贪心算法

黄斌

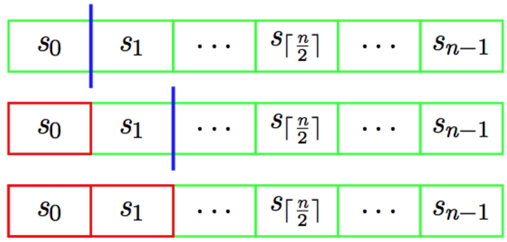
2015年11月16日

同学是早上好，我们开始上课!今天我们要讲新的内容：贪心算法。在这之前，我们还是回顾一下我们之前说的【听不清】。

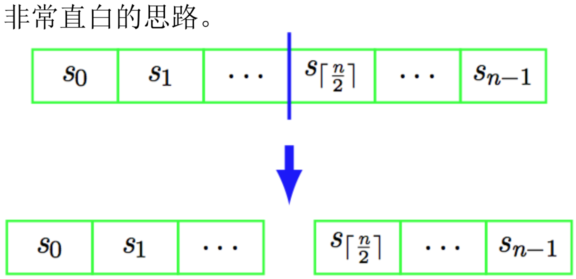
我们从组合优化的问题开始讲，这个时候我们已经把一个问题给形式化之后，形成了一个组合优化的问题。那接下来我们怎么做呢？我们先看我们能不能正面地解决问题，也就是看这个问题能不能进行规约，及我们能不能把问题变成一个小的问题。如果可以，那我们意识到大概我们能做Divide &Conquer。或者，整体这一类问题都叫self-reduction。如果在Divide&Conquer之后，我们还能够再观察到一个结构，也就是上节课讲的Optimal Structure，就意味着我们可以试试动态规划。今天，我们进一步深入，如果这个问题不仅仅可以规约成小的问题，并且它有最优子结构性质，同时它还有第三个性质，贪心选择（Greedy Selection）的性质，那我们就能采取第三类方法：贪心算法。当然，这个贪心算法是一个充满灵感的技巧，以后我们不一定绕这么多，当我们经验丰之后，我们可能一开始就想到这个问题可以用贪心算法来解决。好，今天我们来看看贪心算法。

这堂课我们这么来讲：首先我们从上堂课讲过的最短路径和区间调度（Interval Scheduling）问题开始，这两个问题足够让我们了解贪心算法；接着我们总结一下贪心算法的基本技术；我们还会讲一些其他例子–Huffman编码（Huffman Code），我们都学过，也比较简单，我就跳过去了–只讲讲这个Spanning Tree。为什么要讲它呢?因为我们要讲一点贪心算法的理论基础：拟阵（Matroid），讲拟阵的时候，顺便讲一下最小支撑树；最后我们顺带补充一下为了做最短路径算法而发明的一些数据结构，像：二项堆（Binomial Heap），Fibonacci堆，还有这个我们下次再讲的数据结构：Union-Find。

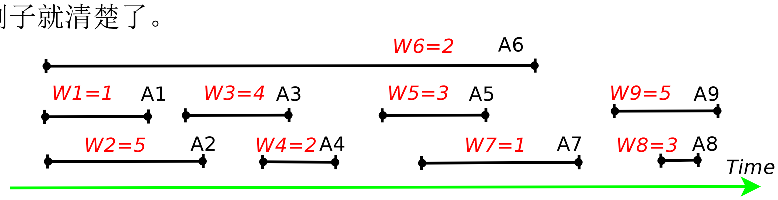
首先我们做一个声明：这几堂课都是沿着开始上课时我们所讲的解决问题的思路来走。所以首先我们还是要看看一个问题能不能分，这是非常重要的一个性质，也是我们拿到一个问题之后要做的第一个观察。我们一再说如果一个问题能分呢，我们脑子里可以想想看，会有两种分法，拿这个数组为例子：这个问题能不能被规约成更小的问题呢？我们从最简单的做起，n个东西不会做，那我们看看一个会不会做，一个会做了，再看看两个会不会做，这是一种规约的策略。



给我n个东西不会做，那我把它一刀砍成两半，看看两个小问题会不会做，非常直白的思路。



好，为了讲贪心算法，我们来看看一个非常实际的问题的两个版本。就拿我们教室来说：可能有很多门课都要来预定这个教室。假如说第i门课程，我们叫它A_i，它要从S_i这个时候开始上课，到F_i结束，那教务处的老师就要利这个时间信息来安排课程。我们已经知道有很多的课程都想来申请我们这间教室，教务处的需求是：能使得越多的学生上课越好。我们举一个例子就清楚了。



这是时间轴，每一条黑线代表一门课。我们用W来表示课程有多少学生。我们看看教务处如何安排。我们看看教务可能的安排：

1. 选择$\{A_1, A_3, A_5, A_8\}$，这些可的确在时间上不冲突，那能容纳多少学生呢？把这几门课的学生加起来，一共11个学生。

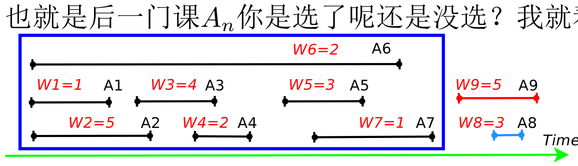
2. 选择$\{A_6, A_9\}$，每门课之间也不冲突，总共7个学生可以上课。

我想到此，这个问题已经被描叙得很清楚了，就是给我们每门课上课的时间和下课的时间，以及每门课上课的学生，你怎么调度，使得越多的学生上课越好。非常清晰哈。

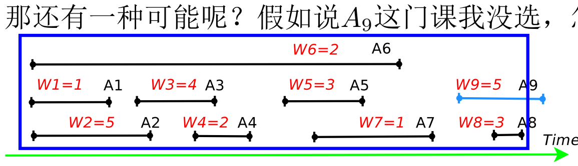
我对这个问题做了一下形式化，但这个形式化大概可以不看，我们只说两个重点吧，其它的我们可以不看。

