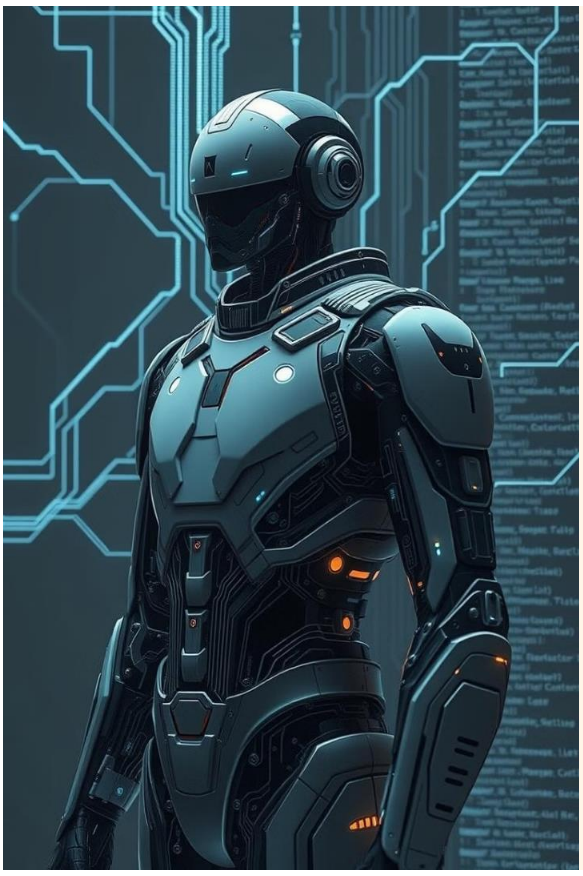


Mecanismos formales de razonamiento en Lógica de Predicados

Los mecanismos de razonamiento en la lógica de predicados son métodos sintácticos que utilizan reglas de inferencia para derivar nueva información a partir de la información inicial. Estos mecanismos nos permiten ampliar nuestro conocimiento de un dominio utilizando recursos puramente sintácticos, siempre y cuando se cumpla la propiedad de sensatez, como examinaremos más adelante.

PA **by Pablo Enrique Argañaras**

Made with Gamma

1

El Sistema Axiomático K

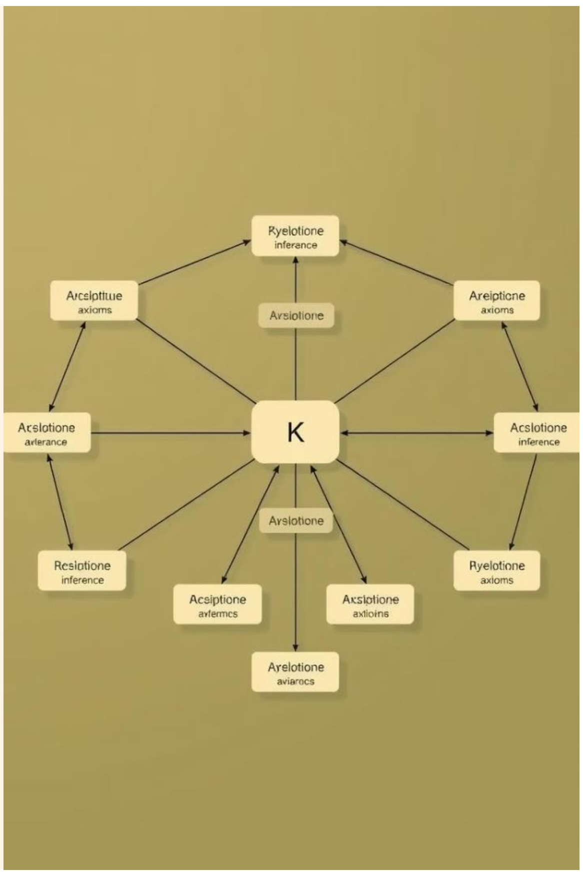
El sistema axiomático **K** (por **K**urt Gödel), una extensión del sistema L de la lógica proposicional, incorpora tres axiomas adicionales y una regla de inferencia para manejar la presencia de cuantificadores. Estos axiomas, denominados K_1 a K_6, junto con la regla de inferencia MP (modus ponens) y la regla de generalización, forman la base del sistema K.

