运筹学通论

胡晓东

应用数学研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

Http://www.amt.ac.cn/member/huxiaodong/

Institute of Applied Mathematics
Chinese Academy of Sciences

参考书目

Convex Analysis (R. T. Rockafellar)
凸分析（英文影印版，世界图书出版社）

Fundamentals of Convex Analysis
(J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal)
凸分析基础（英文影印版，世界图书出版社）

Convex Optimization Theory (D. P. Bertsekas)
凸优化理论（英文影印版，清华大学出版社）

Convex Analysis (S. Boyd, L. Vandenberghe)
凸优化（英文中译本，世界图书出版社）

Fundamentals of Nonlinear Optimization (J. Fukushima)
非线性最优化基础（日文中译本，科学出版社）

1. 线性规划-食谱问题

我们人体每天需要一定量的两种维生素，**V_c** 和 **V_b**。假设这些维生素可以分别从牛奶和鸡蛋中得到。

维生素	奶(g)中含	蛋(g)中含	每日需求
V_c (mg)	**2 *x***	**4 *y***	**40**
V_b (mg)	**3 *x***	**2 *y***	**50**
单价 (US$)	**3 *x***	**2.5 *y***	

需要确定每天喝奶的量 ***x*** 和吃蛋的量 ***y*** 。**目标**是以最低可能的花费购买这些食物，而**满足**最低限度的维生素需求量。

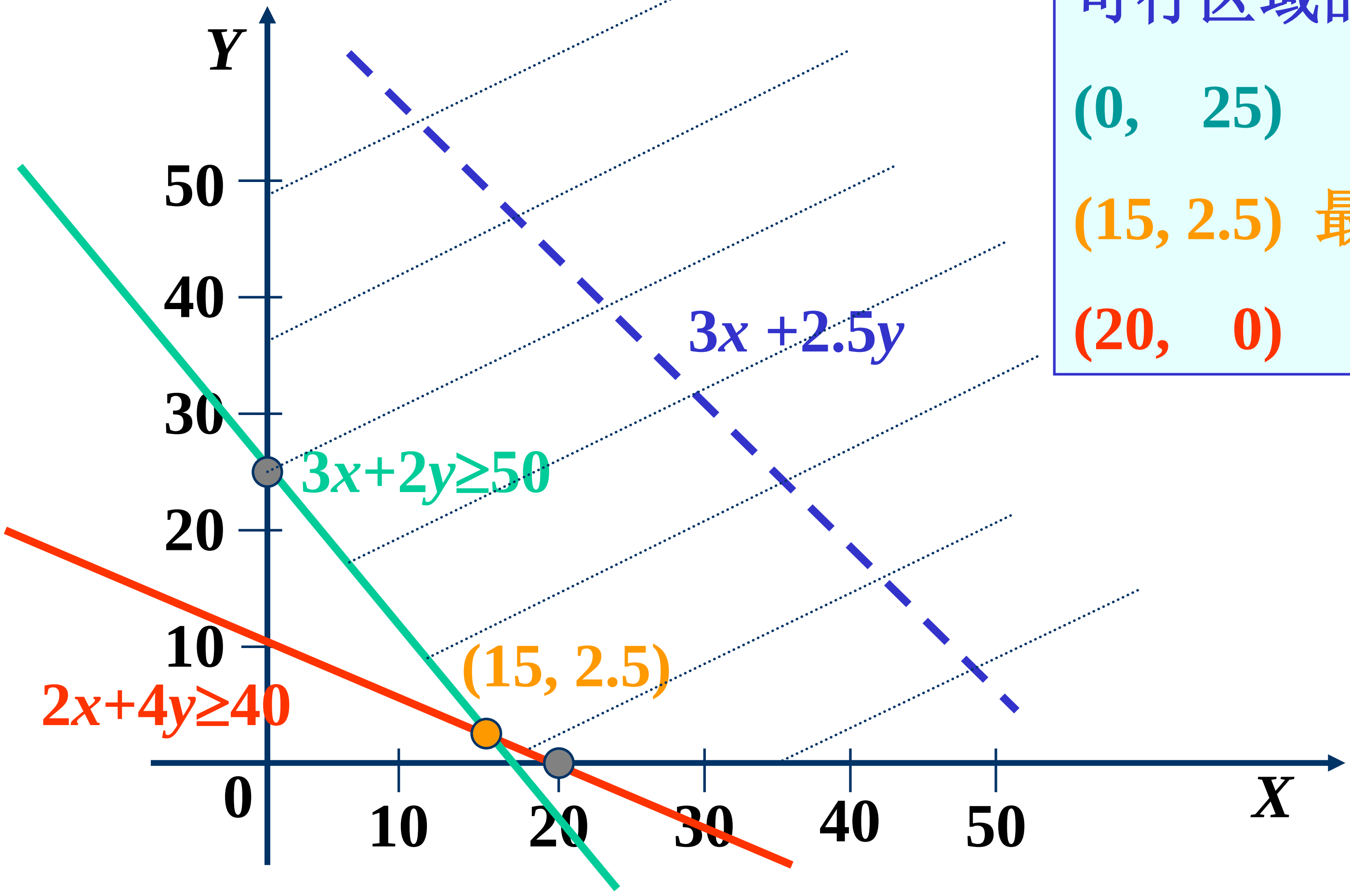
1. 线性规划-食谱问题（续一）

食谱问题可以写成如下的数学形式：

Min $3x + 2.5y$	极小化目标函数
s.t. $2x + 4y \geq 40$	
$3x + 2y \geq 50$	可行区域（单纯形）
$x, y \geq 0.$	可行解

运筹学工作者参与建立关于何时出现最小费用（或者最大利润）的排序，或者计划，早期被标示为**programs**。求最优安排或计划的问题，称作**programming**问题。

1. 线性规划-食谱问题（续二）



可行区域的极点：

(0, 25)

(15, 2.5) 最优解

(20, 0)

1. 线性规划-单纯形法

George Bernard Dantzig
(1914 - 2005)

1947年在美国五角大楼工作， Dantzig常常被空军要求去解实际的计划问题：分配空军的人力、经费、飞机和其它资源。他给这些问题建立了线性规划模型**(Linear Programming)**，并提出著名的单纯形法**(Simplex Method)**。

1. 线性规划-单纯形法（续一）

单纯形法的思想

第一步：找到一个可行解（极点）；

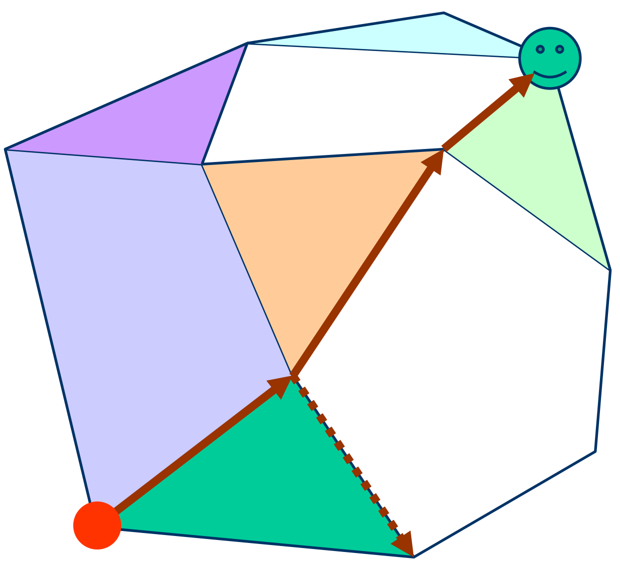
第二步：计算该点的判据函数；

第三步：若无法改进，退出；

第四步：否则选择一条棱，

找到另一可行解（极点）；

回到第二步。



1. 线性规划-历史注记

在没有线性规划之前，无法清晰地表示一般的目标，因此目标经常与为求解而设定的规则相混淆。

当我们询问军事指挥官他们的目标是什么的时候，他可能会说："目标就是赢得战争。"若要求说得更详尽一些，海军指挥官可能会回答："赢得战争的方法就是制造战舰。"而如果他是一位空军将领，他可能会说："赢得战争的方法就是建立一支庞大的轰炸机队。"

