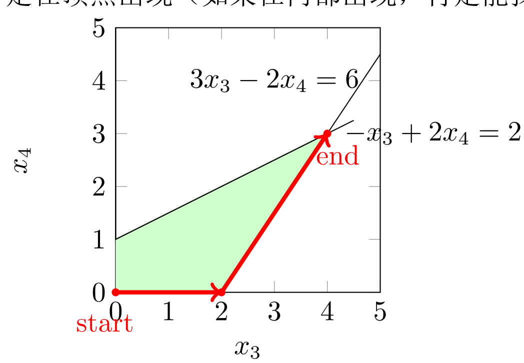
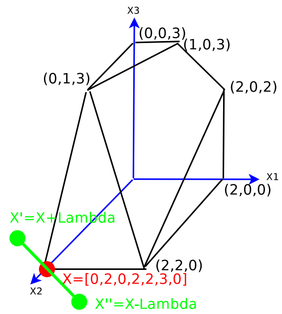
上堂课讲线性规划，通过线性规划学习一个新的套路，当我们遇到一个问题，解不能分的时候，或者我们不愿意分的时候，怎么办。这种情况下，只能从完整解开始，我们要构造这样一张图。所有的完整解都画在一张图里，每个节点是一个完整解，每2个点经过一些很少的变换就能转化，我们就连一条边。边两端的解靠的很近。举一个简单的例子，真实情况比较复杂。每个解标记为x_i,都有相应的值$f(x_i)$,我们的目标是找$minf(x_i)$,怎么办？随便找一个初始解，看他的邻居是不是比他小，然后就走到邻居，再接着判断他的邻居是否能改进，这是非常典型的做法，叫improvement。一切都是从完整解出发，所以上节课突出这种典型的路数，也就说当问题的解不好分解，但我们能观察出可行解之间的关系，这个图叫完全解邻域关系图。我们判断每个解的邻域的关系。所以一旦画出这样的图，很容易用这种套路求解。第一步，随便给一个初始点。第二部，循环判断当前点的邻域能否移动，比自己好，就improve。最后，判断一下是不是结束，是不是足够的好。用到线性规划中去，就要多加一小问。第一点，可行解是谁？可行解是在整个区域，特别大最优解在某个顶点，内部不用管，只用管这些顶点，把范围大大减小。剩下的就是刚才讲过的问题。怎么样找初始点，怎样从一个解到另一个解，什么时候停，上次课前两个问题解答了，最优解肯定在顶点出现（如果在内部出现，肯定能找到顶点比他更好）。



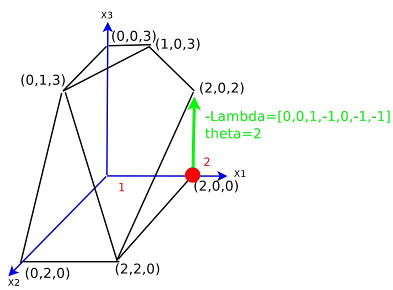
找初始解，就是随便找一个顶点，怎么通过计算找一个顶点，任意一个顶点（0， 2， 0）带进去，变成一个完整解。都带进去之后，只找那些非零的解对应的列，也就是基。什么是顶点，顶点就是一个基。

开始看第三个问题，第一个问题只管顶点就可以了，第二个问题顶点怎么找，就是找a的基，找基很简单，高斯消元法可以解决，现在回答第三个问题。如果当前解不太好，要improve，找和他相邻的一个解，找相邻的顶点，问题是怎样从一个顶点到另一个顶点呢，直观上看就是经过一条边，



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

走合适的距离，怎么实现。



看一个例子就很清楚了，从（2， 0， 0）开始，完整带入求出完整解，非零列挑出来，线性无关，构成基。其他向量可以用基表示，表示唯一，其他写成这样，系数拿出来，可以看出，系数恰好对应一条边。（0， 0， -1， 1， 0， 1， 1），在三维空间，（0， 0， -1），向下方向，就是这条边，沿这条边走合适的距离，就是（2，0，0），走一段距离，x'沿着λ走θ 距离，设 $\theta = 2$,后面解释为什么，带进去看看。（2， 0， 2），恰好是这个点，也就是说，我们思路很清晰，一开始给定顶点，蓝色的对应一组基，这是第一步，第二步，其他非基向量可以表示成基的线性组合，系数恰好对应边的方向，我们只需要沿着边走合适的距离就会到达一个顶点。

严格的证明一下。x是一个顶点，顶点对应这组基，考察一个非基向量，非基向量a_e表示成基的组合，计算沿这个方向走多远，就是 θ,先按式子计算，得到一θ,得到x'对应一个顶点,每个顶点都对应一个基，新的顶点对应的基就是 $B' = B - a_l + a_e$.

