运筹学基础

胡晓东

应用数学研究所

中国科学院数学与系统科学研究院

Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/

提纲

20世纪数学的五大指导理论　　**Five Golden Rules**

叶其孝、刘宝光　　**Great Theories of 20th Century Math**
上海教育出版社，2000　　**-and Why They Matter**

1. 线性规划　对偶定理
2. 博弈论　极大极小定理
3. 非线性规划 K-K-T 定理
4. 计算复杂性理论　停机定理, 库克定理

   拓扑学　不动点定理

   奇点理论　莫尔斯定理
5. 组合最优化 算法设计技巧

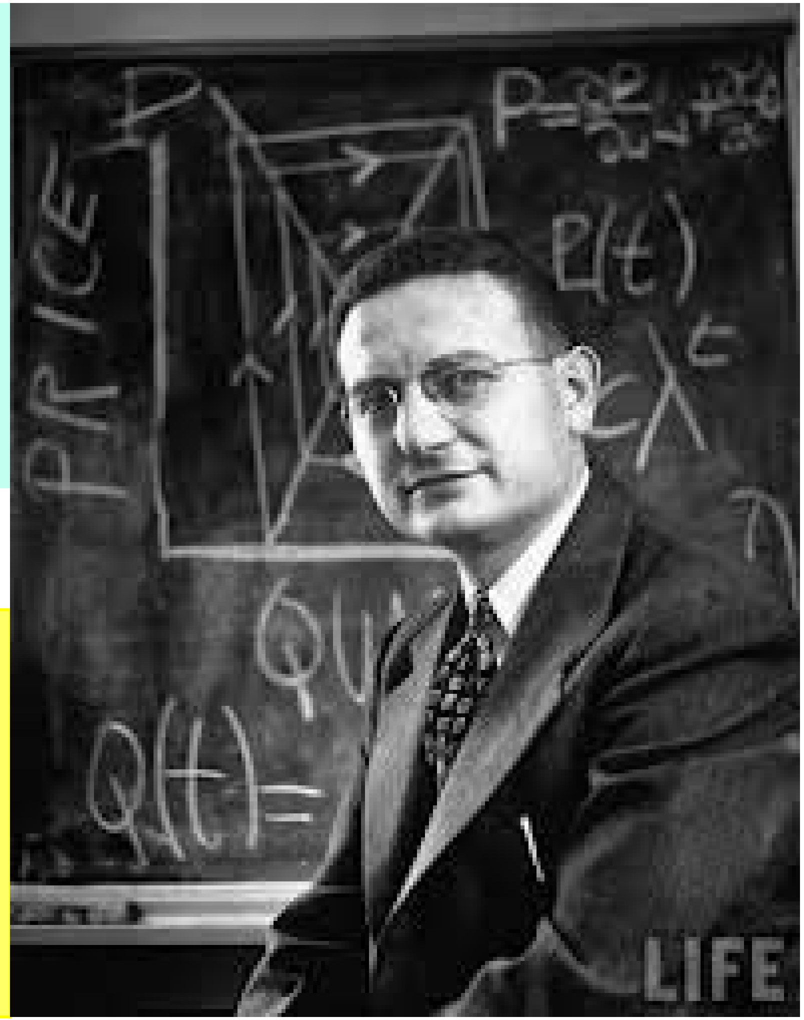
运筹学

- 模型
- 理论
- 算法

2. 博弈论-引子

“To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.”

--Nobel Laureate Paul Samuelson (1991)



经济学家、1991年诺贝尔经济学奖得主保罗•萨默尔森说：“如果你想要在现代社会做一个有文化的人，那么你就要对博弈论有一个大致的了解。”

2. 博弈论-二战实例

Kenney有两种选择-轰炸日军的舰船

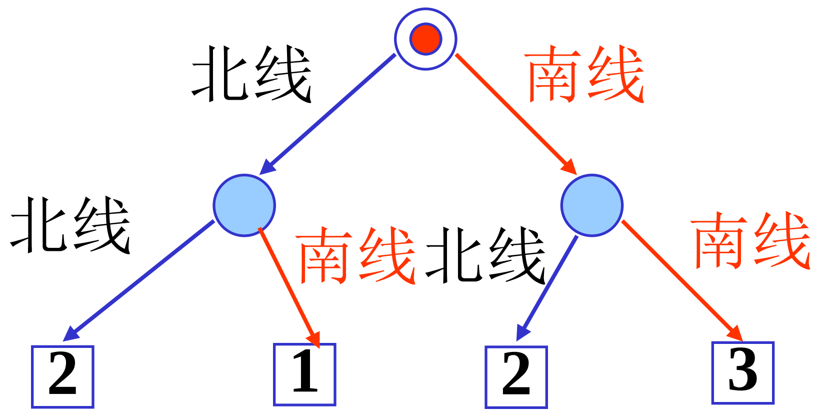
1. 侦察机搜索北线
2. 侦察机搜索南线

1943年初
新几内亚岛

日军有两种选择-护卫舰增援岛上部队

1. 沿北线航行
2. 沿南线航行

2.博弈论-二战实例（续一）



当然，双方实际上并不按照图上建议的顺序来做出决定。相反，双方都是在不知道对方将会怎样做决定的情况下分别独立采取行动的。

不过双方所关注/期望的截然相反：对**Kenney**是好事的，对日军就是坏事；反之亦然。因此当我们用轰炸天数来衡量盟国的**支付**，而把这个数的负值作为日军的**回报**，就有一方赢当且仅当一方输。这就是**零和局势**-双方的支付和是零。

2. 博弈论-二战实例（续二）

俾斯麦海战 支付矩阵		日军		
		航行北线	航行南线	
盟国Kenney	搜索北线	**2**	**2**	**2**
	搜索南线	**1**	**3**	**1**

如果**Kenney**搜索北线：无论**日军**走哪，保证有**2**天轰炸。
如果**Kenney**搜索南线：若**日军**走北线，才有**1**天轰炸；
若**日军**走南线，可有**3**天轰炸。
所以，为避免一旦查明**日军**的决定而感遗憾，**Kenney**应该选择能轰炸最少天数中的最大值。这意味着他应该选择北线！

2. 博弈论-二战实例（续三）

俾斯麦海战支付矩阵		日军	
		航行北线	航行南线
盟国Kenney	搜索北线	**2**	**2**
	搜索南线	**1**	**3**
		2	**3**

如果**日军**走北线：最多有**2**天被炸；

如果**日军**走南线：最多有**3**天被炸。

所以，为避免一旦查明盟国的决定而觉得遗憾，**日军**应该选择被炸最多天数中的最小值。这意味着**日军**应该也选择北线！

2. 博弈论-二战实例（续四）

合理的一个决策是：寻找能在**最坏处境**下给他/她最好可能支付的行动方向。显然这导致每个局中人都采取不愿冒风险的决策：**为了避免导致不必要的输而舍弃可能的赢的决策**。

俾斯麦海战 支付矩阵		日军	
		航行北线	航行南线
盟国Kenney	搜索北线	**2**	**2**
	搜索南线	**1**	**3**

这样的决策组合导致了一个**博弈平衡点**(或称为**鞍点**)：行极小中的极大值(极小极大)等于列极大中的极小值(极大极小)。有趣的是：海战中双方确实是采取了这些策略！

2. 博弈论-零和博弈

若把一局博弈的支付 z 视为**局中人**， x (盟军)和 y (日军)，各自所做选择的函数值，则**平衡点** (x, y) 就是：

$$\min_{x}\max_{y} z(x, y) = \max_{y}\min_{x} z(x, y)。$$

它被称为**纯策略博弈**的一个解（不论博弈对局多少次，每个对局人的最佳选择都是其鞍点相对应的博弈策略，否则就是**混合策略**）。

鞍点的重要性在于：任何一个局中人都不能由单方面背离它而做出改进！换句话说：任何一个局中人**都能**先于另一个局中人宣称他/她的选择，而且不会因为这样做而造成任何的损失。

2. 博弈论-零和博弈（续一）

假想海战 支付矩阵		日军(y)		
		北线	南线	
盟国(x) Kenney	北线	**4**	**1**	**4**
	南线	**2**	**3**	**3***
		2*	**1**	

然而，很容易给出一个不存在**鞍点**的支付矩阵。在这种情况下，对于一个局中人来说，没有容易理解的方法可以用来避免对手(有意/碰巧)事先获悉他/她将要做什么而获利这种情况发生。此时，有关局中人应该如何选择、决策呢？

2. 博弈论-零和博弈（续二）

练习. 所有支付矩阵都满足如下不等式：

$$\min_{x} \max_{y} z(x, y) \ \geq\ \max_{y} \min_{x} z(x, y)。$$

练习： 确定右侧矩阵中 p 和 q 的取值范围，使其在 (x_2, y_2) 交叉处存在鞍点。

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	q	6
x_2	p	5	10
x_3	6	2	3

在不存在鞍点的情况下，我们仿佛不再能有什么期望，因为，我们不知道什么是合理的决策了。

2. 博弈论-零和博弈（续三）

一个通常的做法就是碰运气(掷硬币)。其实这是一个合理的方案：通过随机选择来使得你对手不知道你的决策(否则对手会利用这个信息而获利)！当然我们有时会用不对称的硬币来表示某种选择对自己更有吸引力。

石头－剪子－布博弈		Min		
		布	剪子	石头
Max	布	**0**	**–1**	**1**
	剪子	**1**	**0**	**–1**
	石头	**–1**	**1**	**0**

这是一个**零和博弈问题**：**Max** 赢得的就是 **Min** 输掉的，反之亦然。它没有鞍点。注意：任何一方偷看了(慢出招)，都能得到好处(胜利)。

2. 博弈论-零和博弈（续四）

如果两人都诚实地对局：都以相等的概率 **1/3** 从三个选项中选择一个，结果是有 **9** 个可能的结果(每一个出现的概率是 **1/9**)。显然，两人的支付期望分别都是**0**。

现在我们假设 **Min** 继续以等概率来三选一，但是**Max**却改变了他的选择，布=**1/3**，剪子=**1/2**，石头=**1/6**。可以算出（**练习**），两人的支付期望还都是**0**！事实上，不论**Max**怎么改变，两人的期望还是不变。

这意味着：就 **Min** 的等可能混合策略而言，**Max** 不可能改善其支付期望。因此，具有等可能性的选择的混合策略是这个博弈的一个**平衡点**：使用随机化其选择，**两人都可以宣布各自的选择而不必顾忌对手能利用此信息来获利**。

2. 博弈论-极小极大定理

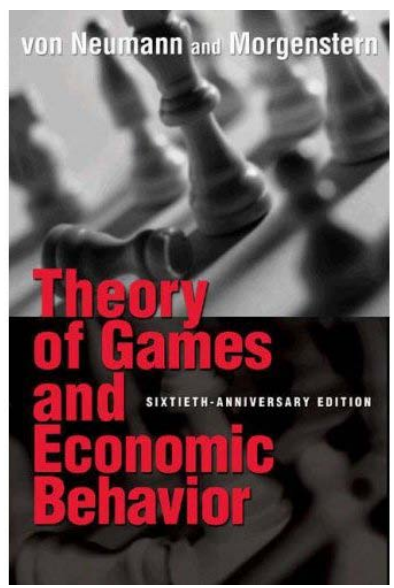
现在我们要考虑的问题是：

1. 对于任何两人零和博弈，
   如何判断最优混合策略是存在的？
2. 如果最优混合策略存在，
   那么又如何确定呢？

策梅洛（**E. F. Zermelo**，1871－1953）**猜测**对于每个局中人而言，应存在能给双方以同样支付期望的混合策略，而且这与每个局中人能利用的数目无关。

2. 博弈论-极小极大定理（续一）

极小极大定理(1928；**约翰·冯·诺依曼**— 1903-57) 对于每个两人零和博弈，每个局中人都存在一个混合策略使得当局中人使用这些策略时，双方有相同的支付期望。而且，这个期望值也是每个局中人能指望从博弈的一局中得到的最优支付。因此，这些混合策略是两个局中人所用的最优策略。



1944年冯·诺依曼与奥斯卡·摩根斯特恩

2. 博弈论-极小极大定理（续二）

若设局中人 **A** 的纯策略的集合为$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，其混合策略的集合可记为

$$X_A=\{ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0 \};$$

类似地，可设局中人 **B** 的纯策略的集合为$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，其混合策略的集合可记为

$$Y_B=\{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0 \}.$$

如果局中人 **A** 选择策略 a_i，局中人 **B** 选择策略 b_j，那么**B** 向 **A** 支付 c_{ij}，因而$\{c_{ij}\}$ 构成一个 $m \times n$ 矩阵。这样，当**A** 选择混合策略 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$，且 **B** 选择混合策略$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，则 **B** 向 **A** 支付的期望值是

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j$$

2. 博弈论-极小极大定理（续三）

极大极小定理可表述为：$\boldsymbol{A}$ 有混合策略$\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\} \in X_A$，$\boldsymbol{B}$ 有混合策略$\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\} \in Y_B$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i^* y_j^* = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j^* = \min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i^* y_j$$

冯·诺依曼证明的困难部分是证明：没有一个局中人能偏离由**极小极大策略**规定的概率以得到较好的支付期望。在那本著名的博弈论的奠基之作中，**冯·诺依曼**是用**凸集分离定理**来证明矩阵博弈平衡点的存在性的。而他还曾经用以下引理证明过这个定理。

2. 博弈论-极小极大定理（续四）

冯·诺依曼 引理 设$X \subset R^m$, $Y \subset R^n$ 是两个非空有界闭凸集，$A, B \subset X \times Y$ 是两个非空闭集。如果

（1）$\forall\, x \in X, A(x) = \{\, y \in Y \mid (x, y) \in A\}$是非空闭凸集，且

（2）$\forall\, y \in Y, B(y) = \{\, x \in X \mid (x, y) \in B\}$是非空闭凸集，

那么 $A \cap B \neq \varnothing$ 。

极小极大定理通过混合策略概念确保了平衡点的存在性，重建了任何两人零和博弈的可解性（但是，这是在混合策略空间，而不是纯策略空间）。这个定理意味着存在合理的选择：**每个局中人都能事先宣布其策略而不给对手丝毫好处**。

冯·诺依曼曾经说：“就我所知道的，没有那个定理……就不可能有博弈论……我认为直到‘**极小极大定理**’被证明之前没有什么东西是值得发表的。”

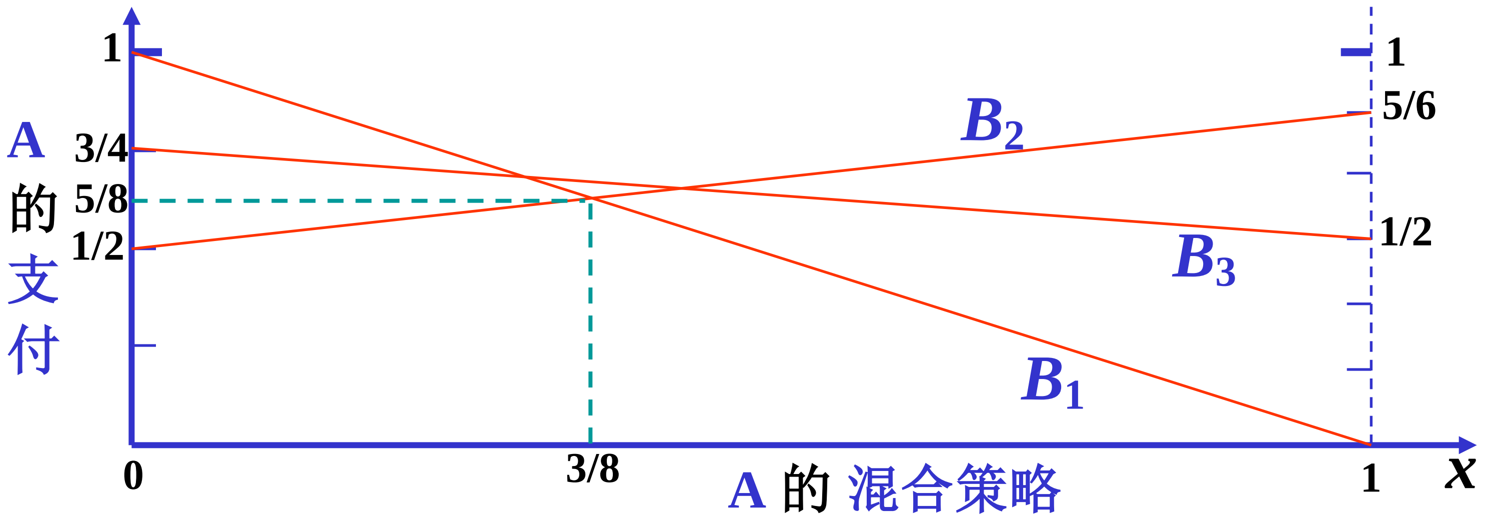
2. 博弈论-极小极大定理（续五）

		B		
		B_1	B_2	B_3
A	A_1	0	5/6	1/2
	A_2	1	1/2	3/4

若假定局中人 **A** 采用策略 A_1 的概率是 x，采用 A_2 的概率是 $(1-x)$，他可得支付的期望值如下：

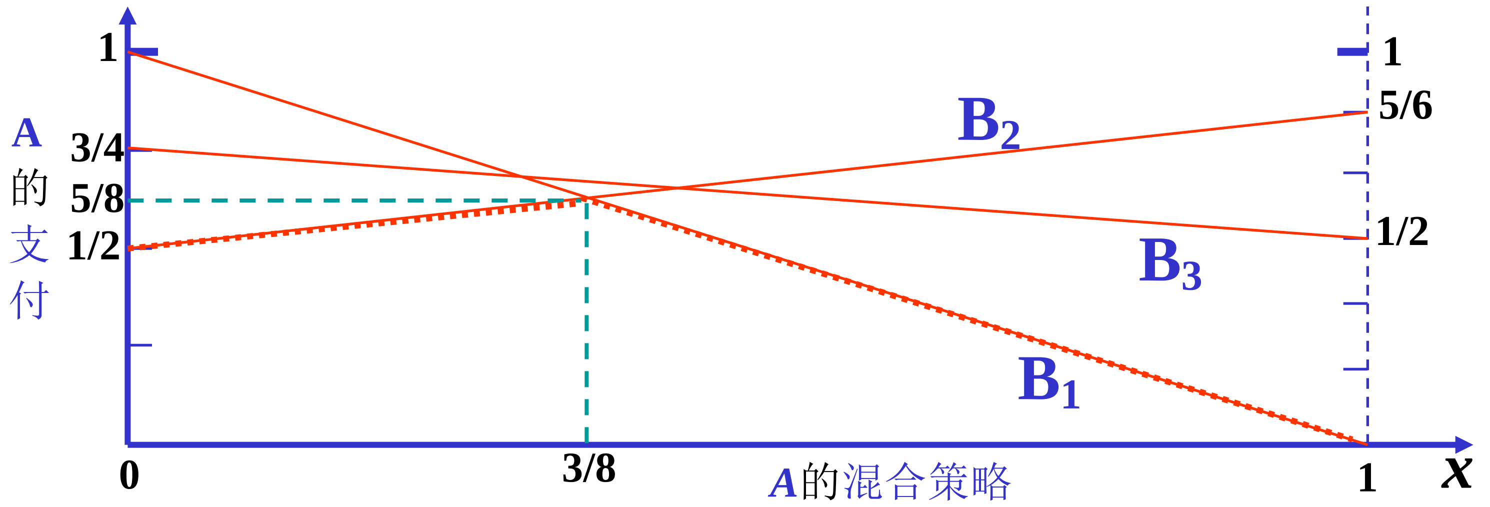
对抗 B_1 可得支付	$0x \quad + 1(1-x) \quad = 1 \quad - x$
对抗 B_2 可得支付	$5x/6 + (1-x)/2 = 1/2 + x/3$
对抗 B_3 可得支付	$x/2 \quad +3(1-x)/4 = 3/4 - x/4$

2. 博弈论-极小极大定理（续六）



从几何上看，局中人 **A** 试图选择 ***x***，使得其最小支付尽可能大：即 **A** 要确定 ***x*** 值使得三条直线的最低点中的最高点，这个值出现在 x **= 3/8** 时。