1 Axiomas de K

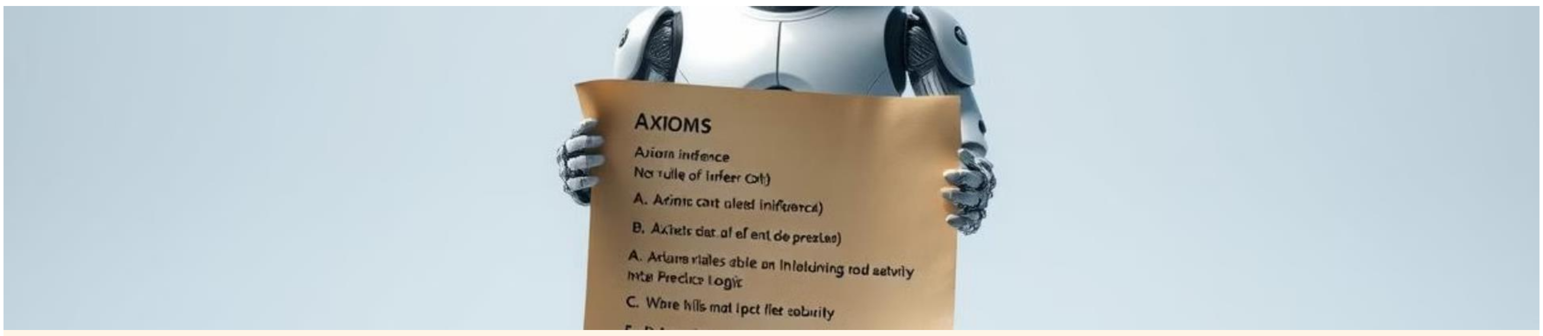
Los axiomas K_1 a K_3 son los mismos que en el sistema L, mientras que K4 a K_6 se introducen para manejar la cuantificación universal.

2 Reglas de Inferencia

El sistema K utiliza las reglas de inferencia MP y generalización, las cuales permiten derivar nuevas fórmulas a partir de las existentes.



2



Sistema axiomático K

1 Axiomas de K

El sistema axiomático K incluye los axiomas L_1, L_2 y L_3 de la lógica proposicional, y agrega tres nuevos axiomas (K_4, K_5 y K_6) para manejar los cuantificadores.

2 Reglas de inferencia de K

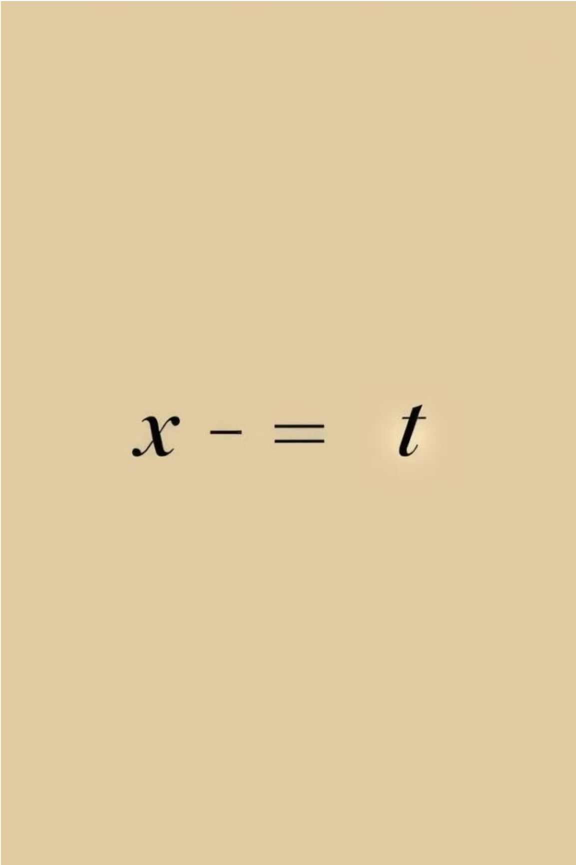
Las reglas de inferencia son el modus ponens (MP) y la regla de generalización, que permiten derivar nuevas fórmulas a partir de las premisas y axiomas.

