# 算法第10讲

孔鲁鹏

2015-12-6

# 1 原始对偶算法

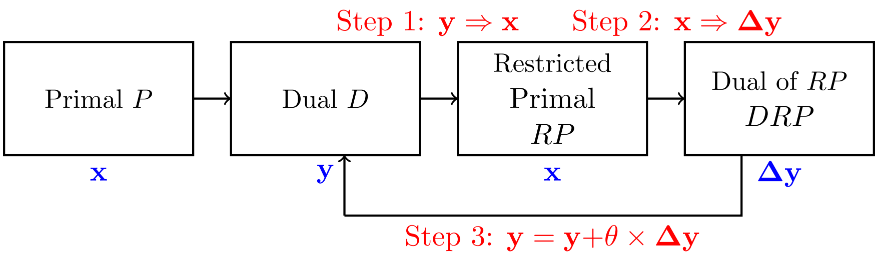
## 1.1 原始对偶算法引入

今天我们讲一个很重要的technique，叫原始对偶。原始对偶也是一种迭代式的，逐步改进式的迭代方法。这两节课都比较难，但是当你觉得它有用的时候，你就会觉得它不这么难了。原始对偶方法也是一种对偶方法，他也要解一个对偶。它充分利用问题的下界信息。原始对偶和原来的对偶单纯型不太一样，它不像对偶单纯型，一定要从一个对偶基可行解出发。原始对偶方法只要求对偶可行就行。第二，在原始对偶方法中，每次都要迭代解一个DRP。DRP是一个小线性规划，但很多时候，我们不用单纯型去解它。因为它有很多的直观的组合解释，尤其对于图论问题。

## 1.2 原始对偶算法

**原始对偶算法基本思路：**

我们用这幅图来说明原始对偶方法：




假如我们要求解远线性规划问题P，它的变量是X。我们先把它的对偶问题写出来。假如我们拿到对偶问题的一个可行解Y，我们把Y带入到对偶问题中，看看Y能指导我们得到X多少的信息，得到的X的信息又能够知道我们如何改进Y。通过这样不断迭代改进Y，找到最优解。这里有很多名词，大家先不要着急，一个个的看下去。

**得到RP**

看个例子。

- Primal P:

$$
\begin{array}{lccccccccccl}
\min & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & & \\
s.t. & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & (y_1) \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & (y_2) \\
 & & & & & \dots & & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m & (y_m) \\
 & x_1 & , & x_2 & , & \dots & , & x_n & \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Dual D:

$$\begin{array}{lcccccccc}
\max & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & + & b_my_m & & \\
s.t. & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & + & a_{m1}y_m & \leq & c_1 \\
 & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{m2}y_m & \leq & c_2 \\
 & & & & & \dots & & & & \\
 & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \dots & + & a_{mn}y_m & \leq & c_n
\end{array}$$

原始问题如上所示，我们将它的对偶问题写出来。怎么写对偶呢，我们再重复一遍。对偶就是拉格朗日乘子，每一行的约束做一个拉格朗日乘子，就是变量，叫做y1,y2,……。然后写出对偶问题。

假如我们拿到了对偶问题的一个可行解y，我们首先验证y是不是最优解。如何验证呢？

首先，如果y是最优解，则x要满足一个条件。什么条件呢？就是这样一个条件：

- Dual problem D:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\max & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & + & b_my_m & & & \\
s.t. & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & + & a_{m1}y_m & \leq & c_1 & ('=' \Rightarrow x_1 \geq 0) \\
 & & & & & \dots & & & & & \\
 & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \dots & + & a_{mn}y_m & \leq & c_n & ('<' \Rightarrow x_n = 0)
\end{array}$$

假如我们拿到一个y，我们把y带入对偶问题的约束中，对于每一条约束，如果约束1取等号，则相当于没有告诉我x1的任何信息，x1大于等于0是本来就已知的。如果约束n取小于号，大家回忆一下我们讲的互补松弛性，如果约束取小于，xn必定等于0。 我们用$J$表示满足等于号的约束：

$$\begin{array}{cc|c|c}
\multicolumn{3}{c}{} & x_n = 0 \\
\multicolumn{3}{c}{} & \Uparrow \\
\multicolumn{2}{c}{J} & \multicolumn{2}{c}{} \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\
\| & \| & & \vee \\
y_1 a_{11} & y_1 a_{12} & \cdots & y_1 a_{1n} \\
+ & + & & + \\
y_2 a_{21} & y_2 a_{22} & \cdots & y_2 a_{2n} \\
+ & + & & + \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
+ & + & & + \\
y_m a_{m1} & y_m a_{m2} & \cdots & y_m a_{mn} \\
\hline
\end{array}$$

我们回到原始问题，如果Y是一个最优解，那么红框内表示满足的等号约束，篮框内的取小于号，对应的xn=0。也就是说给我一个Y，如果是最优的，带进去，X必须要满足这些条件：

- RP:

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 & \\
 & & & & \dots & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m & \\
 & & & & & & x_i & = & 0 & i \notin J \\
 & & & & & & x_i & \geq & 0 & i \in J
\end{array}$$

我们只需要解这个限制性的原问题restricted primal (RP)就可以了。没有目标函数，只需要X满足这些约束就够了。 解这个不等式约束问题，我们把它转化成线性规划问题来做。加一些松弛变量:s1,s2,...,sm,变成下面这样一个问题:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & \epsilon = & s_1 & +s_2 & ... & +s_m & & & & \\
s.t. & & s_1 & & & & +a_{11}x_1 & ... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & & & s_2 & & & +a_{21}x_1 & ... & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & & & ... & & & ... & & \\
 & & & & & s_m & +a_{m1}x_1 & ... & +a_{mn}x_n & = b_m \\
 & & & & & & & & x_i & = 0 \quad i \notin J \\
 & & & & & & & & x_i & \geq 0 \quad i \in J \\
 & & & & & & & & s_i & \geq 0 \quad \forall i
\end{array}
$$