- Compatible:两门课A_i和$A_j$compatible，如果它们在时间上没有冲突。
- 我们先假设，所有的课程已经按照它们的结束时间排序，这个要求有点不起眼，但是它很重要，原因我们慢慢再说。

大家想想，教务处应该怎么处理这九门课？我们做此思维："还是那个老问题，给我们这么多门课，的确看来，我们搞不定这个事情，那我们看我们能不能把这个问题给变小一点呢？反正九门课我搞不定。能不能把它变小一点？"所以，很多时候，我们碰到的问题的规模很大，一下子可能我们无从下手，我们就想能不能把它变成小的问题，千方百计要琢磨一下这件事情，直到我们发现它的确不好规约，我们再想其他办法，那是啥呢？那等我们下下堂课会讲。现在我们先看，这个问题假如可以被转化成小一点的子问题，那么这个问题的解是啥呢？就是从中间选出来的一个子集。我们把这个求解过程想象成一系列的决策，在每个步骤，我们都要选择一门课。假如我们已经拿到了最优解，我们就问最优解中最后一个决策到底是什么？也就是后一门课A_n你是选了呢还是没选？我就看这一件事情！



假如说选了这么课A_9，那么A_8不能选了，因为跟A_9时间有冲突，那其它的这些课呢？都跟它没有冲突，那是啥意思呢？就是在你上课之前，我就已经下课了。好，那我剩下的，就是在这蓝框里面所有的课，我们再去选去。对不对？你看，一开始给我们九门课，我们搞不定。选了一门课之后，我们就把问题规约成了一个七门课的问题，我们再去做，因此把问题变小了。那还有一种可能呢？假如说A_9这门课我没选，怎么办呢？



那意味着，前8门课，甭管跟我打不打架，我都可以来考虑。那剩下的问题就是在前8门课中，我再去选课。那你看：无论是我们选，还是不选A_9，我们的确是吧大问题变小了。那变小了这个子问题是什么样子呢？你把这两种情况一总结之后，就可以很清晰地看出这个样子：从$A_1, A_2, \&, A_i$当中选

择一些课，使能容纳的学生越多越好。

现在我们就可以插一句话呢，我们问什么要求这些课要按结束时间排好序呢?假如一开始我们不将它排序，则我们看是否要选一门课，就会有点麻烦。问题变成：

$$B(S)=\max\begin{cases}B(S-\{a\})\\ B(S-\{a\}-\{\text{与}a\text{冲突}\})+W_i\end{cases}$$

那这两种情况就会很麻烦，你看子问题数目是多少？子问题数目就变成2^n了。虽然这个推理是对的，但是就是使得子问题数目比较多。有很多时候，我们要把问题稍微变一下型。

好，我们现在再讲回来。我们观察两种情况之后，把子问题定义成：在前 门课当中，我们怎么进行选择，使得容纳的学生越多越好，我们把这个最优解记作$opt(i)$,那我们就有这个式子了：

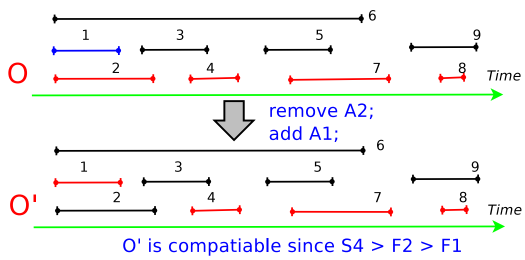
$$OPT(i)=\max\begin{cases}OPT(pre(i))+W_i\\ OPT(i-1)\end{cases}$$

其中$pre(i)$表示第i门课上课之前已经结束的所有课。大家不妨拿这个公式与前一个公式比较一下，看看差别。都是对的，但是前一个子问题数目太多了，后一个子问题数目是线性的。有了递归表达式之后，我们就能够很容易地写出一个动态规划的算法出来。好，下面我们来看看这个算法的复杂度。

一开始我们对所有的课进行排序，复杂度为$O(n\log(n))$。这个动态规划的时间呢是$O(n)$的，为什么呢？我们看，总共有n个子问题，每个子问题只要在两个数中找出最大值，所花的时间是$2n$，加上前面的$O(n\log(n))$，总体的时间还是$O(n\log(n))$的。

现在对这个问题，我们已经做了一个非常好的$O(n\log(n))$的动态规划的算法。下面我们看看这个问题的一点特殊的清晰：假如每门课只有一个学生，我们的目标还是和以前一样，选择一些不冲突的课，容纳的学生越多越好，该怎么办？这相当于把以前的问题变严格了，所以原先的性质还成立，最优子结构的性质还有，不过又多了一个性质，贪心选择的性质。

那什么是贪心选择的性质？对这个问题来说，可以这么陈述：假如A_1是下课最早的这门课，那么A_1肯定会出现在最优解里。我们来用交换论证（exchange argument）的方法来证明：

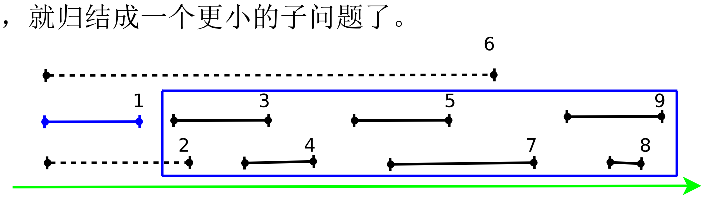


假如有另外的一个最优解O，没有选择A_1，而是选择了A_2。那我们可以自信的说把A_2这么课换成A_1的话（形成一个新的解O'），肯定不会问题，因为A_1比A_2下课早，所以A_1也不会跟A_2后面的课冲突。所以O'肯定不会比O差。有了以上的这些性质，我们就可以将动态规划的算法变成贪心算法。假如所有的课还是按下课时间进行了排序。我们首先选择下课时间最早的这么课A_1，接着，我们把所有与A_1冲突的课都给去了，然后再不断地往下做。这样我们就把原先的动态规划给简化了。

