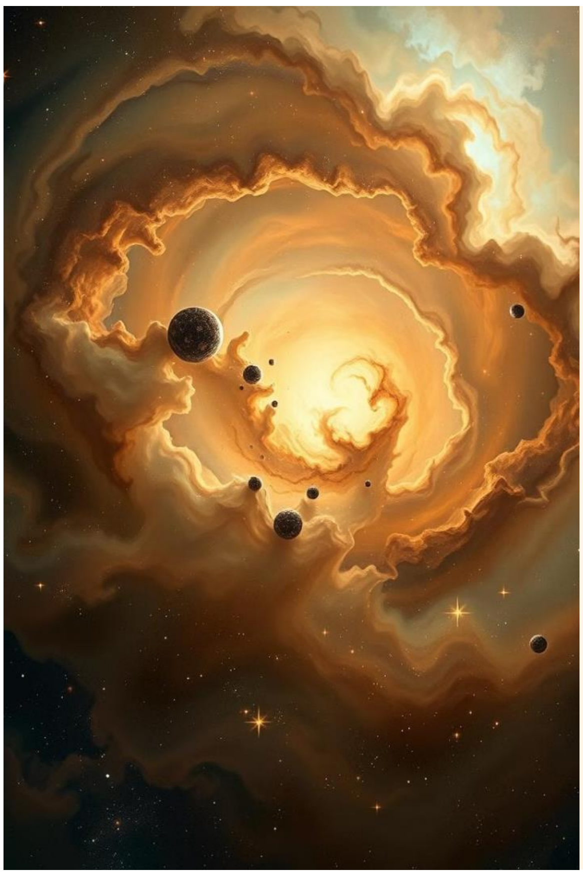


Semántica: Interpretación y Satisfacción

En el ámbito de la lógica de predicados, la semántica se basa en los conceptos de interpretación y satisfacción. Estos conceptos nos permiten comprender cómo se relacionan los símbolos del lenguaje con los objetos y relaciones del mundo real. Para definir la semántica, debemos considerar la interpretación de los símbolos y la valoración de los términos.

PA **by Pablo Argañaras**

1

Definición de Interpretación

Una *interpretación* I es una función que asigna a cada símbolo del lenguaje un elemento del dominio. Esta función debe cumplir ciertas condiciones para garantizar que los símbolos representan correctamente los objetos, funciones y relaciones del dominio.

Símbolos de Constante

Los símbolos de constante representan objetos del universo del discurso. Por ejemplo, el símbolo c_1 podría representar el número cero en el dominio de los números naturales.

Símbolos de Función

Los símbolos de función representan funciones del dominio. Por ejemplo, el símbolo $f^1{}_1$ podría representar la función sucesor en los números naturales.

Símbolos de Predicado

Los símbolos de predicado representan relaciones del dominio. Por ejemplo, el símbolo $P^2{}_1$ podría representar la relación de igualdad en los números naturales.

2

Ejemplo de Interpretación

Consideremos el ejemplo de la aritmética. Podemos definir una interpretación I para los símbolos c_1, f^1_1, f^2_1, f^2_2 y P^2_1, asignándoles sus correspondientes interpretaciones en el dominio de los números naturales.

1. $I(c_1)$

   El cero de los naturales.

2. $I(f^1_1)$

   La función sucesor en los naturales.

3. $I(f^2_1)$

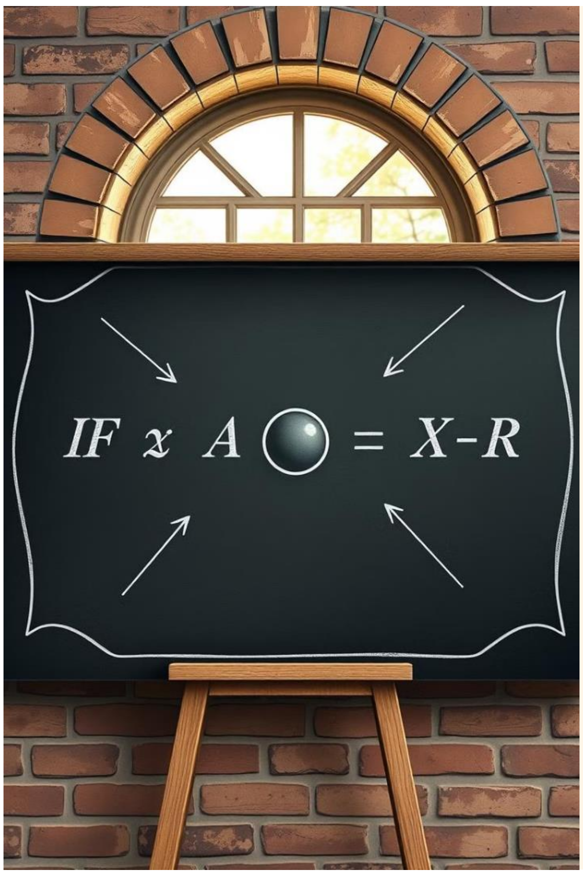
   La función suma en los naturales.