最优值如果等于0，表明我们能找到一个X满足RP。如果最优值大于0，RP没有可行解，所以Y就不是最优解。

**如何求解RP：DRP**

现在，我们回顾一下。如果Y是最优解，对应的X满足原先的约束，并且有些Xi=0（蓝框内）。我们只要找到这些X，Y就是最优的。如何找这些X呢？求解RP对应的线性规划，当然，我们不一定需要直接去解RP对应的线性规划，我们解RP对应的线性规划的对偶($DRP$)，也是等价的:

- $DRP$:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\max & w & = & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & ... & + & b_my_m & \\
s.t. & & & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & ... & + & a_{m1}y_m & \leq 0 \\
 & & & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & ... & + & a_{m2}y_m & \leq 0 \\
 & & & & & & & ... & & & \\
 & & & a_{1|J|}y_1 & + & a_{2|J|}y_2 & + & ... & + & a_{m|J|}y_m & \leq 0 \\
 & & & y_1 & , & y_2 & , & & , & y_m & \leq 1
\end{array}
$$

当最优值是0的时候，Y就是最优的。否则Y不是最优的。当Y不是最优时，应该怎么办。这个时候虽然Y不是最优，但是我们对这个问题的求解所花的功夫没有白费。它提供了有用的信息，它可以告诉我们怎么改进Y。

**DRP优化y**

为什么说我们求得的DRP的解可以改进Y的呢？ 我们构造一个解：$\mathbf{y'} = \mathbf{y} + \theta\mathbf{\Delta y}, \theta > 0$. 如果说它要是改进的话，我们只要理解两点。第一点目标函数的确是变大啦。第二点，y是满足约束的，y'也应该是满足约束的。

我们先看第一点。DRP问题的目标函数和对偶问题的目标函数是一样的。所以，如果DRP问题的目标函数能找到一个最优解，它是等于0的，那我们就已经stop了，如果是大于0的话，我们可以知道，$\mathbf{\Delta y^T b} = w_{OPT} > 0$, $\mathbf{y'^T b} = \mathbf{y^T b} + \theta w_{OPT} > \mathbf{y^T b}$.

第二点，y本来是满足约束的，会不会变大以后就不满足约束了呢。 对于任意的$j \in J$, $a_{1j}\Delta y_1 + a_{2j}\Delta y_2 + ... + a_{mj}\Delta y_m \leq 0$（依据DRP的约束）. 所以我们有 $\mathbf{y'^T a_j} = \mathbf{y^T a_j} + \theta\mathbf{\Delta y^T a_j} \leq \mathbf{c_j}$ 对于任意的 $\theta > 0$. 对于$j \notin J$，又分两种情况:

第一种，对于$\forall j \notin J, a_{1j}\Delta y_1 + a_{2j}\Delta y_2 + ... + a_{mj}\Delta y_m \leq 0$:

$\mathbf{y}'$肯定是一个可行解，对于 $\forall\theta > 0$ ，$\forall 1 \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned} & a_{1j}y'_1 + a_{2j}y'_2 + ... + a_{mj}y'_m && (1)\\ = \quad & a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m && (2)\\ + \quad & \theta(a_{1j}\Delta y_1 + a_{2j}\Delta y_2 + ... + a_{mj}\Delta y_m) && (3)\\ \leq \quad & c_j && (4) \end{aligned}$$

换句话说，对偶问题是无界的，原问题是不可行的。因为原问题的解可以任意大。

第二种，$\exists j \notin J, a_{1j}\Delta y_1 + a_{2j}\Delta y_2 + ... + a_{mj}\Delta y_m > 0$:

我们可以设置$\theta \leq \frac{c_j - (a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m)}{a_{1j}\Delta y_1 + a_{2j}\Delta y_2 + ... + a_{mj}\Delta y_m} = \frac{\mathbf{c_j} - \mathbf{y^T a_j}}{\mathbf{\Delta y^T a_j}}$ 从而使得$\mathbf{y'^T a_j} = \mathbf{y^T a_j} + \theta \mathbf{\Delta y^T a_j} \leq \mathbf{c_j}$.

**原始对偶算法**

讲完这些，原始对偶算法就出来啦:

- 原始对偶算法:

  Infeasible = "No"
  Optimal = "No"
  $\mathbf{y} = \mathbf{y_0}$;     $//\mathbf{y_0}$ is a feasible solution to the dual problem $D$
  **while** TRUE **do**
     Finding tight constraints index $J$, and set corresponding $x_j = 0$ for $j \notin J$.
     Thus we have a smaller RP.
     Solve DRP. Denote the solution as $\Delta\mathbf{y}$.
     **if** DRP objective function $w_{OPT} = 0$ **then**
        Optimal="Yes"
        **return** $y$;
     **end if**
     **if** $\mathbf{\Delta y^T a_j} \leq \mathbf{0}$ (for all $j \notin J$) **then**
        Infeasible = "Yes";
        **return** ;
     **end if**
     Set $\theta = \min \frac{\mathbf{c_j} - \mathbf{y^T a_j}}{\mathbf{\Delta y^T a_j}}$ for $\mathbf{\Delta y^T a_j} > 0$, $j \notin J$.
     Update $\mathbf{y}$ as $\mathbf{y} = \mathbf{y} + \theta\mathbf{\Delta y}$;
  **end while**