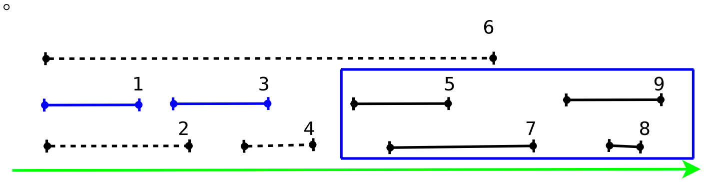
$$OPT(i) = \max \begin{cases} OPT(pre(i)) + W_i \\ OPT(i-1) \end{cases}$$

在动态规划里面，我们还要枚举两种case，用来判断是否要选A_i，现在我们不用枚举了，只要A_i是当下下课最早的课，那我们就直接选。现在这个复杂度还是$O(n\log(n))$，因为最开始我们还是要将课程进行一下排序。现在贪心算法就变得很简单了：

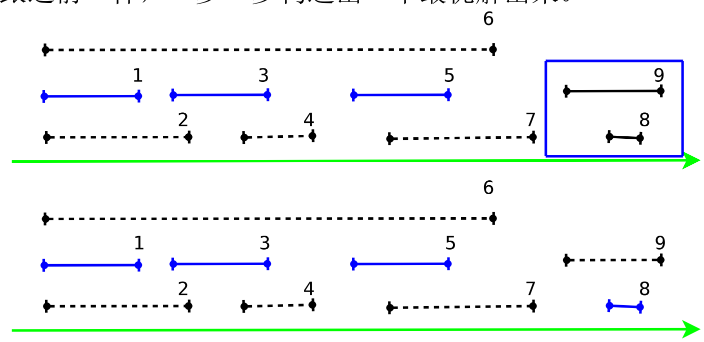
- 首先，我们选择下课最早的A_1，剩下的就只要在蓝色的方框中找最优解就行，就归结成一个更小的子问题了。



- 接下来，就选上一个步骤中蓝色方框里下课最早的课A_3，再将蓝色方框缩小。

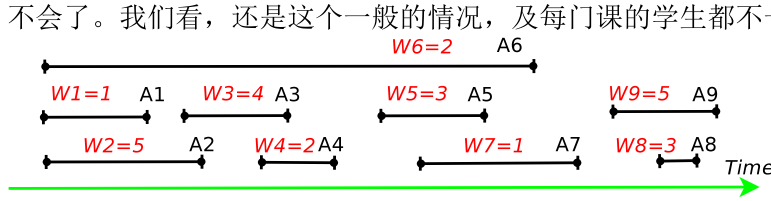


- 然后，跟之前一样，一步一步构造出一个最优解出来。



在动态规划中，最后要的出我们到底选了那些可，还要进行回溯。现在呢，也不用回溯，直接就能够看出了。

现在问一个小的问题，这种贪心的策略在一般的情况下还能够成立吗？不会了。我们看，还是这个一般的情况，及每门课的学生都不一样



按照贪心的办法，我们会选择$\{A_1, A_3, A_5, A_8\}$，总共是11个学生。而最优解是$\{A_2, A_4, A_5, A_9\}$，总共15个学生，只能够通过动态规划算法算出来，贪心算法无能为力。为什么在一般的情况下，贪心算法就不灵光了呢？是因为贪心选择的性质不成立了。所以，大家要注意一下，这两个问题，陈述起来很像，只是这个Weight变了一下，一下就导致算法改变了。

讲到这就能总结一下了，我们看看动态规划和贪心到底有什么异同。首先看相同点：

- 都是来求解优化的问题
- 都有最优子结构这个性质。不要以为最优子结构是动态规划所独有的，其实不是，贪心算法也要利用到这个性质。
- 最后一点是最深刻的话，“在每一个贪心算法的背后，几乎总会有一个动态规划的算法，算法这个动态规划算法比较笨拙”。这也是为什么诸位本科学算法，通常是先将贪心算法。但我还是倾向于将贪心算法放在动态规划算法之后将，因为前者的确是对后者的一个加强。很多同学都有MIT的那本算法导论，我建议大家看一下贪心算法那章的

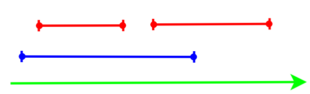
最后一节（Section），写动态规划和贪心算法之间的关系，写得非常好，是其他书里面所没有的。

我们接着看不同点：

- 动态规划算法一般需要在所有的决策步（Decision Step）枚举所有的可能性，而且要在所有的子问题被解决之后，才还不能做决定。而贪心根本就没有枚举这一步，而是直接基于局部最优解来做决定，不用考虑这个子问题将来会怎样。（因为无论子问题的结果如何，基于局部最优解所做出的决定总是能够导致全局最优解，这也是贪心选择性质的另外一种表述。）

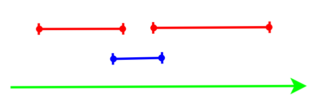
那到底如何知道该选择贪心算法呢？第一种方法是沿着经典路线：先做Divide&Conquer，再做动态规划，再做贪心。另外一种：当我们做了很多问题之后，有经验了，我们就试错吧，非常讲究灵感。我们就把求解过程想象成一系列的决策，在每一部，部分解逐步往上涨的时候，尝试不同的贪心选择性质。再次强调，这个需要灵感，在这个过程中，我们可能会犯很多错误。比如说，假如教务处给然我们安排可，我们已经知道，动态规划是可以解决这个问题的，我们再看看贪心算法行不行，而不是沿着经典路线逐步地改善。如何看呢，我们尝试不同的贪心规则：