2. 博弈论-极小极大定理（续七）



从几何上看，与 B_3 相关的直线整体都处于三条直线的下包络(虚线)的上面。这意味着对于局中人 B 而言，策略 B_3 是不值得考虑的。通常极大极小点通常只位于 B 中的两条线的交点处。这使我们能把局中双方的最优混合策略的计算减少为一个 2×2 博弈的最优混合策略的计算。

练习： 计算局中人 B 的最优混合策略。

2. 博弈论-极小极大定理（续八）

		B		
		B_1	B_2	B_3
A	A_1	$0 \times 3/8 = 0$	$5/6 \times 3/8 = 5/16$	$1/2 \times 3/8 = 3/16$
	A_2	$1 \times 5/8 = 5/8$	$1/2 \times 5/8 = 5/16$	$3/4 \times 5/8 = 15/32$

注意，一旦 **A** 的最优混合策略 **(3/8, 5/8)** 固定，在求 **B** 的最优混合策略时，只要取相应支付矩阵中最小支付（即 **0**）所对应的策略（B_1）即可。换言之，若 **B** 知道 **A** 的最优混合策略，则它的最优混合策略是一个单一策略。

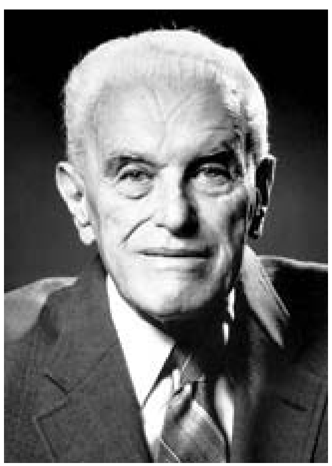
定理 (**Loomis**, 1946). 对任意两人零和博弈的支付矩阵 C，有

$$\max_{x} \min_{j} x^T C e_j = \min_{i} \max_{y} e_i^T C y$$

其中 e_k 表示第 k 个分量为 **1**，其他分量为 **0** 的单位向量。

2. 博弈论-极小极大定理（续九）

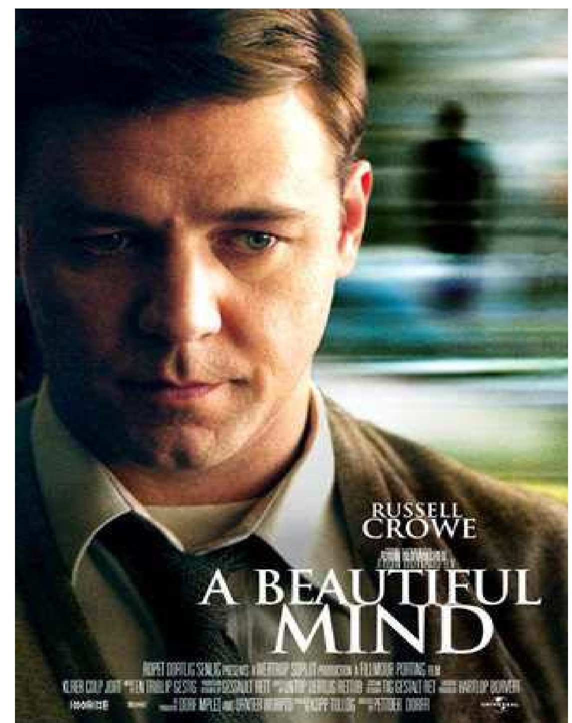
1994年**J. Nash** (美国数学家，1928-2015)和**J. Harsanyi** 与 **R. Selten**分享了**诺贝尔经济学纪念奖** (The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel)。他们在博弈论中的开创性工作就是证明了一条定理，该定理把极大极小定理推广到有两个或多个直接竞争的局中人的非零和博弈，即**非合作博弈**的情形。



John C. Harsanyi

John F. Nash Jr.

Reinhard Selten



2. 博弈论-极小极大定理（续十）

回顾一下策略的平衡对的概念。一个博弈策略：使得局中人单方面背离他或她的平衡对中的平衡策略，比不背离该策略所得到的期望支付要差。极小极大定理的一个重要推理就是策略的这两个相当不同的概念在零和博弈的情形中是一致的：

平衡对就是极大极小对，反之亦然。

纳什定理讨论了这种局势。

纳什定理（非正式的陈述）：在每个局中人有有限个纯策略的任一*n*-人非合作博弈（零和或非零和）中，至少有一个混合策略平衡组（**Nash Equilibrium**）。

思考题：如果一个**2-**人零和博弈存在鞍点，那么这些鞍点是否一定就是平衡策略对呢？

2. 博弈论-极小极大定理（续十一）

若设局中人 A 的纯策略的集合为$\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，其混合策略的集合可记为

$$X_A=\{ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0 \}。$$

类似地，可设局中人 B 的纯策略的集合为$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，其混合策略的集合可记为

$$Y_B=\{ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0 \}。$$

如果局中人 A 选择策略a_i，局中人 B 选择策略 b_j，那么 A 得到的支付为c_{ij}，B 得到的支付为 d_{ij}，这里允许 $c_{ij} + d_{ij} \neq 0$，且 $c_{ij} > 0$ 和 $d_{ij} > 0$ 都成立（即双赢）。这样，A 选择混合策略 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$，B 选择混合策略 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$，则他们得到的支付的期望值分别是

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j \text{ 和 } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i y_j$$

2. 博弈论-极小极大定理（续十二）

纳什定理可表述为：**A** 有混合策略$\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*\}\in X_A$，**B** 有混合策略$\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\}\in Y_B$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i^* y_j^* = \max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i y_j^*$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_i^* y_j^* = \max_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_i^* y_j$$

纳什分别应用 **Brouwer 不动点定理**和**角谷静夫不动点定理**证明了n人有限非合作博弈平衡点的存在性。

2. 博弈论-极小极大定理（续十三）

Brouwer不动点定理 设$C \subset R^n$是一个非空有界闭凸集，映射$f: C \to C$连续，则存在 $x^* \in C$，使得 $f(x^*) = x^*$。

角谷静夫不动点定理 设$C \subset R^n$是一个非空有界闭凸集，集值映射$F: C \to 2^C$上半连续，且$\forall\, x \in C$，$F(x)$ 是 C 中的一个非空闭凸集，则存在 $x^* \in C$ 使的 $x^* \in F(x^*)$。

角谷静夫不动点定理可用Brouwer不动点定理来证明，而它也是Brouwer不动点定理的推广; 而角谷静夫不动点定理与冯·诺伊曼引理是等价的。因而，无论是冯·诺伊曼还是纳什，他们对博弈论研究的奠基之作都与凸分析、集值映射、不动点定理等理论有着的紧密联系。

思考题 举例说明**不动点定理**中凸性条件是必要的。

2. 博弈论-极小极大定理（续十四）

1950年和1951年纳什的两篇关于非合作博弈论的重要论文，彻底改变了人们对竞争和市场的看法。他证明了非合作博弈及其均衡解，并证明了均衡解的存在性，即著名的纳什均衡。从而揭示了博弈均衡与经济均衡的内在联系。纳什的研究奠定了现代非合作博弈论的基石，后来的博弈论研究基本上都沿着这条主线展开的。然而，纳什天才的发现却遭到冯·诺依曼的断然否定，在此之前他还受到爱因斯坦的冷遇。但其骨子里挑战权威、藐视权威的本性，使纳什坚持了自己的观点，终成一代大师。

著名博弈论学者、2007年诺贝尔经济学奖得主罗杰·迈尔森（**Roger B. Myerson**）认为，发现纳什均衡的意义可以和生命科学中发现**DNA**的双螺旋结构相媲美。

2. 博弈论-极小极大定理（续十五）

冯·诺伊曼和**纳什**工作的两个假设是：

（1）每个局中人的所有信息都是公开的，完全的，对称的；

（2）每个局中人都是完全理性的，都能够在各自策略集中选择对自己最为有利的策略。

Harsanyi 和 **Selten** 的工作分别针对这两个假设提出了新的思想，大大扩展了博弈论的应用。**Harsanyi** 在非对称信息条件下，提出了“类型”的概念，用**贝叶斯方法**对博弈论模型进行分析，为信息经济学奠定了基础；而**Selten**将完全理性看作有限理性的极限，提出了**纳什**平衡点精练的概念。正因为如此，他们才与**纳什**一起，共同获得了1994年的**诺贝尔经济奖**，也正是这次获奖，才确认了博弈论对经济理论的核心重要性。

2. 博弈论-非零和博弈

我们考虑非零和博弈：允许博弈中有两个以上局中人以及(或者)假定一个局中人赢得的不必等于另一个局中人输掉的支付结构。这种情况更接近实际生活，也更难处理。这种支付矩阵简单的改变将揭示了有时候通过**合作**而不是**竞争**的而获得更好的受益的可能性。

胆小鬼游戏(源于古希腊－公元前1200－800)：
两个人开车高速向对方开去。

(1) 选择突然转向一边而避免相撞(***C***)－成为**胆小鬼**；
(2) 选择不转向(***D***)。

2. 博弈论-非零和博弈（续一）

1950s好莱坞的电影《无故的反叛》		中学复仇者布兹Buzz	
		C(闪躲)	*D* (玩命)
琼波 Jimbo	*C* (闪躲)	**(3, 3)**	**(2, 4)**
	D (玩命)	**(4, 2)**	**(1, 1)**

- 若两人都是胆小鬼，他们都免于一死，并收到**3**个单位支付
- 若一人是胆小鬼，而另一人不是，胆小鬼丢了面子(没丢命)，而勇敢者赢得了英名；假定胆小鬼收到**2**个单位支付，而勇敢者获得**4**个单位支付
- 若两人都是勇敢者，他们都在死神那里领到**1**个单位支付

2. 博弈论-非零和博弈（续二）

1950s好莱坞的电影《无故的反叛》		中学复仇者布兹**Buzz**	
		C(闪躲)	***D***（玩命)
琼波 **Jimbo**	***C***（闪躲)	**(3, 3)**	**(2, 4)**
	D（玩命)	**(4, 2)**	**(1, 1)**

该博弈中没有**支配策略**：任意一个局中人没有单个的行动步骤能导致最大的支付而不必顾忌另一个局中人所采取的步骤。

若布兹采用玩命策略，则琼波采用闪躲策略最佳。
但若布兹采用闪躲策略，则琼波采用闪躲就不如玩命策略了。

2. 博弈论-非零和博弈（续三）

从琼波的立场看：若采用闪躲策略，我的极小收益是**2**；若采用玩命策略，我的极小收益是**1**。因此，取这两个的极大，琼波的合理策略是闪躲。

1950s好莱坞的电影《无故的反叛》		中学复仇者布兹**Buzz**	
		C(闪躲)	***D*** (玩命)
琼波 **Jimbo**	***C*** (闪躲)	**(3, 3)**	**(2, 4)**
	D (玩命)	**(4, 2)**	**(1, 1)**

再从平衡策略的立场上来这个博弈：如果布兹和琼波选择了步骤对**(*C*, *D*)**或**(*D*, *C*)**中的任何一个，那么考察一下其支付就清楚了没有局中人会有单方面离开该选择的动机。因此，平衡策略不同于两人零和博弈中极大极小策略**(*C*, *C*)**的情形。

2. 博弈论-非零和博弈（续四）

1950s好莱坞的电影《无故的反叛》		中学复仇者布兹**Buzz**	
		C(闪躲)	***D*** (玩命)
琼波 **Jimbo**	***C*** (闪躲)	**(3, 3)**	**(2, 4)**
	D (玩命)	**(4, 2)**	**(1, 1)**

一个有趣的现象是：假定一个局中人是理智的，而做出致命策略选择的另一个局中人总是在损害他的情形下取胜的。换句话说，一个具有鲁莽、不过后果的局中人在这个博弈中确实比仅仅是理智的局中人享有优势。这个现象引起了许多学者对这类不合理的赢得策略的反感，因为多数教授类型的人对他们自己既是不愿冒风险又是极端理智的人而感到骄傲。

2. 博弈论-非零和博弈（续五）

古巴导弹危机：1962年10月前**苏联**企图把带核弹头的导弹布置在古巴，而**美国**10月14日确认了这些导弹的存在性。当时，**肯尼迪**总统有两个选择：海军封锁或者空袭；**赫鲁晓夫**总理也有两个选择：撤出导弹或留下导弹。

古巴导弹危机		前苏联**USSR**	
		撤出	维持
美国**USA**	封锁	**(3, 3)** 妥协	**(2, 4)** 苏联胜利
	空袭	**(4, 2)** 美国胜利	**(1, 1)** 核战争

2. 博弈论-非零和博弈（续六）

最后的结果是，美国采取封锁策略，而苏联采取撤出策略；这是一种妥协（虽然在某种意义下，使苏联从古巴撤出了他们的导弹，美国“赢了”博弈，但是苏联也得到了美国不入侵古巴的承诺）。

显然，支付矩阵中给出的策略选择和优先次序仅仅是古巴导弹危机的高度简化和概括。因为：

(1) 双方的选择有很多种，还要考虑每种选择的变化（苏联要求美国从土耳其撤出导弹，而美国不予理睬）；

(2) 根据支付矩阵给出的有理结果可能并不是完全可信的（如果美国空袭苏联的导弹，苏联可以认为这威胁了他们的国家利益，因而这样的行动组合也可导致核战争，这与空袭和维持这个决策对有同样的支付结果）。

2. 博弈论-非零和博弈（续七）

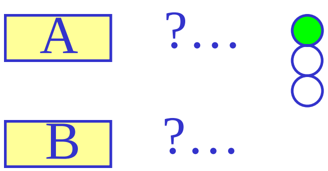
古巴导弹危机博弈中表明，美国和前苏联两个国家的利益既不是截然相反地对抗，也不正好相反。它反映了局中人双方可能想要同样的结果的可能性，换句话说，他们想要合作而不是竞争。这种博弈常常称之为**混合动机博弈**。古巴导弹危机博弈还表明不存在表示每个局中人的支配行动步骤的平衡点。

存在支配策略的博弈例子		局中人A	
		C	***D***
局中人**B**	***C***	**(4, 4)**	**(2, 3)**
	D	**(3, 2)**	**(1, 1)**

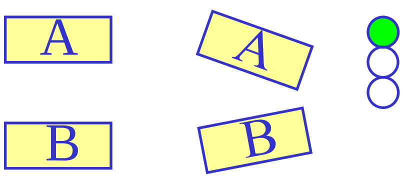
2. 博弈论-非零和博弈（续八）

领先者博弈：两个司机驾车并行试图通过交叉路口。当绿灯亮起时，每个司机必须做出决策

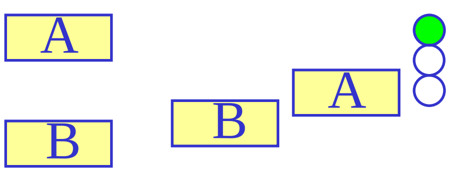
- 把过路权让给另外一个司机(***C***)
- 驾车开过路口(***D***)



如果双方都选择(***C***)，
他们两个就都被耽误了。



如果双方都选择(***D***)，
他们就可能相撞。



如果一个选择(***C***)，而另外一个选择(***D***)，那么领先者将能够继续旅行，而落后者仍能挤进领先者留下的空间，在绿灯变成红灯前进入交通流。

2. 博弈论-非零和博弈（续九）

领先者博弈		司机A	
		C（避让)	***D***（不让)
司机B	***C***（避让)	(2, 2)	(3, 4)
	D(不让)	(4, 3)	(1, 1)

根据极大极小论证方法：为了避开最坏可能的结果，每个司机应选择行动 (*C*)，这样可以保证没有一个人获得少于 2 个单位的支付。然而，这个决策对并不处于平衡的状态，因为当一个司机看到另一个司机已经做的事情之后，他/她都有理由为自己的选择感到懊悔。这个简单的例子表明了极小极大原理 (*C*, *C*) 不能作为混合动机博弈中规定合理的行动步骤的基础。

2. 博弈论-非零和博弈（续十）

在这个领先者博弈中有两个平衡策略：决策对 ***(C, D)*** 和决策对 ***(D, C)***。如果司机 **A** 选择了 ***D***，那么司机 **B** 没有比选择 ***C*** 更好的了，反之亦然。换句话说，偏离了平衡结果没有一个司机能做得更好。注意与零和博弈截然不同（平衡点总是等价的），在领先者博弈中司机 **A** 喜爱平衡决策对 ***(C, D)***，而司机 **B** 喜爱平衡决策对 ***(D, C)***。

没有调解这种差别的数学方法！在现实世界中的类似局势中，**僵局**常常是这样产生的：每一个决策者都很容易觉察到平衡点中的一个（比如从他/她自己的立场出发）；结果导致双方互不相让 ***(D, D)*** 。

2. 博弈论-非零和博弈（续十一）

夫妻之战：一对夫妇必须在他们的晚间娱乐活动的两种方案中做出选择，丈夫喜欢电影，而妻子喜欢逛店。问题是他们愿意双双一起出去而不是单独出去。

2. 博弈论-非零和博弈（续十二）

- 若他们都选择他们的首选 (*C*)，则只好各走各的。每个人只能得到 **2** 个单位的支付
- 若他们都选择他们的后选 (*D*)，则还是各走各的。每个人都做出了牺牲(但都活受罪)，每个人只能得到**1**个单位的支付
- 若一个人做出首选，而另一个人做出后选(牺牲)，做出牺牲的得到 **3** 个单位支付，而另一方得到 **4** 个单位的支付

2. 博弈论-非零和博弈（续十三）

夫妻之战博弈		妻子	
		C（坚持）	***D***（妥协）
丈夫	***C***（坚持）	**(2, 2)**	**(4, 3)**
	D（妥协）	**(3, 4)**	**(1, 1)**

注意夫妻之战与领先者博弈相同之处是：

(1) 丈夫和妻子都没有支配策略；
(2) 极大极小策略是非平衡的博弈对**(*C*, *C*)**；
(3) 平衡博弈对是两个**(*C*, *D*)** 和 **(*D*, *C*)**。

2. 博弈论-非零和博弈（续十四）

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">夫妻之战博弈</td><td colspan="2">妻子</td></tr>
<tr><td>C(坚持)</td><td>D(妥协)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">丈夫</td><td>C(坚持)</td><td>(2, 2)</td><td>(4, 3)</td></tr>
<tr><td>D(妥协)</td><td>(3, 4)</td><td>(1, 1)</td></tr>
</table>

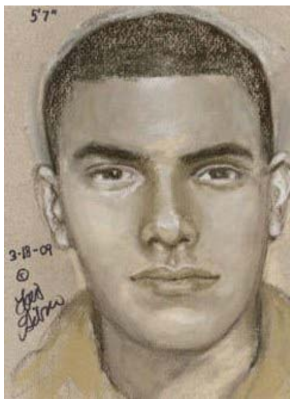
注意夫妻之战与领先者博弈不同之处是： 夫妻之战中，单方面背离极大极小策略的局中人将给另一个人的报酬要比给自己的多(这与领先者博弈中正好相反)。

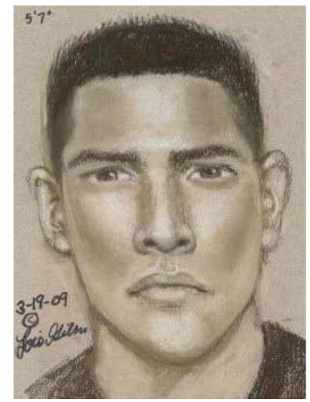
然而与领先者博弈一样，夫妻之战中的一个人也可以通过为获得某种程度对行动 *C* 的承诺，而从与另一个人的交流中得益。例如，丈夫可以宣布他已经不可改变地许诺了要去看电影，如果妻子想使自己的收益极大的话，那么这种做法就对丈夫有利。(仅有的困难在于让妻子相信丈夫是严肃的。)

2. 博弈论-囚徒两难博弈

最令人感兴趣的混合策略（**Albert Tucker**，1951）

两个都被指控犯有某种重罪的囚徒要做出选择：






- 若他们都向警方隐瞒实情（***S***，即都保持沉默），则警方无法指控他们重罪，每人服刑 **2** 年
- 若他们都向警方坦白实情（***C***，即都招供），则他们两个人都将被判从轻处罚，每人服刑 **4** 年
- 若一个人隐瞒了，而另外一个人却向警方坦白了，则坦白者减刑，服刑 **1** 年；而隐瞒者服重罪刑 **5** 年