下面我们看一下原始对偶算法的优点。

1. 原始对偶算法肯定会结束。如果用一些防止退化的规则的话，肯定会结束的。（如何使用Bland法则防止退化的slides放到了网上）

2. 我们会看到无论是RP还是DRP都不显式的依赖于c。实际上那个c已经表达在那个J当中了。J就是我们得到的那些约束。

这就导致了原始对偶算法的一个很重要的优点。那就是：RP经常是一个纯粹性的组合问题。在最短路径问题当中，RP可以直接转化为一个组合问题–连通可达性问题。 我们把一个可行解带到对偶问题后，约束域的约束分成了两部分。一部分约束取等于号（我们看到的图中的红框）；另一部分取严格小于号（图中的蓝框），这一部分对应的Xi=0，这意味着这些约束将不需要再考虑。问题的规模一下子大大缩小。我们只需要考虑红框的问题。原始对偶的优势就在于，每次都把问题缩小一块儿。 我们现在比较一下对偶问题和DRP问题:

- 对偶问题:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\max & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & + & b_my_m & & \\
s.t. & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & + & a_{m1}y_m & \leq & c_1 \\
 & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{m2}y_m & \leq & c_2 \\
 & & & & & \dots & & & & \\
 & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \dots & + & a_{mn}y_m & \leq & c_n
\end{array}$$

- DRP:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\max & w & = & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & + & b_my_m & & \\
s.t. & & & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & + & a_{m1}y_m & \leq & 0 \\
 & & & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{m2}y_m & \leq & 0 \\
 & & & & & & & \dots & & & & \\
 & & & a_{1|J|}y_1 & + & a_{2|J|}y_2 & + & \dots & + & a_{m|J|}y_m & \leq & 0 \\
 & & & y_1 & , & y_2 & , & & , & y_m & \leq & 1
\end{array}$$

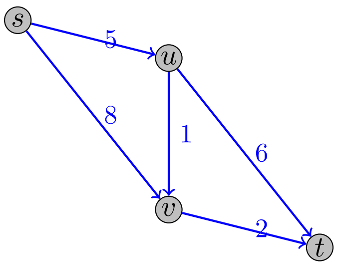
非常好的形式，DRP的目标函数和对偶问题一模一样。约束有三点不一样，第一个，约束不再是小于等于ci了，而是小于等于0。第二点，只需要管红框里的约束，蓝框里的不用管了。第三点，每个yi都小于等于1 们可以总结下如果要用动态规划的算法去解决实际问题，需要有哪些要素、解决问题的关键是什么以及怎样描述并定义子问题。

### 1.3 最短路径：Dijkstra's algorithm基本上是原始对偶算法

我们再回顾一下 Dijkstra's algorithm，我们说它不适合第一节课学，因为他他太精巧，太聪明了，而我们很难从中学到东西。 现在我们对这个问题跑一下原始对偶。原始对偶是一个套路。假如要求一个原始问题P，我们可以很机械的把它的对偶问题D写出来。然后我们把一个Y带进去，直接求出针对这个Y的DRP。如果DRP求出的解是0，那就是最优解，如果大于0，则更新Y，不断重复。这么一个机械性的东西竟然就是 Dijkstra's algorithm。

**最短路径问题**

我们看一下这个最短路径问题，四个城市:s,u,v,t。城市之间有路连接，求最短路径。




**最短路径问题的对偶以及简化**

写出它的原始线性规划:

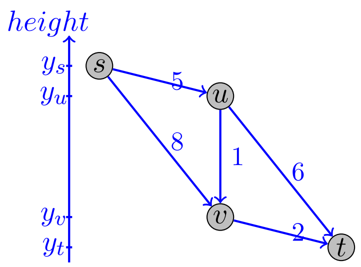
$$
\begin{array}{lccccccccccl}
\min & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 1x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & & \\
s.t. & x_1 & + & x_2 & & & & & & & = 1 & \text{vertex } s \\
 & & & & & & - & x_4 & - & x_5 & = -1 & \text{vertex } t \\
 & -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = 0 & \text{vertex } u \\
 & & - & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = 0 & \text{vertex } v \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0 & \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \leq 1 &
\end{array}
$$

对于约束条件，我们要求xi应该取0或者1。如果这样的话，问题挺难的。对于这个问题，我们可以松弛一下，变成大于等于0小于等于1.由于全单模条件，这两个条件的解是一样的。

写出原问题的对偶:

$$
\begin{array}{lcccccccll}
\max & y_s & - & y_t & & & & & & \\
s.t. & y_s & & & - & y_u & & & \leq 5 & x_1 : \text{edge } (s,u) \\
 & y_s & & & & & - & y_v & \leq 8 & x_2 : \text{edge } (s,v) \\
 & & & & & y_u & - & y_v & \leq 1 & x_3 : \text{edge } (u,v) \\
 & & - & y_t & + & y_u & & & \leq 6 & x_4 : \text{edge } (u,t) \\
 & & - & y_t & & & + & y_v & \leq 2 & x_5 : \text{edge } (v,t)
\end{array}
$$

原问题相当于对每个边设一个变量，对偶问题相当于对城市设置变量。yi可以理解为城市i的海拔高度。优化目标为ys-yt,是原问题的下边界。求它的最大值。




跑原始对偶算法，首先简化原始问题，将yt固定为0。问题变为:

$$
\begin{array}{lcccccll}
\max & y_s & & & & & & \\
s.t. & y_s & - & y_u & & & \leq 5 & x_1 : \text{edge } (s,u) \\
 & y_s & & & - & y_v & \leq 8 & x_2 : \text{edge } (s,v) \\
 & & & y_u & - & y_v & \leq 1 & x_3 : \text{edge } (u,v) \\
 & & & y_u & & & \leq 6 & x_4 : \text{edge } (u,t) \\
 & & & & & y_v & \leq 2 & x_5 : \text{edge } (v,t)
\end{array}
$$