- 假如一门课上课越早，就优先安排。
  初看这个想法还不错，但一分析，就发现有问题，比如说这样三门课：

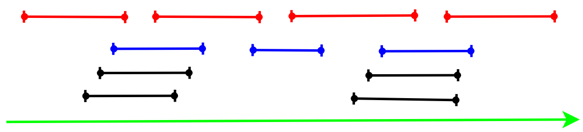
  我们看到蓝色的课上课最早，我们就安排它，但实际上是不对的，应该要安排那两门红色的课才对，这样能安排更多。

- 这个就有点tricky了，这个是说如果一门课上课时间短，我们就安排它。

  我们发现这也不行，比如安排了一门蓝色的课后（因为它历时短），两门红色的课就不能选了。

- 我们想个更复杂的：如果一门课与其它课冲突很少，就越好。初看这个想法，的确合情合理，大家安排课的时候，的确有可能想到这个方法，可惜还是不对。

  大家看，中间蓝色那门课只与两门课冲突，根据这个贪心规则，我们首先选它，导致它上面两门红色的课不能选了。于是我们只好选择它旁边两门蓝色的课，这样我们一共选择三门课，但最优解确是选择最上面红色的那四门课。

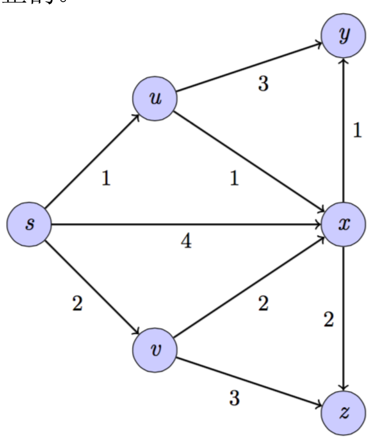
大家看，我们指望我们有灵感，还弄出很复杂的贪心的规则，可最后还是找出了它们的反例。所以，很多时候，我们的灵感真的靠不住，需要我们严谨的验证。这是大家将来写程序会碰到的问题，将来大家碰到一个问题，可能第一想用的办法就是贪心算法，因为它特别的简单，也特别地能体现我们的聪明才智，可是有时候它既是经不起推敲。当然，有时候我们想要找一个反例还挺难的，比如说上面最后那一个例子，我是费老大的劲才找出一个，前面两个到还很easy。

接下来，我们要跟上堂课挂起钩来，我们最短路径问题，很多时候我们从Dijkstra算法开刀，那我们上次课为什么要绕一个弯先讲Bellman-Ford这个动态规划算法呢？就是为了和今天做一些勾连。问题我再简单陈述一下，就是有很多城市，城市之间有不同距离的道路，给了两个城市s和t，问从s到t的最短距离是多少？如果没有负圈呢，我们就可以用Bellman-Ford算法，当然，若有负圈，它也能检测出来，所以说它很强大。那如果把条件再加强，不仅没有负圈，而且还没有负边呢？就用不着这个动态规划了，有点费劲，直接做了一个更快的算法，就是Dijkstra贪心算法。

下面我们先回顾一下上节课我们怎么做的这个动态规划算法，然后再看，当改了一下条件，所有边都是正的之后，怎么样进行简化。上堂课我们是这么讲的：我们的解是从s到t的一条路径，我们还知道s到t当中，最多只有$n-1$条边，其实这个时候已经把原先的问题变了。原来的问题是这样陈述的：在图G当中，我们要找从s到t的最短路径，记作$d(G,s,t)$。一旦没有负圈的话，我们将问题转换成：求从s到t当中，最多有k条边的路径，记作$d(s,t,k)$。在此，还是再次强调一下，为什么我们要转换问题的描叙呢？因为前者的子问题数目为：2^n，而后者是$O(n)$。

好，回顾来，我们把求解过程想象成一系列的决策，每一次决策步决定下一步往哪走。假如我们已经得到一个最优解O，我们就观察当中的最后一个决策，是从哪个城市到达t，容易得出：凡是能直接到达t的点都是有可能的。假如是从v到达t，剩下的就变成这么一个子问题：如何从s到达v，最多经过$n-2$条边。所以，我们就可以将子问题的形式写出来了，就是：求从s到v的距离，最多有k步的路径，记作$OPT(v,k)$。那最优子结构的性质就出来了：$OPT(v,k)=\min\begin{cases}OPT(v,k-1)\\ \min_{<u,v>\in E}\{OPT(u,k-1)+d_{u,v}\}\end{cases}$
上面式子的第一项想要体现的是“至多”，下面一项是枚举所有能到达v的u，看从哪点过来使得总体的距离最短。这个算法的时间的复杂度是：$O(mn)$，其中m，n分别是图中边和节点的数目。

现在我们跑一下Bellman-Ford这个算法，同时，我们假设每条边都是正的。



	k=0	1	2	3	4	5
S	0	0	0	0	0	0
U	–	1	1	1	1	1
V	–	2	2	2	2	2
X	–	4	2	2	2	2
Y	–	–	4	3	3	3
Z	–	–	5	4	4	4

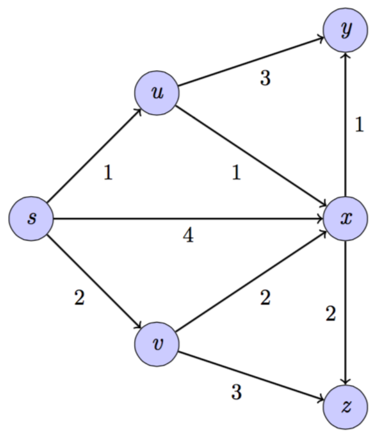
我们可以得到这样一张表，表的行和列分别是$OPT(v,k)$中的第一，第二个参数。这个表的用处，我们待会再看。