这样实现目标的手段就变成了目标本身，而这又引出关于如何获得这些手段的基本规则，如怎样最佳地建立轰炸机队。这些手段反过来又混淆了目标。

1. 线性规划-历史注记（续一）

我记得我试图用很普通的语言向**冯.诺依曼**描述空军的问题的情形。我根据活动和项目等等条件给出了一个线性规划模型。

他做了我相信不符合他性格的事情。“切入正题。”**约尼**不耐烦地厉声对我说。当时我多少有些激动，我对自己说：“那好吧，如果他要简短的，那就是他想要的。”不到一分钟，我在黑板上随意地写出了问题的几何与代数形式。

冯.诺依曼站起来了，说到：“噢，是这样！”在随后的一个半小时的时间里，他给我做了一个关于线性规划数学理论的演讲。

1. 线性规划-历史注记（续二）

此刻，**冯.诺依曼**看到我目瞪口呆地坐在那里（因为我已经查过文献而一无所获），他说到：“我不希望你想象我像一个魔术师一样，不假思索地把所有这些东西从我的袖子里倒出来。我最近与**Morgenstern**完成了一本有关博弈论的书。我刚刚所叙述的就是猜想这两个问题是等价的。我刚才讲的理论与我们在**博弈论**中发展的一个理论极其相似。”

于是从他那里我第一次学到了**Farkas引理**和**对偶理论**。**冯.诺依曼**后来答应我再想想计算问题，并在几周内与我联系。他提出了一个迭代的非线性方案。后来大约在1952年，**Hoffman**和他的研究小组在标准局用几个测试问题检验了一下该方案。他们还将该方案与单纯形法以及**Motzkin**提出的方法做了比较。结果证明单纯形法是一个明显的赢家。

1. 线性规划-历史注记（续三）

在**Dantzig**刚刚给出了线性规划的单纯法不久，他参加了一次学术会议。在会上他讲解了他的方法，...

当我讲完以后，会议主席征询意见和评论。死一般的寂静持续了一会儿后，一只手举了起来，那是**Hotelling**。

我需要解释以下，**Hotelling**非常胖。他喜欢在海里游泳。据说，当他在海里游泳时，能见到海平面明显升高。这个巨鲸似的人站在屋子的后面，他富有表情的胖脸上流露出我们所熟悉的那种无所不知的微笑。他说道："但是我们都知道这个世界是非线性的。"

他对我的模型给予了毁灭性的批评以后，庄严地坐了下来。我，一个无名小卒，疯狂地试图给出一个合适的回应。

1. 线性规划-历史注记（续四）

突然，听众中另一只手举了起来，这次是**冯.诺依曼**。

“主席先生，主席先生。”他说道，“如果演讲者不介意的话，我愿意替他回答。”我自然同意了。**冯.诺依曼**说道：“演讲人已经将他的演讲题目拟为‘线性规划’，并仔细地讲述了他的公理假设。如果你的问题满足这些公理假设，那么就可以很好地用这个方法。如果它不满足，那么就不用这个方法。”随后他坐了下来。

当然，在最后的分析中**Hotelling**是正确的。这个世界是高度非线性的。幸运的是，与非线性等式系统相比，线性不等式系统使得我们能近似在实际计划中所遇到的大多数非线性关系。

1. 线性规划-历史注记（续五）

约尼.冯.诺依曼留给每一个人的印象都极其深刻。

由于他具有的伟大的洞察力，人们常就自己所碰到的难题向他请教。在新领域，如线性规划、量子物理、计算机等等的早期发展阶段，他给出的建议事后被证明是价值无限的。但是当这些领域发展到更深层次的时候，要做出同样巨大的贡献对他来讲就困难多了。我想这是因为任何人的能力都是有限的，**约尼**也不例外。

1. 线性规划-对偶问题

重新考虑食谱问题。以出售奶和蛋给需要维生素的人的食品杂货商的利益出发，他知道奶和蛋按其维生素V_c和V_b的含量而有一定的价值。他的问题是确定出售维生素V_c的单价为u和维生素V_b的单价为v：他不能将价格订得高于奶和蛋的市场流行价，否则将失去他的顾客；他希望商店的总收入为**最大**。

维生素	奶(g)中含	蛋(g)中含	每日需求
V_c (mg)	**2 *u***	**4 *u***	**40 *u***
V_b (mg)	**3 *v***	**2 *v***	**50 *v***
单价(US$)	**3**	**2.5**	

1. 线性规划-对偶问题（续一）

Max $40u + 50v$	极大化目标函数
s.t. $2u + 3v \le 3$	
$4u + 2v \le 2.5$	可行区域（单纯形）
$u, v \ge 0.$	可行解

Min $3x + 2.5y$	极小化目标函数
s.t. $2x + 4y \ge 40$	
$3x + 2y \ge 50$	可行区域（单纯形）
$x, y \ge 0.$	可行解

1. 线性规划-对偶问题（续二）

对比一下从消费者和供应商各自的利益导出的两个问题，我们不难发现两个问题可以通过下述简单的变换，而相互转化：

极小化费用 **Min**	⟷	极大化利润 **Max**
大于等于约束 ≥	⟷	小于等于约束 ≤
食品费用	⟷	价格约束

当你把食谱问题的对偶问题解出以后（**练习**），你会发现一个（重要的）事实：**这两个问题的最优值是相等的！**

思考题：在数学上，是不是还有一些对偶的问题和概念？

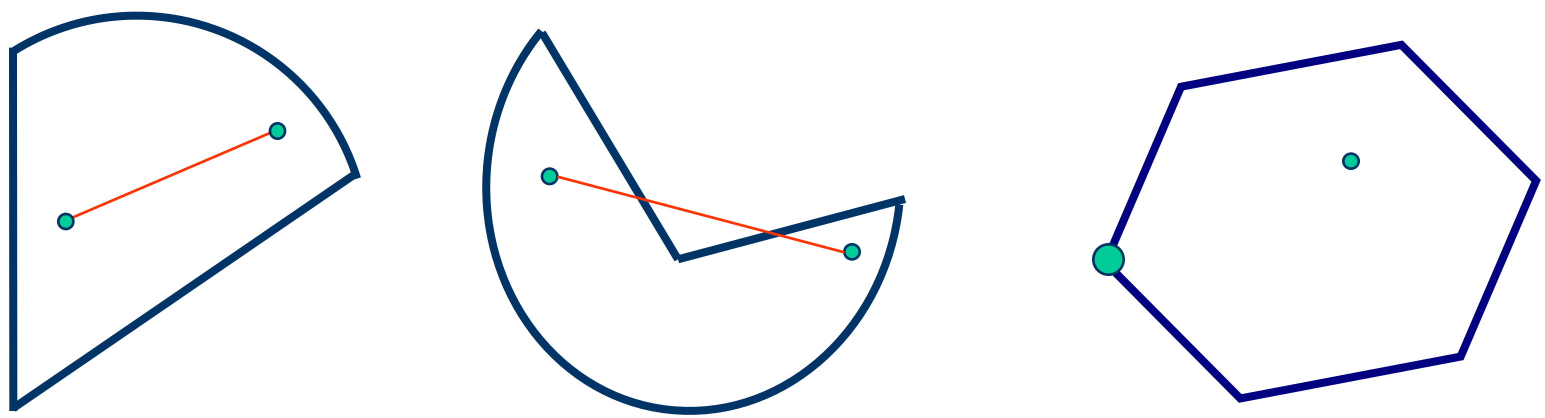
1. 线性规划-历史注记（续六）

我想说几句题外话，谈谈电子计算机本身。对我，我想，对我们所有人来说，有史以来最为激动人心的一个发展就是计算机，它几乎渗入了人类活动的方方面面。在很好地使用计算机之前，必须建立模型、设计好的算法。

然而，为了建立模型，则要求对所论专题进行公理化。正是这个公理化导致了新的数学领域的产生，而后开始对这些新数学领域进行研究。因此，每当计算机渗透到一个新的领域，一个门新的学科也就诞生了。

1. 线性规划-凸分析初步

定义1. 称 n-维欧氏空间 E^n 中的一个集合 X 为凸集若 X 中的任意两个点 x_1 和 x_2 的凸组合 $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ 也属于X，其中 $\lambda \in [0, 1]$.