**第一次迭代**

设置一个初始可行解: $\mathbf{y^T} = (0,0,0)$.将其带入约束，判断哪些约束取等号，哪些取不等。

根据互补松弛性，确定哪些xi=0。

$$
\begin{array}{ccccccl}
y_s & - & y_u & & & < & 5 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \\
y_s & & & - & y_v & < & 8 \quad \Rightarrow x_2 = 0 \\
& & y_u & - & y_v & < & 1 \quad \Rightarrow x_3 = 0 \\
& & y_u & & & < & 6 \quad \Rightarrow x_4 = 0 \\
& & & & y_v & < & 2 \quad \Rightarrow x_5 = 0
\end{array}
$$

验证可知在$D$中，$J = \Phi$,即 $x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$。

把当前的RP写出来:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & s_1 & +s_2 & +s_3 & & & & & & \\
s.t. & s_1 & & & +x_1 & +x_2 & & & & = 1 \quad \text{node } s \\
& & s_2 & & -x_1 & & +x_3 & +x_4 & & = 0 \quad \text{node } u \\
& & & s_3 & & -x_2 & -x_3 & & +x_5 & = 0 \quad \text{node } v \\
& s_1, & s_2, & s_3, & & & & & & \geq 0 \\
& & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & = 0
\end{array}
$$

蓝色的xi是为了突出表示xi=0。

写出DRP:

$$
\begin{array}{llll}
\max & y_s & & \\
s.t. & y_s & & \leq 1 \\
& & y_u & \leq 1 \\
& & & y_v \leq 1
\end{array}
$$

如果原先的$\mathbf{y}$(0,0,0)是最优解的话,对应的$x$一定满足RP， $\Delta\mathbf{y}$满足DRP.

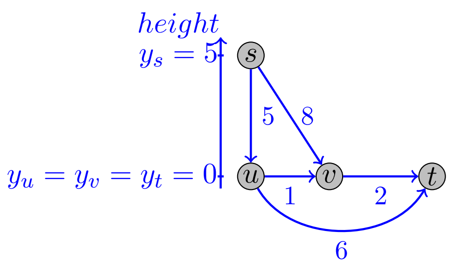
原始对偶算法应用到图论上，常常是这样的:写出的线性规划，对应的DRP形式很特殊，解能够很明显的看出来。

采用组合技术求解$DRP$,通过DRP求解，可以知道当前的y不是最优。对于DRP的最优值，找一个最优解 $\Delta\mathbf{y}^\mathbf{T} = (1, 0, 0)$。（最优解不唯一）

计算步长$\theta$: $\theta = \min\{\frac{\mathbf{c_1} - \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{a_1}}{\Delta\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{a_1}}, \frac{\mathbf{c_2} - \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}}{\Delta\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{a_2}}\} = \min\{5, 8\} = 5$

更新 $\mathbf{y}$: $\mathbf{y}^\mathbf{T} = \mathbf{y}^\mathbf{T} + \theta\Delta\mathbf{y}^\mathbf{T} = (5, 0, 0)$.

经过一次迭代更新以后，城市之间的状态如图:




我们就拿这一步来看，为什么说原始对偶算法就是Dijkstra's algorithm。

从Dijkstra's algorithm的角度来看:

DRP的最优解:$\Delta\mathbf{y}^\mathbf{T} = (1, 0, 0)$，对应着Dijkstra's algorithm滴墨水的起始位置，也是被染的点集合$S = \{s\}$。第一次的最优解对应染的第一个点。DRP的实际目的找到墨水所要染的点。

步长 $\theta = \min\{\frac{\mathbf{c_1-y^Ta_1}}{\mathbf{\Delta y^Ta_1}}, \frac{\mathbf{c_2-y^Ta_2}}{\mathbf{\Delta y^Ta_2}}\} = \min\{5,8\} = 5$:对于现在墨水所染得点集合 $S$ ，下一次墨水能染的最短距离。

第二次迭代

将新的可行解 $\mathbf{y^T = (5,0,0)}$带入，检查约束:

$$\begin{array}{ccccccl}
y_s & - & y_u & & = & 5 & \\
y_s & & & - & y_v & < & 8 \Rightarrow x_2 = 0 \\
 & & y_u & - & y_v & < & 1 \Rightarrow x_3 = 0 \\
 & & y_u & & & < & 6 \Rightarrow x_4 = 0 \\
 & & & & y_v & < & 2 \Rightarrow x_5 = 0
\end{array}$$

可知在$D$中: $J = \{1\}$, 即 $x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$.

对应的RP:

$$\begin{array}{lllllllllll}
\min & s_1 & +s_2 & +s_3 & & & & & & & \\
s.t. & s_1 & & & +x_1 & +x_2 & & & & = 1 & \text{node } s \\
 & & s_2 & & -x_1 & & +x_3 & +x_4 & & = 0 & \text{node } u \\
 & & & s_3 & & -x_2 & -x_3 & & +x_5 & = 0 & \text{node } v \\
 & s_1, & s_2, & s_3, & & & & & & \geq 0 & \\
 & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & = 0 &
\end{array}$$