2. 博弈论-囚徒两难博弈（续一）

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">囚徒两难博弈</td><td colspan="2">囚徒A</td></tr>
<tr><td>S(沉默)</td><td>C(坦白)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">囚徒
B</td><td>S(沉默)</td><td>(2, 2)</td><td>(5, 1)</td></tr>
<tr><td>C(坦白)</td><td>(1, 5)</td><td>(4, 4)</td></tr>
</table>

囚徒两难博弈是一个真正的**悖论**：遵循个体合理性，对一个囚徒来说，向警方坦白，要更好一些。但是，如果两个囚徒都保持沉默，那么每个人将得到更好的结果。

这个悖论的实质是个体理性和集体理性之间的冲突。

2. 博弈论-囚徒两难博弈（续二）

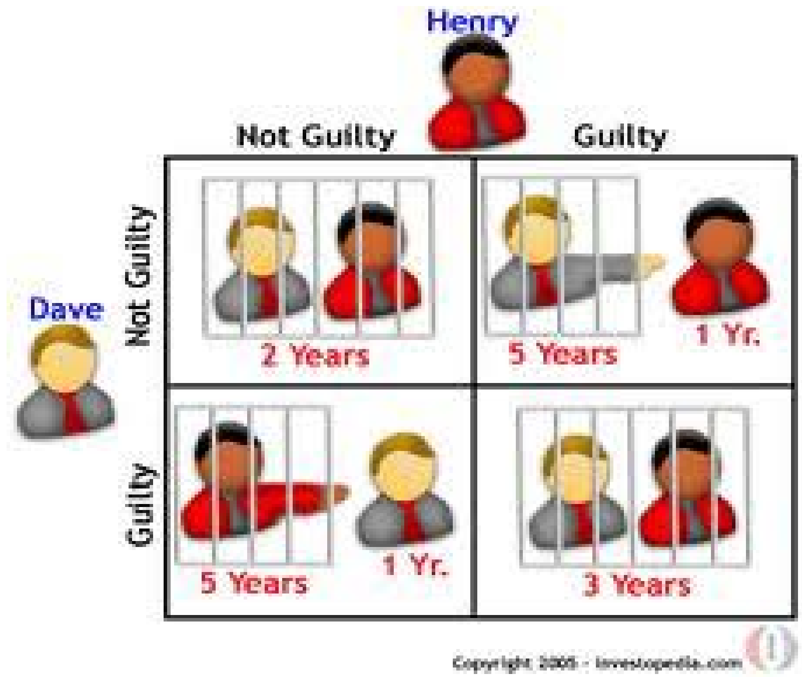
因徒两难博弈是一个真正的**悖论**：极大极小策略对是**(*C*, *C*)**，即都坦白(互相背叛)，这也是这个博弈仅有的一个平衡点；所以每一个囚徒都没有理由为极大极小选择而懊悔。

囚徒两难博弈		囚徒A	
		S(沉默)	***C***(坦白)
囚徒 **B**	***S***(沉默)	**(2, 2)**	**(5, 1)**
	C(坦白)	**(1, 5)**	**(4, 4)**

极大极小策略也是支配策略，因为当用另外一个局中人的选择来对局时，每人从背叛得到的支付要大于从合作中得到的支付。因此看起来，不管另一个囚徒采取什么策略，似乎向警方叛变是每个囚徒的最优选择。

2. 博弈论-囚徒两难博弈（续三）

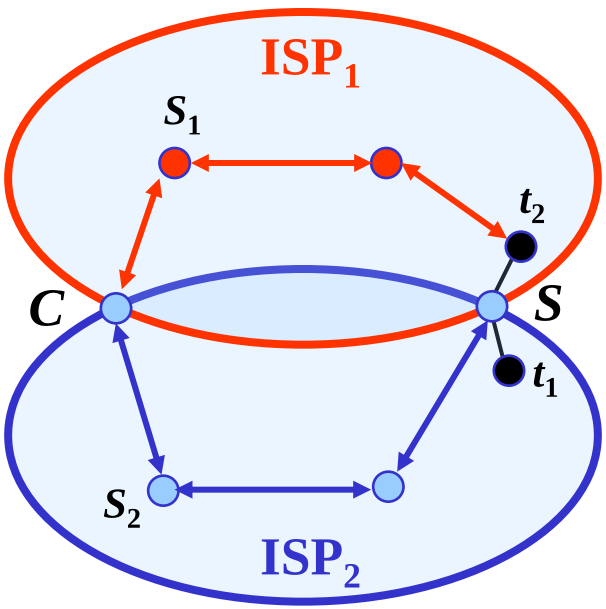
注意要确保两个囚徒得到更好的结果(都保持沉默而各服刑2年)，他们所需要的就是有一个基于他们共同利益的某种选择原则。也许最古老和熟悉的一个原则就是孔子的“己所欲，施于人”—用自己的心意推想别人的心意(体谅他人)。



然而，孔子的“己所欲，施于人”，并不适用于所有的博弈中，因为有时它会带来灾难性的后果。例如，如果在夫妻之战博弈中，夫妻双方都应用儒家的这条为人准则的话，那么将是最坏的可能的结果，即他们各走各的，而且是忍受他们各自不喜欢的娱乐活动。

2. 博弈论-囚徒两难博弈（续四）

囚徒两难博弈可以用来刻画许多实际问题模型。比如，**互联网络服务供应商**(Internet Service Provider – ISP)**路由问题**：**ISP$_i$** 有两个选择将数据从发点 s_i 传送到收点 t_i，通过点 ***C*** 或者通过点***S***；它们都自私地想尽可能地不用自己的网络。



ISP路由博弈		ISP$_2$	
		S	***C***
ISP$_1$	***S***	**(2, 2)**	**(5, 1)**
	C	**(1, 5)**	**(4, 4)**

2. 博弈论-多阶段博弈

迄今我们考虑的仅仅集中在“一次性的”博弈上：局中人一劳永逸地做出单个博弈，采取相应的行动，而且多多少少是不顾后果的。然而，现实生活中有许多**多阶段博弈**不是这样的：我们面对的可能的一系列（甚至是无限的）冲突局势。

下面我们要考虑的是，可以无限地连续进行博弈，即在该博弈的任何一次对局后，局中人仍有机会再次相互作用；在这种情况下，我们将看到合作就成为可能了。

社会生物学推理的基础：人类行为的模式，包括表明上看来是利他主义的无私行为，一般说来都是从自私的行为中发展进化出来的。对囚徒两难博弈来讲，就是人们总是喜欢个别合理的背叛行为（而不是集体合理的合作行为）。

2. 博弈论-多阶段博弈（续一）

进化博弈论认为：总是背叛的策略就是**进化稳定策略**，因为偏离这种策略的局中人在与一群背叛者对抗中永远也不能得手。近年来的心理学实验就是要研究这个问题。

Robert Axelrod 试图回答以下三个主要问题：

- 在利己主义的圈子里，合作究竟是怎样出现的？
- 采用合作策略的个体能比不合作的竞争对手生存得更好吗？
- 哪些合作策略表现得最好，及它们是怎样到达支配地位的？

Robert Axelrod 的想法是基于一个事实：对一个无限持续的囚徒两难博弈存在许多平衡点。换句话说，对于一系列已知、固定持续时间的囚徒两难博弈，总是背叛是不可动摇的策略，但是在双方都不知道相互作用的次数的情况下，则存在其它可供选择的**进化稳定策略**。

2. 博弈论-多阶段博弈（续二）

Robert Axelrod 邀请了心理学家、数学家、政治学家和计算机专家参加一个使不同策略相互竞争的计算机竞赛(共**14**人)。竞赛的规则是:

- 允许利用前面对局中的任何信息
- 允许利用随机化选择
- 每一对局中必须给出确定的决定，
  隐瞒(***C***)即与另一个合作，或者告发(***D***)即背叛另一个

Robert Axelrod 除了测试这 **14** 位参赛者提交的策略，他还考虑了随机策略(通过抛硬币来决定合作还是背叛)。在竞赛中每个策略程序要与每个其它策略程序(也包括它自己)进行对局 **200** 次。为光滑化由于非确定性策略所产生的统计数字的波动，整个实验又进行了**5** 次。

2. 博弈论-多阶段博弈（续三）

结果证明赢家是一个最简单的策略，**针锋相对(Tit For Tat)**，这是由**Anatol Rapoport** 提出的只有两行的策略程序：

- 对第一个合作者(囚徒)采取合作的策略
- 在以后的各轮对局中采用你的对手在前一轮采取的策略

思考：分析一下如果两个人都采用**针锋相对**策略，那么会出现什么结果？有没有一个策略可以攻破**针锋相对**策略？

从这个实验中得到一点经验，一个成功的策略应该是：

- 既能开创合作，又能回报以合作；
- 能对背叛者感到愤怒而且迅速以牙还牙(但不是恶意的反击)
- 直接而明白无误的(避免给人以太复杂的印象)

2. 博弈论-多阶段博弈（续四）

现在我们考虑一般的囚徒两难博弈的支付矩阵，其中

- ❑ *p* 是对联合背叛的“惩罚”支付(punishment)
- ❑ *r* 是对联合合作的“收益”支付(reward)
- ❑ *s* 是给被对手背叛了的合作者(易受骗人)的“经验”支付 (sucker’s)
- ❑ *t* 是对背叛合作者的局中人的“诱惑”(temptation)支付

囚徒两难博弈		囚徒A	
		S (隐瞒)	*C* (坦白)
囚徒B	*S* (隐瞒)	(*r*, *r*)	(*s*, *t*)
	C (坦白)	(*t*, *s*)	(*p*, *p*)

练习： 分析一下当*P*, *R*, *S*, *T*满足什么样的条件时，这是一个囚徒两难博弈的支付矩阵？

2. 博弈论-多阶段博弈（续五）

练习*： 分析一下当***P*, *R*, *S*, *T***满足什么样的条件时，这是一个囚徒两难博弈的支付矩阵, 总是背叛策略是一个进化稳定策略?

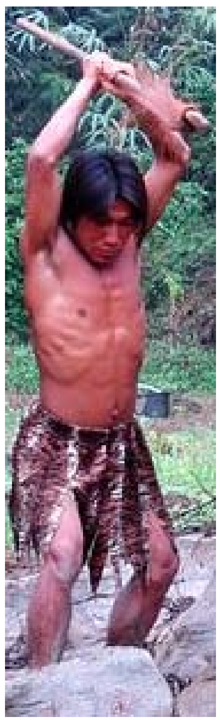
思考： 分析一下当***P*, *R*, *S*, *T***满足什么样的条件时，**针锋相对**是一个进化稳定策略。

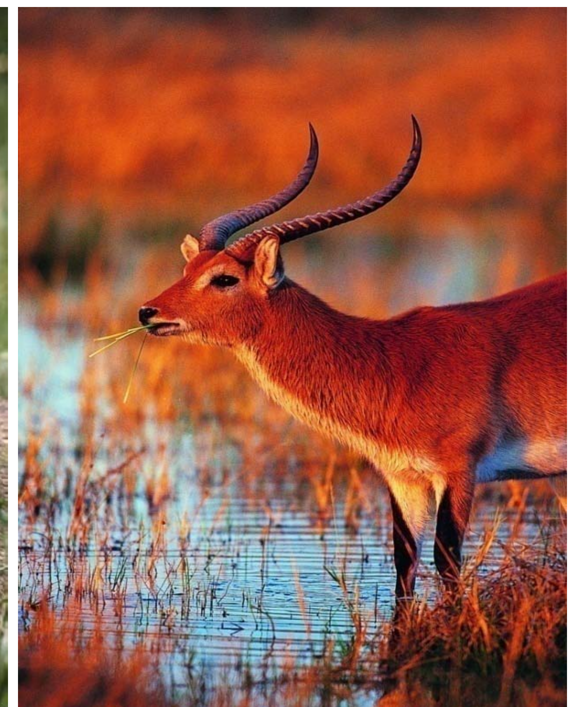
结果表明对于重复性囚徒两难博弈来说，**针锋相对**策略并不是惟一的进化稳定策略。那么，**针锋相对**策略怎么能在一开始全是背叛者的群体中开始起作用呢？有两种可能的机制：

- 亲族关系的选择（两个局中人被充分紧密地联系在一起）
- 聚类（有数目充分大的局中人采用**针锋相对**策略）

2. 博弈论-帕累托最优

猎鹿博弈 原始村庄里仅有**2**个猎人，猎物仅有鹿和兔子。若**2**人齐心合力，可捕得**1**头鹿。若**2**人各自行动，都无法捕到鹿，但可抓住**4**只兔子。假设 **4**只兔子可以供**1**个人吃**4**天；**1**只鹿如果被抓住将被**2**人平分，可供每人吃**10**天。



2. 博弈论-帕累托最优（续一）

对于这两位猎人，要么分别打兔子，每人吃饱4天；要么合作，平分鹿之后，每人吃饱10天。如果一个去抓兔子，另一个去打鹿，则前者收益为4，而后者只能是一无所获，收益为0。

猎鹿博弈		猎人A	
		I（单干)	*C*（合作)
猎人B	*I*（单干)	(4, 4)	(4, 0)
	C（合作)	(0, 4)	(10, 10)

显然，猎鹿博弈的纳什均衡解是(4, 4)和(10, 10)，而极大极小解是(4, 4)。

2. 博弈论-帕累托最优（续二）

帕累托最优（**V. Pareto**，1848-1923）是指资源分配的一种理想状态，即假定固有的一群人和可分配的资源，从一种分配状态到另一种状态的变化中，在没有使任何人境况变坏的前提下，也不可能再使某些人的处境变好。换句话说，就是不可能再改善某些人的境况，而不使任何其他人受损。

猎鹿博弈		猎人A	
		I（单干)	***C***（合作)
猎人**B**	***I***（单干)	**(4, 4)**	**(4, 0)**
	C（合作)	**(0, 4)**	**(10, 10)**

显然，猎鹿博弈的帕累托最优解也是**(4, 4)**和**(10, 10)**，与纳什均衡解相同。

2. 博弈论-帕累托最优（续三）

然而，对于囚徒两难博弈来讲，四个可能的解都是帕累托最优解；而纳什均衡解仅有一个**(4, 4)**。

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">囚徒两难博弈</td><td colspan="2">囚徒 A</td></tr>
<tr><td>S(沉默)</td><td>C(坦白)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">囚徒 B</td><td>S(沉默)</td><td>(2, 2)</td><td>(5, 1)</td></tr>
<tr><td>C(坦白)</td><td>(1, 5)</td><td>(4, 4)</td></tr>
</table>

实际上，根据定义可知，纳什均衡解一定是帕累托最优解，反之不成立；在前面我们考虑的其他博弈中，胆小鬼游戏中存在不是纳什均衡解的帕累托最优解，而古巴导弹危机游戏、领先者游戏和夫妻之战游戏则不存在这样的帕累托最优解。

2. 博弈论-发展

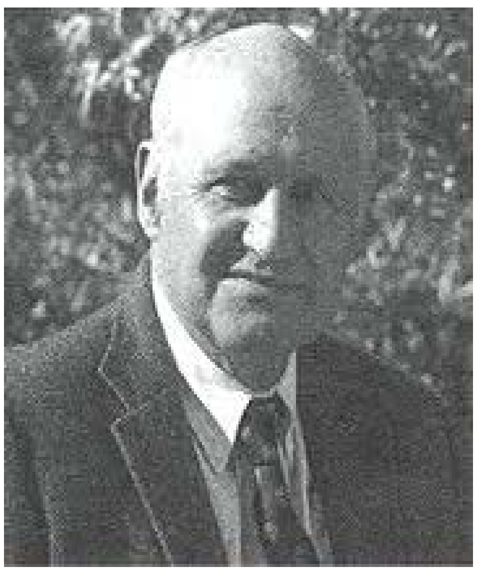
博弈论的发展确实还不够完善，因为它建立在太理想化的假设上。然而，博弈论的思想和概念早就对实际局势冲突的解决提供了深刻而重要的洞察。

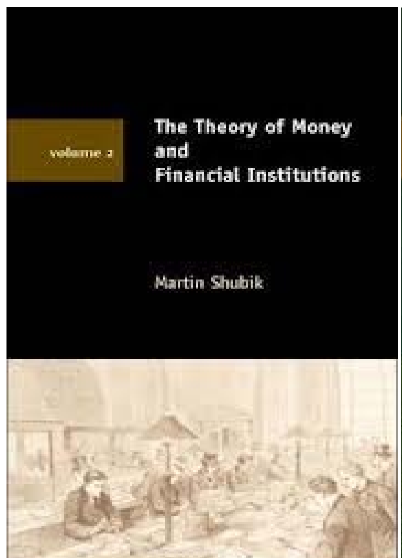
博弈论的必要前提是：局中人合理的行动，以一种本质上是无从区分是非的、自我服务的利己主义的方式做出的决策。然而，博弈论中抽象的局中人与现实世界中的决策者的关系，有些像牛顿力学中质点系与物理世界中的物体的关系。

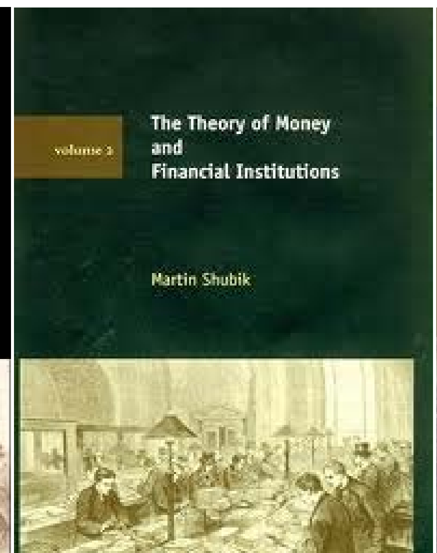
"博弈论的目的在于深刻的见解，而不是解法。"也许这可以解释为什么提出求解线性规划单纯形算法的**G. Dantzig**没有获得诺贝尔经济学奖。

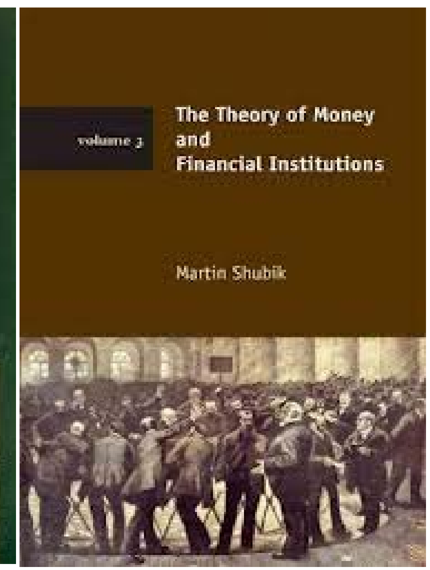
2. 博弈论-发展

选做题 与你的几个朋友玩如下游戏，它是由耶鲁大学经济学家舒贝克(**M. Shubik**) 设计的：准备一张百元大钞，告诉他们你要将这张百元大钞拍卖给出价最高的那位朋友，大家互相竞价，以5元为单位，到没有人再加价为止。出价最高的人，只要付给你他所开的价码，即可获得这张百元大钞，但出价第二高的人，虽无法获得百元大钞，仍需将他所开的价码付给你。









2. 博弈论-其他模型

少数者博弈；智猪博弈；雪堆博弈（鹰鸽博弈）

假设猪圈里有两头猪，一头大猪，一头小猪。猪圈的一边有个踏板，每踩一下踏板，在远离踏板的猪圈的另一边的投食口就会落下少量的食物。当小猪踩动踏板时，大猪会在小猪跑到食槽之前刚好吃光所有的食物；若是大猪踩动了踏板，则还有机会在小猪吃完落下的食物之前跑到食槽，争吃到另一半残羹。

假设猪圈里有一头大猪、一头小猪。猪圈的一头有猪食槽，另一头安装着控制猪食供应的按钮，按一下按钮会有**10**个单位的猪食进槽，但是谁按按钮就会首先付出**2**个单位的成本，若大猪先到槽边，大小猪吃到食物的收益比是**9：1**；同时到槽边，收益比是**7：3**；小猪先到槽边，收益比是**6：4**。