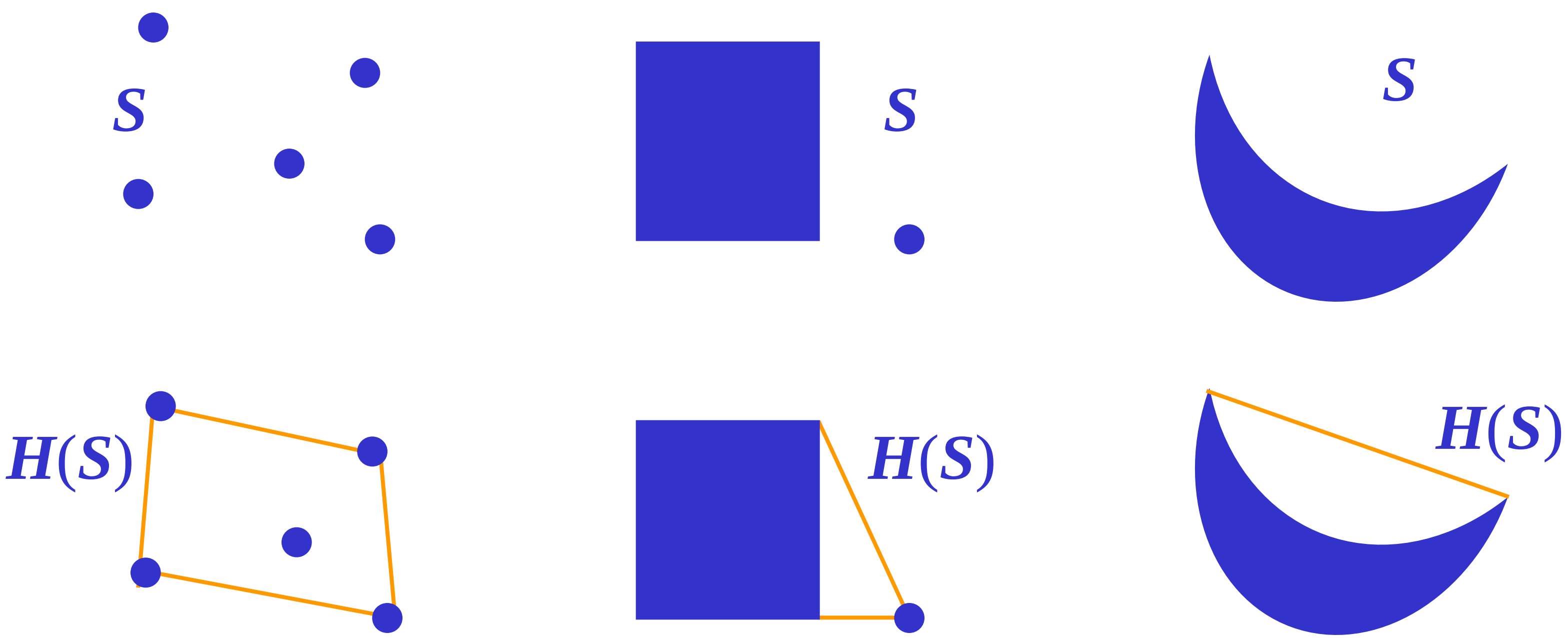


练习 设 S_1 和 S_2 是 n-维欧氏空间 E^n 中的两个凸集合。则集合 $S_1 \cap S_2$, $S_1 + S_2$ 和 $S_1 - S_2$ 也都是凸集。

定义 2. 称凸集X 中的一个点 x 为极点若由 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 可推出$x= x_1=x_2$，其中 $\lambda \in (0,1)$，x_1 和 x_2 是 X 中的两个点。

1. 线性规划-凸分析初步（续一）

定义 3. 设 S 是 n-维欧氏空间 E^n 中的一个集合。称由 S 中所有有限多个元素的凸组合组成的集合为 S 的凸包，记作 $H(S)$。

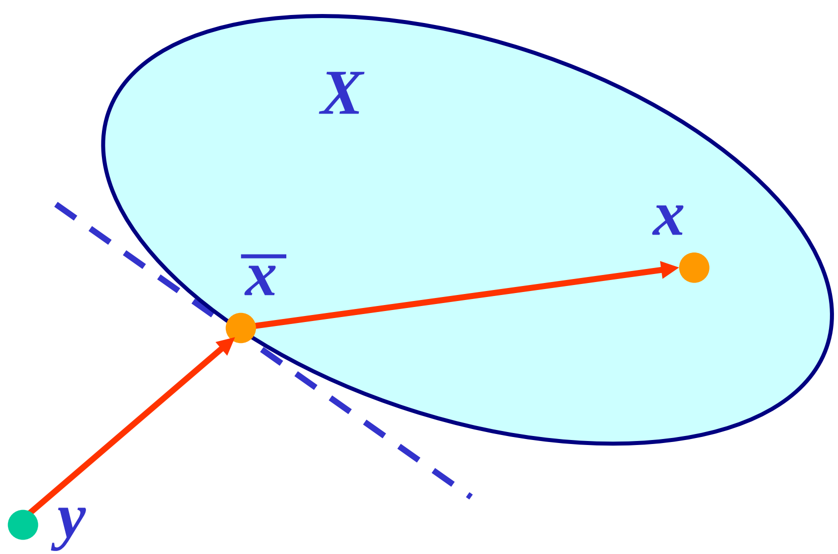


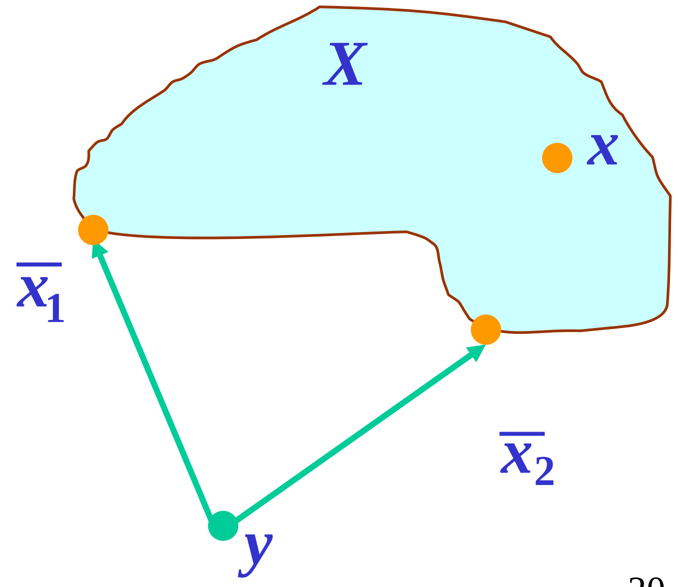
引理 1. 设S 是n-维欧氏空间E^n中的一个集合。则$H(S)$ 是包含 S 的最小凸集。实际上，$H(S)$ 是包含 S 的所有凸集的交集。

1. 线性规划-凸分析初步（续二）

几乎所有的最优性条件和对偶关系都是通过某种凸集的分离或者支撑性质建立起来的！

引理 2 (最短距离引理) 设 X 是n-维欧氏空间 E^n 中的一个闭凸集，且 $y \notin X$。则存在**惟一**点 $\bar{x} \in X$ 它到 y 的距离最短。而且 $\bar{x}$ 是最优点当且仅当对任意点 $x \in X$，都有$(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y) \geq 0$ 。





1. 线性规划-凸分析初步（续三）

证明. 令 $\inf\{\|y-x\|: x\in X\}=\gamma>\mathbf{0}$。则存在一个点列 $\{x_k\}\in X$ 满足 $\|y-x_k\|\to\gamma$。我们首先证明 $\{x_k\}\to\bar{x}\in X$。因为

$$\|x_k-x_m\|^2 = 2\|x_k-y\|^2+2\|x_m-y\|^2-\|x_k+x_m-2y\|^2 \quad \text{(平行四边形法则)}$$

$$= 2\|x_k-y\|^2+2\|x_m-y\|^2-4\|(x_k+x_m)/2-y\|^2$$

$$\le 2\|x_k-y\|^2+2\|x_m-y\|^2-4\gamma^2 \quad \text{(根据 } \gamma \text{ 的定义和 } X \text{ 的凸性)}$$

