Fahrzeugmechatronik II
SoSe 2019

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
Andreas Hartmann, M. Sc.

1. Übungsaufgabe **_Abgabe: 02.05.2018_**

Grundlagen

1) **Grundlagen zu Matrizenoperationen und spezielle Matrizenformen**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1+j \\ 2-j & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & 2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Geben Sie die Transponierte A^T und die Adjungierte A^* von der Matrix A an.
b) Welche von den oben genannten Matrizen sind Hermitesche Matrizen? Welche sind Symmetrische?
c) Berechnen Sie die Inversen jeweils für C und D.
d) Q sei quadratische Matrizen und I die Einheitsmatrix mit passenden Dimensionen. Beweisen Sie folgende Identitäten:

$$Q(I-Q)^{-1} = (I-Q)^{-1}Q \tag{1}$$

2) **Rang und Determinante einer Matrix, Eigenwerte und Eigenvektoren**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3b & b & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ mit } b \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie den Rang von A und von B.
b) Bestimmen Sie den Rang von A^TA und von AA^T. Was stellt man daraus fest?
c) Ermitteln Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenvektoren von C.
d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix D.
e) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Identität (2) anhand einer numerischen Berechnung (mit Zahlen!) der Determinante

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} R & S \\ T & V \end{bmatrix}\right) &= \det(R)\det(V - TR^{-1}S) \\ &= \det(V)\det(R - SV^{-1}T) \end{aligned} \tag{2}$$

3) **Phasenportrait eines Systems der 2. Ordnung**

Veranschaulichen Sie, wie man das Phasenportrait für das autonome System (3) grob skizzieren kann. Welches Stabilitätsverhalten weist dieses System auf?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ -4{,}5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

4) **Viertelfahrzeugmodell**

Das Viertelfahrzeugmodell ist ein einfaches Abstraktionsmodell, das für die grundsätzliche Untersuchung der Dynamik (Schwingungsverhalten) eines Fahrzeuges in vertikaler Richtung sehr gut geeignet ist. Das Modell besteht hauptsächlich aus Zwei-Massen-Schwinger, Abbildung 1. Die Unebenheit der Fahrbahn wird durch die Unebenheitshöhe y_F charakterisiert, die beispielsweise durch eine Sinusfunktion beschrieben werden kann.

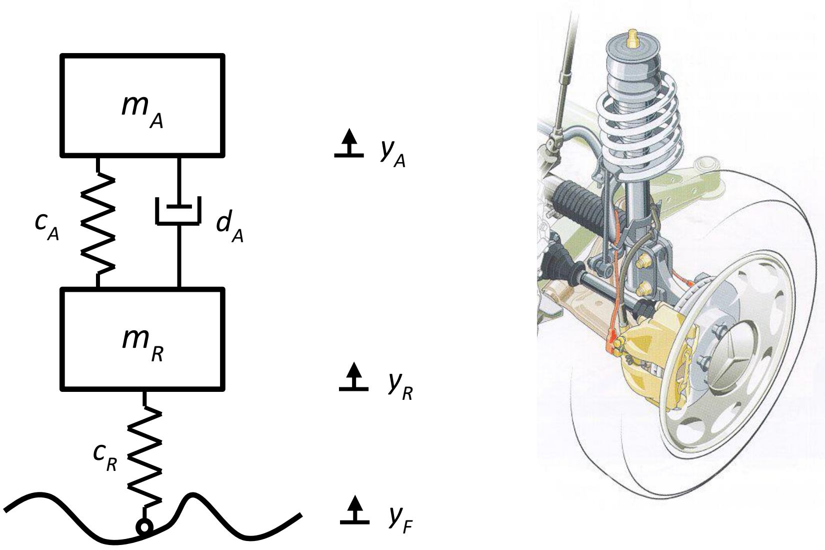


Abbildung 1: Viertelfahrzeugmodell

Gegeben sind die Parameter:

- Anteilige Aufbaumasse m_A = 280 kg
- Radmasse m_R = 45 kg
- Federkonstante der Aufhängung c_A = 16000 N/m
- Dämpfungskonstante der Aufhängung d_A = 2250 Ns/m
- Federkonstante des Rads c_R = 190500 N/m

a) Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems auf.
b) Sind die Differentialgleichungen gekoppelt? Welche Ordnung hat das System?

c) Überführen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen in das Zustandsraummodell. Wählen Sie dazu geeignete Zustände aus. Überlegen Sie sich danach, welchen Eingang das System hat. Als Ausgang sollen der Federweg der Aufhängung y_{AR} und die dynamische Radlast gewählt werden:

$$F_{RadDyn} = -c_R(y_R - y_F)$$

d) Treffen Sie eine Aussage über folgende Systemeigenschaften:

i) Linearität
ii) Zeitinvarianz
iii) Sprungfähigkeit

e) Das Viertelfahrzeugmodell soll mit Hilfe von MATLAB analysiert werden:

i) Beschreiben Sie dafür die Matrizen des in c) hergeleiteten Zustandsraummodells in einem m-file. Als Ausgang wird jetzt die Verschiebung der Aufbaumasse m_A gewählt.
ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenvektoren des Systems. Plotten Sie anschließend das PN-Diagramm (Pol-Nullstellen-Diagramm). Welche Aussage lässt sich über die Zustandsstabilität des Systems treffen?
iii) Ermitteln Sie die Übergangs- (Sprungantwort) und Gewichtungsfunktion des Systems grafisch.

f) Beschreiben Sie das Zustandsraummodell aus Aufgabe c) in MATLAB/Simulink. Verwenden Sie dazu der Block „State Space“ aus der Simulink-Bibliothek. Der Ausgangsvektor soll noch mit der Verschiebung der Aufbaumasse m_A ergänzt werden. Die Fahrbahnunebenheit soll dabei durch eine Sinus-Funktion mit der Amplitude 0,1m und der Frequenz 0,5Hz beschrieben werden. Testen Sie das Modell mit höheren Fahrzeuggeschwindigkeiten.

Zusatzaufgabe 1: Substitution eines bestimmten Integrals

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Substitution $y = 2x$,dass Gleichung (4) gilt.

$$I = \int_0^a \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a)) \tag{4}$$

b) Zeigen Sie, dass Gleichung (6) die Sprungantwort des Systems (5) darstellt. $\hat{u}$ ist dabei die konstante Amplitude der Sprungerregung am Eingang $\boldsymbol{u}$.

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}(e^{\boldsymbol{A}t} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\hat{u} \tag{6}$$

Zusatzaufgabe 2: Normen von Vektoren und Matrizen

Die *p*-Norm eines Vektors ist folgendermaßen definiert:

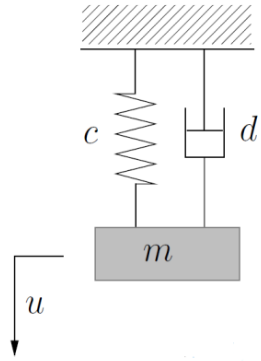
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^P\right)^{1/p}$$

Bestimmen Sie die 1-Norm, 2-Norm, und die ∞-Norm des Vektors:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zusatzaufgabe 3: Analyse eines gedämpft schwingenden Systems

Die nebenstehende Abbildung zeigt ein mechanisches Modell für ein gedämpft schwingendes System.



a) Bestimmen Sie die zugehörige Differentialgleichung.
b) Wie lautet die homogene Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung u(t)?

Die Zusatzaufgaben müssen nicht bearbeitet werden!
Alle Arbeitsschritte (Rechenwege) und Ergebnisse sind zu dokumentieren. Ihre Ausarbeitung ist in Papierform abzugeben und auf der ISIS-Plattform (bis 16:00 Uhr am Abgabetag) zusammen mit den Simulink-Modellen und m-Files (R2015a oder älter) als zip-Datei hochzuladen.