Fahrzeugmechatronik II
Optimale Regelung

Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller
M.Sc. Osama Al-Saidi
Fachgebiet Kraftfahrzeuge • Technische Universität Berlin

Einleitung
Motivation

Werden die Güteforderungen an den Regelkreis durch ein **Gütefunktional** ausgedrückt, das den Verlauf der Stell- und Regelgrößen bewertet, so kann der Regler als **Lösung eines Optimierungsproblems** gefunden werden**.**
Es werden behandelt:

- **Grundgedanke** der optimalen Regelung
- Ermittlung der **optimalen Zustandsrückführung**
- **Eigenschaften** und **Anwendungsgebiete** des Reglers

Grundgedanke der optimalen Regelung
Aufgabenstellung

Im Gegensatz zur *PI-Regelung* oder *Polzuweisung* sollen nun **Güteforderungen für den gesamten Verlauf der Stell- und Regelgrößen** erfüllt werden.

Zunächst wird gefordert, dass die **Regel- und Stellgrößen für die Überführung von y(t=0) nach y(t=t_e) über den gesamten Verlauf möglichst klein** werden.
Das **Entwurfsziel** kann dann als **Optimierungsaufgabe** formuliert werden.

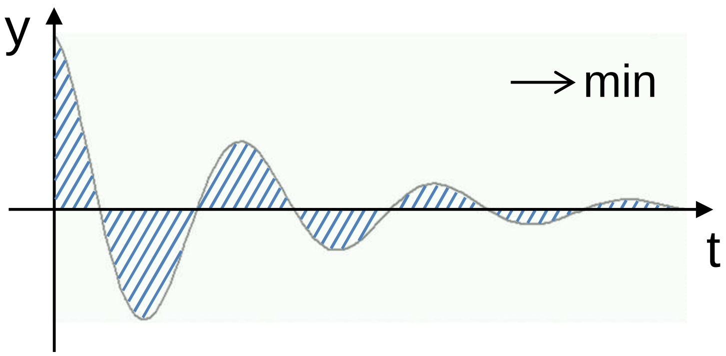
Grundgedanke der optimalen Regelung
Optimierungsaufgabe

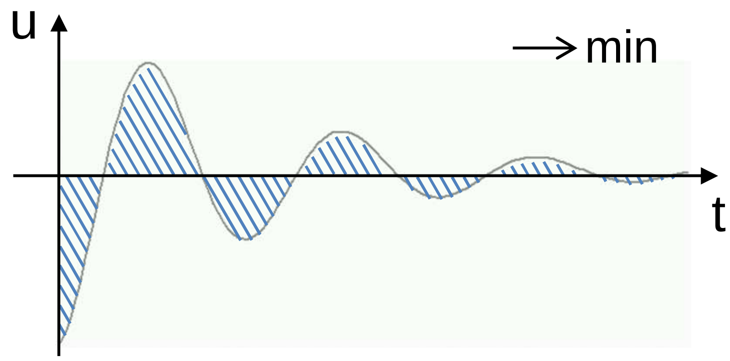
Die Optimierungsaufgabe lautet

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J_e\big(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}(t)\big) = J_e\big(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}^*(t)\big)$$

mit

$$J_e\big(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}(t)\big) = \mathbf{y}^T(t_e)\mathbf{S}\mathbf{y}(t_e) + \int_0^{t_e}\big(\mathbf{y}^T(t)\mathbf{Q}_y\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\big)\,dt$$