我们再看第二个版本，假如说这个边上都是正的，会出什么问题。在算法的第k步，我们考察一个特殊的节点v^*，v^*是从s出发最多经过第$k-1$步能够到达的最近的一个节点。对于v^*，最优子结构的性质也成立，所以有：

$$OPT(v^*,k)=\min\begin{cases}OPT(v^*,k-1)\\ \min_{<u,v^*>\in E}\{OPT(u,k-1)+d_{u,v^*}\}\end{cases}$$

我们仔细看看有什么特殊的地方。光成数学形式上看，我们就可以看出点蹊跷来。我们会发现，上面式子下面的那一部分根本就不用看了，因为下面式子肯定要比上面的大。因为v^*是是从s出发最多经过第$k-1$步能够到达的

最近的一个节点，所以$OPT(v^*,k-1)$肯定要小于$\min_{<u,v^*>\in E}\{OPT(u,k-1)\}$，我们假设所有边都是正的，所以$d_{u,v^*}>0$，所以更加有$OPT(v^*,k-1)>\min_{<u,v^*>\in E}\{OPT(u,k-1)+d_{u,v^*}\}$，所以$OPT(v^*,k)=OPT(v^*,k-1)$。这个性质在图中怎么体现呢？大家看图：



	k=0	1	2	3	4	5
S	0	0	0	0	0	0
U	–	1	1	1	1	1
V	–	2	2	2	2	2
X	–	4	2	2	2	2
Y	–	–	4	3	3	3
Z	–	–	5	4	4	4

从列开始看：一旦在一列中间找到最小的值之后（红圈中的值），在看最小值所在行右面的值（绿色方框中的值），永远不变了。最优子结构的性质：

$$OPT(v,k)=\min\begin{cases}OPT(v,k-1)\\ \min_{<u,v>\in E}\{OPT(u,k-1)+d_{u,v}\}\end{cases}$$

是对任何的节点都成立的。但若我们在所有边都不为负的情况下，对于那些特殊的节点v^*，最优子结构的性质还用不着，就是$OPT(v^*,k)=OPT(v^*,k-1)$就够了。若是按照Bellman-Ford算法，表中的每一个数值都是要计算的，其实，在所有边都不为负的情况下，所有绿色方框中的值的计算都没有必要，是不用算的。只要计算红色圆圈以及其左边的值就够了，那我们如何来计算这些值呢？我们来看一下一个贪心选择的性质。

我们用S来表示最短距离已经被确定的点。我们从所有不在S中的点中找一个离起始点最近的结点u^*，所以，从起始点到u^*的距离可以表示为：$d'(u)=\min_{w\in S}\{d(w)+d(w,u)\}$，并且：最短路径就是：$P=s\rightarrow ...\rightarrow w\rightarrow u^*$。

下面是算法： Dijkstra(G,s)

$S=\{s\}$; //S denotes the set of explored nodes,
$d(s)=0$; //$d(u)$ stores an upper bound of the shortest-path weight from s to u;
for all node $v\neq s$ **do**

   $d(v) = +\infty$;
end for
while $S \neq V$ **do**
   for all node $v \notin S$ **do**
      $d(v) = \min_{u \in S}\{d(u) + d(u,v)\}$;
   end for
   Select the node v^* ($v^* \notin S$) that minimizes $d(v)$;
   $S = S \cup \{v^*\}$;
end while

在课程网站上有这个算法的动画演示：Lec7-demo-Dijkstra.pdf。我就即使是不知道Dijkstra当年是怎么想到这个算法的，但是假设我们学了动态规划，学了Bellman-Ford之后，我们也可以写出类似Dijkstra的算法出来，只需要不计算绿色方框中的值就行。

这位就是Dijkstra。

我们再来回顾一下Dijkstra算法和Bellman-Ford算法，我们只是把对边的值的限制稍微改了一下，假如没有负圈，我们有这样一个表达式：$OPT[v,k] = \min \begin{cases} OPT[v,k-1], \\ \min_{<u,v>\in E}\{OPT[u,k-1] + d(u,v)\} \end{cases}$
如果再加强一下，根本就没有负边，这个约束更强了，导致我们可以用贪心算法。

Dijkstra算法的复杂度是$m + n\log n$)，为什么呢？我们将Dijkstra用一个更接近计算机的伪代码描叙出来：DIJKSTRA(G, s)

$key(s) = 0$; //$key(u)$ stores an upper bound of the shortest-path weight from s to u;
PQ. INSERT (s);
$S = \{s\}$; // Let S be the set of explored nodes;
for all node $v \neq s$ **do**

```
    key(v) = +∞
    PQ. INSERT (v)   n times
end for
while S ≠ V do
    v = PQ. EXTRACTMIN(); n times
    S = S ∪ {v};
    for  each w ∉ S and < v, w >∈ E do
        if  key(v) + d(v, w) < key(w) then
            PQ.DECREASEKEY(w, key(v) + d(v, w));  m times
        end if
    end for
end while
```

我们定义了一个优先队列（Priority Queue），是什么意思呢？就是里面存了一堆数，我们可以很快找出一个最小来。一开始，把所有的不在S中的节点，每个节点都有一个值$+\infty$，我们把它插到优先队列里面去。然后，我们从优先队列里面取一个最小，把最小的数放到S当中。接着，对所有墨水没有洇到的那些节点，我们看一下会不会从墨水已经洇得结点当中，重新更新一下路径。所以，一旦能找到一个新的方案，我们更新一下距离。对优先队列，我们有n次插入的操作，有n次取出最小值的操作，还有m次，要把这个值改一下。

优先队列我们怎么做呢？有很多种方案。如果大家没有学过优先队列的话，大家也能找出一种方案，本质上即使一堆数之间找最小。

Operation	Linked list	Binary heap	Binomial heap	Fibonacci heap
MAKEHEAP	1	1	1	1
INSERT	1	$\log n$	$\log n$	1
EXTRACTMIN	n	$\log n$	$\log n$	$\log n$
DECREASEKEY	1	$\log n$	$\log n$	1
DELETE	n	$\log n$	$\log n$	$\log n$
UNION	1	n	$\log n$	1
FINDMIN	n	1	$\log n$	1
DIJKSTRA	$O(n^2)$	$O(m\log n)$	$O(m\log n)$	$O(m+n\log n)$