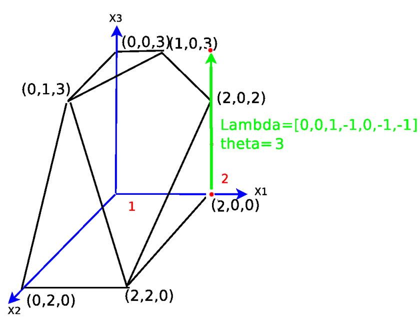
下面证明一下，证明2页slides。原先x是可行解， $ax = b$是满足的，拆成向量的形式，把绿色的 a_e拆成基的线性组合，上面式子减去下面式子的θ倍，这个式子是满足的，新得到的解 $x'_i = x_i - \theta\lambda_i$, 证明新的解是可行解，

可行解满足2个条件，一个是 $ax=b$,一个是$x\geq 0$,现在只需证明第二个条件，分两种情况讨论，一种是所有$\lambda_i\leq 0$, 所有的$x_i\geq 0,\theta$ 取正数，就能满足条件。第二种情况是，存在$\lambda_i>0$,不能把θ 取的太大，否则某些$x_i<0$,设置$\theta=\min_{\mathbf{a}_i\in\mathbf{B},\lambda_i>0}\frac{x_i}{\lambda_i}=\frac{x_l}{\lambda_l}$ 推导如下：

$$\begin{aligned}x_i-\theta\lambda_i&\geq 0\\ x_i&\geq 0\\ \Rightarrow\theta&\leq\frac{x_i}{\lambda_i}\end{aligned}$$

θ至多设置这么大，达到最大的向量给予下标l，这里面e代表enter，l代表leave。看一下例子，只用考虑 λ中大于0的位置，θ至多是多少可以算出来。在这里$\theta=2,l=4$.这样取了之后，x' 对应一个可行解。满足上面2个条件。

再从具体的例子看一下，θ的设置是从这个点出发，走多远恰好到一个顶点。刚才$\theta=2$,假如 $\theta=3$,直观上沿这个点走3步，走出去，不在可行解的区域内。反应到式子里，具体就是 $x'=x-\theta\lambda$,刚才θ至多是2，如果取3的话，导致x'存在分量小于0.我们要求所有x的分量都是大于等于0的。所以不是可行解。　　再看，如果沿着这个方向走，只走一步，直观上看没



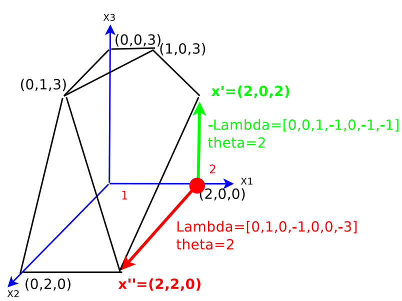
$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2&0&0&2&0&3&6\end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&3&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

有到达这个顶点，在这个边的中间，$\mathbf{x}'=\mathbf{x}-\theta\lambda$不是一个顶点，也可以从数值上面看，取出非零列，是线性无关的，构成一个基，现在他有5个，肯定不是一组基。现在证完了，从x出发，沿一个方向走一定的步数，到达一个可行解。　　下面说明，这个可行解沿边走2步，必定到达一个顶点，对应一组基，怎么证明他是一个顶点呢？只需要证明x'的非零列对应的就是一组基，是线性无关的。换句话说，我们想证明：在这个例子中，新的一组基怎么得到的，绿色的a_3放进来， a_4拿出去， a_1,a_3,a_6,a_7对应一组基，怎么证明？假如说不是一组基，是线性相关的，存在一组不为0的数，使得

$d_1\mathbf{a}_1+d_3\mathbf{a}_3+d_6\mathbf{a}_6+d_7\mathbf{a}_7=0$，注意$a_3$原先是非基向量，可以用原来的基唯一线性表示，带进去，得到新的等式，而原来的基是线性无关的，所以系数都为0，因此，得到新的基也是线性无关的。
总结一下，一组非基向量表示成基向量的组合，系数就是方向，沿这个方向走多远呢，只要算一下θ就行，走固定长度之后必定是一组基，证明就是刚才上面的过程。

现在回顾一下，刚才讲的，随便给的初始解后，把基标出来，现在，沿着一条边到达一个顶点，得到新的基，原先的基去掉一个，新添加一个向量。看下面的例子，蓝色是旧的基，绿色是新添加的基，把这种操作叫做旋转pivot。蓝色是出基的向量e，绿色的是入基的向量l，后面讲解pivot如何实现。关于pivot的由来，翻译有，旋转，quicksort中的枢纽元，很古怪的用法。不好翻译。小布什的US pivot china。关于南海的讲话，重返亚太。

刚才说，从任意一个顶点选择一条边，可以到达一个顶点，边对应非基向量，拆了之后，λ对应边的方向，红色非基向量表示成蓝色的线性组合，系数对应边。从（2,0,0）出发，可以到达三个方向，（有一个方向没画），沿着那个方向走？试试看？到达x', x''怎么样。



$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 6\end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

先说我们走到a_2,把他表示成基的线性组合，边的方向就是系数，设置合理的θ,得到x''，目标函数的变化，考虑到目标函数值，我们的旋转就是为了改变目标函数值。我们不知道选择哪个点，所以看目标函数值变化。x''目标函数值是$c^t x''$, x是$x^t x$,都是已知的得到-14θ,就是目标函数值的改变，从x到x'',目标函数值大幅度降低了。 再往后看，走另一条边，也是上面的方法，到达 x',计算目标函数的改变值，这里是-6θ, 从x move x'，目标函数的改变是-6θ。一般我们采用最大梯度的规则，-6θ和-14θ 所以沿着边到达x''的方向走，这是启发式的规则，一般这么用，也可以不用。