4. $I(f^2_2)$

   La función multiplicación en los naturales.

5. $I(P^2_1)$

   La relación de igualdad en los naturales.



Propiedades Formuladas

Bajo esta interpretación, podemos formular propiedades como la conmutatividad de la suma o la propiedad del neutro de la suma.

Neutro de la Suma

$(\forall x)\ P^2_1\ (f^2_1\ (x, c_1), x)$. El cero es el neutro de la suma, es decir:

$(\forall\ x)(x + 0 = x)$.

Conmutatividad de la Suma

$(\forall\ x)(\forall\ y)\ P^2_1\ (f^2_1\ (x, y), f^2_1\ (y, x))$. La suma es conmutativa, es decir:

$(\forall\ x)(\forall\ y)(x + y = y + x)$.

Interpretaciones Alternativas

Si bien la interpretación estándar es la más común, podemos definir otras interpretaciones para los símbolos. Por ejemplo, podríamos interpretar el símbolo f^2_1 como la función potencia en los naturales.

Bajo esta nueva interpretación, las propiedades formuladas anteriormente no se cumplirían en el dominio de los números naturales.

5

Definición de Valoración

Una valoración v es una función que asigna objetos a todos los términos del lenguaje. Esta función se define en base a la interpretación I y se especifica indicando cómo se asignan objetos a los símbolos de variables.

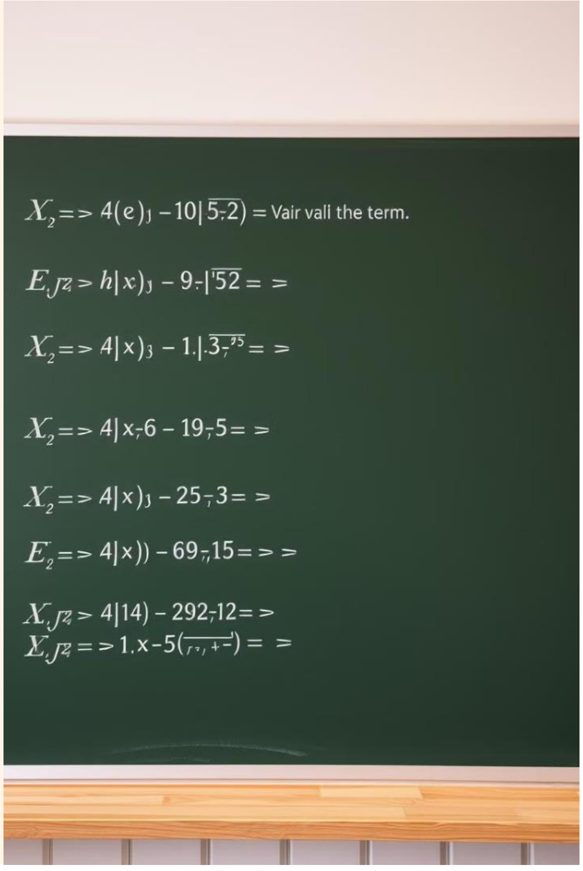
La valoración de un término se calcula recursivamente, utilizando la interpretación de los símbolos de función y la valoración de los términos que lo componen.

6

Ejemplo de Valoración

Consideremos el término $f^1_1\ (f^2_1\ (x, c_1))$ en la interpretación estándar de la aritmética. Si fijamos $v(x) = 7$, la valoración del término se obtiene de la siguiente manera:

1. **Paso 1**
   $v(f^1_1\ (f^2_1\ (x, c_1))) = I(f^1_1)(v(f^2_1\ (x, c_1)))$
2. **Paso 2**
   $suc(v(f^2_1\ (x, c_1))) = suc(I(f^2_1)(v(x), v(c_1)))$
3. **Paso 3**
   $suc(+(v(x), v(c_1))) = suc(+(7, 0))$
4. **Paso 4**
   $suc(7) = 8$