所以 $\{x_k\}\in X$ 是一个柯西序列，且有极限点 $\bar{x}\in X$ (是一个闭集)。现证明惟一性。假设存在一个点 $\bar{x}'\in X$ 满足 $\|y-\bar{x}\|=\|y-\bar{x}'\|=\gamma$. 根据Schwarz不等式，可得

$$\|y-(\bar{x}+\bar{x}')/2\|\le\|y-\bar{x}\|/2+\|y-\bar{x}'\|/2=\gamma.$$

因此存在某个实数 λ 使得 $y-\bar{x}=\lambda(y-\bar{x}')$, 故有 $|\lambda|=1$。易知 $\lambda\ne-1$。因而 $\lambda=1$，且 $\bar{x}=\bar{x}'$。

1. 线性规划-凸分析初步（续四）

证明 (续). 为了证明充分性，假设点 $x\in X$。则有

$$\|y-x\|^2=\|y-\bar{x}+\bar{x}-x\|^2=\|y-\bar{x}\|^2+\|\bar{x}-x\|^2+2(\bar{x}-x)^T(y-\bar{x})\geq 0.$$

为证明必要性，假定对所有点$x\in X$, 都有 $\|y-x\|^2\geq\|y-\bar{x}\|^2$。注意对充分小的实数 $\lambda>0$，有 $\bar{x}+\lambda(x-\bar{x})\in X$。因而有 $\|y-\bar{x}-\lambda(x-\bar{x})\|^2\geq\|y-\bar{x}\|^2$。另外，还有

$$\|y-\bar{x}-\lambda(x-\bar{x})\|^2=\|y-\bar{x}\|^2+\lambda^2\|x-\bar{x}\|^2+2\lambda(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y).$$

由此可知，对充分小的实数 $\lambda>0$, 有

$$\lambda^2\|x-\bar{x}\|^2+2\lambda(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y)\geq 0.$$

上述不等式两边同时除以 $\lambda\to 0$，可得 $(x-\bar{x})^T(\bar{x}-y)\geq 0$。引理证毕。

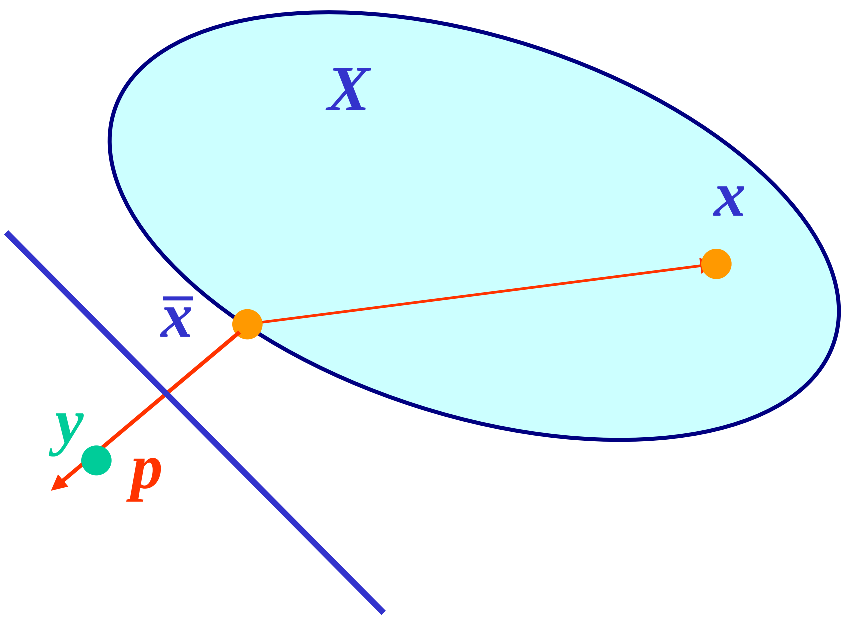
1. 线性规划-凸分析初步（续五）

引理 3 (分离引理) 设X 是n-维欧氏空间 E^n 中的一个闭凸集，且 $y \notin X$。则存在一个非零向量 p 和实数α 满足 $p^T y > \alpha$ ，且对任意点 $x \in X$ 都有 $p^T x \le \alpha$。

证明. 根据**引理2**, 存在一个向量 $\bar{x} \in X$ 使得对于任意点 $x \in X$, 都有 $(x-\bar{x})^T(y-\bar{x}) \le 0$。注意

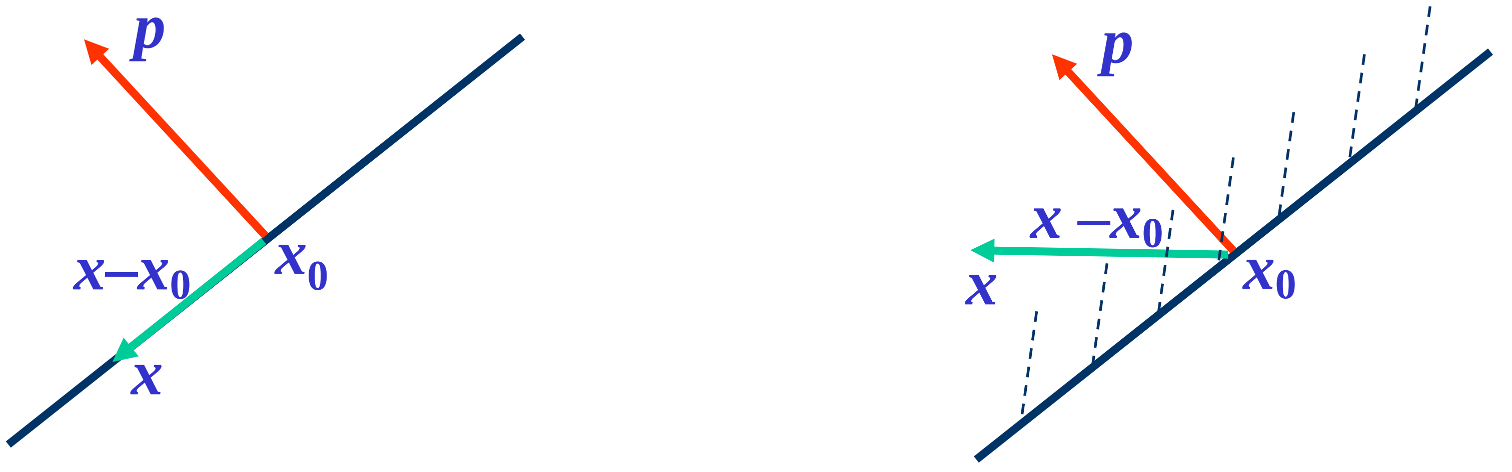
$$\begin{aligned}\|y-\bar{x}\|^2 &= y^T(y-\bar{x}) - \bar{x}^T(y-x) \\ &\le y^T(y-\bar{x}) - x^T(y-\bar{x}) \\ &\le p^T(y-x),\end{aligned}$$

其中$p = y - \bar{x} \neq 0$. 亦即对任意 $x \in X$ 都有$p^T y \ge p^T x + \|y-\bar{x}\|^2$。再令 $\alpha = \sup\{p^T x: x \in X\}$ ，即可得到要证明的不等式。



1. 线性规划-凸分析初步（续六）

定义 4. 称满足 $p^T x = k$ 的向量 $x \in E^n$ 集合H为一个超平面，其中$p \in E^n$ 而 k 是一个常数。称 p 是这个超平面的法向量（亦即若 $x_0 \in H$，则有 $p^T x_0 = k$）。



定义 5. 称满足 $p^T x \geq k$ 的向量 $x \in E^n$ 集合为一个半平面，其中 $p \in E^n$ 而 k 是一个常数。（亦即，若点 x_0 在这个超平面上，则有 $p^T(x - x_0) \geq 0$）。

