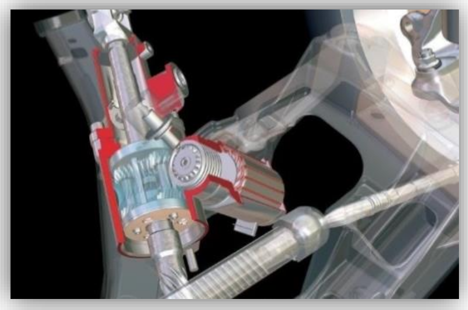



Fahrzeugmechatronik II (Übung): Grundlagen 2

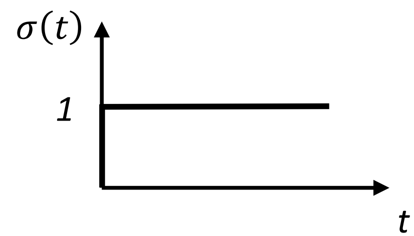
Andreas Hartmann, M. Sc.

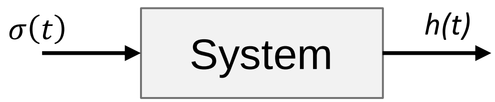
Prof. Dr.-Ing. Steffen Müller | Fachgebiet Kraftfahrzeuge | Fakultät Verkehrs- und Maschinensystem

Testsignale zur Untersuchung LTI-Systeme

➢ Einheitssprung (Sprungfunktion)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



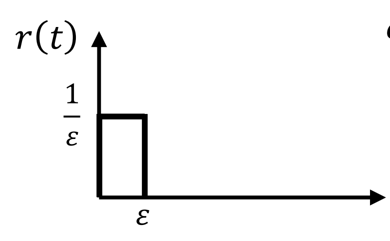


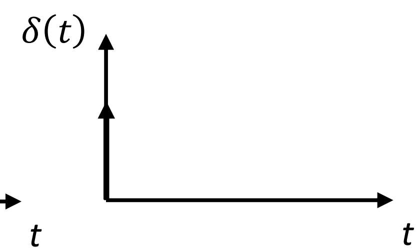
Systemantwort: Sprungantwort oder Übergangsfunktion h(t)

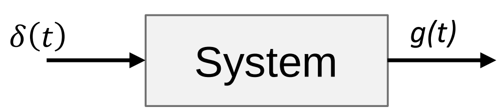
➢ Einheitsimpuls (Dirac-Impuls, Impulsfunktion)

Rechteckimpuls: $r(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dirac-Impuls: $\delta(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} r(t)$







Systemantwort: Impulsantwort oder Gewichtsfunktion g(t)

Beschreibung im Zeitbereich
Systemeigenschaften - Linearität

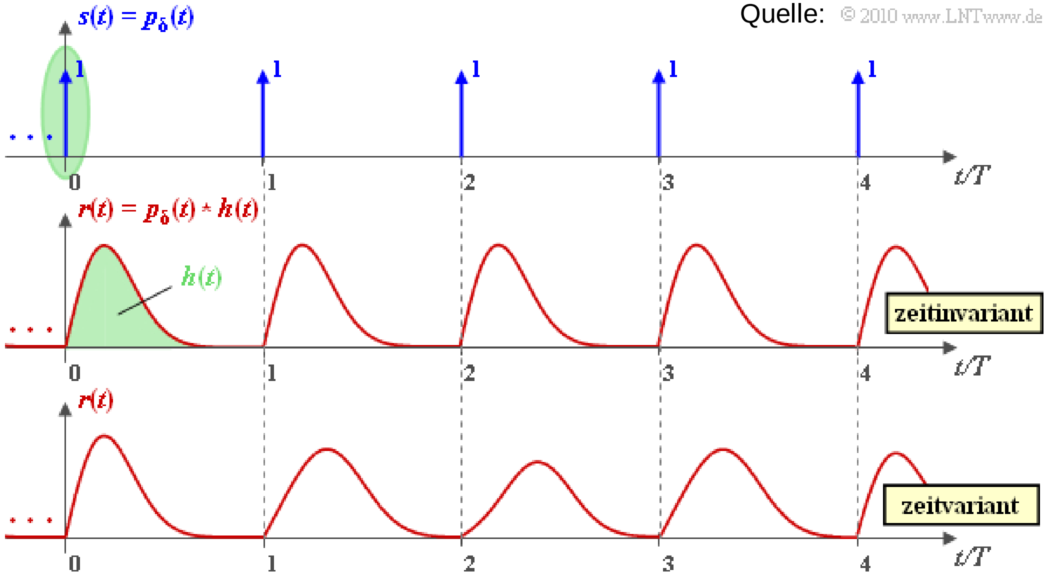
- **Linearität**
  - Ein dynamisches System heißt *linear*, wenn sich die Wirkungen zweier linear überlagerter Eingangssignale am Ausgang des Systems in gleicher Weise linear überlagern (*Superpositionsprinzip*)

$$u(t) = k\, u_1(t) + l\, u_2(t) \;\rightarrow\; y(t) = k\, y_1(t) + l\, y_2(t)$$