练习：假设两头猪一样聪明，会出现什么结果？

2. 博弈论-其他模型（续一）

英格兰式拍卖；荷兰式拍卖；日本式拍卖；投标式拍卖

英国式拍卖法：最常见的拍卖方式，竞标者出价由下往上喊，喊价最高者得标，竞标者可多次重复提高出价，常见于拍卖场富士比拍卖会，台湾的夜市竞标皆以此法拍卖。

荷兰式拍卖法：创于荷兰的郁金香拍卖场而得名，卖方由高往低喊价，过程中如有人愿意购买，此价即为成交价。此外，台湾的蔬果、鱼肉批发市场亦是以此种方式拍卖，常应用于有一定数量之商品拍卖时。

最高价得标拍卖法：密封投标金额，投标者只能出价一次，开标时最高价者得标并依价付款（或者次高价付款），广泛应用在土地、公用工程（**google**、**百度**等广告）的竞标上。

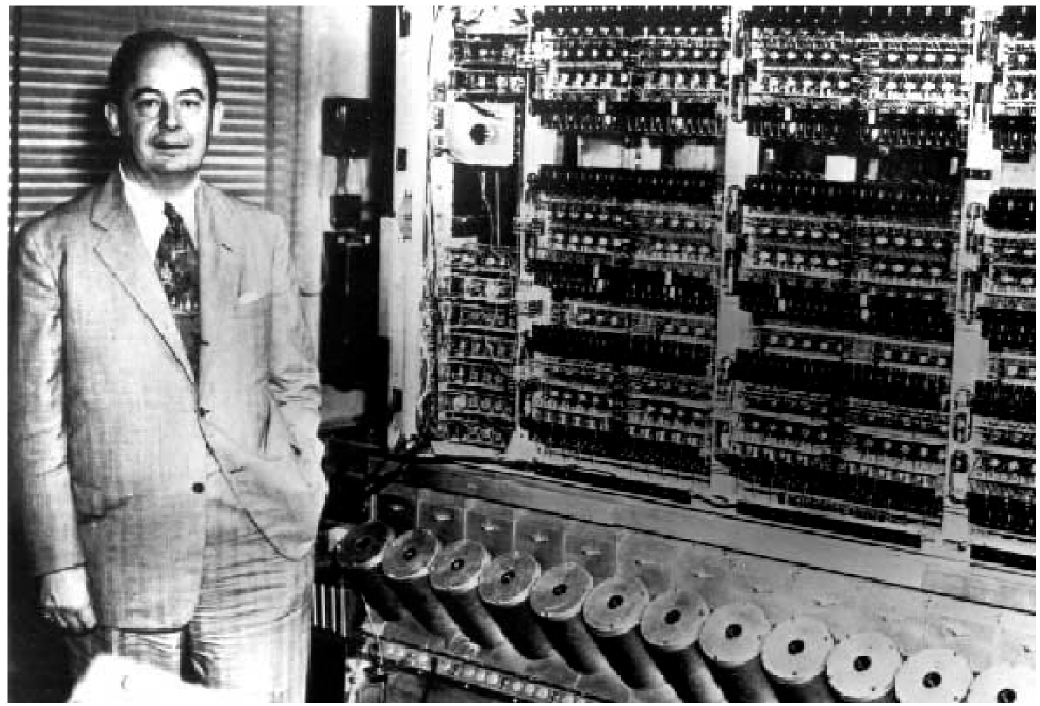
2. 博弈论-其他模型（续二）

选做题： 讲述一个平凡的女大学生神崎直，某天突然得到一大笔现金并卷入“欺诈游戏”的故事. 赢了就能得手一大笔金钱，输了就要背负巨额债款，欺诈游戏就是这样一个只有两个极端的金钱和欲望的游戏。女大学生和男欺诈师等在不断升级的游戏中必须利用**心理学**、**数学**（**博弈论**）等知识去解决困境。

2. 博弈论-发展（续一）

如前所述，博弈论的研究可以追溯到上个世纪初，数以百计的数学家和经济学家为其发展做出了许多里程碑式的贡献。

冯·诺依曼(1903-57) 1928年证明极小极大定理；1944年与奥斯卡·摩根斯特恩发表《博弈论与经济行为》。

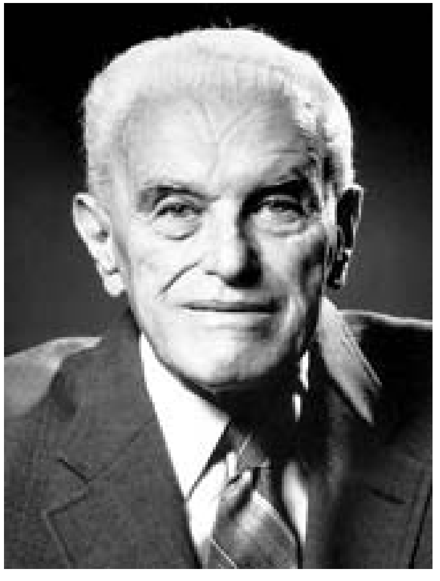


1945年冯·诺依曼领导的小组，发表了一个全新的“存储程序通用电子计算机方案”—EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer) 。他因此被誉为现代计算机之父。

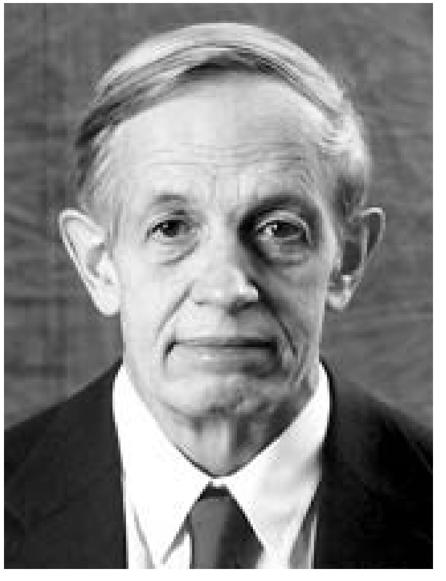
2. 博弈论-发展（续二）

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1994

"for their pioneering analysis of equilibria in the theory of **non-cooperative** games "



John C. Harsanyi



John F. Nash Jr.

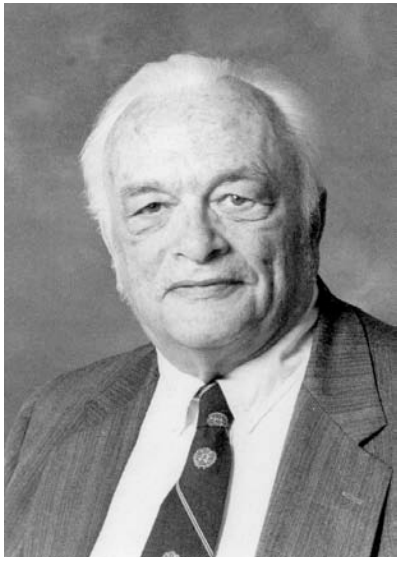
Reinhard Selten

2. 博弈论-发展（续三）

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1996

"for fundamental contributions to the economic theory of incentives under asymmetric information"

James A. Mirrlees



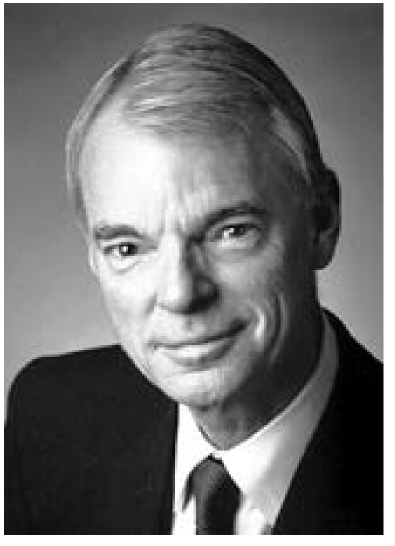
William Vickrey

2. 博弈论-发展（续四）

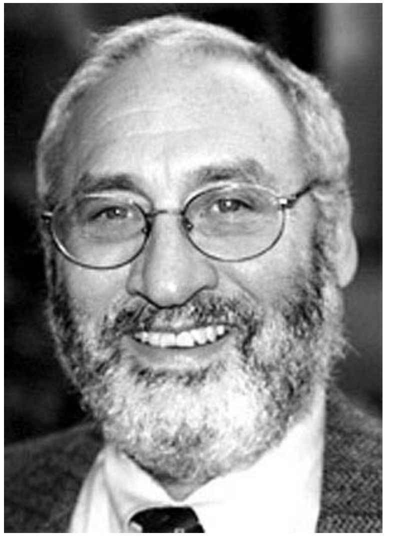
The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2001

"for their analyses of markets with asymmetric information"

George A. Akerlof



A. Michael Spence

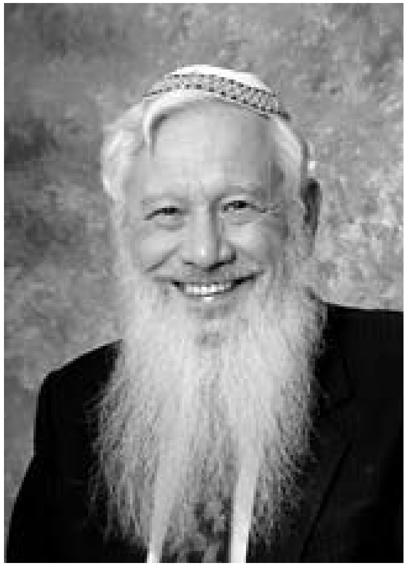


Joseph E. Stiglitz

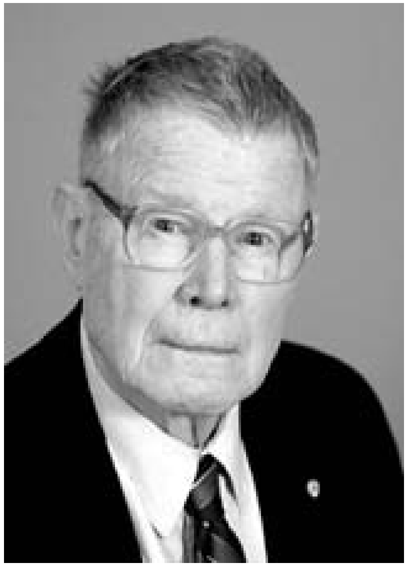
2. 博弈论-发展（续五）

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2005

"for having enhanced our understanding of **conflict** and **cooperation** through game-theory analysis"



Robert J. Aumann

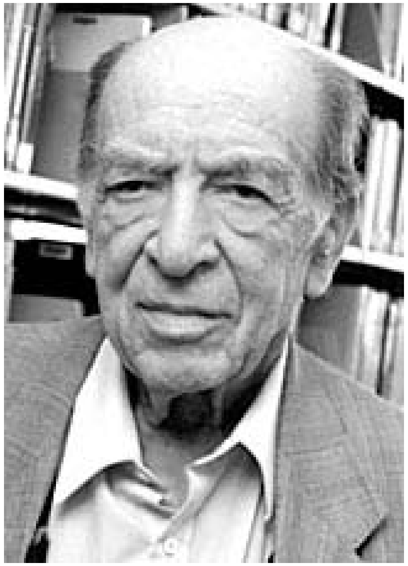


Thomas C. Schelling

2. 博弈论-发展（续六）

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2007

“for having laid the foundations of **mechanism design** theory”



Leonid Hurwicz

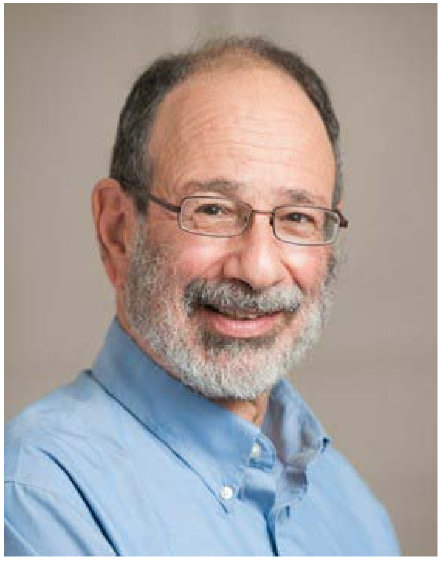
Eric S. Maskin

Roger B. Myerson

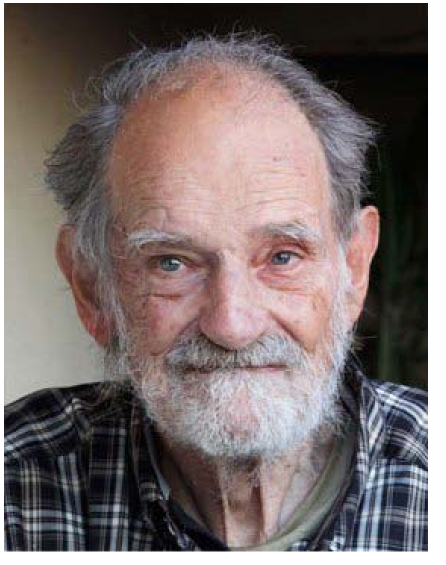
2. 博弈论-发展（续七）

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2012

“for the theory of stable allocations and the practice of market design”



Alvin E. Roth



Lloyd S. Shapley

2. 博弈论-发展（续八）

到本世纪初，算法博弈论(**Algorithmic Game Theory**)开始逐渐兴起。人们将研究的重点放到“网络博弈”的统一框架下，以此来探索实现(大型)网络优化控制的有效方法。这一新的交叉研究方向吸引着许多世界著名的理论计算机科学家致力于这一方面的研究：

- ❑ **Papadimitriou** (2002年**Knuth**奖)
- ❑ **Goemans** (2000年**Fulkerson**奖)
- ❑ **Kleinberg** (2005年**MacArthur**天才基金, 2006年**Nevanlinna**奖)
- ❑ **Tardos** (1988年**Fulkerson**奖, 2006年**Dantzig**奖)
- ❑ **Roughgarden** (2003年**Tucker**奖, 2006年**ICM**作45分钟报告)

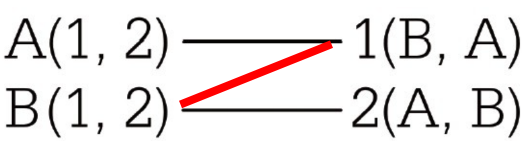
2. 博弈论-Gale-Shapley算法

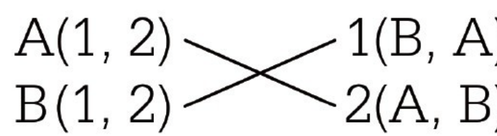
假如你是一位红娘。现有若干个单身男子登门求助，还有同样多的单身女子也前来征婚。如果你已经知道这些女孩儿在每个男孩儿心目中的排名，以及男孩儿们在每个女孩儿心中的排名，你应该怎样为他们牵线匹配呢？

最理想的匹配方案当然是，每个人的另一半正好都是自己的"第一选择"。但绝大多数情况下都不可能实现。比方说，**男1**号最喜欢的是**女1**号，而**女1**号的最爱不是**男1**号；或者好几个男孩儿最喜欢的都是同一个女孩儿。当这种最为理想的匹配方案无法实现时，怎样的匹配方案才能令人满意呢？

2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续一）

理想的匹配固然重要，但是和谐才是配对的关键。如果**男1**号和**女1**号各有各的对象，但**男1**号觉得，比起自己现在的，**女1**号更好一些；**女1**号也发现，在自己心目中，**男1**号的排名比现男友更靠前。这样一来，这两人就可能抛弃各自现在的对象。如果出现了这种情况，我们就说这个配对是**不稳定**的。





一个匹配虽然不能让每个人都得到最满意的，但它必须是**稳定**。换言之，对于每一个人，在他/她心目中比他/她当前伴侣更好的异性，都不会认为他/她也是一个更好的选择。一个非常自然问题就是：

稳定的匹配总存在吗？如何找到一个稳定的匹配呢？

2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续二）

1962年，美国数学家 **David Gale** 和 **Lloyd Shapley** 发明了一种寻找稳定匹配的策略。不管男女各有多少人，也不管他们的偏好如何，应用这种策略后总能得到一个稳定的匹配。换句话说，他们证明了稳定匹配总是存在的。

Gale-Shapley 策略/算法：男孩儿将一轮一轮地去追求他中意的女孩儿，女孩儿可以选择接受或者拒绝他的追求者。
第一轮，每个男孩儿都选择自己名单上排在首位的女孩儿，并向她表白。此时，一个女孩儿可能面对的情况有三种：

√ 没有人跟她表白：女孩儿只需要继续等待
√ 只有一人跟她表白：接受他的表白，答应暂时和他做情侣
√ 有不止一个人跟她表白：从所有追求者中选择自己最中意的那一位，答应和他暂时做情侣，并拒绝所有其他追求者。

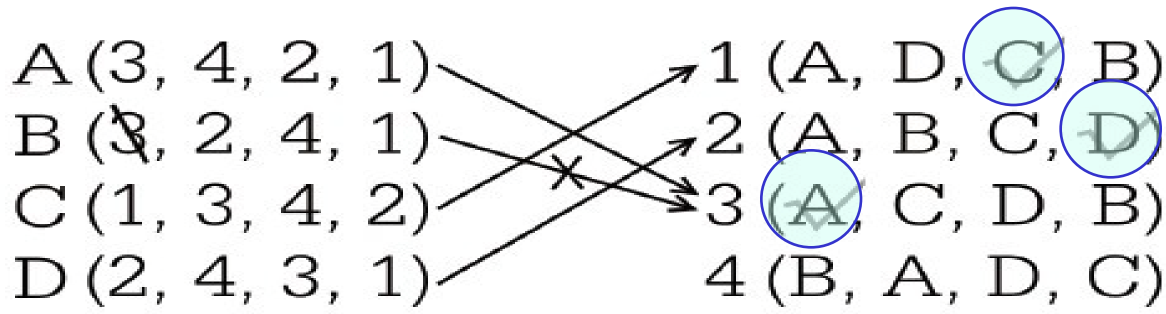
2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续三）

第一轮结束后，有些男孩儿已经有女朋友了，有些男孩儿仍然是单身。在第二轮追女行动中，每个单身男孩儿都从所有还没拒绝过他的女孩儿中选出自己最中意的那一个，并向她表白，**不管她现在是否是单身**。和第一轮一样，女孩儿们需要从表白者中选择最中意的一位，拒绝其他追求者。**注意**，如果这个女孩儿已经有男朋友了，当她遇到了更好的追求者时，她必须拒绝掉现在的男友，投向新的追求者的怀抱。这样，一些单身男孩儿将会得到女友，那些已经有了女友的男孩儿也可能重新变成单身。在以后的每一轮中，单身男孩儿继续追求列表中的下一个女孩儿，女孩儿则从包括现男友在内的所有追求者中选择最好的一个，并对其他人说不。

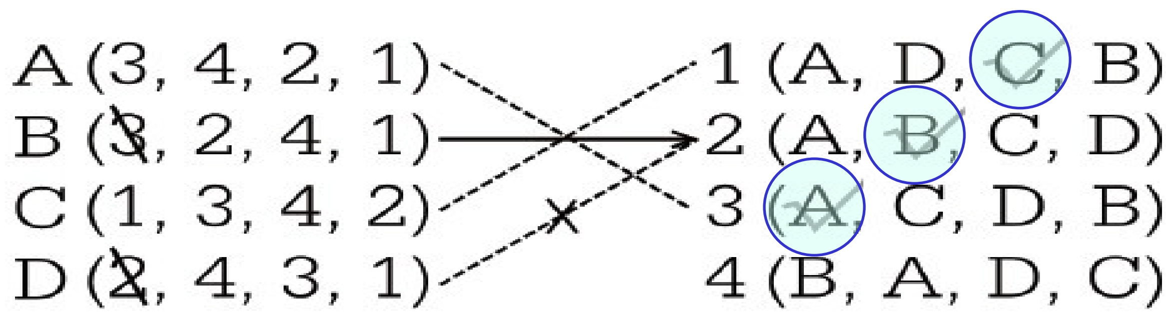
这样一轮一轮地进行下去，直到某个时候所有人都不再单身，下一轮将不会有任何新的表白发生，整个过程自动结束。此时的婚姻搭配就一定是稳定的了。

