs-stabil (E/A-stabil), wenn für verschwindende Anfangsauslenkungen $\boldsymbol{x}_o = \mathbf{0}$ *und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal*

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| < u_{\max} \quad \text{für alle } t > 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt:

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| < y_{\max} \quad \text{für alle } t > 0. \tag{2.74}$$

Stabilität von Mehrgrößensystemen
Kriterien für Eingangs-Ausgangs-Stabilität
(ohne Beweis)

- Das System (2.72), (2.73) ist genau dann E/A-stabil, wenn sämtliche Pole s_i seiner Übertragungsfunktionsmatrix $\boldsymbol{G}(s)$ die Bedingung

$$\mathrm{Re}\{s_i\} < 0 \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2.76}$$

erfüllen.

➡ Ist das System asymptotisch stabil, so ist es auch E/A-stabil.

➡ Gilt $\mathrm{Re}(s_i) \leq 0$ (i=1,2,…,n) kann das System noch zustandsstabil sein

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!