Beschreibung im Zeitbereich
Systemeigenschaften - Zeitinvarianz

- **Zeitinvarianz**
  - DGL hat konstante Koeffizienten.
  - Das System reagiert auf eine Erregung (also einen vorgegebenen Verlauf u(t)) unabhängig davon, wann die Erregung eintrifft.

$$u_1(t) = u_2(t - T_t) \quad \rightarrow \quad y_1(t) = y_2(t - T_t)$$



Quelle: © 2010 www.LNTwww.de

Zustandsraumdarstellung
Zustandsgrößen eines dynamischen Systems

Aus der mathematischen Sicht ist die Beschreibung eines dynamischen Systems im Zustandsraum nichts anderes als die Darstellung des mathematischen Modells mit Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung in Form eines äquivalenten Systems von *n* Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Definition: Zustand eines dynamischen Systems

Ein Vektor $\mathbf{x}$ *wird Zustand eines Systems genannt, wenn für eine beliebige Zeit* $t_e \geq 0$ *die Elemente* $x_i(0)$ *von* $\mathbf{x}$ *zum Zeitpunkt 0 zusammen mit dem Verlauf der Eingangsgröße* $u(\tau)$ *für* $0 \leq \tau \leq t_e$ *den Wert* $\mathbf{x}(t_e)$ *und den Wert der Ausgangsgröße* $\mathbf{y}(t_e)$ *eindeutig bestimmen.* $\mathbf{x}$ *heißt auch Zustandsvektor und die Komponenten* $x_i(t)$ *von* $\mathbf{x}$ *Zustands variable oder Zustandsgrößen.*

- **Typische Zustandsgrößen** sind: Strom, Spannung, Wege, Geschwindigkeiten.
- Die **Anzahl der Zustände n** stimmt mit der Anzahl der Speicherelemente (Kapazität, Induktivität, Masse, Feder) des Systems überein.
- Die **Wahl der Zustände** ist im allg. nicht eindeutig. Es können auch physikalisch nicht interpretierbare Zustände gewählt werden.

Zustandsraumdarstellung
Zustandsraummodell eines LTI-Systems

- Das Zustandsraummodell eines **linearen zeitinvarianten** Systems hat folgende Form:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t).$$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen und Formate:

Zustandsvektor	$\boldsymbol{x}$	$(n, 1)$-Vektor
Eingangsvektor	$\boldsymbol{u}$	$(m, 1)$-Vektor
Ausgangsvektor	$\boldsymbol{y}$	$(r, 1)$-Vektor
Systemmatrix	$\boldsymbol{A}$	(n, n)-Matrix
Steuermatrix	$\boldsymbol{B}$	(n, m)-Matrix
Beobachtungsmatrix	$\boldsymbol{C}$	(r, n)-Matrix
Durchgangsmatrix	$\boldsymbol{D}$	(r, m)-Matrix

Wichtig!

- Autonomes System:
  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$
- Nichtsprungfähiges System:
  $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$

Zustandsraumdarstellung (LTI-Systeme)
Beispiel 1

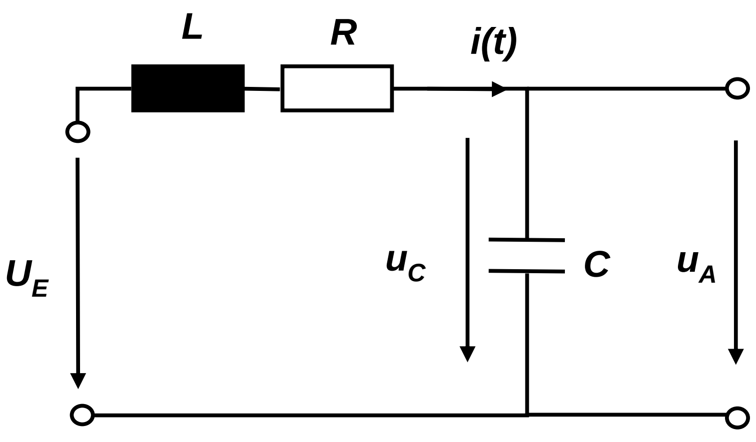
- LTI: linear time-invariant system
- Gegeben ist das dynamische System:

$$\sqrt{2} \cdot \dddot{z}(t) + 5 \cdot \ddot{z}(t) - z(t) + 2 \cdot u(t) = 0$$

  - Ordnung? Linear? Zeitvariant?
  - Zustandsraummodell?

Zustandsraumdarstellung (LTI-Systeme)
Beispiel 2: LRC-Schwingkreis

- Für den LRC-Schwingkreis (Tiefpass 2.Ordnung) soll das Zustandsraummodell aufgestellt werden mit den Ausgängen:
  - u_A
  - u_A und u_R



Kanonische Normalform
Transformation - Beispiel

- Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Gesucht: Das Zustandsraummodell in kanonischer Normalform

- **Bemerkung**: Die Umformung in die kanonische Normalform ist nicht eindeutig, denn mit v_i ist auch der a-fache Vektor av_i ein Eigenvektor von A. Alle Modelle führen jedoch auf dasselbe Produkt $\tilde{b}_i\tilde{c}_i$ der i-ten Elemente der Vektoren $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$.

1.Übungsaufgabe

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit
und Frohe Ostern!