2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续四）

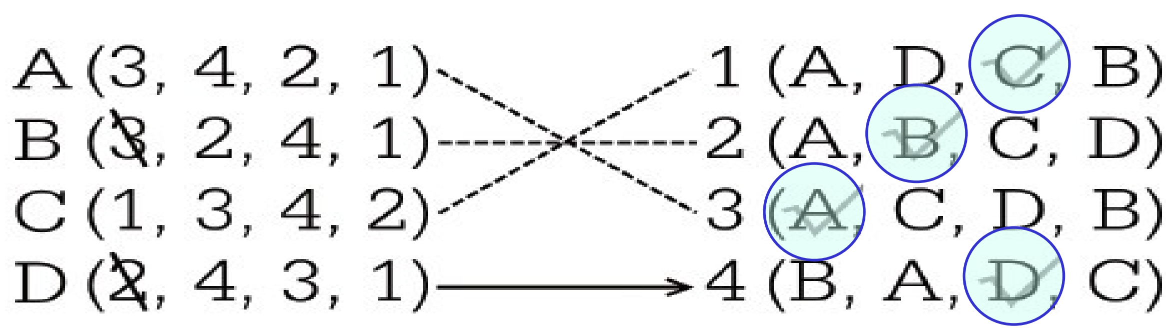
第一轮



第二轮



第三轮



2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续五）

定理 Gale-Shapley 算法给出的匹配是稳定的。

证明. 首先注意到，随着轮数的增加，一个男孩儿追求的对象总是越来越糟，而一个女孩儿的男友只可能变得越来越好。假设男 **A** 和女 **a** 各自有各自的对象，但与各自现有的对象相比较，男**A**更喜欢女 **a** 。因此，男 **A** 之前肯定已经跟女 **a** 表白过。既然女 **a** 最后没有跟男**A** 在一起，说明女 **a** 拒绝了男**A**，也就是说她有了比男**A**更好的男孩儿。这就证明了，两个人虽然不是一对，但都觉得对方比自己现在的伴侣好，这样的情况是不可能发生的，即匹配一定是稳定的。

练习 针对前面所考虑的实例，让女孩儿开始追男孩儿，男孩儿拒绝女孩儿，应用**Gale-Shapley 算法**求出一个稳定匹配。

2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续六）

可以证明，这种男追女-女拒男的方案对男性更有利。事实上，稳定匹配往往不止一种，然而**Gale-Shapley 算法**给出的匹配可以保证，每一位男性得到的伴侣都是所有可能的稳定匹配中最理想的一个；同时每一位女性得到的伴侣都是所有可能的稳定匹配中最差的一个。

倘若有某位女性知道所有其他人的偏好情况，经过精心计算，她有可能发现，故意拒绝本不该拒绝的追求者（暂时答应一个较差的男性做情侣），或许有机会等来更好的男性。因而，在实际生活中应用**Gale-Shapley 算法**，不得不考虑博弈中的**欺诈**行为。

2. 博弈论-Gale-Shapley算法（续七）

Gale-Shapley 算法有一些局限。例如，它无法处理某些不分男女的稳定匹配问题：假设每个宿舍可住两个人，且 **2*n*** 个学生中每一个学生对其余 **2*n* – 1**个学生的偏好评价，如何寻找一个宿舍的稳定分配呢？此时，**Gale-Shapley 算法**就失效了。而事实上，宿舍的稳定分配问题中有可能不存在稳定的分配。

4人偏好关系

A:	B	C	D
B:	C	A	D
C:	A	B	D

3个可能的分配

A + **B**;　**C** + D

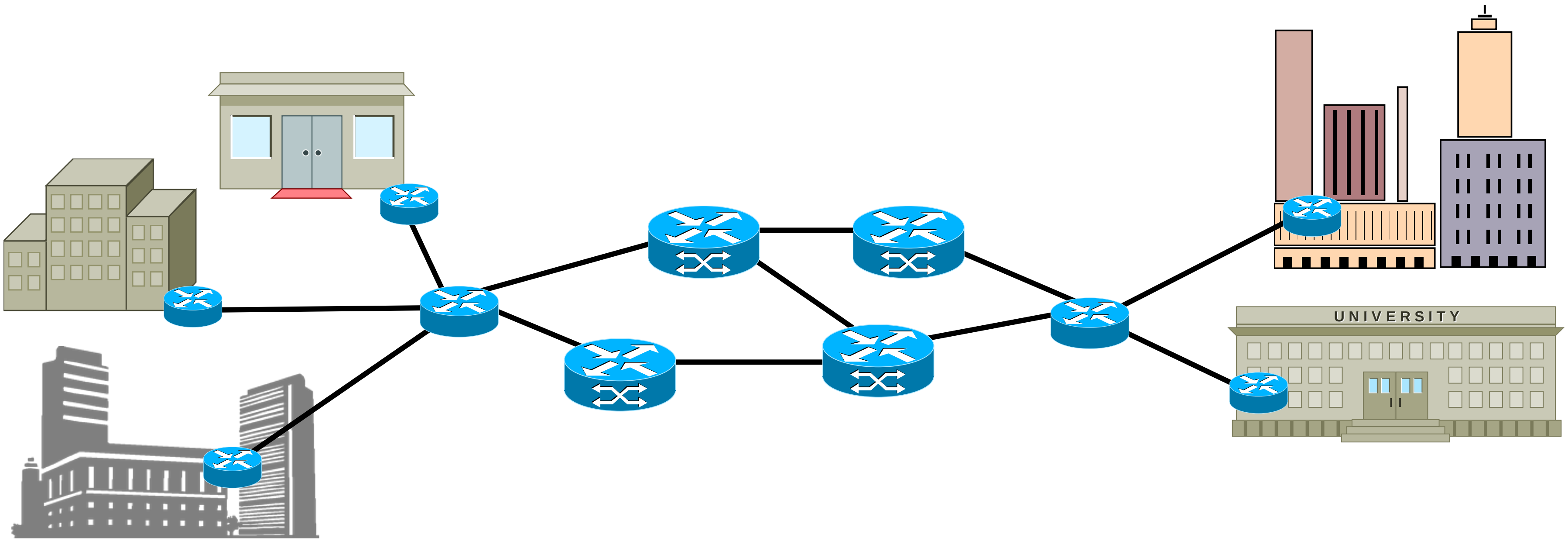
A + C;　**B** + D

A + D;　B + **C**

如何评判一个宿舍分配方案的优劣是一个基本的问题。稳定匹配问题还有很多其他的变种，有些问题是属于**NP-完全**问题类，至今仍然没有（也不大可能有）一种有效的求解算法。

2. 博弈论-网络博弈的背景

与传统的小规模网络不同，像互联网、分布式计算机网、通信网、多跳无线网、电网、交通运输网等现代大规模复杂网络，它们都是由大量的不同的参与者组成；整个复杂网络系统的运作是通过许许多多的参与者的相互作用而实现的。



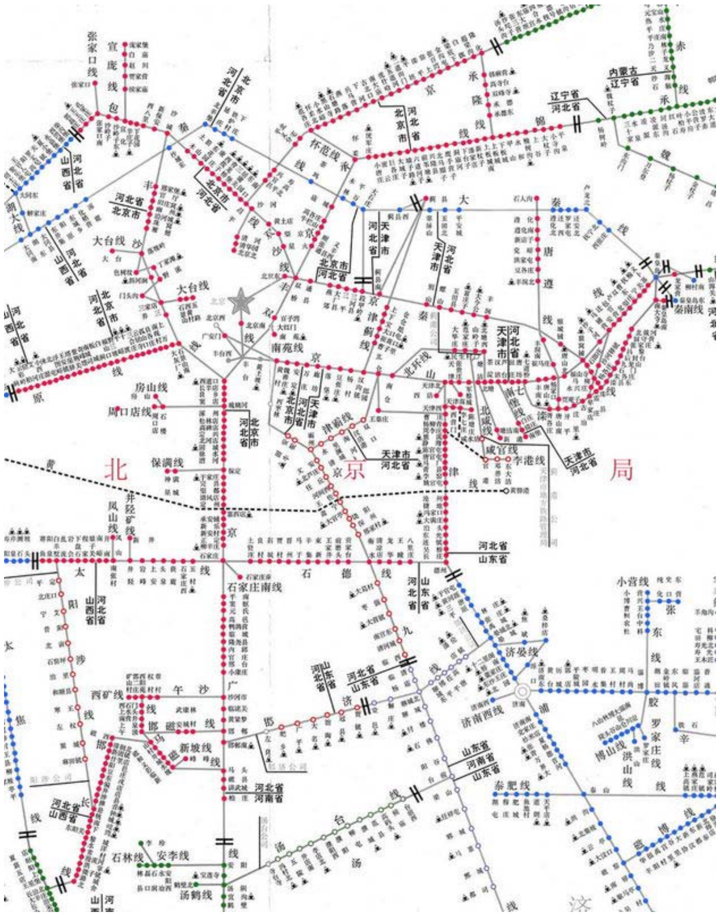
2. 博弈论-网络博弈的背景（续一）

每一个参与者，无论是服务的提供者—服务器、路由器、网络链接……，还是服务的要求者—用户都不在意全局网络的成本和效率，而是“自私”地追求个体利益最大化。然而，个体的自私行为往往使得网络的性能低于传统意义下的整体最优(网络的参与者们是“无私”的，他们听从中心管理机构的命令，接受其安排而使系统的整体目标得以优化)。

广州每年因交通堵塞损失1.5亿小时和117亿GDP


长沙遭遇10年来最大事故停电影响数十万户居民

2. 博弈论-网络博弈的背景（续二）



北京铁路局管辖的线路/区域

全国的铁路网由铁道部管理

2. 博弈论-网络博弈的背景（续三）

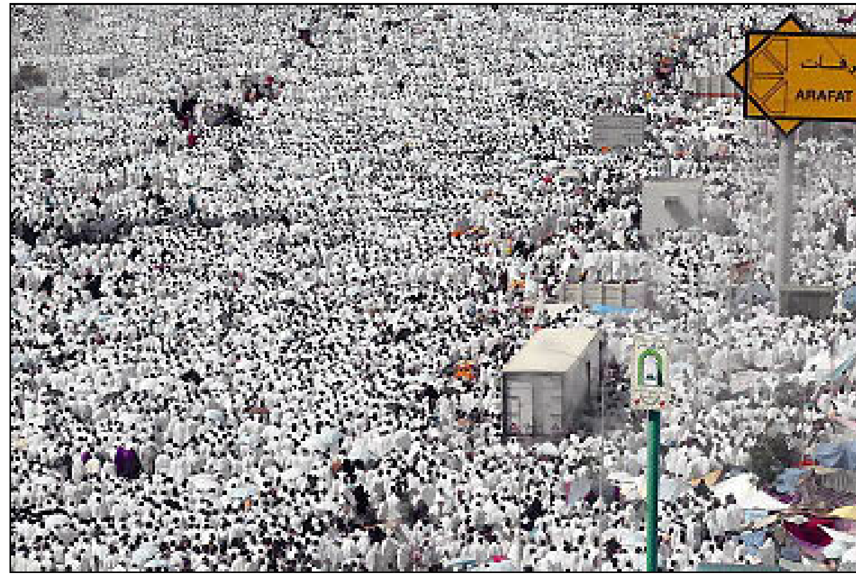
网络的参与者真是“无私”的吗？他们会听从中央管理机构的命令，接受其安排而使系统的整体目标得以优化吗？

2009年宁波国际会展中心铁路临时售票处

2009年春运北京西站临时售票处

2. 博弈论-网络博弈的背景（续四）

2005年8月31日，巴格达的阿扎米亚桥发生踩踏事件，640多人死亡，238人受伤。事后人们遗失的鞋子堆满桥面。



2006年1月12日中午，伊斯兰教圣地麦加发生拥挤踩踏事件，造成至少345人死亡，289人受伤。

2. 博弈论-网络博弈的背景（续五）

2007年11月10日晨，重庆一个家乐福商场内，因争抢特价商品造成踩踏伤亡事故，死3人，伤31人(其中7人重伤)。

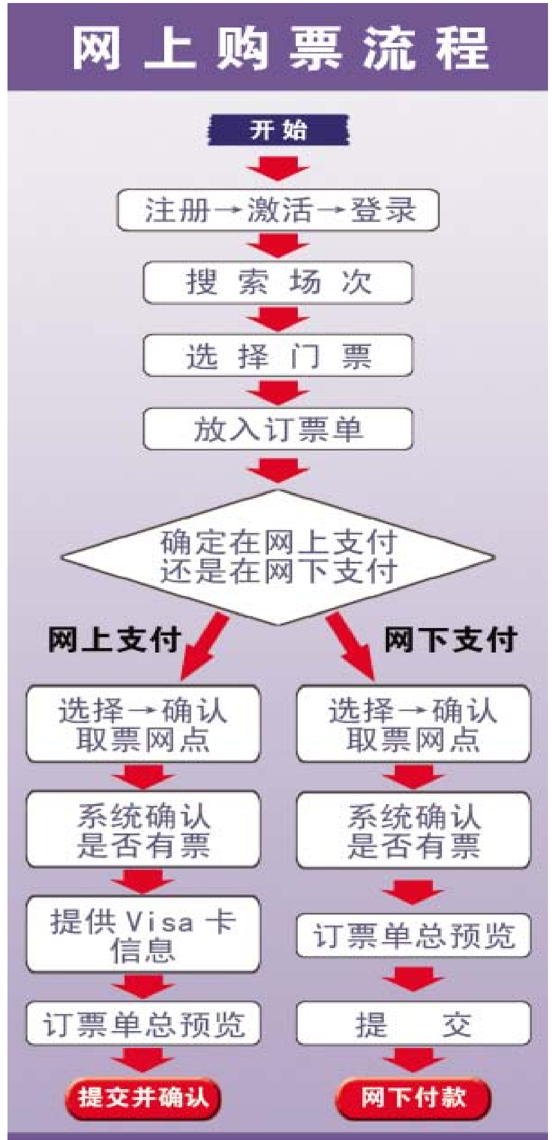
一款菜籽油特价促销，原价每桶**51.4**元的5升装菜籽油，促销价只卖**39.9**元。早4点始，就有市民去排队等候。

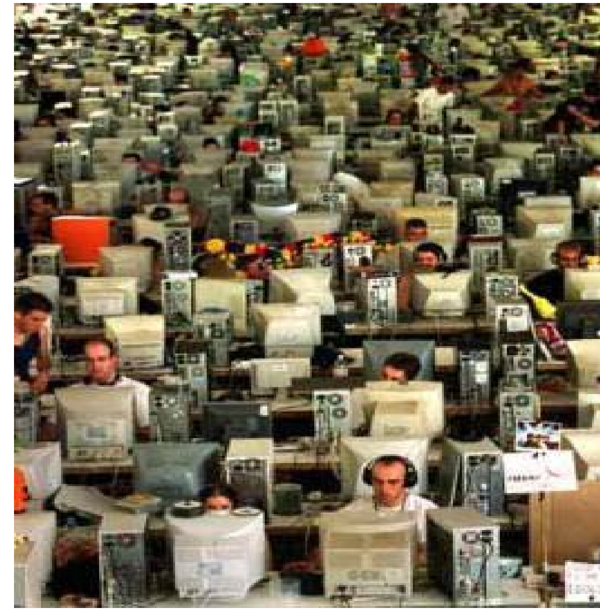
2. 博弈论-网络博弈的背景（续六）

2007年10月30日至2008年1月底截止，北京奥组委面向境内启动第二阶段奥运会门票预售（约185万张门票）。政策是“先到先得、售完为止”，这一政策将会让更多公众实现自己的奥运梦想。

- 第一阶段未付款无法购买
- 三种方式可申购门票
- 新增轮椅票及陪同票
- 每人最多限购50张票
- 订单确定后操作限10分钟
- 票款需两日内支付
（2008年6、7月取票 ）

2. 博弈论-网络博弈的背景（续七）





2. 博弈论-网络博弈的背景（续八）

在现代大规模网络优化设计和应用中，规划者从整体利益出发，优化设计网络以达到整体最优，但网络应用中的参与者却是从自身利益出发，做出自私的行动选择以达到个体最优；这常常使得网络系统的实际性能低于规划者期望的整体最优。这个矛盾为网络优化设计提出了一个亟待研究解决的新问题：如何设计网络使得其性能在应用中能够真正实现。

2. 博弈论-网络博弈的背景（续九）

主要想法是将网络的形成及运作都分别视为一个网络博弈，从博弈的角度研究网络优化设计的算法问题：

- 研究“网络构建博弈”和“网络拥塞博弈”中路由算法设计分析
- 分析网络博弈中个体行为和网络整体性能之间的关系
- 探讨什么样的相互作用原则可以引导个体做出有利于网络整体性能的选择，使得能够形成稳定高效的网络
- 分析合作（联盟）是否可以引导个体做出即有利于个体利益又有利于网络整体性能的选择

在网络博弈研究中人们主要想探讨的一个核心问题：个体的自私行为对网络整体性能有多大(坏)的影响。

2. 博弈论-网络博弈的背景（续十）

Koutsoupias和**Papadimitriou**1999年引入无政府状态的代价(**P**rice **O**f **A**narchy):

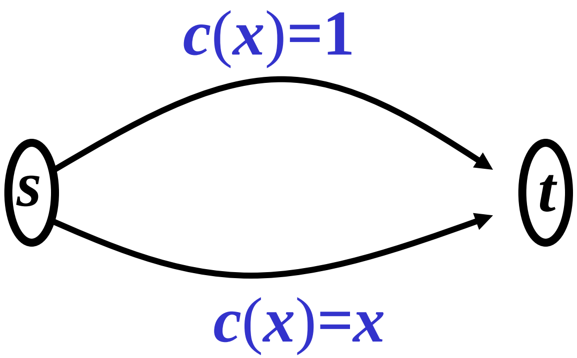
$$\textbf{POA}=\frac{\text{最坏的纳什均衡解的值}}{\text{整体最优解的值}}$$

Schulz和**Stier**2003年引入稳定状态的代价(**P**rice **O**f **S**tability):

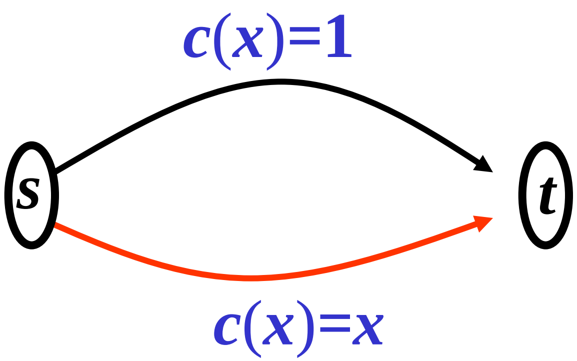
$$\textbf{POS}=\frac{\text{最好的纳什均衡解的值}}{\text{整体最优值解的值}}$$

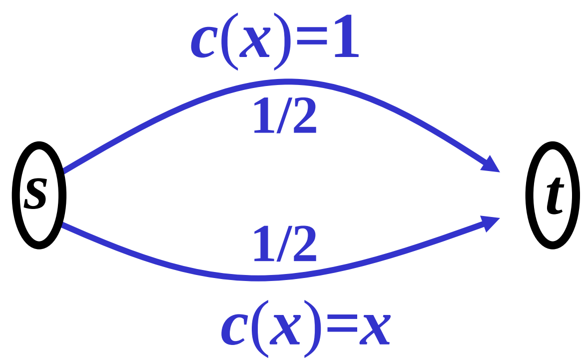
POA和**POS**这两个指标分别从悲观的和乐观的角度，度量了“竞争”近似“合作”的程度。

2. 博弈论-网络自私路由博弈(Pigou, 1920)