现在只剩最后一个问题了，我们会从一个顶点到另外一个顶点，怎么

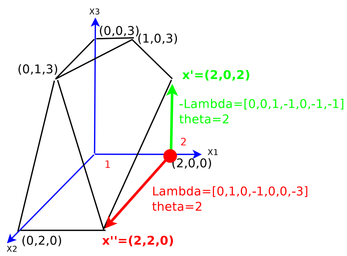
过去呢？找非基向量就可以，什么时候停呢？假如说我们从一个顶点x到达x',看目标函数改进，$\mathbf{c^T x'} - \mathbf{c^T x}$,求这个函数的差。

$$x' = x - \theta\lambda$$
$$c^T x' - c^T x = -\theta c^T \lambda$$

详细的写开，λ到底是什么，入基的c减去其他向量，这是目标函数的改进，一旦这个数小于等于0，以为这从x到 x'后，我们得到改善，improve，我们想minimize，每次都是下降，当得不到改善，就停。当上面的目标函数改进大于等于0，我们就停。这个公式λ的形式是怎么推出来的。我们有好多列，蓝色的列是基，绿色的入基a_e, 出基a_l, 有$a_e = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$, $\overrightarrow{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, -1, \cdots \lambda_m]$,然后

$$\begin{aligned} x' &= x - \theta\overrightarrow{\lambda} \\ c^T x' - c^T x & \\ &= -\theta c^T \overrightarrow{\lambda} \\ = -\theta[-ce + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i] & \\ \theta[ce - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i] & \end{aligned}$$

我们什么时候停呢？如果这个数对任意的非基向量都大于等于0，意味着带进去目标函数没有改善，我们就停了。所以，我们把这个数叫做检验数。检验数写成矩阵的形式就是$\mathbf{\bar{c}^T} = \mathbf{c^T} - \mathbf{c_B^T B^{-1} A}$，$\lambda$替换成$B^{-1}A$,后面解释为什么进行替换。现在先记住！停止条件也清楚了，任意非基向量，把他替换成λ,带进去算出目标函数，大于等于零就停止，也就是最优了！　　为什么



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

呢？我们严格的证明一下！考察一个线性规划，他的目标函数是$\min \mathbf{c^T x}$,约束是$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,假如说x是一个顶点，顶点就对应一组基B，如果算出

检验数大于等于0，则x就是最优解。为什么是最优解，假如说我们找到一个可行解y，满足约束条件，我们可以证明任意可行解的目标函数都比x的目标函数大，为什么呢？因为$c^T \geq c_B^T B^-1A, y \geq 0, B^-1b = x_B$,任意顶点都对应一个基，顶点和基的对应关系，后面看例子理解，换句话说，任意可行解的目标函数值都比x的要大，所以是最优解。

有点绕，大家回去后仔细看！有了这四点之后，单纯性算法就完全做完了。 回顾一下！我把它扩展成了五点，又加了第一句琐碎的话！对线性规划，观察五点性质，第一点：可行解就是多面体内部，包括边界，最优解肯定实在定点上拿到，所以我们不用关心内部，只关心顶点，这比较省事！如何得到顶点呢？只要做线性变换就可以，算出基，基就是顶点！如果当前一个顶点不够好，想improve，在找一个点，比我好，怎么improve，怎么找到下一个点？沿着某一条边到下一个顶点，怎么沿着边走？边是什么？边就对应非基向量，拿什么时候停呢，一旦做到最后，一个检验数全大于零，就停。检验数是$c^T - c^T B^-1A$,为什么是这样？稍等一下，看这五点全有了。 有这五点，我们就能把单纯性算法写完。写完看一下主要步骤。输入是矩阵A，向量b，minimize $c^T x$,第一步调用初始化，找一个初始点，这个初始点，把A的基给找出来，叫做B，下标都放在B里面，这件事稍微有点麻烦，先假设会做这一步，待会会说完整的扩展，其他的都是easy。得到一个初始点，按照过去的规范，improve初始化，就是写一个死循环，里面先判断一下是不是要停，如果不存在一个非基向量，$c_e < 0$ 的话，检验数都大于等于0，我们就返回，返回的时候返回一个值。如果存在一个小于0，可以improve，我们随便找一个向量，也就是绿色的那个向量，拆成其他向量线性组合，算一下那个θ, θ等于所有的$\frac{b_i}{a_{ie}}$的最小值，若果$a_{ie} > 0$,否则$\Delta_i = \infty$,θ去最小的 Δ_i,改成θ_i,如果$\theta = \infty$,则是无界的，否则做一个pivot，pivot是说旧基，e为入基，l为出基，调用这个过程，这就是线性规划单纯性算法，里面有3步没解决，一个是怎么找初始点，放到最后再说,一个是找到一个基，我们怎么算x，接下讲解，还有一个是improve的时候，一个入基，一个出基，怎么操作。

Simplex($\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$)