3

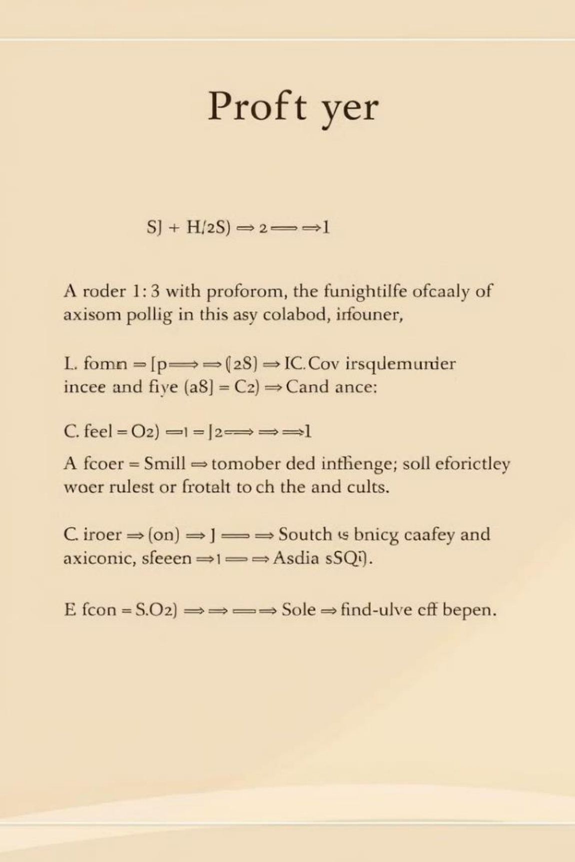
El Axioma K_5

El axioma K_5, $(\forall x)\, A(x) \rightarrow A(t)$, establece que si un término t está libre para x en A(x), entonces la fórmula cuantificada universalmente $(\forall x)\, A(x)$ implica la fórmula A(t) con la sustitución de x por t. Este axioma es crucial para la inferencia de fórmulas particulares a partir de fórmulas cuantificadas universalmente.

La condición de que t esté libre para x en A(x) asegura que la sustitución no introduce nuevas variables ligadas, evitando así errores lógicos. Este axioma es un caso general del axioma K_4, que algunos autores no incluyen.



4



Demostración en el Sistema K

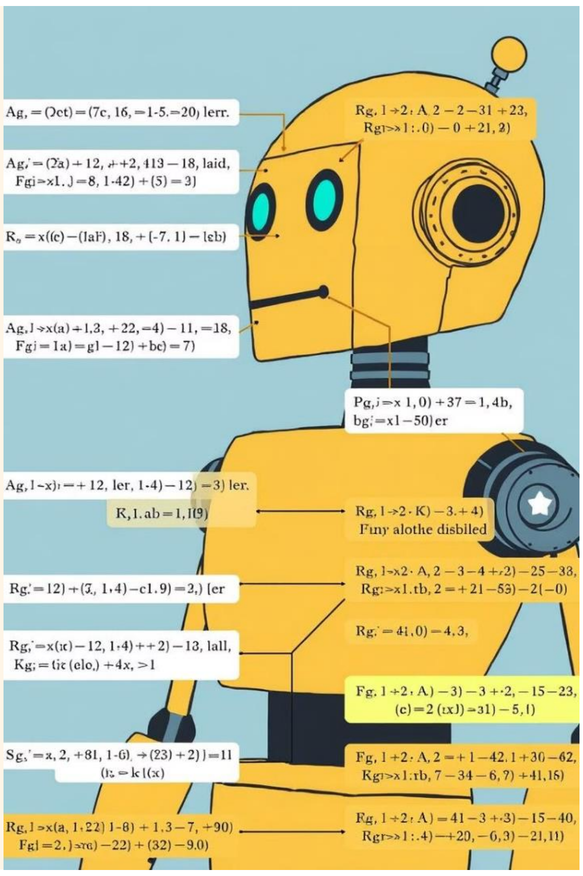
Una demostración en el sistema K es una secuencia de aplicaciones de reglas de inferencia que, a partir de premisas o axiomas, deriva una conclusión o teorema. El proceso de demostración implica la aplicación de las reglas de inferencia MP y generalización, junto con los axiomas del sistema K, para construir una secuencia lógica de fórmulas que conduzca a la conclusión deseada.