考虑**1-单位**(可分)***s-t***流(**Nonatomic Routing**)。每条边上的费用是流经该边流量的一个函数。

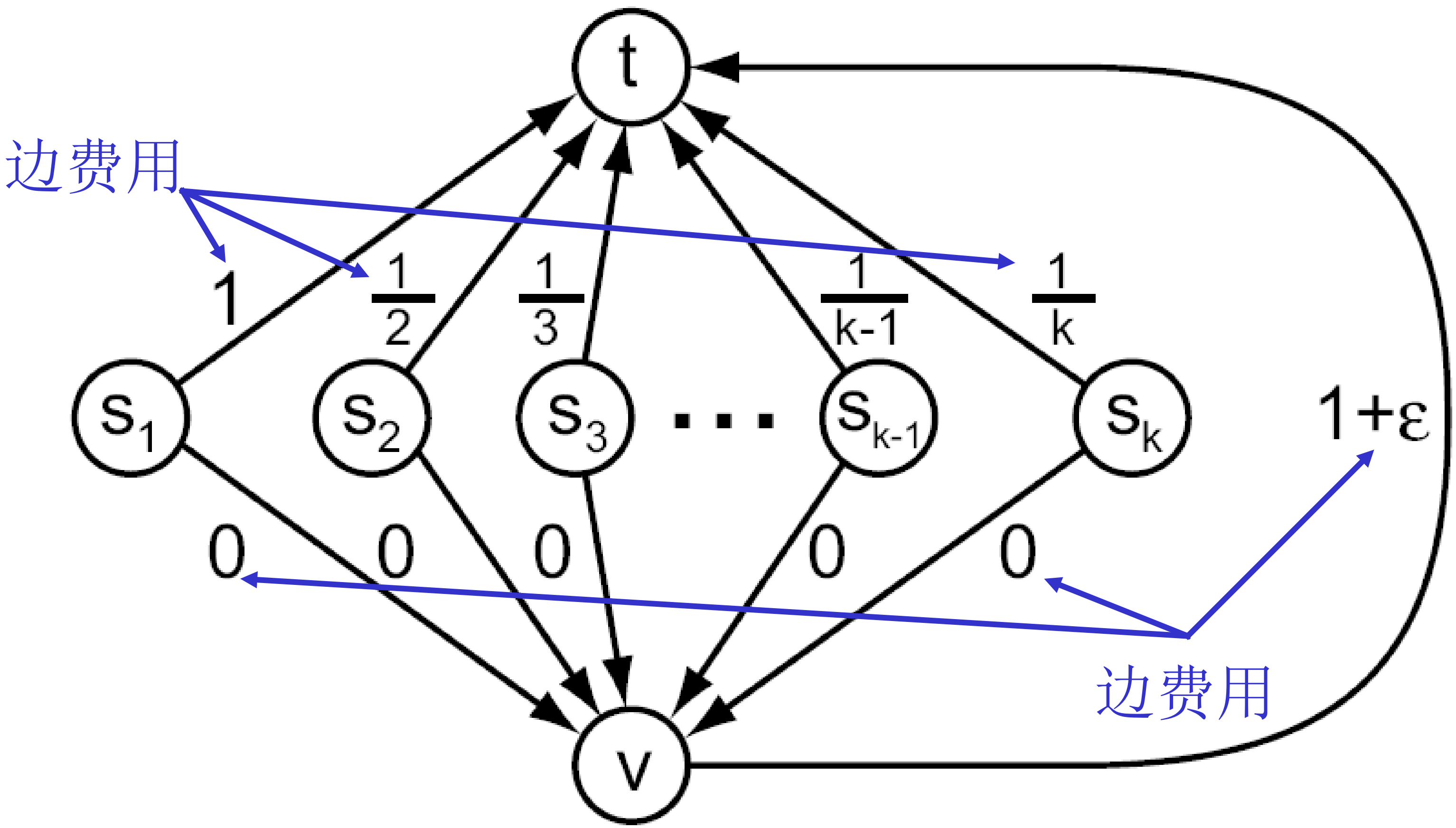




(唯一)纳什均衡解的费用是**1**　　　整体最优解的费用是**3/4**

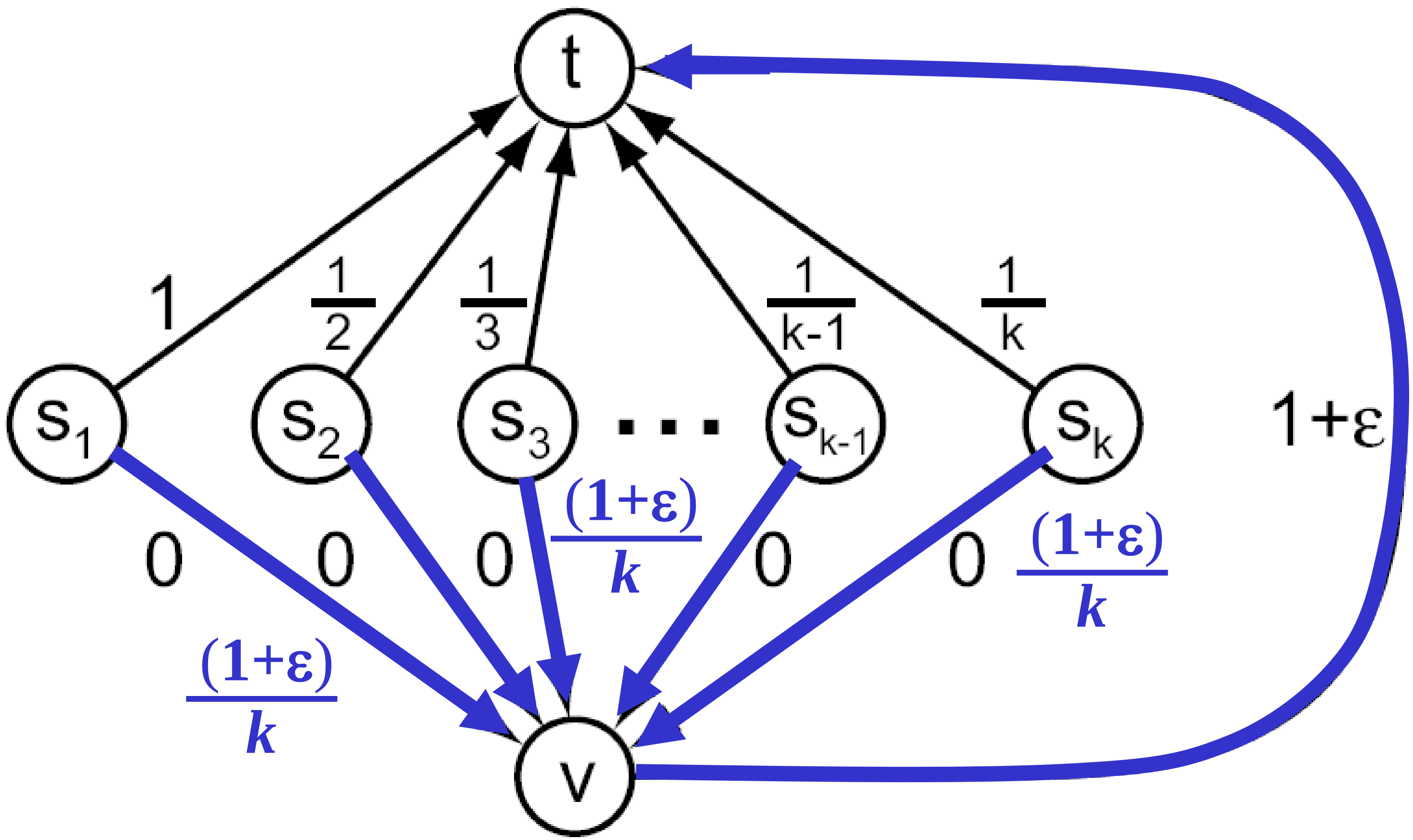
实际上，人们已经证明这是最坏的情形，即**POA ≤ 4/3**.

2. 博弈论-Shaply网络博弈(Kleinberg et al 2004)



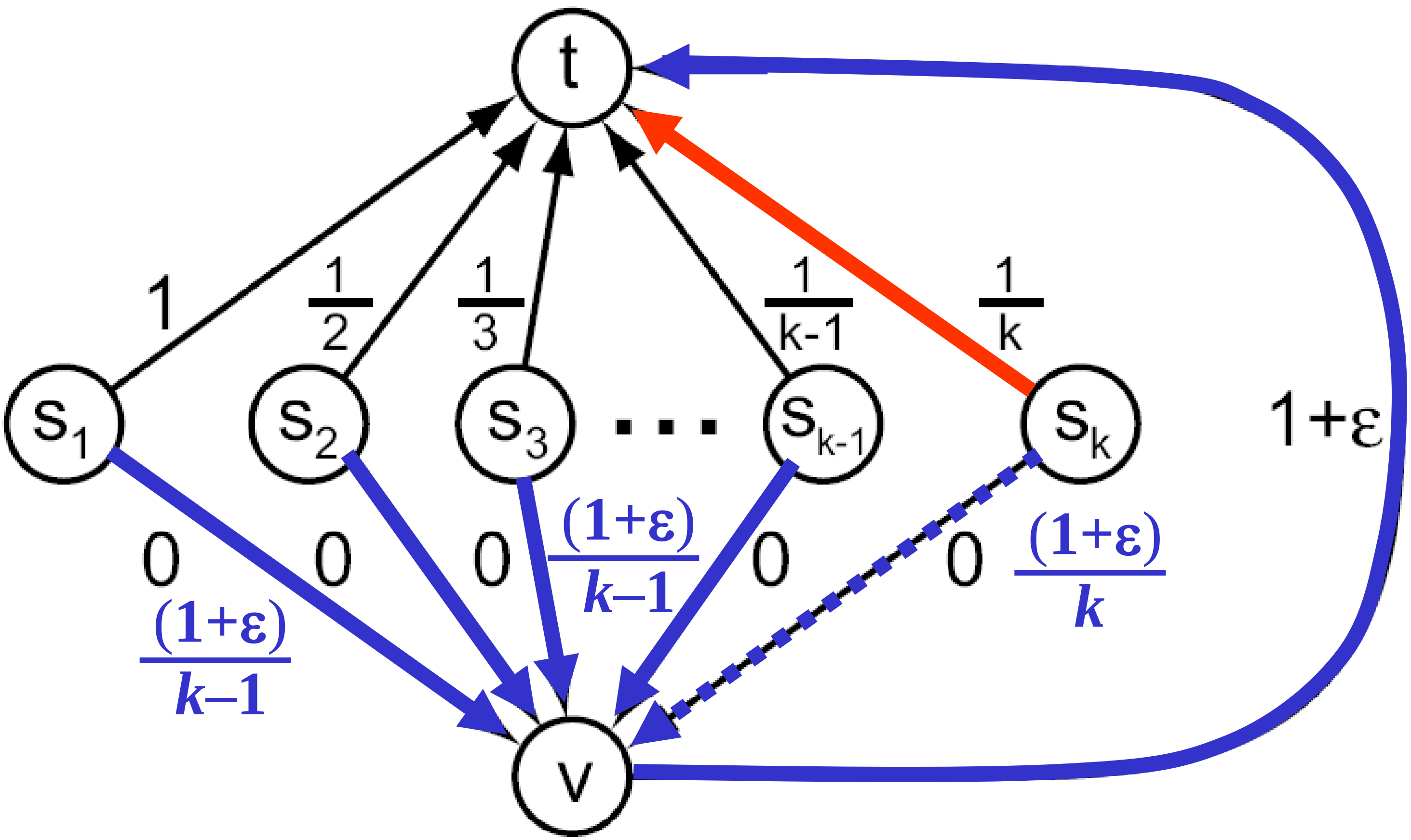
我们这里考虑k个1-单位(不可分)流的路由(**Atomic routing**)，$(s_1, t), (s_2, t), \ldots, (s_k, t)$. 每条边上的费用由所经过的流量均摊。

2. 博弈论-Shaply 网络博弈 (续一)



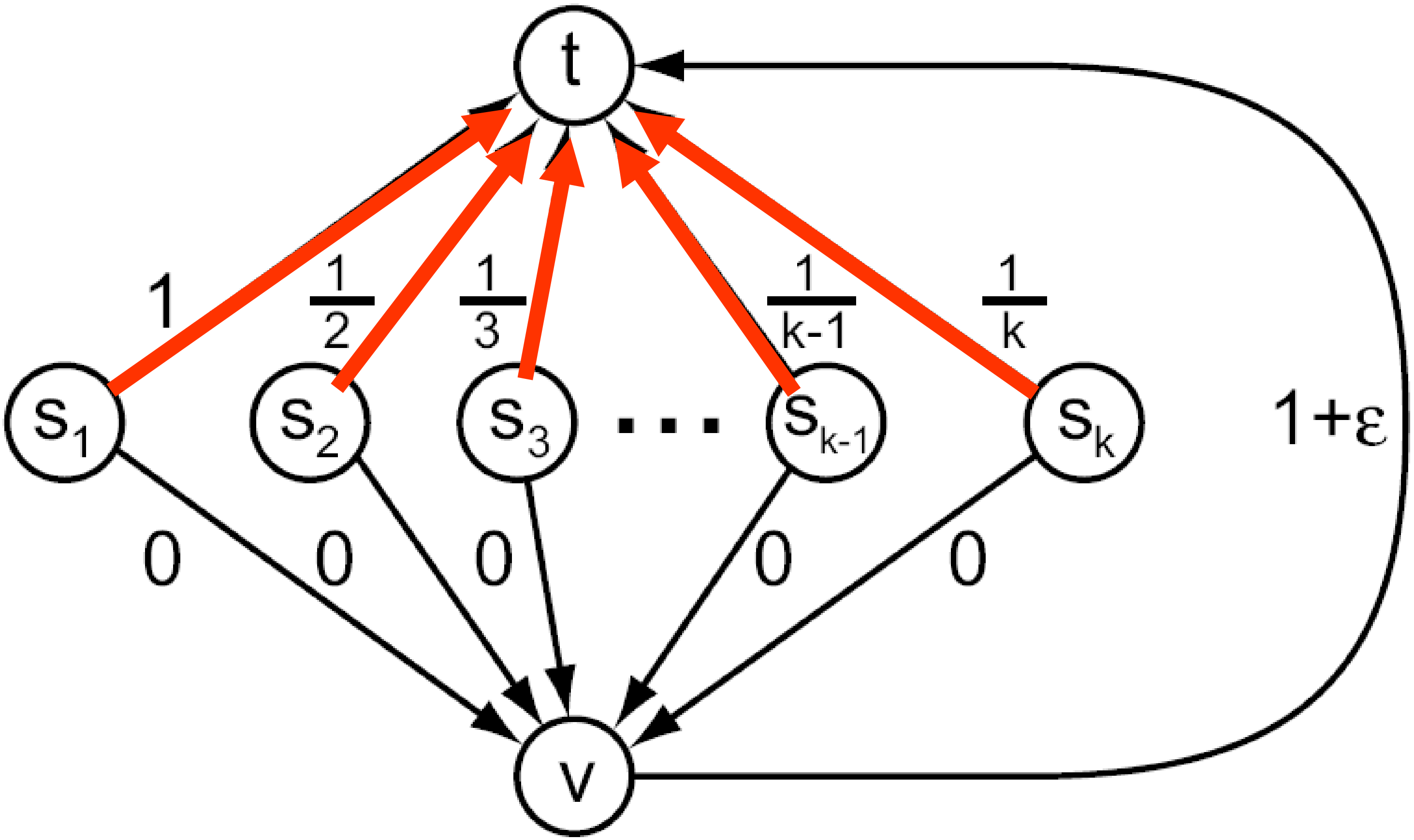
整体最优解的费用是 1+ε。

2. 博弈论-Shaply 网络博弈 (续二)



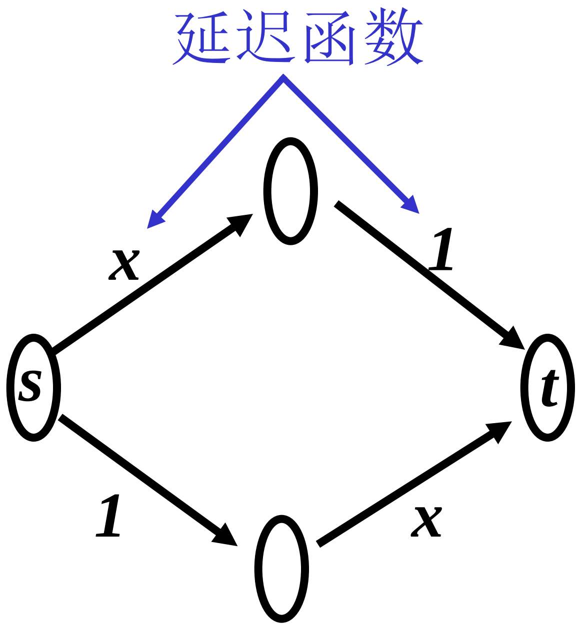
然而，注意：整体最优解并不是一个纳什均衡解。

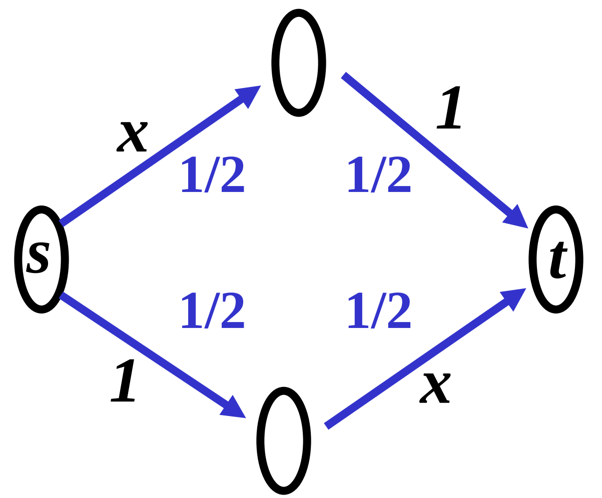
2. 博弈论-Shaply 网络博弈 (续三)



纳什均衡解的费用是 **1＋1/2 ＋1/3＋ … ＋1/*k* ≅ ln *k***.
实际上，人们已经证明这是最坏的情形，即**POS≤ ln *k***.

2. 博弈论-Braess悖论 (1968)

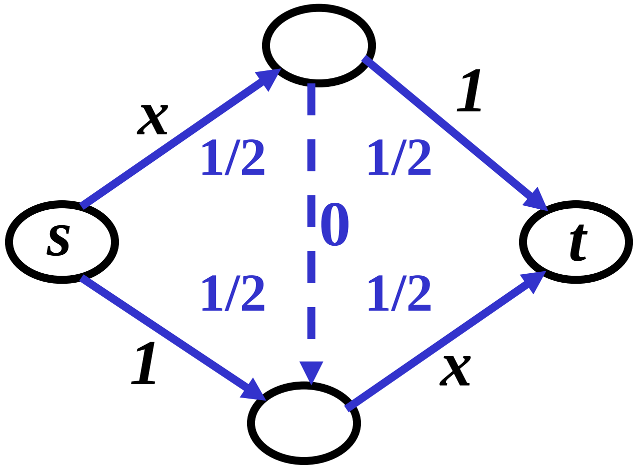




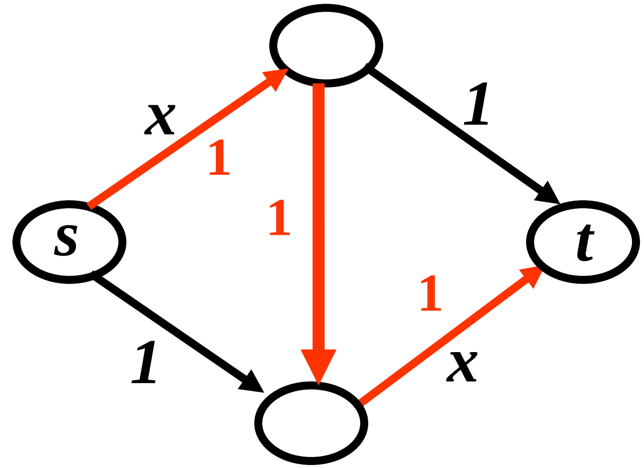
1-单位(可分)***s*-*t***流(**Nonatomic Routing**)，每条边上的延迟是流经该边流量的一个函数。

纳什均衡解的延迟是***s*-**点收到来自***t*-**点的所有流量所需时间的最大值 **max{1/2+1, 1+1/2}=3/2.**

2. 博弈论- Braess悖论 (1968) （续一）



在原有网络的基础上
增加了一条0延迟的边。



纳什均衡解所产生
的延迟竟增加至 2!