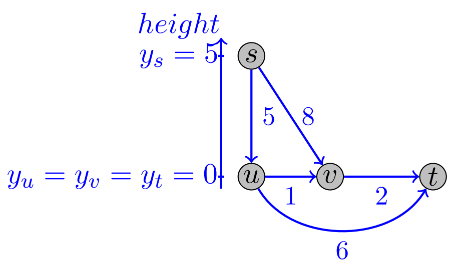
写出DRP:

$$\begin{array}{llll}
\max & y_s & & \\
s.t. & y_s & & \leq 1 \\
 & & y_u & \leq 1 \\
 & & & y_v \leq 1
\end{array}$$

采用组合技术求解$DRP$,通过DRP求解，可以知道当前的y不是最优。对于DRP的最优值，找一个最优解 $\Delta\mathbf{y^T} = (1,0,0)$。（最优解不唯一） 步长$\theta$: $\theta = \min\{\frac{\mathbf{c_1-y^Ta_1}}{\mathbf{\Delta y^Ta_1}}, \frac{\mathbf{c_2-y^Ta_2}}{\mathbf{\Delta y^Ta_2}}\} = \min\{5,8\} = 5$。

更新$\mathbf{y}$: $\mathbf{y^T} = \mathbf{y^T} + \theta\Delta\mathbf{y^T} = (5,0,0)$.

经过第二次迭代更新以后，城市之间的状态如图:




从Dijkstra's algorithm的角度来看:

DRP的最优解:$\Delta\mathbf{y^T} = (1,1,0)$，对应着被染的点集合$S = \{s,u\}$ 。事实上，DRP的求解通过从$s$可达的节点中寻找确定。

步长 $\theta = \min\{\frac{\mathbf{c_2-y^Ta_2}}{\mathbf{\Delta y^Ta_2}}, \frac{\mathbf{c_3-y^Ta_3}}{\mathbf{\Delta y^Ta_3}}, \frac{\mathbf{c_4-y^Ta_4}}{\mathbf{\Delta y^Ta_4}}\} = \min\{3,1,6\} = 1$:对于现在墨水所染得点集合 $S$ ，下一次墨水能染的最短距离。

第三次迭代

将新的可行解 $\mathbf{y^T} = (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$.带入，检查约束:

$$
\begin{array}{ccccccl}
y_s & - & y_u & & & = & 5 \\
y_s & & & - & y_v & < & 8 \quad \Rightarrow x_2 = 0 \\
& & y_u & - & y_v & = & 1 \\
& & y_u & & & < & 6 \quad \Rightarrow x_4 = 0 \\
& & & & y_v & < & 2 \quad \Rightarrow x_5 = 0
\end{array}
$$

可知在$D$中: $J = \{1, 3\}$, 即 $x_2, x_4, x_5 = 0$.

对应的RP:

$$
\begin{array}{lcccccccccl}
\min & s_1 & +s_2 & +s_3 & & & & & & & \\
s.t. & s_1 & & & +x_1 & +x_2 & & & & = 1 & \text{node } s \\
& & s_2 & & -x_1 & & +x_3 & +x_4 & & = 0 & \text{node } u \\
& & & s_3 & & -x_2 & -x_3 & & +x_5 & = 0 & \text{node } v \\
& s_1, & s_2, & s_3, & & & & & & \geq 0 & \\
& & & & & x_2, & & x_4, & x_5 & = 0 &
\end{array}
$$

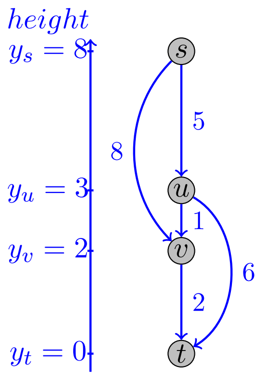
写出DRP:

$$
\begin{array}{lccccl}
\max & y_s & & & & \\
s.t. & y_s & - & y_u & & \leq 0 \\
& & & y_u & - \quad y_v & \leq 0 \\
& y_s & , & y_u & , \quad y_v & \leq 1
\end{array}
$$

采用组合技术求解$DRP$,通过DRP求解，可以知道当前的y不是最优。对于DRP的最优值，找一个最优解 $\Delta \mathbf{y^T} = (1, 1, 1)$。（最优解不唯一） 步长$\theta$: $\theta = \min\{\frac{\mathbf{c_4 - y^T a_4}}{\mathbf{\Delta y^T a_4}}, \frac{\mathbf{c_5 - y^T a_5}}{\mathbf{\Delta y^T a_5}}\} = \min\{5, 2\} = 2$。

更新$\mathbf{y}$: $\mathbf{y^T} = \mathbf{y^T} + \theta \Delta \mathbf{y^T} = (8, 3, 2)$..

经过第三次迭代更新以后，城市之间的状态如图:




从Dijkstra's algorithm的角度来看:

DRP的最优解: $\Delta \mathbf{y^T} = (1, 1, 1)$，对应着被染的点集合$S = \{s, u, v\}$。事实上，DRP的求解通过从$s$可达的节点中寻找确定。

步长$\theta = \min\{\frac{\mathbf{c_4 - y^T a_4}}{\mathbf{\Delta y^T a_4}}, \frac{\mathbf{c_5 - y^T a_5}}{\mathbf{\Delta y^T a_5}}\} = \min\{5, 2\} = 2$:对于现在墨水所染得点集合 $S$ ，下一次墨水能染的最短距离。

**第四次迭代**

将新的可行解$\mathbf{y^T} = (\mathbf{8}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$.带入，检查约束:

$$\begin{array}{cccccccl}
y_s & - & y_u & & & {\color{red}=} & 5 & \\
y_s & & & - & y_v & {\color{blue}<} & 8 & {\color{blue}\Rightarrow x_2 = 0} \\
 & & y_u & - & y_v & {\color{red}=} & 1 & \\
 & & y_u & & & {\color{blue}<} & 6 & {\color{blue}\Rightarrow x_4 = 0} \\
 & & & & y_v & {\color{red}=} & 2 &
\end{array}$$

可知在$D$中: ${\color{red}J = \{1, 3\}}$, 即 $x_2, x_4, x_5 = 0$.