我们可以写一个数组或链表，讲所有的数存下来。数组和链表，插入一个

数只需要$O(1)$的时间，取出最小值得从头到尾都比一遍，需要$O(n)$的时间。现在这个讲的有点快，大家可以先听一下，之后我们会有一个100页的Slide来详细讲。总个Dijkstra算法，需要$O(n*1+m*1+n*n) = O(n^2)$的时间，是所有方法中最老土，最大的。其实，做Dijkstra算法，单是数组不太好，经过一些列的改进，我们最后采用Fibonacci数列，插入只需要$O(1)$的时间，取出最小值要$O(\log n)$，改一下值需要$O(1)$，最终需要$O(m+n\log n)$。就相当于把所有的边枚举一次，把所有的结点排一下序的速度。值得说的是，这个Fibonacci堆就是专门为加快Dijkstra算法专门设计的一种数据结构。

好，上节课我们讲到，为了做Dijkstra算法，最老土的办法是数组或链表，但是稍微有点慢。再往下呢，我们可以用一个树结构来存储所有的数，也是本科学到的二叉堆。再往下，我们可以用很多颗树，就是一个森林。再往下，我们可以不仅仅用很多颗树，而且对树的样子不要有太严格的要求，就是Fibonacci堆，做得更快。这里面有很多的设计思想在里面。

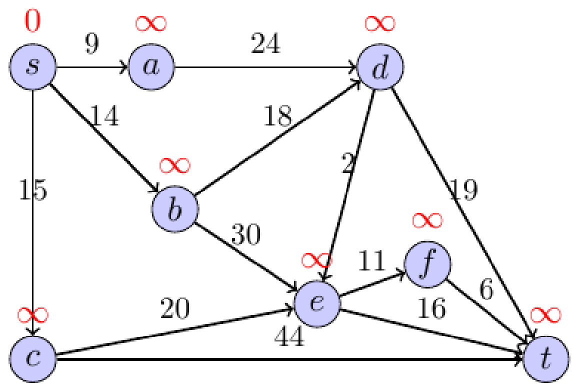
我们看一下优先队列的核心功能，就是怎么能够存一堆书，以方便我们之后如何能够最快地找最少，而且要考虑到这一堆数还在不断地变。所以，优先队列要支持能这几个功能：

1. 添加一个数
2. 在已有的数中找最小
3. 对数进行修改

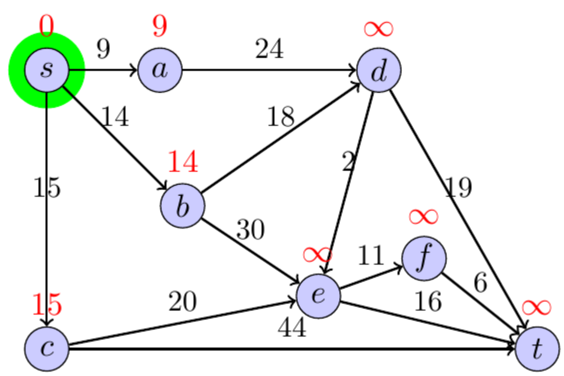
优先队列很有用，很多算法都有用到，比如：

- Dijkstra算法
- Prim的最小支撑树
- Huffman编码
- A^*搜索算法
- HeapSort

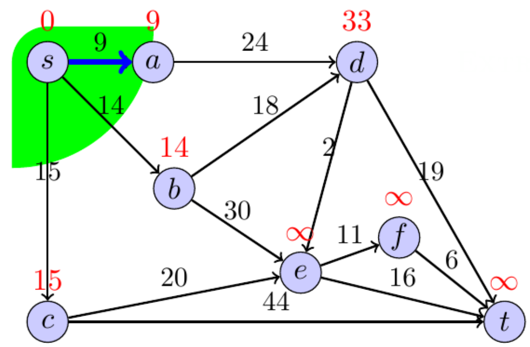
反正只要是在一堆数中间找最小，就要用到它。它就干这事。我们下面具体看看Dijkstra算法中是如何用到优先队列的。



一开始优先队列是这个：$PQ = \{s(0), a(\infty), b(\infty), c(\infty), d(\infty), e(\infty), f(\infty), t(\infty)\}$，除了$s$，其它的数都是正无穷，接着从里面找最小，执行一次，是￥=s，接着把与具有当前最小值节点s连接的节点的值改一下，比如a，原来是正无穷，现在要变成9。



现在优先队列变成了：$PQ = \{a(9), b(14), c(15), d(\infty), e(\infty), f(\infty), t(\infty)\}$，然后再取出最小值，然后和之前一样，把与具有当前最小值节点a连接的节点的值改一下，



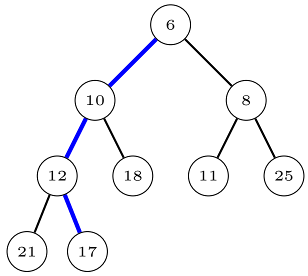
优先队列是：$PQ = \{b(14), c(15), d(33), e(\infty), f(\infty), t(\infty)\}$。之后再不停的执行这个步骤，每次都是找最小，然后再改一些数。直到优先队列中具有最小值的节点是目标节点t。

我们怎样来实现这个优先队列呢？先看看最老土的办法，数列。假如我们有一堆数：$[8, 1, 6, 2, 4]$，这是一个没有排序的数组。如果新加一个数，我们直接将它放在数组最后面就行了，要花$O(1)$的时间。若找最小呢，那要从头到尾都要找一遍，所以要花$O(n)$的时间。如果我们能够时刻保持数组有序，那求最小就会变得很简单，有序数组为：$[1, 2, 4, 6, 8]$只要找第一个数就行，要花$O(1)$的时间，不过插入就麻烦了，比如要插入一个5，要从1开始比，比到8后，在决定放在8的前面，可能要与所有的数都比一遍，要花$O(n)$的时间。