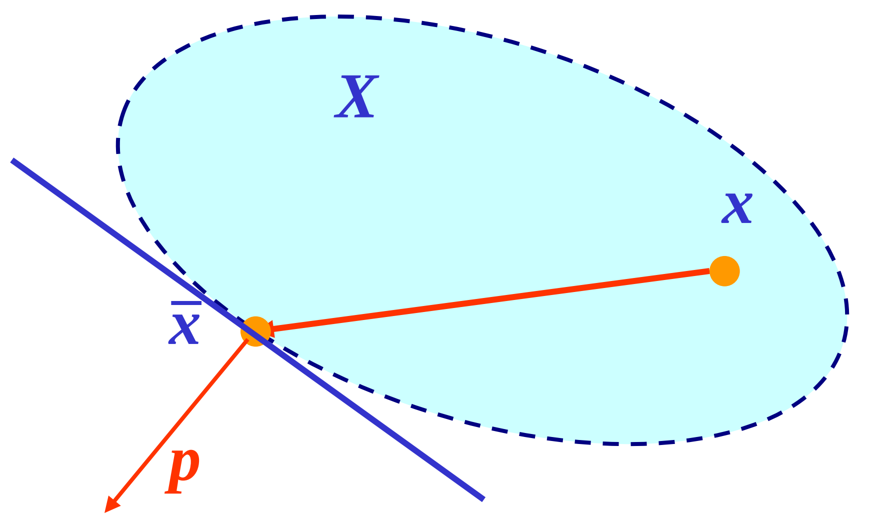
1. 线性规划-凸分析初步（续七）

定理 2 (支撑定理) 设 $X\subset E^n$ 是一个非空凸集，且 $\bar{x}\in\partial X$，其中 ∂X 是 X 的边界。则在点 $\bar{x}$ 处存在 X 的一个支撑平面；亦即存在一个非零向量 p 使得，对任意 $x\in \mathrm{cl}(X)$，都有 $p^T(\bar{x}-x)\geq 0$ 。

证明. 因 $\bar{x}\in\partial X$, 故 $\exists\{y_k\notin \mathrm{cl}(X)\}$ 使得 $y_k\to\bar{x}$。再根据**引理3**，$\exists p_k$ 其模为1且对任意 $x\in \mathrm{cl}(X)$，都有

$$p_k^T y_k > p_k^T x。$$

因 $\exists\{p_k\}_K\to p$ 且 $\{y_k\}_K\to\bar{x}$，故上面不等式中令 $k\in K\to\infty$，即有 $p^T(\bar{x}-x)\geq 0$。

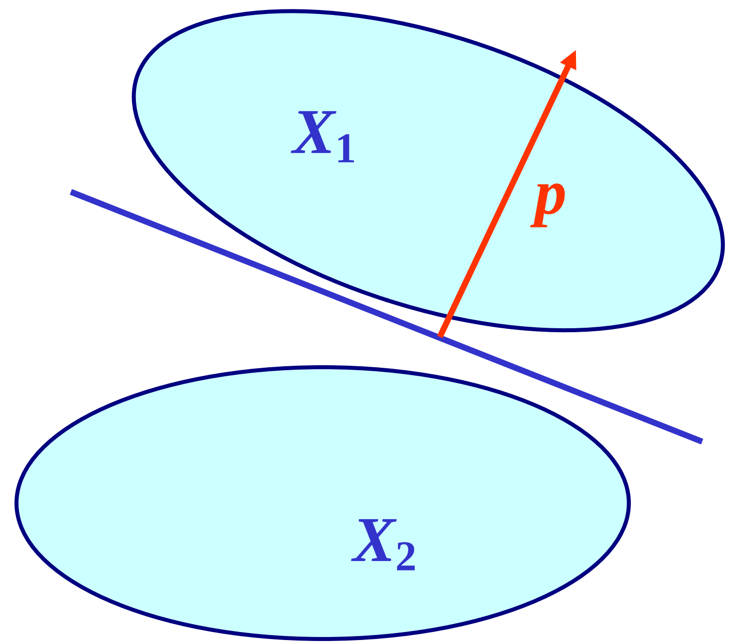


1. 线性规划-凸分析初步（续八）

定理 3 (分离定理) 设 $X_1, X_2 \subset E^n$ 是两个非空凸集，且 $X_1 \cap X_2 = \varnothing$。则存在将 X_1 和X_2 分离的一个超平面，亦即存在一个向量 $p \neq 0$ 使得

$$\inf\{ p^T x: x \in X_1 \} \geq \sup\{ p^T x: x \in X_2 \}。$$

证明. 设 $X = X_1 - X_2$。则 X 是一个凸集。注意 $0 \notin X$；否则有 $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$。根据**引理3**，存在一个非零向量 p 使得对任意$x \in X$，都有$p^T x \geq 0$。亦即对任意 $x_1 \in X_2$ 和 $x_2 \in X_2$，都有 $p^T x_1 \geq p^T x_2$，定理得证。



1. 线性规划-凸分析初步（续九）

练习 设 $X\subset E^n$ 是一个非空凸集，且 $\bar{x}\notin X$。则存在一个非零向量 $p\in E^n$ 使得对于任意 $x\in \mathrm{cl}(X)$，都有$p^T(x-\bar{x})\le 0$。

提示: 利用 **引理 2** 和 **定理 2**。

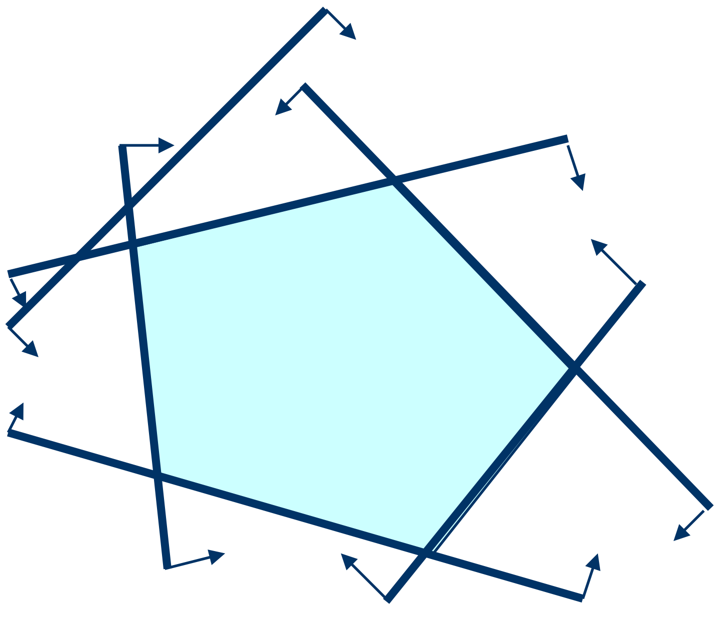
练习 设 $X_1, X_2 \subset E^n$ 是两个非空凸集。 假设 $\mathrm{int}(X_2)\neq\varnothing$ 且 $X_1\cap\mathrm{int}(X_2) = \varnothing$。则存在一个向量$p\neq 0$ 使得 $\inf\{ p^Tx: x\in X_1\} \ge \sup\{ p^Tx: x\in X_2\}$.

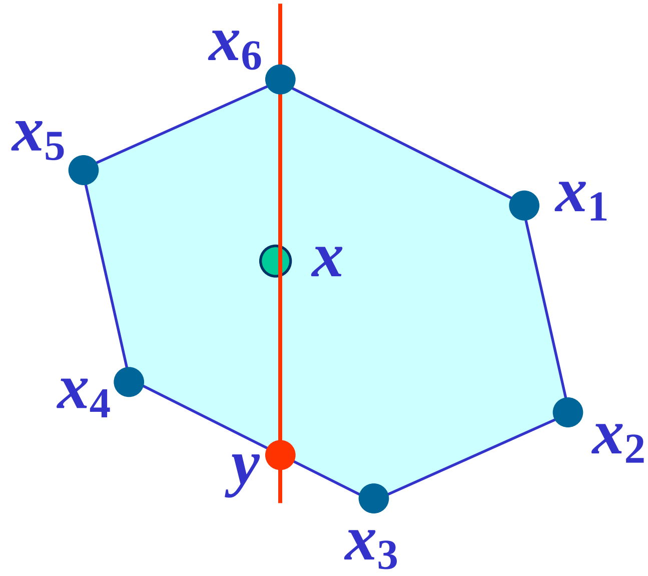
提示: 在**定理 3**中用$\mathrm{int}(X_2)$ 替换 X_2。