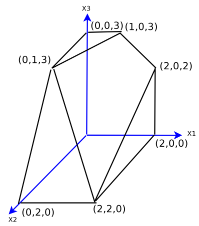
```
(B_I, A, b, c, z) = InitializeSimplex(A, b, c);
//If the LP is feasible, a vertex x is returned with B_I storing the indices of vectors in
  the corresponding basis B; otherwise, "infeasible" is reported.
while TRUE do
    if there is no index e (1 ≤ e ≤ n) having c_e < 0 then
        x = CalculateX(B_I, A, b, c);
```

```
        return (x, z);
    end if;
    choose an index e having c_e < 0 according to a certain rule;
    for each index i (1 ≤ i ≤ m) do
        if a_ie > 0 then
            Δ_i = b_i / a_ie;
        else
            Δ_i = ∞;
        end if
    end for
    choose an index l that minimizes Δ_i;
    if Δ_l = ∞ then
        return "unbounded";
    end if
    (B_I, A, b, c, z) = Pivot(B_I, A, b, c, z, e, l);
end while
```

先说这一个，假如说我们知道一个矩阵A，基是B，I是index下标，由基确认的x是怎样的呢？是这样的？对每个x_j都检查一下，如果x_j不在基里面，我们说什么是基，什么是顶点？把x找出来，非零的那些拿出来对应一组基，话句话说，0的那些都是非基的，所以不在基里面的那些$x_j = 0$,其他那些，任意的一个向量的解就是b。这里写法有点绕，待会看一下例子就清楚了。这么写是没错的，更加鲁棒性一些，这里存疑，待会再回来看一下。我们讲了那么多，看个例子！假如说，我们要求这个线性规划，目标函数和约束如下，如何从这个约束把这个图画出来已经讲过了，最终是一个多面体。 Standard form:

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & -x_1 & - & 14x_2 & - & 6x_3 & & \\
s.t. & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & & & \leq & 2 \\
 & & & & & x_3 & \leq & 3 \\
 & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

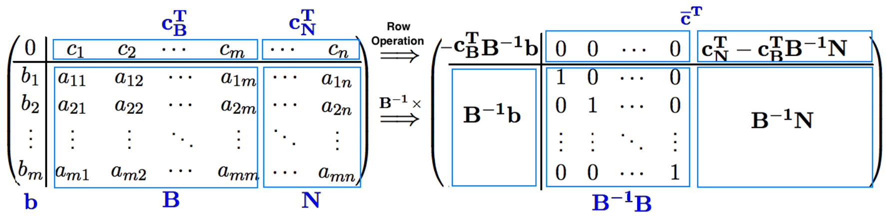
我们先把他加一些松弛变量，变成等式约束。 一旦做完松弛变量，我们就画了如下的一些table，单纯型算法，他讲线性规划，也是纸上作业，画一个表格，这个表格叫单纯型表，表格主体就是矩阵A，c写在上面，对一下上面的例子， b写在左边，有的写在右边，写在左边比较方便，左上角是目标函数的负数，一开始是0。单纯型表的设计，我们都很清楚，A，b,c,-z总共4块，事实上，我们要看的仔细一些，矩阵A始终要维护一个基B都是



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-z= 0	$\overline{c_1}$=-1	$\overline{c_2}$=-14	$\overline{c_3}$=-6	$\overline{c_4}$=0	$\overline{c_5}$=0	$\overline{c_6}$=0	$\overline{c_7}$=0
$\mathbf{x_{B1}} = b'_1$=4	1	1	1	1	0	0	0
$\mathbf{x_{B2}} = b'_2$=2	1	0	0	0	1	0	0
$\mathbf{x_{B3}} = b'_3$=3	0	0	1	0	0	1	0
$\mathbf{x_{B4}} = b'_4$=6	0	3	1	0	0	0	1

单位阵，始终要保持这一点，只要作高斯线性变换就可以，关键是这样保持之后，能推出很多很好的性质，很好的性质如下：这个矩阵A做高斯线性变换，基是B，实际上是$B^{-1}A$, 矩阵A，基B，保持单位阵，整个矩阵乘以$B^{-}1$,就变成单位阵，这块就是$B^{-1}A$，下一页讲的更清楚。

为什么单纯型表这样设计？为什么基对应的矩阵是单位阵，原始的矩阵A放在这，基的叫做B，非基的叫做N，对应的左边是向量b，上面是c，c也分块，一个叫c_B,一个叫c_N,这个很简单！假如说B刚开始不是单位阵的形式，这样不太好！我们先把他变成单位阵，整个矩阵乘以$B^{-}1$就行了，所有向量全部乘$B^{-}1$ 就行。然后变成$B^{-1}B$单位阵, $B^{-1}N$，上面也参与行变换，$c_B = 0$,仔细看一下右上角变成什么， c_i要变成0，要用下面的单位阵乘以c_i，再减去上面的就变成0，依次累加，右上角就是 $c_N^T - c_B^T B^{-1}N$,左上角就是 $-c_B^T B^{-1}b$.矩阵A，得到基是B，要转换为单位阵，好处很多，变成单位阵就是所有乘以B^{-1},如上变换，怎么达到这一点，就是高斯行变换，线性代数里面有讲解。上面的c也加入高斯行变换，每列分别减去下面单位阵的 $c_i, 1 \le i \le m$倍，就变为0，就是乘以c_B^T,然后减去。左边也要进行高斯行变换，注意左上角跟右上角的对应关系。这就是为什么在单纯型算法里面要千方百计的保证对应基为单位阵，单位阵带来好处，b，c，z是固定的。$B^{-1}b$对应顶点，$c_b^T B^{-1}b$对应目标函数值， $c_N^T - c_B^T B^{-1}N$对应检验数。分离的形式好理解，矩阵的形式需要仔细思考，矩阵的乘法怎么理解！　　最后说一件事，就是pivot。pivot是说一开始得到一个顶点，把他对应的基都画