对应的RP:

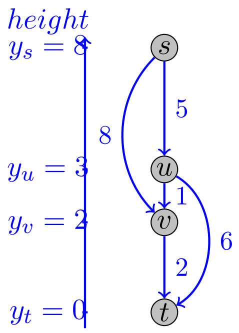
$$\begin{array}{llllllllll}
\min & s_1 & +s_2 & +s_3 & & & & & & \\
s.t. & s_1 & & & {\color{red}+x_1} & {\color{blue}+x_2} & & & & = 1 \quad \text{node } s \\
 & & s_2 & & {\color{red}-x_1} & & {\color{red}+x_3} & {\color{blue}+x_4} & & = 0 \quad \text{node } u \\
 & & & s_3 & & {\color{blue}-x_2} & {\color{red}-x_3} & & {\color{red}+x_5} & = 0 \quad \text{node } v \\
 & s_1, & s_2, & s_3, & & & & & & \geq 0 \\
 & & & & & {\color{blue}x_2,} & & {\color{blue}x_4} & & {\color{blue}= 0}
\end{array}$$

写出DRP:

$$\begin{array}{llllll}
\max & y_s & & & & \\
s.t. & y_s & - & y_u & & \leq 0 \\
 & & & y_u & - \; y_v & \leq 0 \\
 & & & & y_v & \leq 0 \\
 & y_s & , & y_u & , \; y_v & \leq 1
\end{array}$$

采用组合技术求解$\Delta\mathbf{y^T} = (0, 0, 0)$，可知当前时刻$y$为最优解。

经过第四次迭代更新以后，城市之间的状态如图:




从Dijkstra's algorithm的角度来看:

DRP的最优解: $\Delta\mathbf{y^T} = (0, 0, 0)$，表示能找到一个路径path从s到t，强迫$y_s = 0$ 。这对应Dijkstra's algorithm中那滴墨水把所有的点都染到了。

Dijkstra's algorithm的另一个直观解释为：用一些绳子连着一些球，拎起s点，然后让t点在最下面，求两者最短距离。

原始算法十分重要，希望大家好好掌握

# 2 网络流及其应用1

## 2.1 概述

我们来讲网络流问题:

- MaximumFlow problem: Ford-Fulkerson algorithm, MaxFlow-MinCut theorem;
- A duality explanation of Ford-Fulkerson algorithm and MaxFlow-MinCut theorem(实际上就是强对偶性);
- Scaling technique to improve Ford-Fulkerson algorithm（值得大家学习）;
- Solving the dual problem: Push-Relabel algorithm;
- Extensions of MaximumFlow problem: lower bound of capacity, multiple sources & multiple sinks, indirect graph;

## 2.2 网络流的简短历史

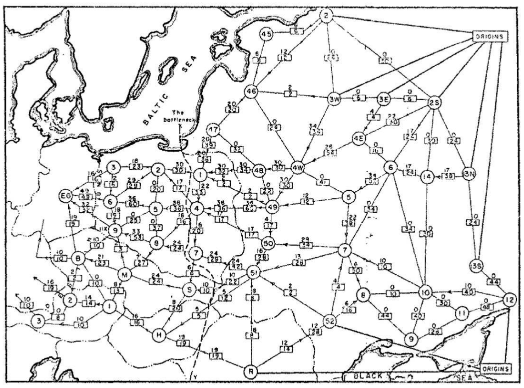


Figure 1: Soviet Railway network, 1955

...... 1955年，美国开始在想，如何轰炸铁路，来阻断苏联同社会主义国家之间的联系。......

- *".... From Harris and Ross [1955]: Schematic diagram of the railway network of the Western Soviet Union and Eastern European countries, with a maximum flow of value 163,000 tons from Russia to Eastern Europe, and a cut of capacity 163,000 tons indicated as "The bottleneck". ...."*
- *A recently declassified U.S. Air Force report indicates that the original motivation of minimum-cut problem and Ford-Fulkerson algorithm is to disrupt rail transportation the Soviet Union [A. Shrijver, 2002].(2002年的解密文档)*

1955年提出的问题，到了1956年，Ford and Fulkerson就给了一个算法。从这个事情中又能够体现着出这件事情：原始问题的实际问题是什么，数学的抽象-建模是第二部，第三步是算法设计。

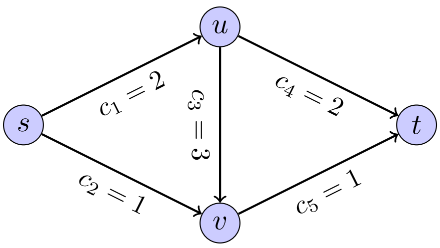
| Year | Developers | Time-complexity |
|---|---|---|
| 1956 | Ford and Fulkerson | $O(mC)$ and $O(m^2 \log C)$ |
| 1972 | Edmonds and Karp | $O(m^2 n)$ |
| 1970 | Dinitz | $O(n^2 m)$ |
| 1974 | Karzanov | $O(n^3)$ |
| 1983 | Sleator and Tarjan | $O(nm \log n)$ |
| 1988 | Goldberg and Tarjan | $O(n^2 m \log(\frac{n^2}{m}))$ |
| 2012 | Orlin | $O(nm)$ |

## 2.3 最大流问题

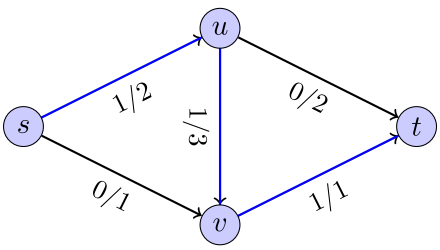
**问题描述**

- 输入: 一个有向图 $G =< V, E >$.每个顶点v表示一个城市，每条边e表示城市之间的路，每条边$e$有个容量限制$C_e$. 两个特殊的点:起点**source** $s$ 和终点 **sink** $t$;
- 输出: 对于每一条边 $e = (u, v)$, 分给一条流$f(u, v)$ 最终使得$\sum_{u,(s,u)\in E} f(s, u)$ 最大.