练习 设$X_1, X_2 \subset E^n$是两个凸集合，且都存在内点。假设 $\mathrm{int}(X_1)\cap\mathrm{int}(X_2)=\varnothing$。则存在一个向量 $p\neq 0$ 使得 $\inf\{ p^Tx: x\in X_1\} \ge \sup\{ p^Tx: x\in X_2\}$。

1. 线性规划-凸分析初步（续十）

定义 6. 称有限多个半平面的交集为多面体集。（一个多面体可以用一组线性不等式表示 $\boldsymbol{Ax \le b}$ ）。

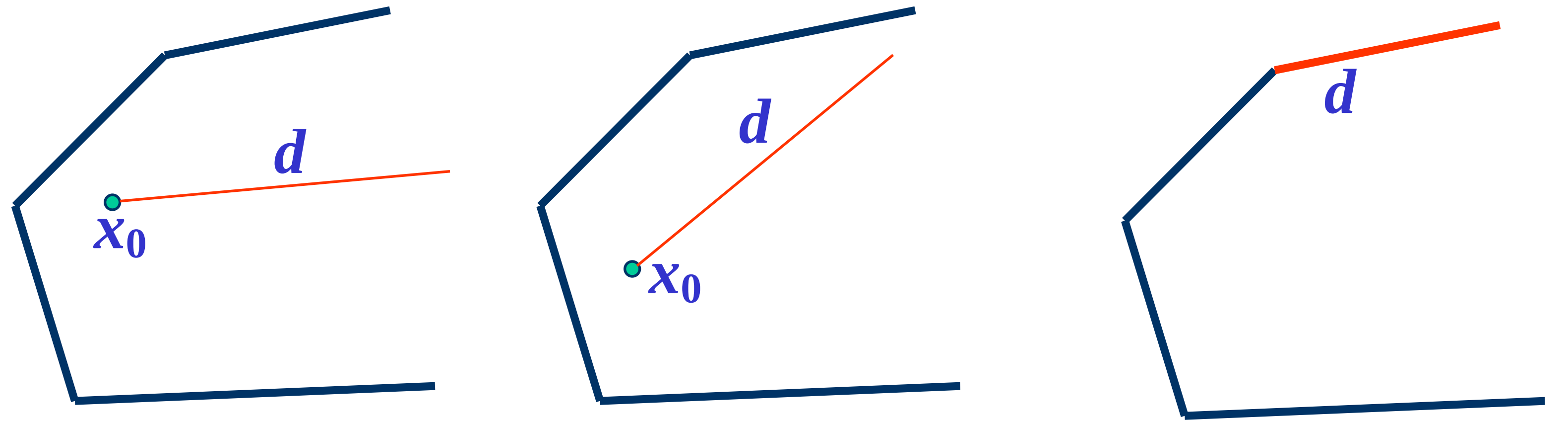




定理 4. (表示定理) 设 X 是一个非空有界多面体集。则存在有限多个点, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, 其中 $k > 0$, 使得 $x \in X$ 当且仅当 x 可以表示为 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 的凸组合。

1. 线性规划-凸分析初步（续十一）

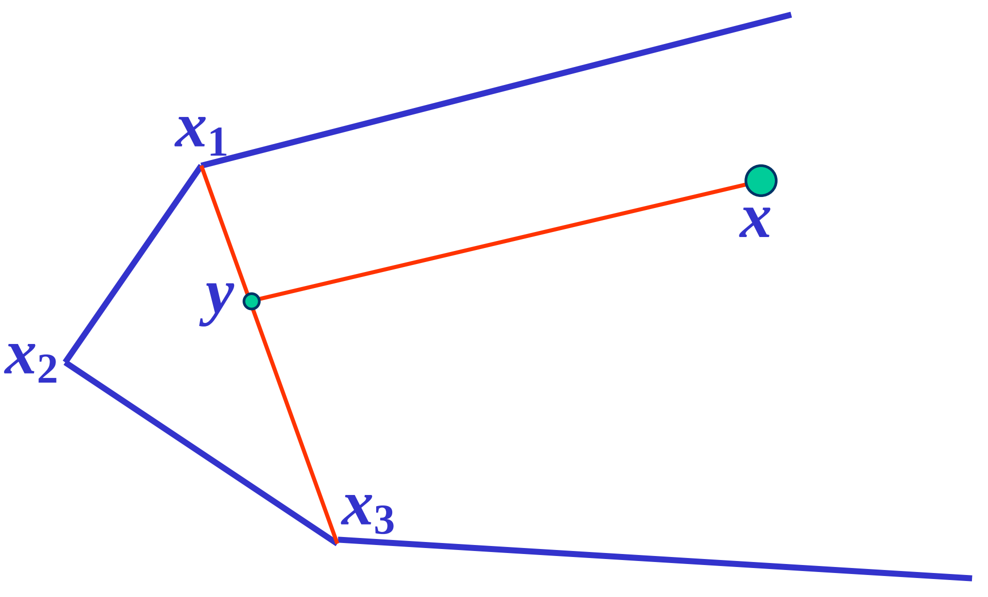
定义 7. 给定一个凸集 X, 称一个非零向量d为它的一个方向，如果对每一个向量 $x_0 \in X$, 都有 $x_0+\lambda d \in X$, 其中 $\lambda \geq 0$。

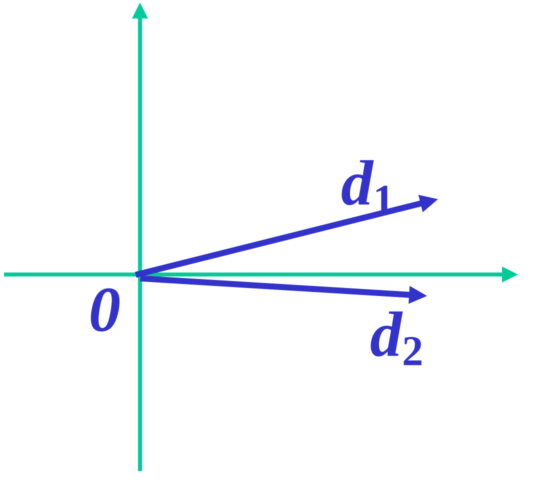


定义 8. 称凸集 X 的一个方向 d 为它的极方向, 如果由 $d = \lambda d_1 + (1 - \lambda) d_2$， 可推出 $x = d_1 = d_2$， 其中 $\lambda \in (0, 1)$，而 d_1 和 d_2 都是 X 的方向。

1. 线性规划-凸分析初步（续十二）

定理 5. 设 X 是一个非空多面体集。则存在有限多个极点，$x_1, x_2, \ldots, x_k$，其中 $k > 0$。进一步，存在有限多个极方向 $d_1, d_2, \ldots, d_l$，其中 $l > 0$ 当且仅当 X 是无界的。而且，$x \in X$ 当且仅当 x 可以表示为 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 的凸组合与 $d_1, d_2, \ldots, d_l$ 的非负线性组合之和。