$$
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & \cdots & c_e & \cdots \\
b_1 & \dots & 0 & \cdots & a_{1e} & \cdots \\
b_2 & \dots & 0 & \cdots & a_{2e} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_l & \dots & 1 & \cdots & a_{le} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_m & \dots & 0 & \cdots & a_{me} & \cdots
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
-\frac{a_{me}}{a_{le}}b_l & \dots & -\frac{c_e}{a_{le}} & \cdots & 0 & \cdots \\
b_1 - \frac{a_{1e}}{a_{le}}b_l & \dots & -\frac{a_{1e}}{a_{le}} & \cdots & 0 & \cdots \\
b_2 - \frac{a_{2e}}{a_{le}}b_l & \dots & -\frac{a_{2e}}{a_{le}} & \cdots & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{a_{le}}b_l & \dots & \frac{1}{a_{le}} & \cdots & 1 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_m - \frac{a_{me}}{a_{le}}b_l & \dots & -\frac{a_{me}}{a_{le}} & \cdots & 0 & \cdots
\end{pmatrix}
$$

起来了，非基向量进行拆，让他入基。 pivot直观上看就是，基已经写成单位阵的形式，上面的对应的 c都是0，非基的向量不一定是单位阵，最终想让他入基，把他变成单位阵，单位向量，怎么做，就是高斯行变换，看一下伪代码的意思，选定入基和出基，入基变成单位向量，然后高斯行变换，左边的 b也要变，写的比较绕，实际上很简单，仔细理解一下。

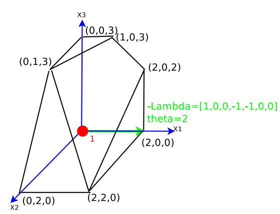
Pivot($B_I, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, z, e, l$)

//Scaling the l-th line
$b_l = \frac{b_l}{a_{le}}$;
for $j = 1$ to n **do**
  $a_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{le}}$;
end for
//All other lines minus the l-th line
for $i = 1$ to m but $i \neq l$ **do**
  $b_i = b_i - a_{ie} \times b_l$;
  for $j = 1$ to n **do**
    $a_{ij} = a_{ij} - a_{ie} \times a_{lj}$;
  end for
end for
//The first line minuses the l-th line
$z = z - b_l \times c_e$;
for $j = 1$ to n **do**
  $c_j = c_j - c_e \times a_{lj}$;
end for
//Calculating $\mathbf{x}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-z= 0	$\overline{c_1}$= -1	$\overline{c_2}$=-14	$\overline{c_3}$=-6	$\overline{c_4}$=0	$\overline{c_5}$=0	$\overline{c_6}$=0	$\overline{c_7}$=0
$\mathbf{x_{B1}} = b_1'$=4	1	1	1	1	0	0	0
$\mathbf{x_{B2}} = b_2'$=2	1	0	0	0	1	0	0
$\mathbf{x_{B3}} = b_3'$=3	0	0	1	0	0	1	0
$\mathbf{x_{B4}} = b_4'$=6	0	3	1	0	0	0	1

```
B_I = B_I − {l} ∪ {e};
return   (B_I, A, b, c, z);
```

看个例子，这样大家的困惑得会解决一些!



三步骤，第一步找一个初始点，第二步找谁进去，第三部进去之后再变一次，第四部就是什么时候停。公式比较多，看的麻烦！就解前面那个线性规划的例子！画出单纯型表，写上A，b，c， z，没什么问题。第一步找一个初始点，初始点就是基，蓝色的就是基，而且就是单位阵，基对应的顶点写成矩阵的形式就是$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{B^{-1}b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [0,0,0,4,2,3,6]^T$，非基的都是0，基对应的就是b，可以写出x。找到基了，基就是顶点，这点不太好，然后进行改进，随便找个非基向量，绿色的，让他入基，沿着他走多远呢？随便找一列，只要上面对应的c小于0，就可以。为什么小于0，刚才说了，先不管他。这就是入基，然后是出基，这一列里面找大于0的，除法计算最小的θ值，对应的行的单位阵也就是旧基里面为1的那一列为出基，单纯型算法3步，第一步：初始点：基，第二部：while{t} 找一个负的c_i,用$\frac{b_i}{coef}$,找最小的，然后行变换。如果找不到负的就结束。在这个例子里面接下来就是做高斯行变换，新的基就产生了，跟原来不一样。对应图里面就是，原始的点事x_1,走到右边那个点。接着再找c里面谁是负的，这一列里面找正的，然后做高斯行变换，写程序比较简单。这里面插一句话：这里b是0，比较奇怪，导致$\theta = 0$,这很特殊，也就是说当前点沿着找的的方向走0步，还是