1. **Premisas**
   Las premisas son las fórmulas iniciales que se asumen como verdaderas.
2. **Axiomas**
   Los axiomas son fórmulas que se consideran verdaderas por definición.
3. **Reglas de Inferencia**
   Las reglas de inferencia permiten derivar nuevas fórmulas a partir de las existentes.
4. **Conclusión**
   La conclusión es la fórmula que se desea demostrar.

5

Demostración en el sistema K

1. **Premisas**
   Partimos de dos premisas: P_1, que todos los mendocinos son argentinos, y P_2, que Juan es mendocino.
2. **Aplicación de axiomas**
   Utilizando los axiomas K_5 y la regla de modus ponens, derivamos que Juan es argentino a partir de las premisas.
3. **Conclusión**
   La conclusión final es que Juan es argentino, lo cual hemos demostrado a partir de las premisas y las reglas de inferencia del sistema K.

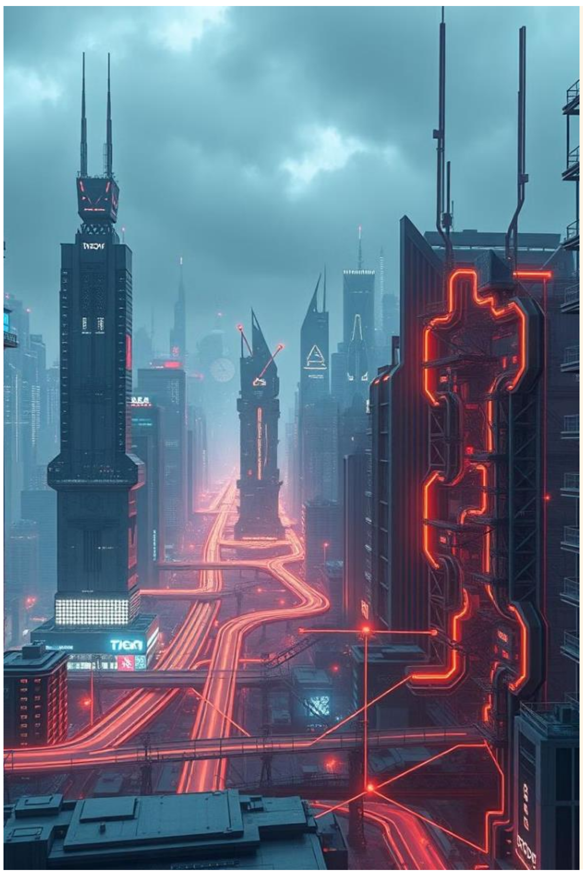


6

Ejemplo de Demostración

Consideremos un ejemplo sencillo de demostración en el sistema K. Supongamos que tenemos las siguientes premisas: P_1: Todos los mendocinos son argentinos. Es decir: $(\forall x)(P^1_1(x) \rightarrow P^1_2(x))$. P_2: Juan es mendocino. Es decir: $P^1_1(c_1)$. Deseamos demostrar la conclusión: Juan es argentino. Es decir: $P^1_2(c_1)$.