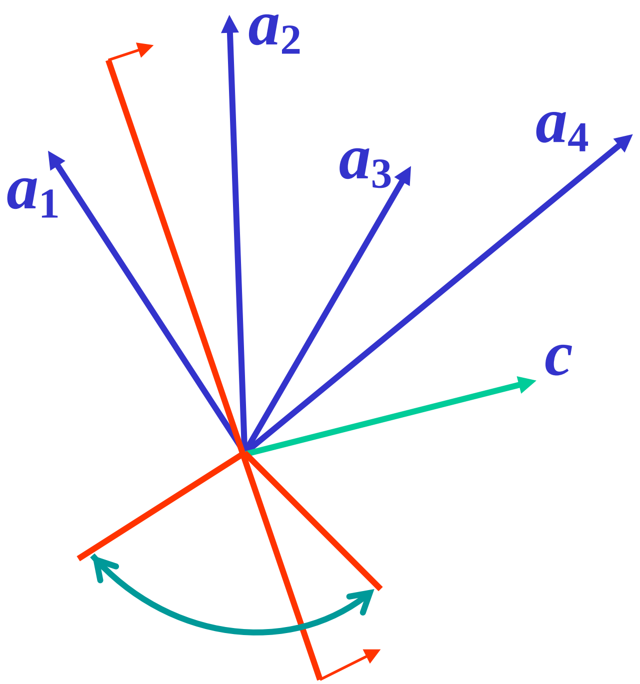


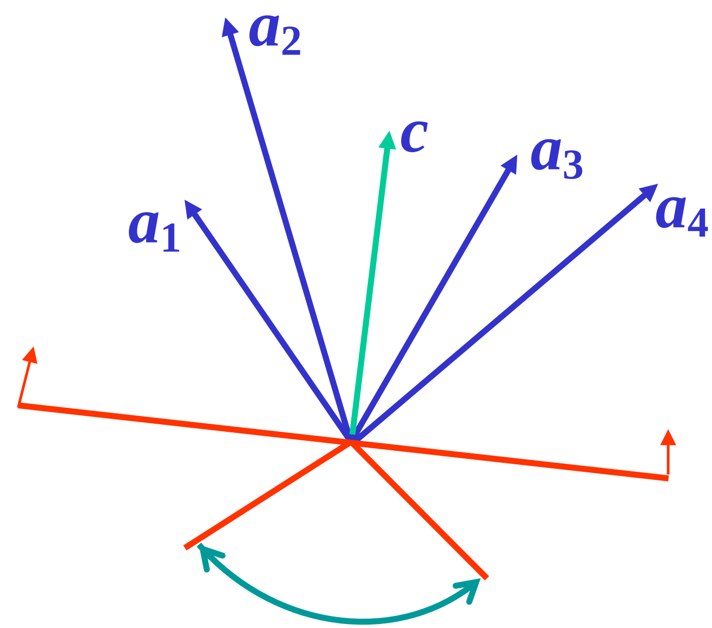


1. 线性规划-凸分析初步（续十三）

Farkas 定理. 设 A 是一个 ($m \times n$)-矩阵，c 是一个 n-维向量。则以下两个线性系统中有且仅有一个线性系统存在解：

$$Ax \le 0 \text{ 和 } c^T x > 0, \qquad A^T w = c \text{ 和 } w \ge 0。$$





1. 线性规划-凸分析初步（续十四）

Farkas 定理. 设 A 是一个 $(m\times n)$-矩阵，c 是一个 n-维向量。则以下两个线性系统中有且仅有一个线性系统存在解：

$$Ax \le 0 \text{ 和 } c^Tx > 0, \qquad A^Tw = c \text{ 和 } w \ge 0。$$

证明（练习）： (i) 假定系统 2 存在一个解，则 … …

(ii) 假定系统 2 没有解。则 $c \notin \{\, w^TA \mid w \ge 0 \,\}$, 而这是一个闭凸集。因而根据**分离引理**可知， 存在一个向量 x 使得对所有非负向量$w \ge 0$， 都有 $c^Tx > w^TAx$。现令 $w = 0$， 则有 $c^Tx > 0$。因为可以将 w 取得任意地大, 所以有$Ax \le 0$。亦即系统 1 有解。

引理 3（分离引理） 设 X 是一个闭凸集且 $y \notin X$。则存在一个非零向量 p 和一个正实数 $\alpha > 0$ 使得，对任意向量 $x \in X$， 都有 $p^Ty \ge \alpha > p^Tx$。

1. 线性规划-凸分析初步（续十五）

Farkas 定理 设 A 是一个 $(m\times n)$-矩阵，c 是一个 n-维向量。则以下两个线性系统中有且仅有一个线性系统存在解：

$$Ax\le 0 \text{ 和 } c^Tx>0, \qquad A^Tw=c \text{ 和 } w\ge 0。$$

若视上述两个线性系统中变量分别为 x 和 w，则**Farkas 定理**可以重新表述如下：

如果存在一个向量 x 使得 $Ax\le 0$ 且 $c^Tx>0$，则不存在向量 $w\ge 0$ 使得 $A^Tw=c$。

反之, 如果不存在同时满足 $Ax\le 0$ 和 $c^Tx>0$ 的向量 x，那么一定存在一个非负向量 $w\ge 0$ 满足 $A^Tw=c$。

1. 线性规划-凸分析初步（续十六）

推论 (Farkas 定理的另一种形式)
以下两个线性系统中有且仅有一个线性系统存在解:

$$Ax \le 0,\ x \ge 0 \text{ 且 } c^T x > 0, \qquad A^T w \ge c \text{ 且 } w \ge 0。$$

证明（练习）：将系统 2 转化为一个等式, ……

练习： 假定以下线性系统没有解

$$Ax = 0,\ x \ge 0 \text{ 且 } c^T x > 0。$$

设计一个一定存在解的线性系统。

1. 线性规划-单纯形法

考虑线性规划的如下标准型:

Min $c^T x$　　　c 是一个 n-维整数向量

s.t. $Ax = b$,　A 是一个 $(m\times n)$-维整数矩阵，其中$m < n$;

$x \geq 0$.

设 X 是一个非空的可行解集。则存在有限多个极点, $x_1, x_2, \ldots, x_k$，其中 $k > 0$，和有限多个极方向，$d_1, d_2, \ldots, d_l$ 其中$l \geq 0$。因而对任意一个解 $x\in X$, 都有$x = \sum \lambda_i x_i + \sum \mu_j d_j$, 其中 $\sum \lambda_i =1$ 而 $\lambda_i, \mu_j \geq 0$。据此我们可以证明以下定理（证明作为练习留给同学们完成）。

定理 6. 线性规划的最优解是有限的，当且仅当对所有指标 j 都有 $c^T d_j \geq 0$。此时，至少有一个极点是最优解。

1. 线性规划-单纯形法（续一）

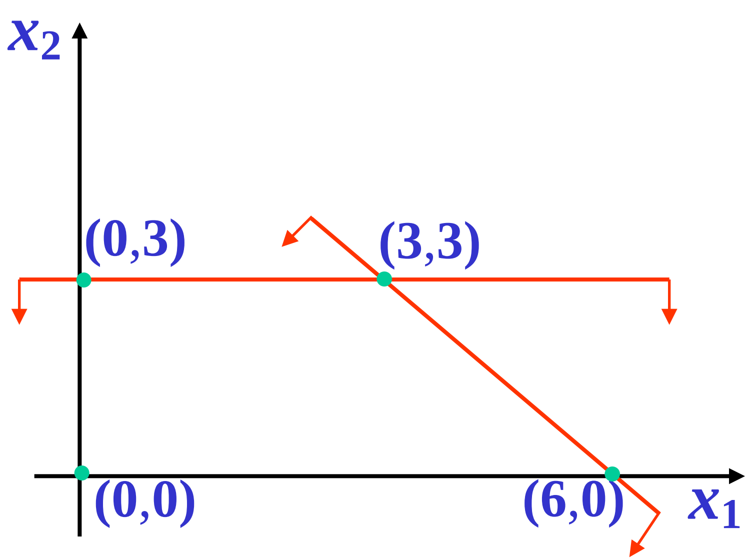
假设矩阵$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$的秩为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{m}$。当我们将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列进行适当调整以后, 记 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}]$，其中矩阵$\boldsymbol{B}$ 是一个 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}$-维的可逆矩阵，而矩阵 $\boldsymbol{N}$ 是一个 $\boldsymbol{m}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m})$-维的矩阵。则我们得到一个基础可行解 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N]$，其中 $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵。

若 $\boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{x}$ 是一个基础可行解, $\boldsymbol{B}$ 是一个基础矩阵，而 $\boldsymbol{N}$ 是非基矩阵, $\boldsymbol{x}_B$ 的分量是基变量，而 $\boldsymbol{x}_N$ 的变量为非基变量。若 $\boldsymbol{x}_B > \boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{x}$ 非退化的基础可行解；否则称其为退化的基础可行解。

一般来讲， 基础可行解的个数不超过 $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$, 亦即从 $\boldsymbol{n}$ 个物品中选取 $\boldsymbol{m}$ 件物品的不同方法数目。

1. 线性规划-单纯形法（续二）

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\le 6 \\ x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \quad &= 6 \\ x_2 \quad +x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$