所以没排序的数列的时间复杂度是这样的：

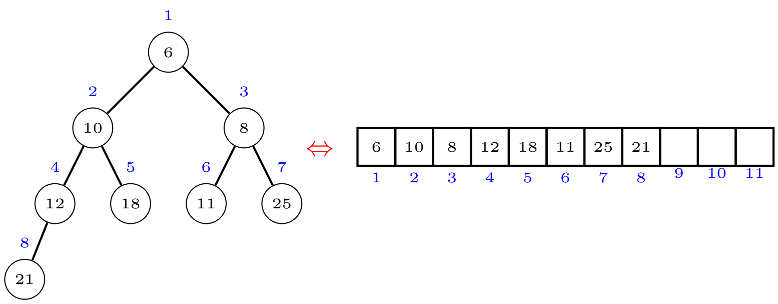
Operation	Linked List
INSERT	$O(1)$
EXTRACTMIN	$O(n)$
DECREASEKEY	$O(1)$
UNION	$O(1)$

这有点慢，那怎么办？提出一个新的数据结构：二叉堆，发明人是：R. W. Floyd。它的设计思想：我要放松一下我的要求，但是别放松得太狠。因为有的过强的约束是没有必要的。这也是以下我们要讲的几个数据结构的共同思想。我们的目标是找最小，难道需要所有的数都严格地排序吗？没有必要。但也不能放松得太狠，我们还是要求稍微有点序。

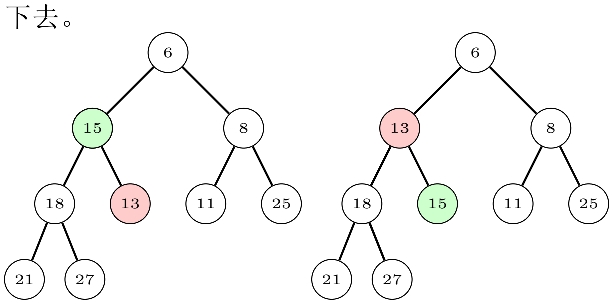


这个二叉树的特性是：任何一个父亲都比两儿子要小。我们并不要求所有的数都有一个完美的排序，只要求任何一条路径上有序就够了。为什么这样更好呢？因为这是二叉树，任何一条路径只有$\log n$这么高。

二叉树有两种实现方式：



第一种方法是老老实实的存下两个子节点的指针，还可以干脆将其弄成一个数组就行，这样，第k个节点的父亲就是第$k/2$个节点。假如我们采取第二种方式。这样，我们就只要这个数组中部分有序就够了，相当于放松了一下要求。我们还要对二项堆进行一些基本操作，当HeapOrder（父节点要比其子节点小）被违反了之后，则通过交换节点的方法，讲HeapOrder保持下去。

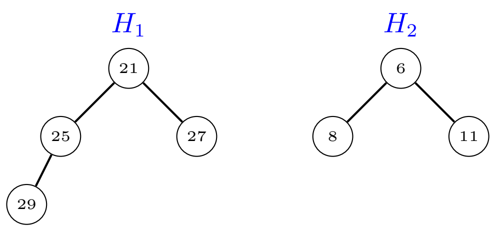


比如上面这个图，左边的HeapOrder被打乱了，于是我们交换值为15与值为13的节点的位置。若用二叉堆表示了一堆数之后，则求最小的问题就变得很简单了，因为父亲的值总比儿子的小，那么求最小就只要看根节点

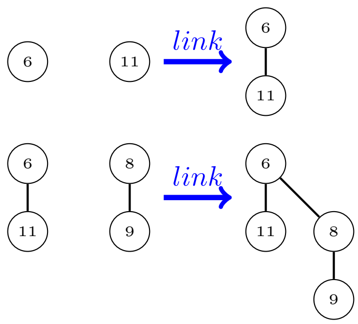
就好了。当我们先插入一个数时，先把它放到树的最下面，这可能会破坏HeapOrder规则，但我们可以通过一系列的交换来重新维护规则。该值也是同样的道理。

假如我们在Dijkstra算法中用到了二项堆，那算法的时间复杂度是多少呢？算法中最多只有m项插入，换值和取出最小值操作，每次操作最多花$\log n$时间，所以总体的复杂度是$O(m \log n)$。

我们看，二叉堆相比用单纯的数组或是链表，它放松了一些，不要要求所有的数都有序。但是用二叉堆，两个堆的合并要花$O(n)$的时间。



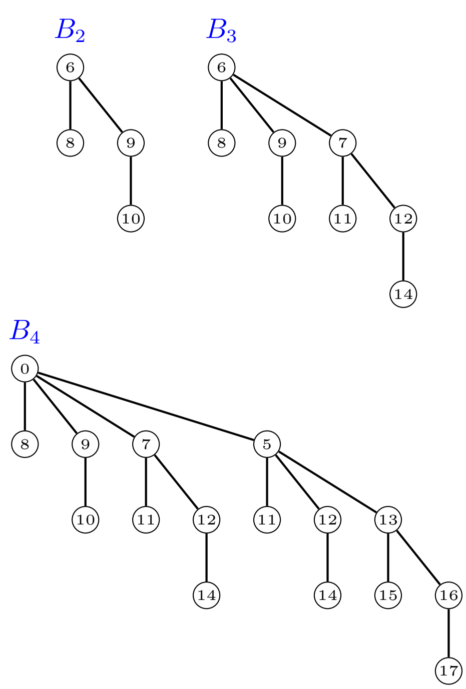
比如上面是两个二叉堆，我们想把它们合成一个。一种方法是把一个中的每一个数一个个地插入到另外一个二叉堆中，这是可以得，但是很慢。另外一种呢，把所有的数都拿过来，放在一起，然后重新建堆，这个要花$O(n)$的时间。那我们想有没有更快的方法呢？我们再想想我们一定需要将两个堆合并成一个吗，我们可不可以用多颗树来装下所有树呢？这就是下面我们要讲的二项树（Binomial Heap）的思想。这就是更进一步的放松了，我们之前要求要用一棵树来表示所有的树，现在我们放松到可以用多颗树来表示。这样，合并操作相当于就只要花$O(n)$的时间。但是我们还要记得一点，我们不能过分放松了，因为之后我们还要在所有的数中间找最小呢。用多颗树表示的话，我们如何在所有数之间找最小呢？由于每棵树的最小值都是它的根，那我们只要在所有树的根之间找最小就行。这种方法最极端的例子是什么？那就是每个数字单独形成一个数，这样就相当于回到了一开始用数组的方法，我们需要在所有数当中取出最小值。这有很麻烦。所以二项树思想最光辉的思想就在这，可以允许用多棵树来表示，但不要有太多，太多了又麻烦了。那怎么做到这一点呢？于是我们发现树太多了，我们就将他们合并一下。具体方法叫做consolidating：