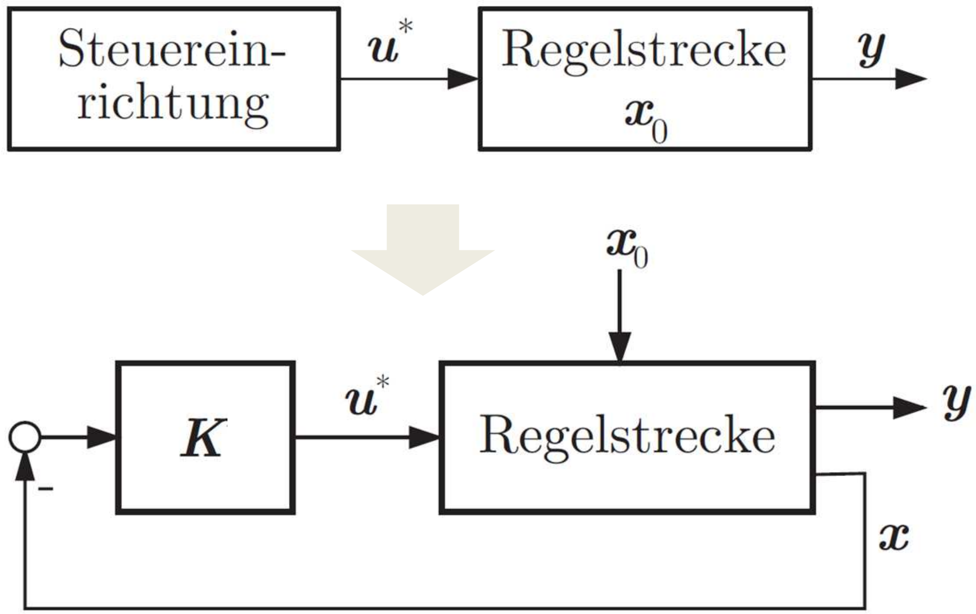


Grundgedanke der optimalen Regelung
Umformung des Optimierungsproblems

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$



Grundgedanke der optimalen Regelung
Formulierung des Optimierungsproblems

Für die Regelstrecke

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

und das Reglergesetz

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

soll das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{K}} J$$

gelöst werden, mit

$$J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) \right) dt$$

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Neuer Gütewert für die ungeregelte Strecke

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Neuer Gütewert für die ungeregelte Strecke

Satz 7.1 (Stabilitätsanalyse mit der Ljapunowgleichung)
Die Ljapunowgleichung (7.16) hat genau dann für eine beliebige gegebene symmetrische, positiv definite Matrix $\boldsymbol{Q}$ *eine symmetrische, positiv definite Lösung* $\boldsymbol{P}$*, wenn die Matrix* $\boldsymbol{A}$ *asymptotisch stabil ist.*

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems

Neuer Gütewert für die geregelte Strecke

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Ableitung der Optimalitätsbedingung

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Ableitung der Optimalitätsbedingung

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Ableitung der Optimalitätsbedingung

Optimalitätsbedingung des LQ-Problems
Hinreichende Optimalitätsbedingung

Lösung des LQ-Problems

Satz 7.2 (Optimalregler)
Betrachtet wird eine vollständig steuerbare Regelstrecke

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

und ein Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}'(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t$$

mit symmetrischer, positiv semidefiniter Wichtungsmatrix $\boldsymbol{Q}$ *und symmetrischer, positiv definiter Wichtungsmatrix* $\boldsymbol{R}$*. Unter der Voraussetzung, dass das Paar* $(\boldsymbol{A}, \bar{\boldsymbol{Q}})$ *vollständig beobachtbar ist, wobei die Matrix* $\bar{\boldsymbol{Q}}$ *aus der Zerlegung*

$$\boldsymbol{Q} = \bar{\boldsymbol{Q}}'\bar{\boldsymbol{Q}}$$

der Wichtungsmatrix $\boldsymbol{Q}$ *hervorgeht, ist die Lösung des Optimierungsproblems*

$$\min_{\boldsymbol{K}} J$$

durch die Zustandsrückführung

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{x}(t)$$

mit

$$\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}$$

gegeben. $\boldsymbol{P}$ *ist dabei die symmetrische, positiv definite Lösung der Matrix-Riccatigleichung*

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{O}.$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!