具体举例如下:




目标:从s点运尽量多的货物到目的地t。




**定义：flow**

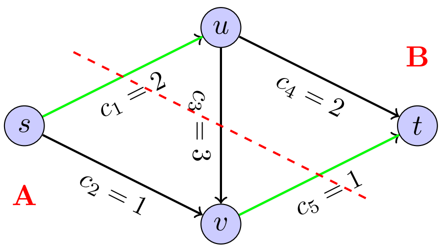
$f : E \to R^+$ 是一个 $s - t$ **flow** 如果:

1. (Capacity constraints): $0 \leq f(e) \leq C_e$ 对于全部的 $e$成立;
2. (Conservation constraints): 对于任何中间节点$v \in V - \{s, t\}$, $f^{in}(v) = f^{out}(v)$, 其中 $f^{in}(v) = \sum_{e \text{ into } v} f(e)$ 并且 $f^{out}(v) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e)$. (直观: 输入 = 输出 对于任何节点.)

**flow 的值** $f$被定义为 $V(f) = f^{out}(s)$.

**定义：$s - t$ cut**

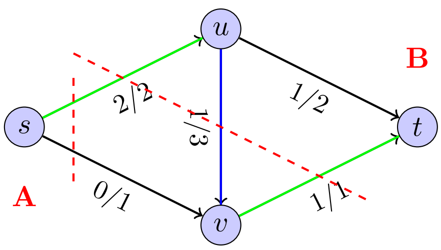
一个 $s-t$ **cut**是一个划分 $V$ 的$(A, B)$ 从而使得 $s \in A$ and $t \in B$. **割 cut** $(A, B)$**的capacity** 被定义为 $C(A, B) = \sum_{e \text{ from } A \text{ to } B} C(e)$.



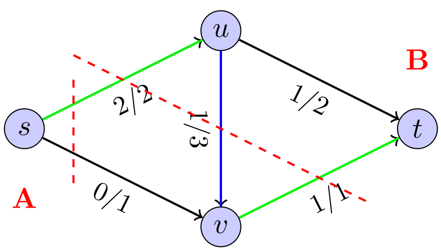

$$C(A,B)=3,\text{只计从A到B的，不计从B到A的}$$

**定义：流值引理**

给定一个流 $f$. 对于 任何 $s-t$ 割 cut $(A,B)$, 通过这个割的流是一个常量$V(f)$. 通常, $V(f)=f^{out}(A)-f^{in}(A)$.




$$V(f)=2+0=2$$
$$f^{out}(A)-f^{in}(A)=2+1-1=V(f)$$




**引理证明**

- 我们有: $0=f^{out}(v)-f^{in}(v)$ 对于任何的 $v\neq s$ 和 $v\neq t$.这是条件。
- 因此我们有:

$$\begin{aligned}
V(f) &= f^{out}(s)-f^{in}(s) \qquad\qquad //\text{提示: } f^{in}(s)=0;\\
&= \sum\nolimits_{v\in A}(f^{out}(v)-f^{in}(v))\\
&= \left(\sum\nolimits_{\text{e from A to B}} f(e)+\sum\nolimits_{\text{e from A to A}} f(e)\right)\\
&\quad -\left(\sum\nolimits_{\text{e from B to A}} f(e)+\sum\nolimits_{\text{e from A to A}} f(e)\right)\\
&= f^{out}(A)-f^{in}(A)
\end{aligned}$$

以上是一些定义和引理。现在回到原问题。依据我们现在所学的知识，采用什么方法使得流最大。贪心可以，但肯定不太好，分支特别多，不是一个太好的选择。线性规划肯定可以，是万能的。首先这个问题不好分，是图的问题，不好规约。下面看一下1956年的Ford-Fulkerson algorithm 。

## 2.4 Ford-Fulkerson algorithm

**Lester Randolph Ford Jr. 和 Delbert Ray Fulkerson**

Figure 2: Lester Randolph Ford Jr. and Delbert Ray Fulkerson

**尝试1:动态规划技术**

- 动态规划似乎不太好用.
- 实际上，当前不存在一个最大流 问题可以真正的被看做是属于动态规划问题.
- 我们知道 最大流 问题 是在 **P** 中因为它可以写成动态规划 (见 Lecture 8).
- 然而, 网络结构存在它自己的属性使得能够有一个更有效的算法，非正式的称作 **network simplex**, 等等.

**尝试2:**改进 **策略**

问题不好分，我们尝试改进的策略。

Improvement($f$)

```
x = x0; //starting from an initial solution;
while TRUE do
    x = Improve(x); //move one step towards optimum;
    if Stopping(x, f) then
        break;
    end if
end while
return x;
```

**迭代框架的三个关键问题**

三个问题:

1. 如何构建一个初始解?
    - 对于 最大流 问题, 一个0-流可以通过通过设置$f(e) = 0$得到，对于任意$e$.
    - 很容易验证h CONSERVATION 和 CAPACITY 约束都被满足，对于0-流来说.
2. 如何改进这个解决办法?
3. 何时停止?