2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由

考虑以最小化最大延迟为目标的自私路由问题 (**Atomic Selfish Routing**)：

给定图 $G(V, E)$，k 个顶点对 (s_i, t_i)，$i=1, 2, \ldots, k$；及每条边 $e = (u, v) \in E$ 一个延迟函数 $l_e(x)$，x 流量经过 e 时产生的延迟。给每一顶点对找一条路P_i，使得最长延迟的路的延迟最小。

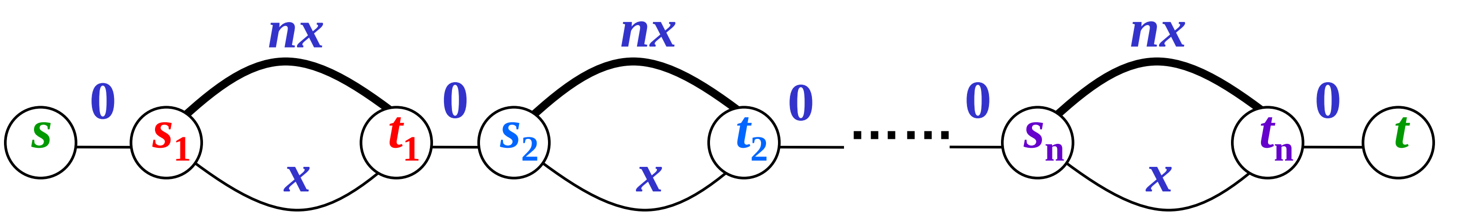
$$L(P_i) = \sum_{e \in P_i} l_e(f_e), \qquad L_{\text{opt}} = \min_{P_1 \ldots P_k} \max_{i=1 \ldots k} L(P_i)。$$

纳什均衡解：对每一个选定的路 P_i，

$L(P_i) = \sum_{e \in P_i} l_e(f_e) \leq L(Q_i) = \sum_{e \in Q_i} l_e(f_e)$，对任意一条$(s_i, t_i)$-路$Q_i$

2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续一）

首先探讨一般网络上自私路由的情况：

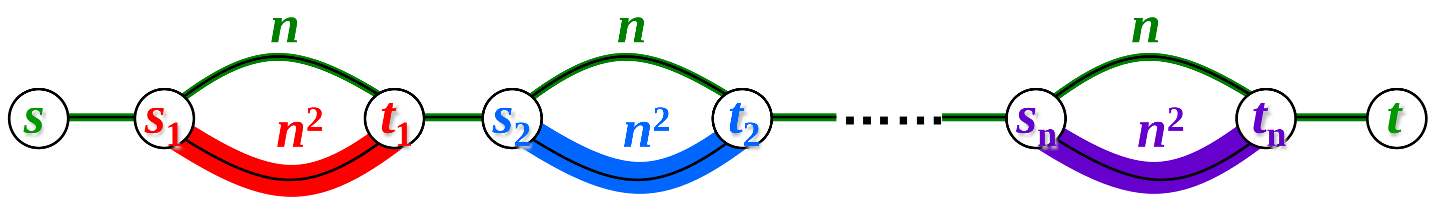


$(s, t) \leftrightarrow$ 局中人 1;　$(s_i, t_i) \leftrightarrow n^2$ 个局中人, $i=1, 2, \ldots, n$

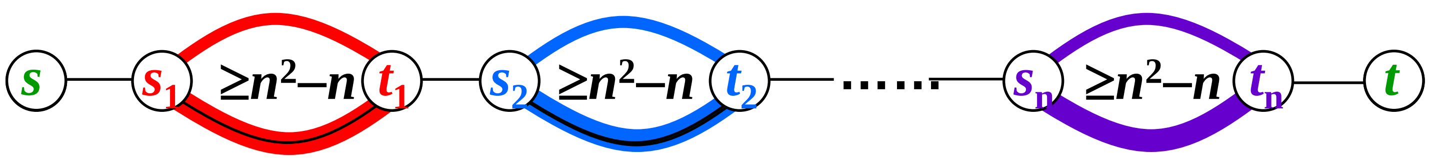
$l(s_i, t_i) = x$ 或者 nx;　$l(t_i, s_{i+1}) = 0, i=1, 2, \ldots, n-1$

$l(s, s_1) = l(t_n, t) = 0$

2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续二）



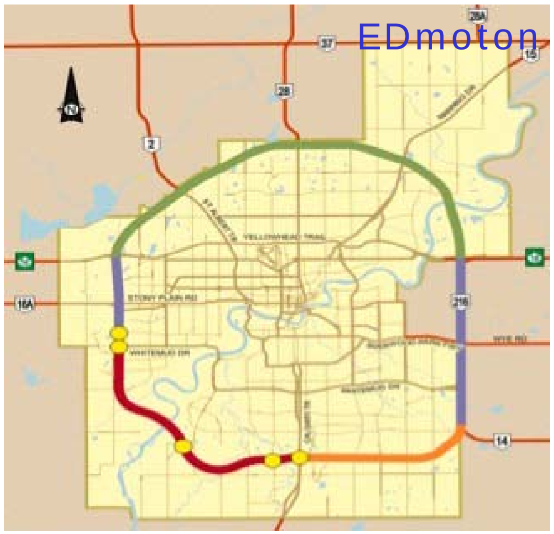
整体最优解的延迟= 每一个局中人的延迟 = n^2

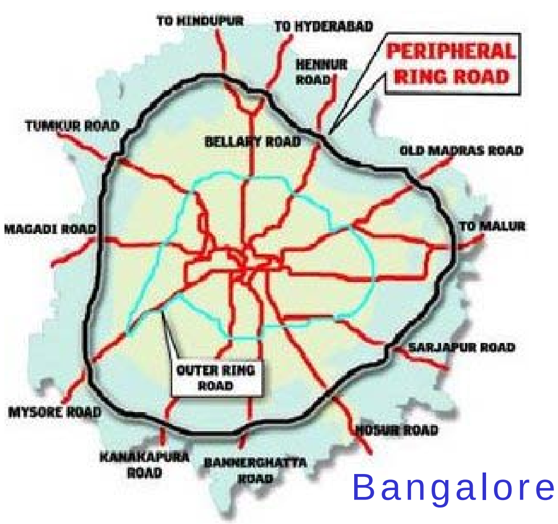


纳什均衡解的延迟= 局中人 1的延迟 = $n(n^2-n)$

$$\frac{\text{纳什均衡解的延迟}}{\text{整体最优解的延迟}} \geq \frac{n(n^2-n)}{n^2}$$

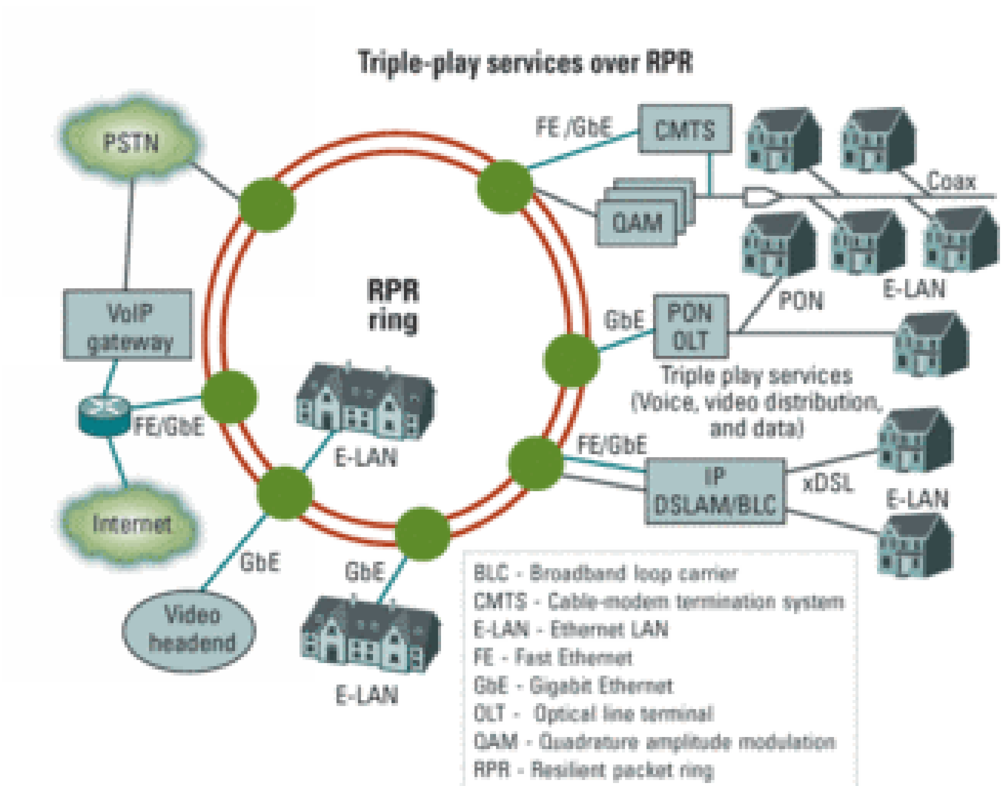
2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续三）

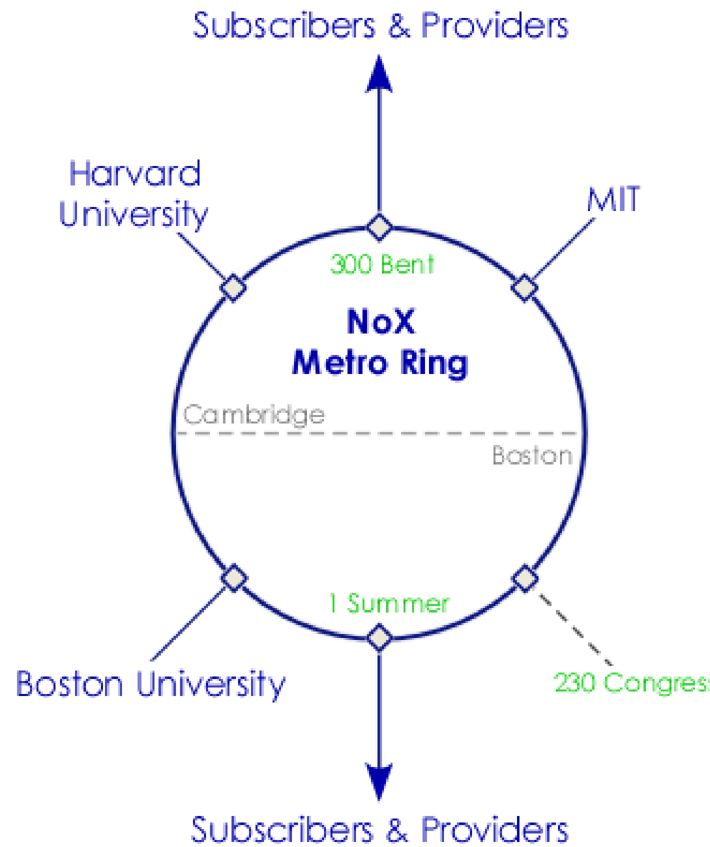




Bangalore

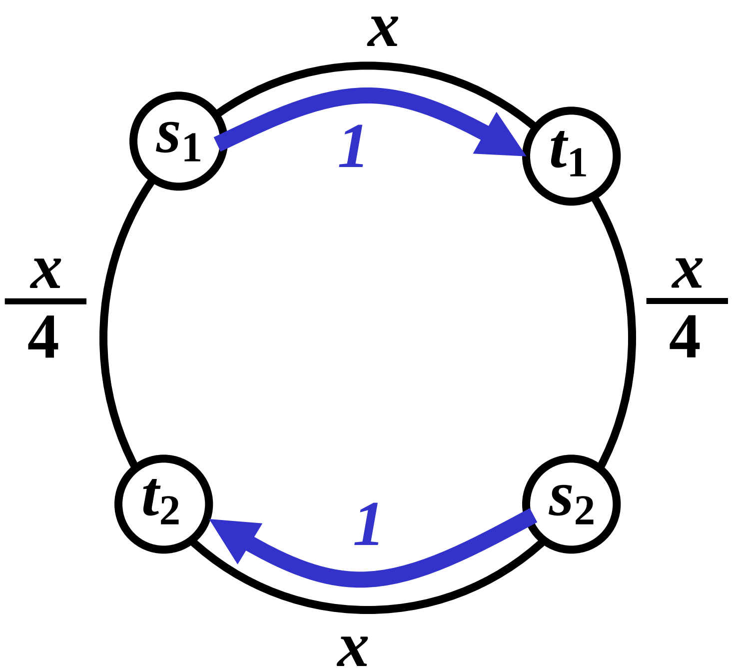
2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续四）

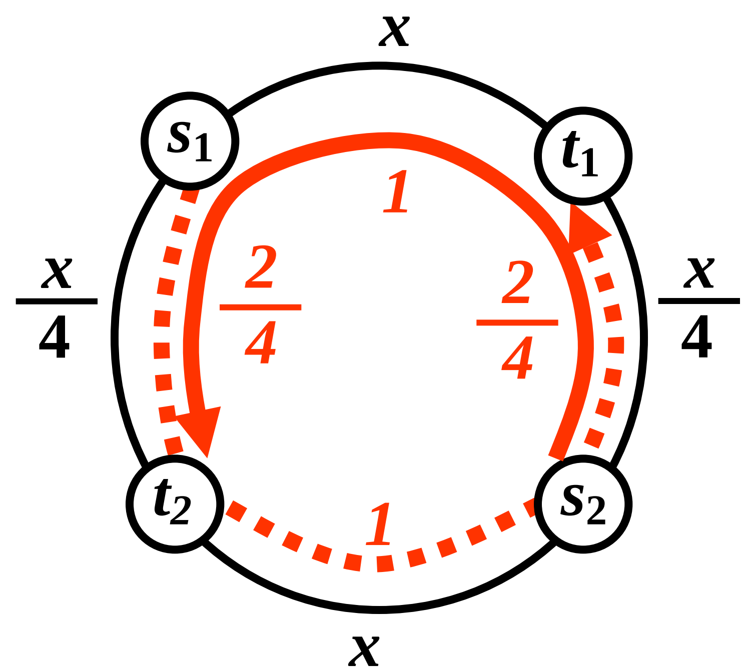




2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续五）

我们考虑环形网络上自私路由(**Atomic Selfish Routing**):



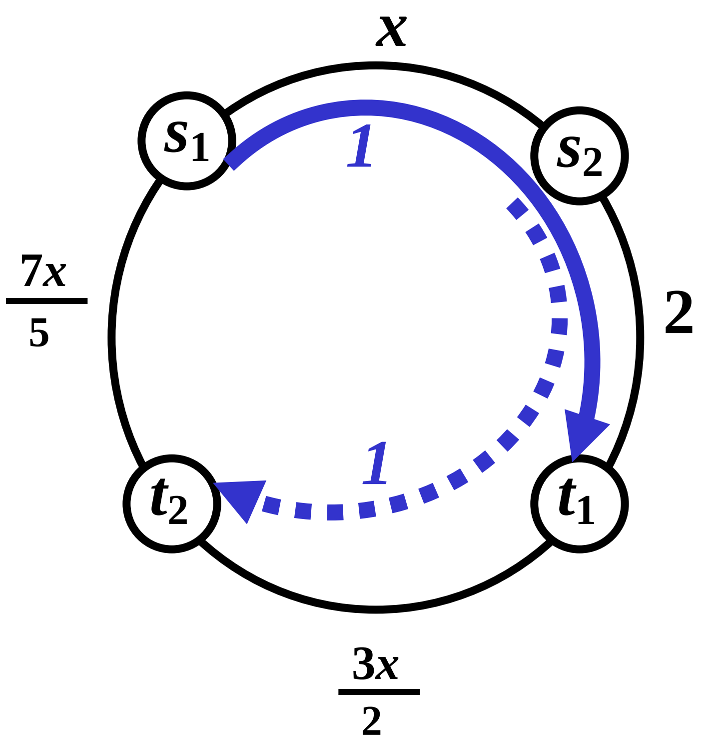


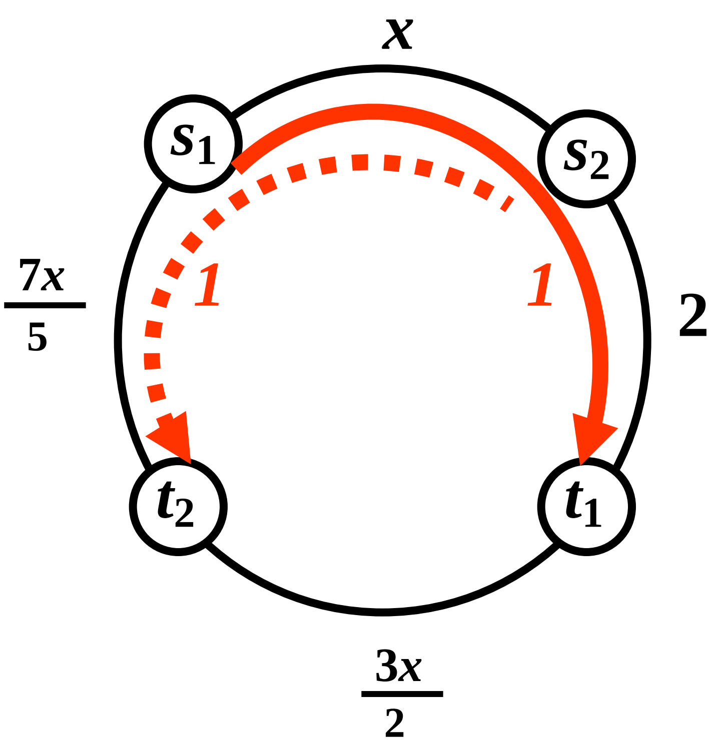
$$\frac{\text{纳什均衡解的延迟}}{\text{整体最优解的延迟}}=\frac{1}{1}$$

$$\frac{\text{纳什均衡解的延迟}}{\text{整体最优解的延迟}}=\frac{2}{1}$$

2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续六）

以最小化最大延迟为目标，考虑环形网络上自私路由：





最优整体解的延迟 $=\frac{7}{2}$
非纳什均衡解

纳什均衡解的延迟= **4**

2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续七）

定理 1. 对于环形网络上的自私路由问题，当 $k=2$ 时，

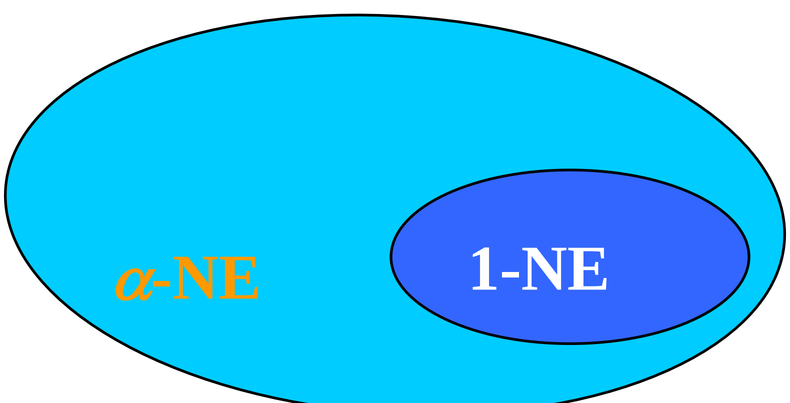
POA = 2，POS ≥ 8/7。

定理 2. 对于环形网络上的自私路由问题，

$1.2564 \le \mathrm{POS} \le 3.9$ ， $2 \le \mathrm{POA} \le 16$。

α-近似纳什均衡解：$\alpha \ge 1$，对每一个选定的路 P_i，

$$L(P_i) = \sum_{e\in P_i} l_e(f_e) \le \alpha L(Q_i) = \alpha \sum_{e\in Q_i} l_e(f_e)$$，对任意一条(s_i, t_i)-路Q_i



2. 博弈论-最小化最长延迟自私路由（续八）

(α, β)-近似纳什均衡解： $\alpha, \beta \geq 1$，对每一个选定的路 P_i，

$$L(P_i) = \sum_{e\in P_i} l_e(f_e) \leq \alpha L(Q_i) = \alpha \sum_{e\in Q_i} l_e(f_e)$$，对任意一条(s_i, t_i)-路Q_i

而且 $L(P_i) = \sum_{e\in P_i} l_e(f_e) \leq \beta L_{\text{opt}} = \beta \min_{P_1 \ldots P_k} \max_{i=1\ldots k} L(P_i)$。

定理 3. 对于环形网络上的自私路由问题，存在多项式时间算法找到一个**(11.7-OPT, 1-NE)**-近似纳什均衡解，或者**(3-OPT, 9-NE)**-近似纳什均衡解。