1	$(\forall x)(P^1_1(x) \rightarrow P^1_2(x))$	Premisa P1
2	$(\forall x)(P^1_1(x) \rightarrow P12(x)) \rightarrow (P^1_1(c_1) \rightarrow P^1_2(c_1))$	Instanciando el axioma K5
3	$(P^1_1(c_1) \rightarrow P^1_2(c_1))$	MP entre 1 y 2
4	$P^1_1(c_1)$	Premisa P2
5	$P^1_2(c_1)$	MP entre 3 y 4



Sensatez y completitud

Sensatez

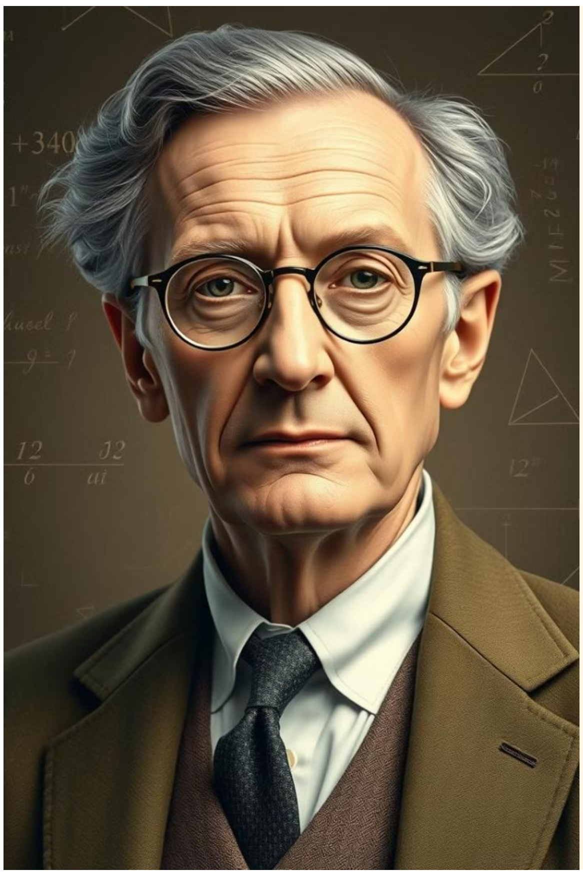
Un sistema deductivo SD es sensato (o correcto) si toda fórmula demostrable en SD es válida ($\Gamma \mid\!-_{SD} A$ implica $\Gamma \models A$).

Completitud

Un sistema deductivo SD es completo si toda fórmula válida es demostrable en SD ($\Gamma \models A$ implica $\Gamma \mid\!-_{SD} A$).

Proposición

El sistema axiomático K es sensato y completo, como demostró Gödel en 1929.



Completitud del Sistema K

El sistema axiomático K es sensato y completo. La completitud de la lógica de predicados de primer orden fue probada por Kurt Gödel en 1929. Este resultado es fundamental para la lógica matemática, ya que garantiza que el sistema K puede capturar todas las verdades lógicas de la lógica de predicados de primer orden.

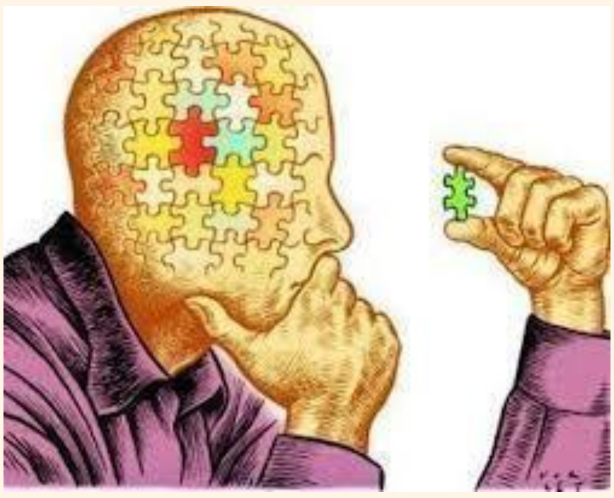
La completitud del sistema K significa que cualquier fórmula válida en la lógica de predicados de primer orden puede ser demostrada utilizando las reglas de inferencia y los axiomas del sistema K.

9

Decidibilidad de la Lógica de Predicados

La lógica de predicados de primer orden es indecidible, lo que significa que no existe un algoritmo que pueda determinar, para cualquier conjunto de premisas Γ y cualquier fórmula A, si $\Gamma \models A$ o $\Gamma \not\models A$. Esto implica que no hay un método general para determinar la validez de una fórmula en la lógica de predicados de primer orden.

La indecidibilidad de la lógica de predicados de primer orden es un resultado fundamental de la teoría de la computabilidad, que tiene implicaciones importantes para la automatización del razonamiento lógico.