那具体怎么合并呢？我们只要比较一下两颗树根的大小，把大的那棵树接在小的那一颗树的根节点的下面，以保持HeapOrder。我们下面给出二项树一个严格的定义，这是一个递归定义的：

- 单个节点可以叫做一个二项树。
- 一个二项树一定由两个相同大小的二项树按照规则（比较一下两颗树根的大小，把大的那棵树接在小的那一颗树的根节点的下面）组成。

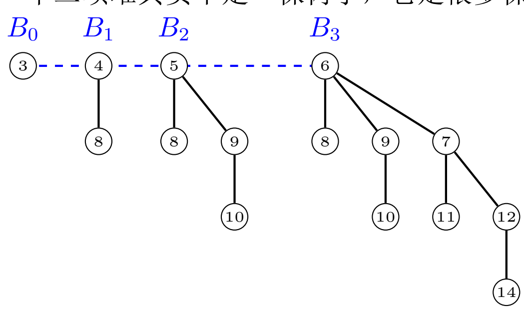
比如，下面几个图都是二项树:



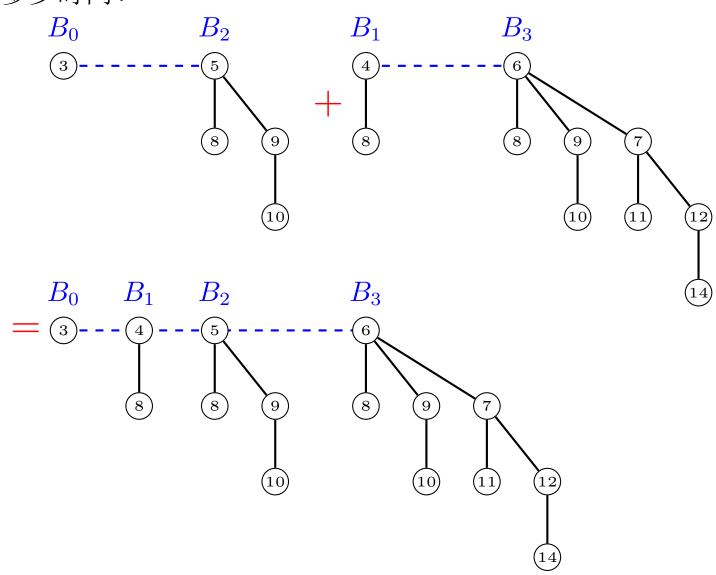
我们看看这个数有什么特点：任何一个树都不是特别平衡，但每个数的节点都有这样一些性质：

1. $|B_k| = 2^k$;
2. $height(B_k) = k$;
3. $degree(B_k) = k$;
4. 第i个儿子有 $i-1$个儿子;

一个二项堆其实不是一棵树了，它是很多棵树：



每棵树是同样满足一定的排序的。而且每一个k级树最多只有一颗，因为若有多颗，我们需要将它们合并。所以要容纳n棵树，整个森林中最多只有 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$棵树，并且最高的那棵树的高度是 $\lfloor \log_2 n \rfloor$。所以在所有数中间找最小，我们只需要在树的根节点中间找，只要花$O(\log n)$的时间。接下来我们看看讲两组树合并需要花多少时间？



上面这种情况最简单，把两组树放在一起之后，也没有两两大小一样的树，我们只需要将他们简单地放在一起就好了，花$O(n)$的时间。若是有两组树放在一块后有两两大小相同的树，那我们就需要将相同大小的树合并，只到一组数之间没有两两大小相同的树为止。比如两组树合并后有四组二项堆：$\{B_1, B_2, B_1, B_3\}$，我们先要将两个B_1变成一个B_2：
$\{B_2, B_2, B_3\}$
再将两个B_2变成一个B_3：
$\{B_3, B_3\}$
再将两个B_3变成一个B_4。
将两个二项堆变成一个很简单，只要花$O(1)$的时间。而合并两个森林时，我们只花了$O(\log n)$的时间。那插入一个数呢，若原先森林里没有单个数的树，我们放进去就行，若有了，我们就合并，所以也是$O(\log n)$的时间。取出最小值呢，当我们在一棵树中取出它的最小值（根节点）后，它就变成了两棵树，这可能会和其它的树大小相同，所以可能还需要再合并，也需要$O(\log n)$的时间。

总结一下：二项堆（Binomial Heap）相比二叉堆（Binary Heap），合并的时间改善了。

Operation	Linked List	Binary Heap	Binomial Heap
INSERT	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
EXTRACTMIN	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
DECREASEKEY	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
UNION	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$

今天我们就讲到这！我花了几个晚上的时间才画出很漂亮的树，我将得特别快，希望大家回去好好再看一下，好，下课！