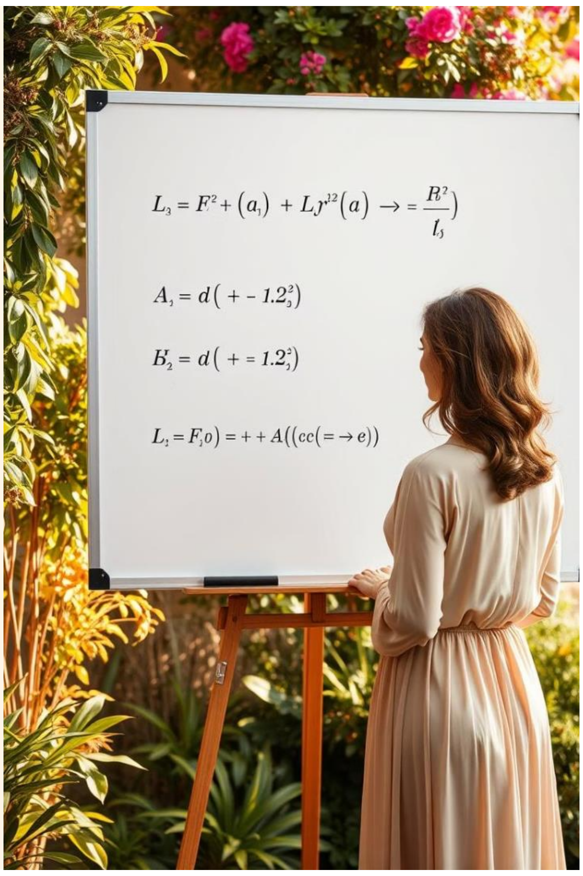


7

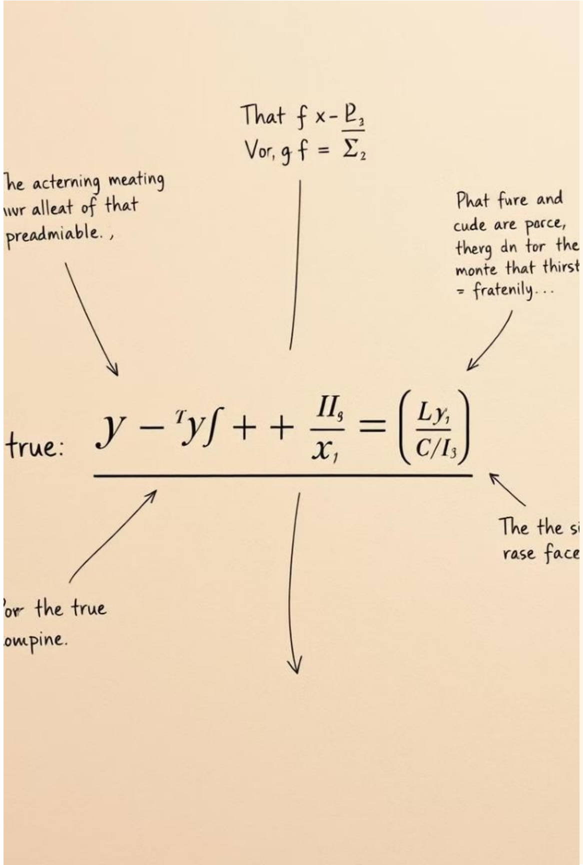
Definición de Satisfacción

La satisfacción de una fórmula A depende de la interpretación I y la valoración v. Para denotar que una fórmula A se satisface con una interpretación I y una valoración v, escribimos $\models_{I,v} A$.

La satisfacción de una fórmula se define inductivamente, considerando los diferentes tipos de fórmulas y sus componentes.



8



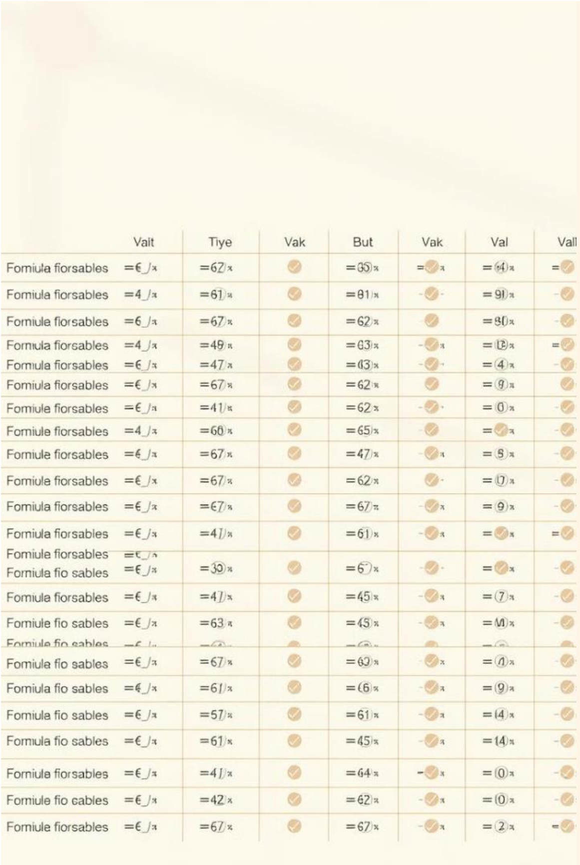
Definición de Verdad, Modelo y Validez

Una fórmula A se satisface cuando existe una interpretación I y una valoración v que cumplen $|=_{I,v}$ A. Si una fórmula A se satisface con una interpretación I cualquiera sea la valoración utilizada, se dice que A es verdadera en I, y que I es un modelo de A.

Las fórmulas verdaderas en toda interpretación se identifican como lógicamente válidas o directamente válidas. Las fórmulas válidas no proporcionan información alguna de un dominio. Las fórmulas que buscamos para representar conocimiento son las verdaderas.

Made with Gamma

9



Ejemplos de Satisfacción

Para comprender mejor el concepto de satisfacción, veamos algunos ejemplos:
La fórmula P(x) se satisface si y solo si la tupla (v(x)) pertenece a la relación representada por el símbolo de predicado P.

La fórmula ¬ A se satisface si y solo si A no se satisface.

La fórmula A ∨ B se satisface si y solo si A se satisface, B se satisface, o ambas se satisfacen.

Made with Gamma

10