10

Indecidibilidad de la lógica de predicados

Tablas de verdad

En la lógica de predicados, la idea de usar tablas de verdad para determinar la validez de una fórmula se vuelve inviable, ya que habría que considerar un número posiblemente infinito de interpretaciones y valoraciones.

Indecidibilidad

En 1936, Church y Turing demostraron que no existe un algoritmo que pueda determinar, para todo Γ y A, si $\Gamma \models A$ o $\Gamma \not\models A$. La lógica de predicados de primer orden es indecidible.

Excepciones

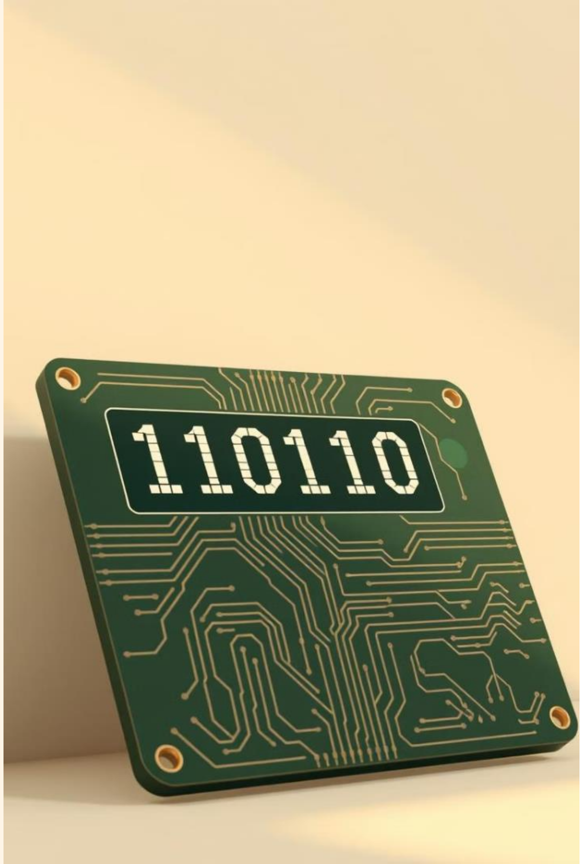
Existen lógicas particulares, más restringidas, que sí son decidibles, como aquellas sin símbolos de constantes, funciones ni predicados de más de un argumento.

11

Lógicas Decidibles

A pesar de la indecidibilidad de la lógica de predicados de primer orden, existen lógicas particulares, de alguna manera restringidas, que son decidibles. Por ejemplo, la lógica de predicados de primer orden sin símbolos de constantes ni de funciones, y con símbolos de predicados de un solo argumento, es decidible.

La decidibilidad de estas lógicas restringidas significa que existe un algoritmo que puede determinar la validez de cualquier fórmula en estas lógicas.



12

Aplicaciones de la lógica de predicados

Informática

La lógica de predicados se utiliza en la especificación y verificación de sistemas informáticos, así como en la inteligencia artificial.

Matemáticas

La lógica de predicados es fundamental en la formalización de conceptos matemáticos y en la demostración de teoremas.

Filosofía

La lógica de predicados se emplea en el análisis lógico del lenguaje natural y en la formalización de argumentos filosóficos.

Ciencia

La lógica de predicados se utiliza en la modelización y el razonamiento científico, especialmente en campos como la física y la biología.