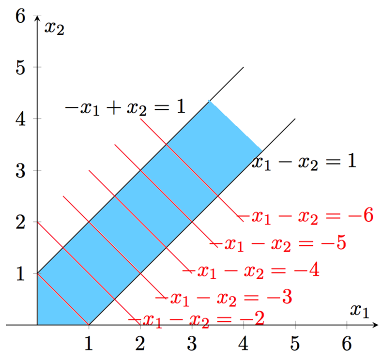
自己这个点。这是什么意思？这可能带来危险！可能一直在这个点呆着，这种情况叫做退化！接下来往下走，最后所有的c都是大于等于 0的，停了，当前点是最优点。最优点的值是什么？基对应相应的b，非基都是0，所以写程序比较简单！但是，为什么能方便的写程序实现单纯型算法呢，就是因为单纯型表有那些优秀的性质。始终把基表示成单位阵，b对应解，上面的c对应检验数，左上角是目标函数值，那一页slides就是最核心的。

在单纯型算法过程当中，我们有可能在一个点不断的呆着。因为$\theta = 0$,怎么办？有很多办法处理这个事情，处理的规则暂时不讲，大家感兴趣可以看一下附加的slides。先往下讲。　对单纯型算法强调几点：第一点，写程序是很easy 的，只是背后的知识，为什么要这么实现，讲课的难点在这里，为什么矩阵是这样的。第二个比较难的地方还是在矩阵，很多的术语写成分离的形式很好理解，但写成矩阵的形式，不好理解。熟悉一下矩阵乘法表达的意思。剩下的困难就不多了。这次课后有个作业实现单纯型算法，第一因为单纯型算法非常经典，第二这个套路在其他地方很有用。第三点，学生实现过后，我现在很多研究，在基因组上的线性规划，基因组上有上千万个点x_i，调用所有的软件包都不行。因为内存空间占用太大，但是结构很奇怪！这里说明为什么让大家练的原因？因为起码对我的工作是有用的，对大家将来有可能有用。基因组是一个长长的线段，上面有一些点x_i,点的数目非常多，10M，上千万左右，知道有些点之间的距离d_{ij}。把整体的x_i求出来。线性规划如下：

$$\begin{aligned} min \quad & E \\ s.t. \quad & x_i - x_j = d_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ & |\varepsilon_{ij}| \leq E \end{aligned}$$

ε_{ij}是误差，d_{ij}已知，使误差最小化。最简单的，还没用二次平方误差！数据量比较大！按道理来说，应该是mse准则！现在线性的都搞不定，不能用平方！这个线性规划，上千万的时候，现有的包都搞不定！ gourbi,glpk，都不行！要用特定的算法解决！这个样子比较奇怪，这样单纯型表的矩阵A是极度稀疏的，而且维数很大！内存根本放不下。我们要重新编写。　下面来看一个例子！这个例子比过去的要直观一些！是下面这样子的

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & -x_1 & - & x_2 & & \\ s.t. & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



在图上看一下约束是怎么样的，具体的对应关系！这个解区域有点问题，不是封闭的！把目标函数的等高线画出来。可以看到目标函数可以取到负无穷，这是在图上直观的看法，那运行单纯型算法会怎么样呢？ 先把他写成松弛型，添加松弛变量，变成等式约束。

Standard form:

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & -x_1 & - & x_2 & & \\ s.t. & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Slack form:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & -x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ s.t. & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

画出单纯型表，写出矩阵的形式，照抄，很简单！第一步先找基，这很简单，松弛变量天然的就是一组基。由基可以反解出x，然后开始while循环，先找c 里面小于0的列，对应A里面的正数，求出θ的最小值！负的不管。做高斯行变换，入基和出基。得到新的基。再重复，找c里面负的！找到了，然后A里面对应的没正的，原来找正的，是因为走太远会出圈，现在全是负的。

$$\begin{array}{rcl} x & = & [1,0,0,0] \\ \overrightarrow{\lambda} & = & [-1,0,0,0] \\ x' & = & x - \theta\overrightarrow{\lambda} \qquad \geq 0 \end{array}$$

直观上看，可也沿着这条边走无穷远，都是可行解！每走一步，目标函数都会变小，所以无界，想多小就多小！特征就是A里面对应的列全是小于等于0的。到现在为止，单纯型算法都会跑了，单纯型算法里面3块，现在