Bo Chen, Xujin Chen, Xiaodong Hu

The Price of Atomic Selfish Ring Routing

J. of Combinatorial Optimization, 19 (3) (2010), 258-278.

2. 博弈论-最小化最大负载自私路由

现在考虑以最小化最大负载为目标的负载平衡自私路由问题 (**Load Balancing**) :

给定图 $G(V, E)$，k 个顶点对 (s_i, t_i)，$i=1, \ldots, k$。给每一顶点对找一条路 P_i，使得所有边上负载（经过该边的路的条数）最大的最小。

$$L(e) = \left|\{e \in P_i, i=1, 2, \ldots, k\}\right|, \quad L_{\text{opt}} = \min_{P_1 \ldots P_k} \max_{e \in E} L(e)。$$

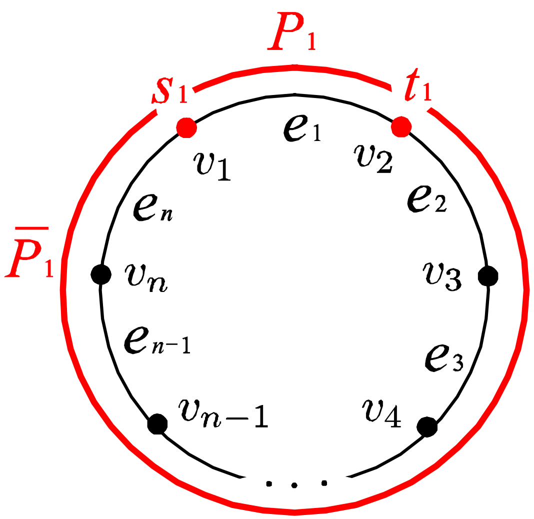
纳什均衡解：对每一个选定的路 P_i,

$$L(P_i) = \max_{e \in P_i} L(e) \le L(Q_i) = \max_{e \in Q_i} L(e)，\text{对每一条}(s_i, t_i)\text{-路}Q_i$$

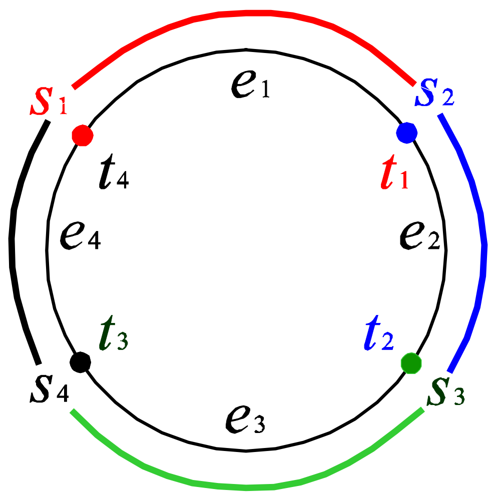
2. 博弈论-最小化最大负载自私路由（续一）

当以最小化最大负载为目标时，即使是考虑环形网络，我们发现

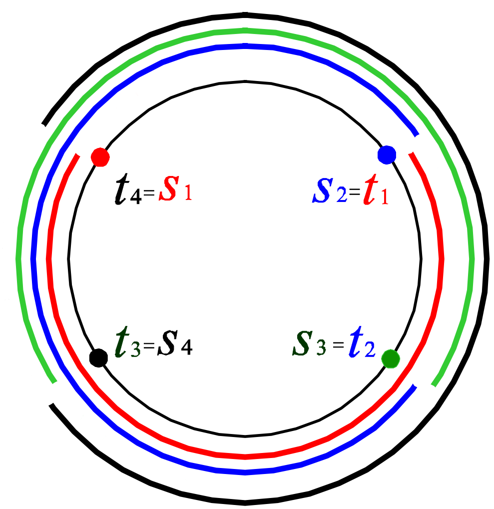
$$\frac{\text{纳什均衡解的最小化最大负载}}{\text{整体最优解的最小化最大负载}} \geq \frac{n-1}{1}$$



例子



最优解

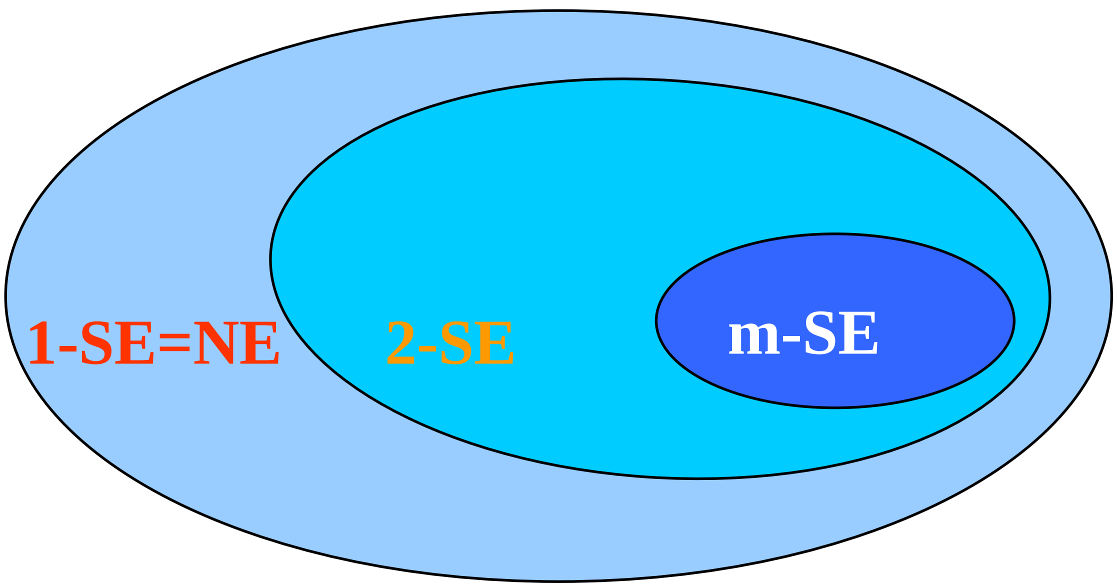


纳什均衡解

2. 博弈论-最小化最大负载自私路由（续二）

在有 m 个参与者的网络合作博弈中，允许网络的任意不超过 k 个参与者联合改变它们的策略，只要这样的合作能够给每一个人都带来好处，其中$k \le m$ 。当不存在这样的合作策略时，则称网络达到一个***k*-强均衡状态(*k*-Strong Equilibrium)** 。

当 ***k*=*m*** 时，***k*-强均衡状态**就是**Aumann** (1959) 提出的强均衡状态；而当***k*=1** 时，它就是纳什均衡状态。



2. 博弈论-最小化最大负载自私路由（续三）

N. Andelman 等人2009年引入 ***k*-强均衡状态代价**:

$$k\text{-POS} = \frac{\text{最好的 } k\text{-强均衡解的值}}{\text{整体最优解的值}}$$

和 ***k*-强均衡无政府状态的代价**：

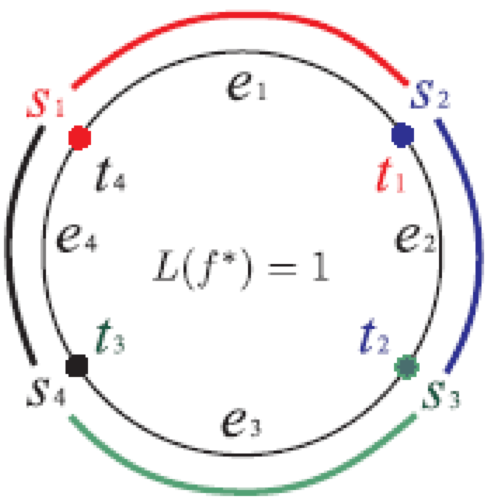
$$k\text{-POA} = \frac{\text{最坏的} k\text{-强均衡解的值}}{\text{整体最优解的值}}$$

直接根据定义，可以知道它们之间存在以下不等式

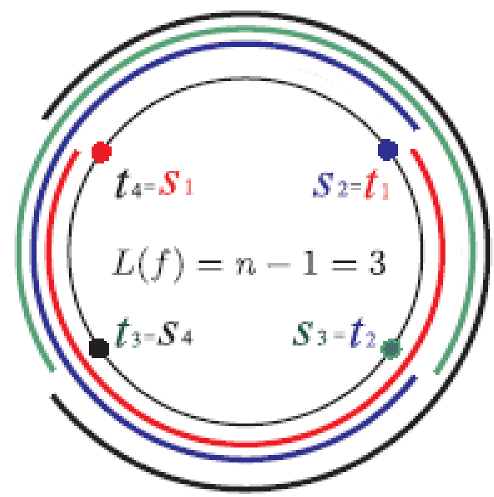
1 ≤ PoS ≤ 2-SPoS ≤ … ≤ *k*-SPoS ≤ *k*-SPoA ≤ … ≤ 2-SPoA ≤ PoA

2. 博弈论-最小化最大负载自私路由（续四）

我们考虑环形网络上负载平衡自私路由问题：



最优平衡的负载是**1**



2-强均衡平衡的负载是**3**

2. 博弈论-最小化最大负载自私路由（续五）

定理 4. 对于环形网络上的负载平衡自私路由问题，当 $k=2$ 时，

$\mathrm{POA} = k\text{-}\mathrm{POA} = n-1$，$n$ 是网络上的节点个数。

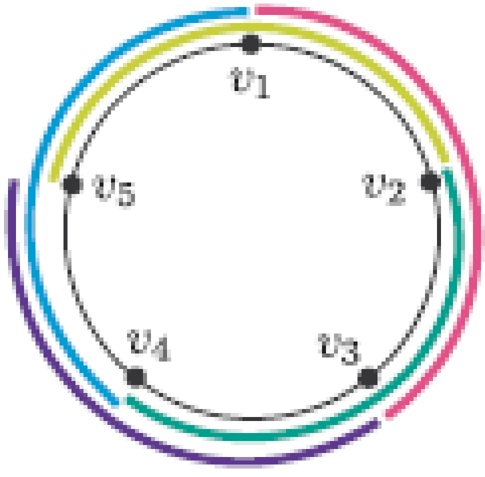
定理 5. 对于环形网络上的负载平衡自私路由问题，对任意k，

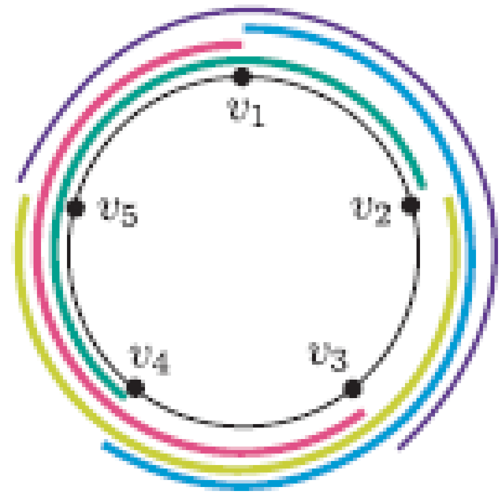
都至少存在一个k-强均衡解，且 $k\text{-}\mathrm{POS} = 1$。

定理 6.对于环形网络上的负载平衡自私路由问题，

$m\text{-}\mathrm{POA} \geq 1+\dfrac{2}{m}$，$k\text{-}\mathrm{POA} \geq \dfrac{k-1}{k-2} - \dfrac{2k-3}{(k-2)(n+1)}$。

2. 博弈论-最小化最大负载自私路由（续六）





上面的例子为 $n = m = 5, k = 3$，$l = 2$。最优平衡的负载是2，而 k-强均衡平衡的负载是3。

定理 7. 对于环形网络上的负载平衡自私路由问题，

对任意 $3 \le k \le m$，k- POA ≤ 2，而 3- POA = 2。

$\mathbf{PoA} \ge$ **2-SPoA** $= n - 1 >$ $\boxed{2 = \text{3-SPoA}}$ $\ge m$-**SPoA** > 1

2.博弈论-展望

- 更加一般的网络？
- 非一致的流量？

2.博弈论–展望（续一）

如何通过离散、单独的决策对有限资源进行有效的分配，目前仍然是许多网络化系统的一个公开难题。“道路交通秩序问题就是其中最具挑战性的难题之一。”

2. 博弈论-进一步思考

2008年11月7日英国《每日电讯报》报道“Ants can teach us how to beat city congestion, claim scientists”。蚂蚁是地球上数量最多的动物，但它们在自己的领地上却从来不会发生“交通堵塞”。研究发现，蚂蚁处理交通问题的能力要远超人类，这一新发现可能有助于人们解决城市交通拥堵问题。

2. 博弈论-进一步思考（续一）

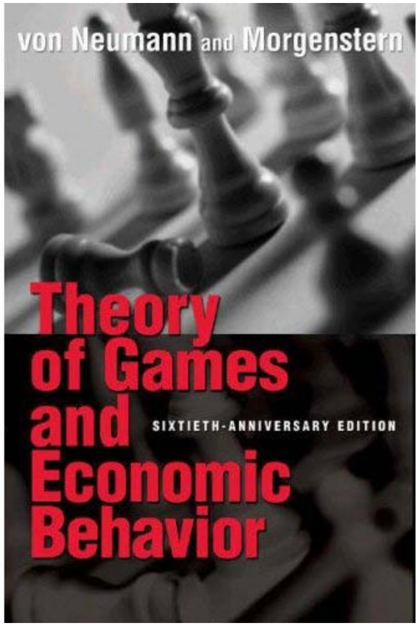
通过观测发现：如果一只蚂蚁刚从拥挤的通道上回巢并遇到另一只准备出发的同伴时，它会尽力将新来者推向另一条通道；而如果那只回程蚂蚁路上没有遇到拥挤问题，它就不会引导新来者去改变方向。结果是在那条最短的通道产生拥塞之前，新上路的蚂蚁会改向另一条通道，因此也就永远不会形成交通堵塞。

通过计算机模拟发现：即使改变路线可能要花费更长时间，蚂蚁们仍然可以快速有效地搬运食物。研究人员发现这是一种令人惊讶的技巧，蚂蚁通过权力下放和个别蚁的决定让有限的资源高效的分配。

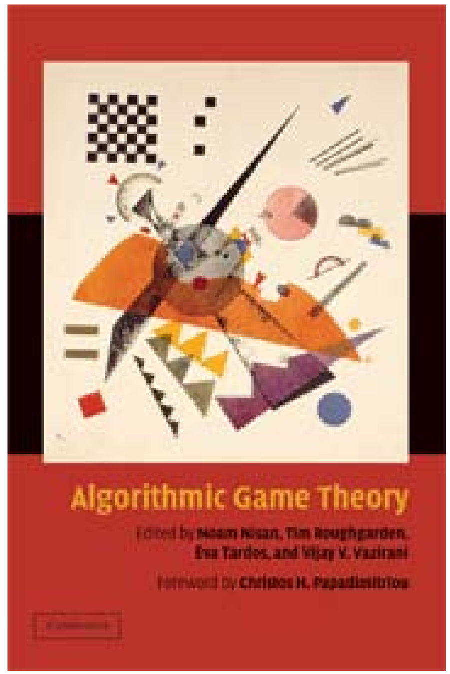
2. 博弈论-进一步思考（续一）

2008年11月13日英国《每日邮报》报道，苏格兰边境小镇格里特纳格林迎来大批“访客”，数百万只星椋鸟聚集在格里特纳格林镇的上空，寻找安全的栖息之地。它们的飞行速度超过每小时20英里，而且，很少发生碰撞。

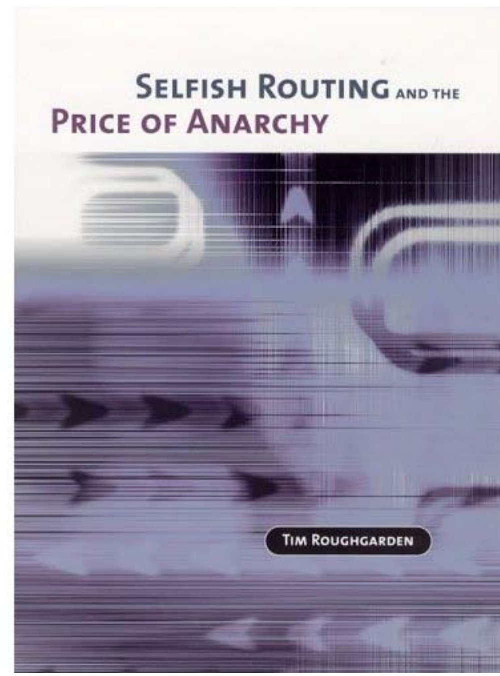
2. 博弈论-参考书目



Princeton University Press 2007



Cambridge University Press 2007

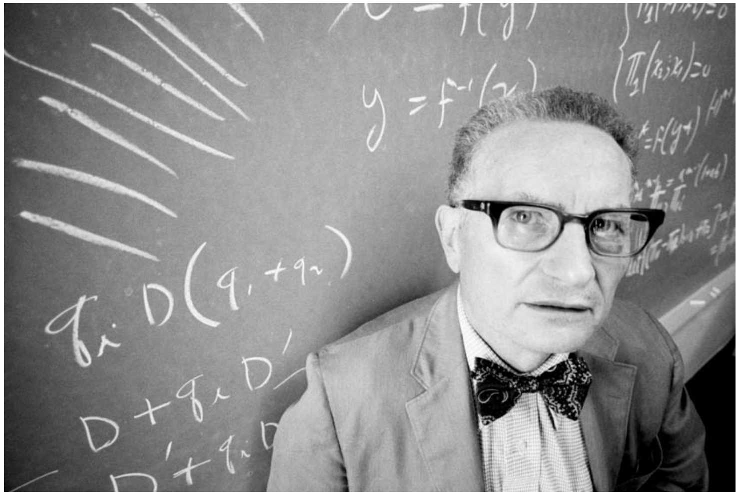


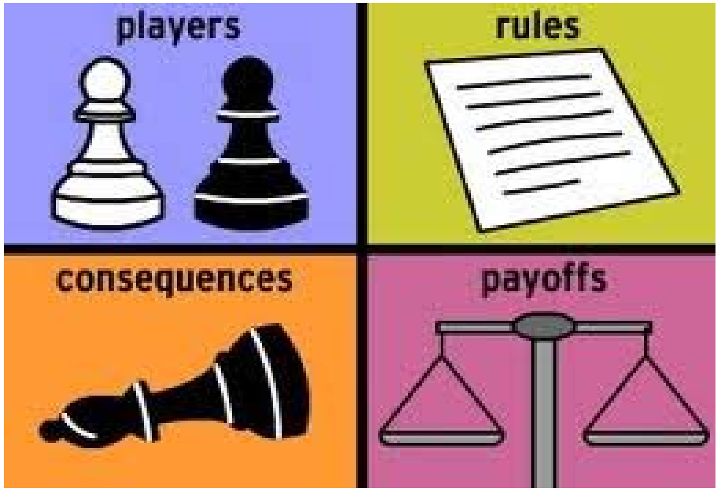
MIT Press 2005

2. 博弈论-小结

“To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.”

--Nobel Laureate Paul Samuelson (1991)





博弈： 参与人
策略
目标

非合作博弈： 策略选择过程

合 作 博 弈： 最后结果
（过程中是强制性的）

2. 博弈论-复习题

练习. 甲、乙两人各有1角、五分和1分的硬币若干枚。在双方互不知道的情况下，各出一枚硬币。规定：当两个硬币面值和为奇数时，甲赢得乙所出的硬币；当两个硬币面值和为偶数时，乙赢得甲所出的硬币。列出此二人博弈的模型，并分析该项游戏对甲乙双方是否公平合理。

练习. 一天，你正在图书馆坐着发呆，一位陌生美女主动过来和你搭讪，并要求和你一起玩个数学游戏。美女提议："让我们各自亮出硬币的一面，或正或反。如果我们都是正面，那么我给你**3**元，如果我们都是反面，我给你**1**元，剩下的情况你给我**2**元就可以了。"那么该不该和这位美女玩这个游戏呢？这个游戏公平吗？

2. 博弈论-复习题（续一）

练习. 证明：若a_{uv} 和 a_{xy} 是二人零和博弈矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的两个鞍点，则有 $a_{uv} = a_{uy} = a_{xv} = a_{xy}$

练习. 考虑右侧二人零和博弈矩阵，其中a，b，c，d 为任意实数。证明:局中人甲总存在支配纯策略。局中人乙是否总存在支配纯策略呢？

甲	a	b
	c	d
	a	d
	c	b