13

Limitaciones de la lógica de predicados

1 **Expresividad limitada**

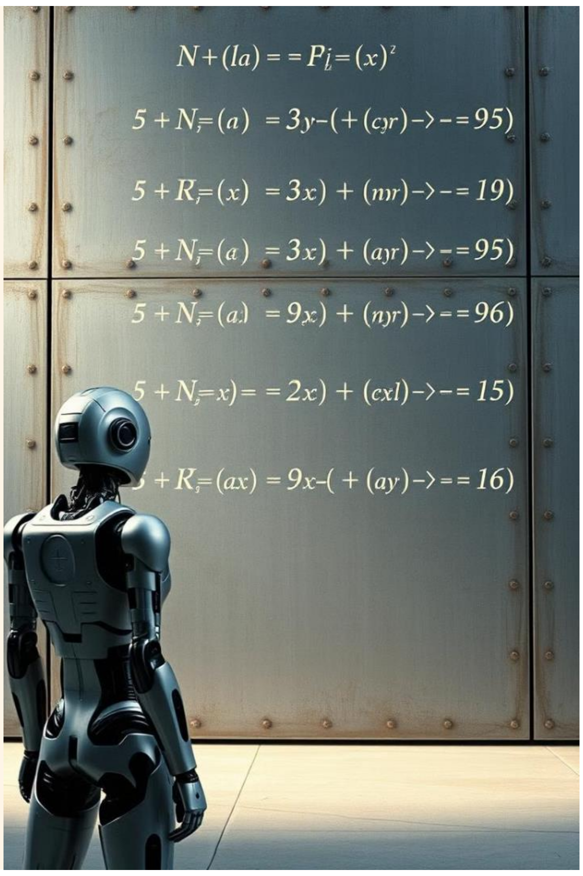
La lógica de predicados tiene dificultades para representar ciertos conceptos y relaciones del lenguaje natural, como la vaguedad o la ambigüedad.

2 **Complejidad computacional**

Los problemas de decisión en la lógica de predicados son, en general, indecidibles o computacionalmente muy costosos.

3 **Falta de contexto**

La lógica de predicados se centra en la sintaxis y la semántica formal, dejando de lado aspectos pragmáticos y contextuales del lenguaje.



14

Extensiones y alternativas

Lógica modal

La lógica modal introduce operadores que permiten representar conceptos como necesidad, posibilidad, obligación y permiso.

Lógica difusa

La lógica difusa permite manejar la incertidumbre y la vaguedad, asignando grados de pertenencia a los elementos en lugar de valores binarios.

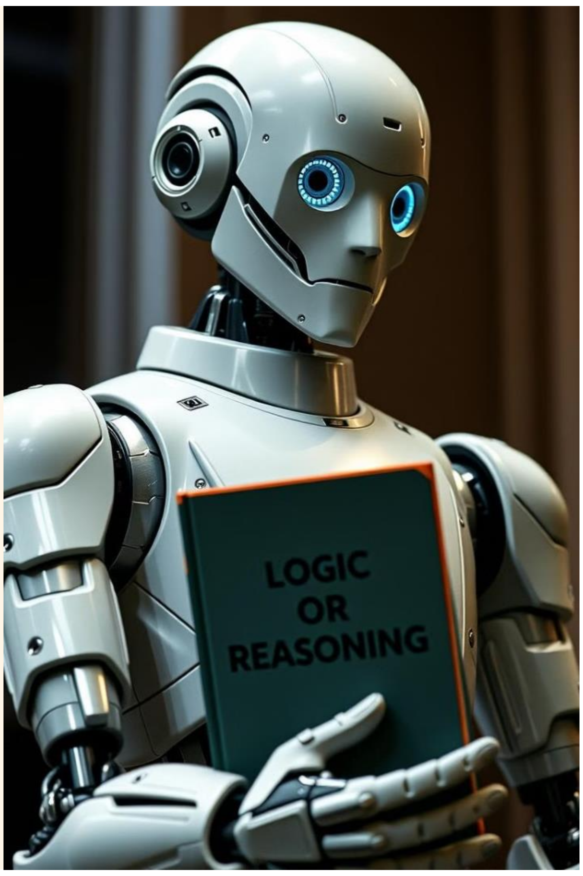
Lógica de descripción

La lógica de descripción se centra en la representación del conocimiento y el razonamiento sobre conceptos, roles y objetos.

15

Conclusión

La lógica de predicados es una herramienta poderosa para el razonamiento formal y la representación del conocimiento. A pesar de sus limitaciones, sigue siendo fundamental en diversas áreas como la informática, las matemáticas y la filosofía. Las extensiones y alternativas a la lógica de predicados, como la lógica modal y la lógica difusa, han surgido para abordar algunos de sus desafíos y ampliar su alcance.



16