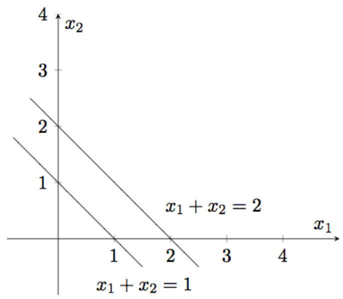
解决2块，算法里面：找初始点，死循环，死循环里面都找有没有小于等于0的，若有，则沿着这个方向，找到最小的θ, 做高斯行变换就完了，现在还剩初始点怎么找？初始时给我们矩阵A，向量b和c，怎样找一个基，使得对应基的b是大于等于0的。　最后一个问题，我们会improve，但是初始顶点怎么找？换句话说，让我们解$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，怎么解？用以前的知识能不能解？只会$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$，但不一定满足要求！找这个点怎么做？不用线性规划是没法做的！过去学的那一套做不了。　让我们看怎么做！假如说解下面的问题，找一个初始解。怎么办？我们把转换成解下面的辅助线性规划！辅助线性规划是这样子的，添加变量x_0，minimizex_0，注意这里变换后还是小于等于0的，再陈述一次，求解$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$，不会做，变成解辅助线性规划，加了一个目标函数，每个约束都减了个x_0。　为什么是这样子的？假如说原先的线性规划有可行解，现在加上x_0，其他值不变，这就是辅助线性规划的一个可行解。原来解满足约束，加上$x_0 = 0$后也满足新的辅助线性规划的约束。搞到一个可行解，就是最优解。假如说原来的L 没有可行解，对于任意取值，至少有一个约束不可满足，假如是第i行约束，那么根据辅助方程组，就有$x_0 > 0$。 minimizex_0，x_0取不到0。辅助线性规划有解，但是解不是$x_0 = 0$。大家回去琢磨一下，这是非常巧妙的构造。上面有可行解，下面最优解肯定是0.　那怎么解辅助线性规划呢？很简单，先加上松弛变量，变成松弛型。因为松弛变量天然对应基。

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min & & & & x_0 & & & & & \\
s.t. & a_{11}x_1 & +... & +a_{1n}x_n & -x_0 & +s_1 & & & & =b_1 \\
 & a_{21}x_1 & +... & +a_{2n}x_n & -x_0 & & +s_2 & & & =b_2 \\
 & & ... & & & & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & +... & +a_{mn}x_n & -x_0 & & & & +s_m & =b_m \\
 & x_1 & ,..., & x_n, & x_0, & s_1, & s_2, & & ...s_m & \geq 0
\end{array}
$$

之后，如果所有的b_i都大于等于0，我们直接取他们作为基。其他的非基都是0，这就是可行解。　如果有个负的，比较麻烦，不能直接作为基。作为基之后，不是一个可行解。怎么办呢？一旦b_i有负的之后，找 b_i里面的最小值，负的最厉害的，其他所有的全减去负的最小的数，其他都是正的，自己再乘负号就行。

具体的过程不用管，回头看看就行，先看后面的例子，就清楚了！

```
let l be the index of the minimum b_i;
set B_I to include the indices of slack variables;
if  b_l ≥ 0  then
```



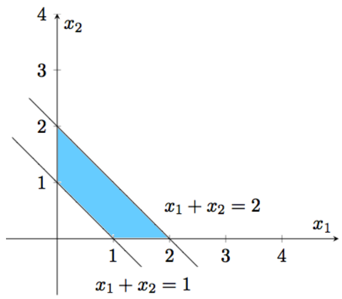
    return $(B_I, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, 0)$;
end if
construct L_{aux} by adding $-x_0$ to each constraint, and using x_0 as the objective function;
let $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ be the resulting slack form for L_{aux};
//perform one step of pivot to make all b_i positive; ;
$(B_I, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, z)$ =PIVOT$(B_I, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, z, l, 0)$;
iterate the WHILE loop of SIMPLEX algorithm until an optimal solution to L_{aux} is found;
if the optimal objective value to L_{aux} is 0 **then**
    return the final slack form with x_0 removed, and the original objective function of L restored;
else
    return "infeasible";
end if

给我们解下面的线性规划，首先要求一个可行解！先画出可行域是什么样子的。既要在上面，又要在下面，所以直观上是没有可行解的。

LP L:

$$\begin{array}{lccccc} \min & x_1 & + & 2x_2 & & \\ s.t. & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

给我们线性规划，先求辅助线性规划，形式如前面讲解的那样，添加x_0,然后把辅助线性规划转换成松弛型，这都使基本步骤。　接着，写出单纯型表，矩阵照抄，松弛变量是基，但是对应的$b_i < 0$，不是可行解，怎么办呢？所有的行都减去这个负的，然后自己再乘一个负号。然后就得到新基。且这个基对应的$b_i > 0$是可行解。所有约束都有$-x_0$，减去之后，除了自己有$-x_0$外，其他都没有。然后自己变成$+x_0$。大家体会一下基的变化！找到新基，且对应的b 是可行解。再往下面跑一步，找一下c有没有负的，然后取一列，找出θ,做高斯行变换。最后停了！上面的c都是大于等于0的，stop，得到最优解！最优解的值是$-\frac{1}{2}$,我们的目标函数值是0的话，意



味着原始的有可行解！现在不是0，是负的，原先没有可行解！到现在为止，大家终于会本科学的东西有扩展了。$Ax=b$会做，加上限制$x\geq 0$就不会了，现在怎么做？变成辅助线性规划做！

$$\begin{aligned}
min\quad & x_0\\
s.t.\quad & Ax+x_0=b\\
& x\geq 0\\
& x_0\geq 0
\end{aligned}$$

所以很多时候，我们稍微加一点限制，过去的方法就不能做，必须要有更高级的工具才能解！　我们再来看，刚才没有可行解，再看个有可行解的例子！

LP L:

$$\begin{array}{lccccc}
\min & x_1 & + & 2x_2 & & \\
s.t. & x_1 & + & x_2 & \leq & 2\\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 1\\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