先看一个随便一想就能想到的办法。

- 假定$p$ 是一个在网络 $G$中的简单 $s-t$ path.

```
Initialize f(e) = 0 for all e.
while there is an s − t path in graph G do
    arbitrarily choose an s − t path p in G;
    f =AUGMENT(p, f);
end while
return f;
```

我们定义 $bottleneck(p, f)$ 作为 path $p$上边的最小capacity.

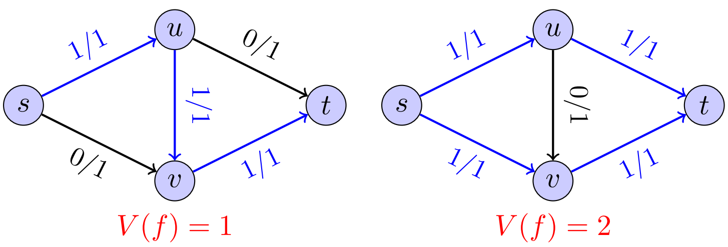
AUGMENT$(p, f)$ :

```
Let b = bottleneck(p, f);
for each edge e = (u, v) ∈ P do
    if (u, v) is a forward edge then
        increase f(u, v) by b;
    else
        decrease f(u, v) by b;
    end if
end for
```

这是一个失败的算法。

为什么会失败呢?

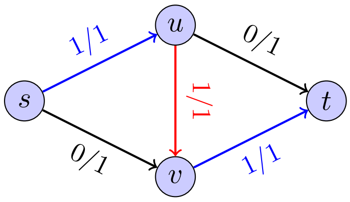
- 我们从 0-流开始. 为了减小 $f$的值, 我们找到一条 $s-t$ path, 比如说 $p = s \to u \to v$, 来运更多的商品
- 这三条边上的流可以被增加1 同时满足conservation和capacity限制.
- 然而，我们不能发现一条$s-t$ path存在于 $G$ 中，使得 $f$ 增加更多（左半部分）即使最大流是2 (右半部分).



**Ford-Fulkerson algorithm: “复原undo” 功能**

关键性观察:

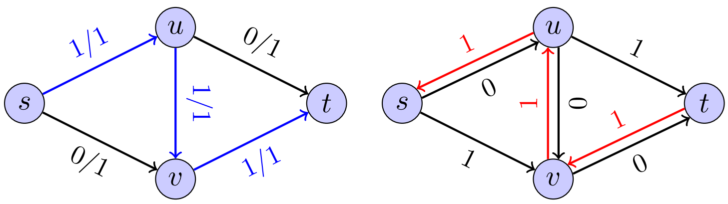
- 当构建一个流 $f$时, 调度商品可能会犯错, 即，有些边不应该用来运输商品. 举个例子, 图中的边 $u \to v$ 就不应该使用.




$V(f) = 1$

- 为了改进流$f$,我们应该使用一些手段 更正在写错误, 即 “复原undo”边上做过的运输任务。
- 如何实现 ”undo” 功能呢?
- **增加反向边!**
- 假定我们增加一条 反向 边 $v \to u$ 到原始图. 接着我们可以更正这次运输，通过退回从$v$ 到 $u$的商品.

加了退货边的图就叫剩余图(Residual graph)。

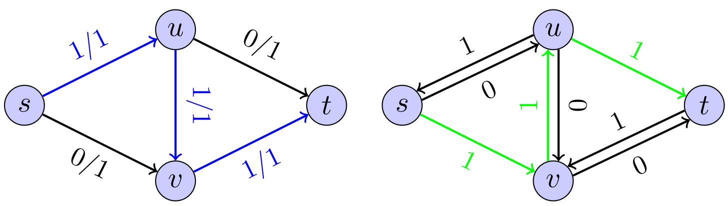


Flow $f$ Backward edges

**剩余图 Residual Graph**

给定一个有向图$G =< V, E >$， 有一个流 $f$, 我们定义 **剩余图residual graph** $G_f =< V, E' >$. 对于任何一条边$e = (u, v) \in E$, 按照下面的要求将两条边加入到$E'$ :

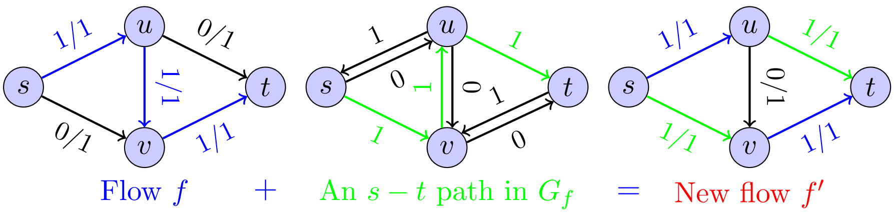
1. (正向边 $(u, v)$ 标注剩余的运输容量):
   如果 $f(e) < C(e)$, 添加一条边$e = (u, v)$ 标注运输容量$C(e) = C(e) - f(e)$.
2. (反向边 $(v, u)$ 标注回退容量):
   如果 $f(e) > 0$, 添加一条边 $e' = (v, u)$ 标注回退容量 $C(e') = f(e)$.



Flow $f$ Residual graph $G_f$

提示: 路径path中包含反向边 $(v, u)$。

**沿着路径增广流：从$f$ 到$f'$**




注释:

- 通过使用反向边 $v \to u$, 原始的从 $u$ 到 $v$的运输被退回.
- 更具体的, 第一次商品运输流$f$将会改变它的路径（从$s \to u \to v \to t$ 到 $s \to u \to t$），当第二次使用路 $s \to v \to t$的时候.