稍微改一下，是这样子的！变成下面的线性规划！跟图进行对照，直观上看，是有可行解的！求解一下过程！　也是刚才的步骤，构造辅助线性规划，转化成松弛型，非常easy。　转换之后，写出单纯型表，松弛变量是基，但是基对应的b 不是可行解，做初始化，减去负的最小的，然后自己乘以负号，得到新基和可行解。不断的while循环，最后一步！所有的c都是正的，就返回了！得到最优的可行解！对应的目标函数值是0，意味着辅助线性方程组的解达到最优解0.所以原始的方程是有可行解的。直接带进去就可以了。下一页是如何把初始可行解转化为转化为输入，可以暂时跳过，实现的时候比较方便，可以完全不管他。

我们讲完单纯型算法，大家回去可以用熟悉的语言实现。 python语言

不到200行，就能实现！我们会写单纯型算法，实际情况，他会跑多快呢？

这一页，大家看一下介绍，单纯型算法1949年Dantzig 提出来的，很多人都在用，发现很快！做高斯行变换，基要换入和换出，要换多少次呢？实践当中发现的次数，基本上跟m成比例。和n的关系很小。有人说，固定m之后，运行次数跟$logn$成比例。这都是实践的经验！迭代的次数跟m有关，while循环的次数，随意总体的运行时间是$O(m^2n)$,因为while循环每一次都要做高斯行变换，矩阵的规模是mn的，$O(m)$轮，所以是$O(m^2n)$。对稀疏矩阵来说，就像刚才的基因序列例子，运行时间$O(Km^{\alpha}nd^{0.33})$，K是常数，m是行数，n是线性的，d是有多少个非零元。看稀疏程度怎么样。来实际看一下，我写了个程序，随机的产生很多线性规划，跑glpk，跑单纯型算法，看总共要几轮结束，首先固定约束m，变量数不断增长，观察有多少次！随着变量增加，换入换出增加非常缓慢！的确很像$logn$.　又换另外一个，假如我们固定n，约束不断的增加。每个都随机的产生了一堆！每个至少产生1000个。每个点都是均值！看到迭代的次数跟m显著增加，很像线性的$O(m)$，大概是这样的。

但是，非常不幸的是，单纯型算法在实际生活中跑的非常快，基本上是$O(m^2n)$,但是不是多项式时间算法。　这件事，直到1972年，V. Klee and G. L. Minty构造了一个稀奇古怪的例子，在他上面跑单纯型算法，就要花指数的时间。看一下例子是怎么样子的。

具体的例子如下，有这些数学表达式，画出多面体。如下图。这个样子比较难画！这个稀奇古怪的多面体会导致什么情况呢？他总共有8个点，跑单纯型算法，所有的顶点都会遍历一次。看附加的slides演示。各个棱是不一样长的。每一次move都是下降的。总共8个顶点，都要旅行到，才可以。这是讲单纯型算法难点最简单的一个例子。实际的跑一下例子。的确要跑2^n的。看一下glpk是不是有进行优化。根据V. Klee and G. L. Minty 的例子进行构造，产生最多100万个，看一下运行时间。是指数上升的。scrip也放在网上，可以自己运行！沿着这条线，是支书时间，只是存在这种可能性，glpk大概按照这条线走的。花了指数时间，我们怎么不让他犯错呢，加一点error，马上时间就降下来。　为什么单纯型算法在实际的例子中跑的很快，只要$O(m^2n)$, 但是的确存在一个例子，这个例子需要跑指数多的时间。这中间就有矛盾！怎么解决？有一个新的解决办法，叫平滑分析，平滑复杂度。　平滑分析是Daniel A. Spielman, Shang-Hua Teng在2001年得出的分析方法。找准自己感兴趣的方向！2001年得到哥德尔奖。他们说单

纯型算法是指数时间复杂度，但是他有多项式时间的平滑复杂度。换了一个度量。不用最坏时间，用平滑的，他就是多项式时间。 那什么是平滑时间复杂度？讲个例子！到现在讲了3个分析方法，一个是平均时间分析，一个叫最坏时间分析，还有一个均摊分析。这3件事。平均时间分析解决最坏时间分析的困难，但是平均时间分析有问题。平滑时间复杂度是平均时间分析和最坏时间分析的一个折中。看一下画的图。 x轴是instance例子，每个点事固定n，y轴是时间。最坏时间复杂度是最慢的例子，平均下来很低，average范围太广，拿不到所有的例子，不太可能，实际中做不动。怎么办？平滑时间复杂度是说稍微做点扰动，求平均，是很小的。在小邻域内做平均。复杂度很低。这是我们的解释，V. Klee and G. L. Minty构造的例子非常古怪，我们日常生活中拿到的例子，都有error，也就说现实生活中很难遇到V. Klee and G. L. Minty的例子，总是带点噪声的例子。看一下带噪声的例子！看一下有噪声会出什么事！构造一个例子。解$Ax = b$，A加上一个noise，用条件数解释，都一样，无法解释，很生动！大家做图像处理或者信号处理，总是很讨厌噪声，总是要想办法把噪声去掉，但是，滕老师说："噪声是个好东西！"。