$\bar{x}_1=(3,3,0,0)$, $J=\{1,2\}$

$\bar{x}_2=(6,0,0,3)$, $J=\{1,4\}$

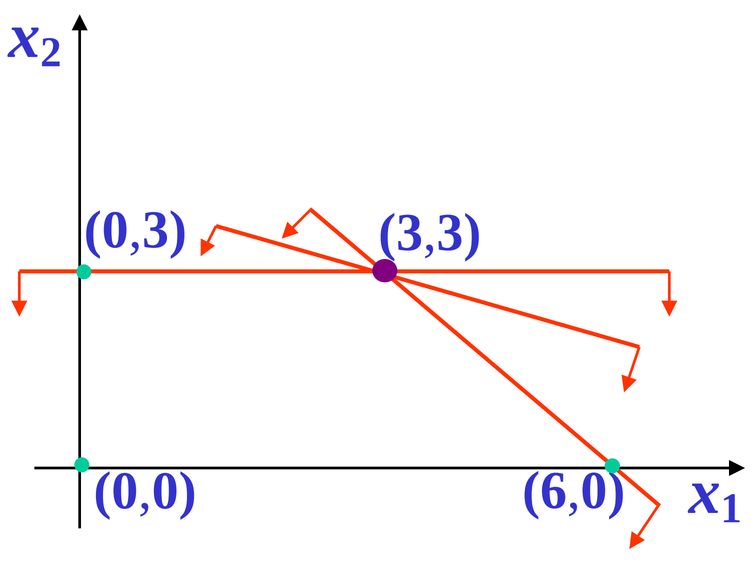
$\bar{x}_3=(0,3,3,0)$, $J=\{2,3\}$

$\bar{x}_4=(0,0,6,3)$, $J=\{3,4\}$

$\bar{x}_5=(0,6,0,-3)$, $J=\{2,4\}$

1. 线性规划-单纯形法（续三）

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_2 &\le 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 9 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$



$\bar{x}_1=(3,3,0,0,0), J=\{1,2,3\}$

$\bar{x}_1=(3,3,0,0,0), J=\{1,2,4\}$

$\bar{x}_1=(3,3,0,0,0), J=\{1,2,5\}$

退化的基础可行解

定理 7. 点 x 是一个基础可行解当且仅当它是一个极点。

证明 (练习)：(i) 假设 x 是一个极点，且 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ 是其大于 0 的变量，其他分量皆为0。利用反证法我们可以证明，$a_1, a_2, \ldots, a_p$ 是线性无关的 p 个向量。否则有 $\Sigma_j \gamma_j a_j = 0$，因而 x 可以表示为可行域中两个点 u 和 v 的凸组合，其中

$$u_j = x_j + \lambda\gamma_j\,,\quad j = 1, 2, \ldots, p, \text{ 且}$$

$$v_j = x_j - \lambda\gamma_j\,,\quad j = 1, 2, \ldots, p。$$

(产生矛盾！)

现在我们可以从向量$a_{p+1}, \ldots, a_n$ 选取 $m-p$ 个向量, 它们与向量 $a_1, a_2, \ldots, a_p$, 共同组成一个线性无关集合。不失一般性，假设这些向量是 $a_{p+1}, \ldots, a_m$。再根据定义，即可知，$a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_m$ 构成了一个基础可行解。

1. 线性规划-单纯形法（续五）

证明(练习)：(ii) 假定 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_B\ \mathbf{0}]$ 是一个基础可行解。利用反证法，假设 $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}$，$0 < \lambda < 1$，且 $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}_B\ \boldsymbol{u}_N]$ 和 $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_B\ \boldsymbol{v}_N]$ 都是可行解。因而有

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_B\ \mathbf{0}] = \lambda[\boldsymbol{u}_B\ \boldsymbol{u}_N] + (1-\lambda)[\boldsymbol{v}_B\ \boldsymbol{v}_N]$$

又因为 $\boldsymbol{u}_N$ 和 $\boldsymbol{v}_N \geq \mathbf{0}$，所以有 $\boldsymbol{u}_N = \mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{v}_N = \mathbf{0}$。由此可得

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_B,\ \boldsymbol{u}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

即有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$。类似地有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$。故 $\boldsymbol{x}$ 是一个极点。

注意：每一个基础可行解与一个极点对应，然而，有可能不止一个基础可行解都对应于同一个极点。在退化情形下，就会出现这种情况。

1. 线性规划-单纯形法（续六）

定理 8. 每一个非空多面体集合所定义的可行区域都至少有一个基础可行解。而且，如果相应的线性规划存在一个最优解，那么它有一个最优解是基础可行解。

证明 (练习)：(i) 假定 x 是一个可行解，并设其正的分量为 $x_1, \ldots, x_p$，其他分量皆为0。注意，如果 $a_1, \ldots, a_p$ 是线性无关的，那么 x 即是一个基础可行解。现假设$a_1, \ldots, a_p$ 是线性相关的，$\Sigma_j \gamma_j a_j = 0$。我们构造一个可行解 y 如下：

$$y_j = x_j - \lambda \gamma_j, \quad i = 1, 2, \ldots, p \quad 且$$
$$y_j = 0, \qquad j = p+1, \ldots, n,$$

其中 $\lambda = \min \{ x_j/\gamma_j : \gamma_j > 0\} = x_k/\gamma_k > 0$。容易验证，$y$ 是一个可行解，且它最多有 $p-1$ 个正分量。

1. 线性规划-单纯形法（续七）

证明 (练习)： (ii) 假设 x 是一个最优解。如果它不是一个基础可行解，那么它可以表示为两个基础可行解的凸组合。其中目标函数值小的基础可行解一定也是一个最优解。定理证毕。

我们是否可以将所有的基础可行解都列出来，然后找出目标函数值最少的那个基础可行解（即一个最优解）呢？回答是否定的，这是因为

(1) 基础可行解的数目很大；
(2) 这个方法也没有告诉我们线性规划无有限最优解的情形；
(3) 这个方法也没有告诉我们线性规划无可行解的情形。

1. 线性规划-单纯形法（续八）

假设我们有一个基础可行解 $x_0^T = [B^{-1}b \;\; 0]$。其目标函数值为$z_0 = c_B B^{-1}b$。现考虑任意一个可行解 $x^T = [x_B \; x_N]$。 则我们有 $b = Ax = Bx_B + Nx_N$。因而 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - \sum_i B^{-1}a_j x_j$, 其中 $j \in J$ 对应的是基础变量。

再用 z 表示可行解 x 的目标函数值。 则有

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = z_0 - \sum (z_j - c_j)\, x_j, \quad \text{其中 } z_j = c_B^T B^{-1} a_j。$$

因为我们希望最小化目标函数值 z，所以当 $z_j - c_j > 0$ 时，我们增加 x_j 的值有助于减少当前的目标函数值。 实际上，此时将 x_j 的值增加得愈多愈好。这里我们可以选择指标 j 与其对应的值 $z_j - c_j$ 最大。

1. 线性规划-单纯形法（续九）

然而，当我们将 x_j 的数值增加以后，当前的基础可行解就变成为:

$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_j x_j = b' - y_j x_j$，其中 $y_j = B^{-1}a_j$， $b' = B^{-1}b$.

如果 $y_{ij} \le 0$, 那么相应的分量 x_i 就会随着 x_j 的增加而增加，分量 x_i 仍然是非负的。但是如果 $y_{ij} > 0$, 那么 x_i 就会随着 x_j 的增加而减少。为了保证变量是非负的，我们只能增加 x_j 的值使得有一个基础变量 x_r 的值减少到0，亦即

$$\frac{b'_r}{y_{rj}} = \min \left\{ \frac{b'_j}{y_{ij}} \,\middle|\, y_{ij} > 0 \right\}。$$

在非退化情形下，$b'_r > 0$, $x_j = b'_r / y_{rj} > 0$ ，$x_r = 0$。最重要的结果是 $z < z_0$，也就是说目标函数值严格地减少了。

1. 线性规划-单纯形法（续十）

随之产生的两个问题是：

(i) 如果每一个非基变量 x_j 都满足 $z_j - c_j \leq 0$，那么该怎么办呢？此时不需做任何事，当前的基础可行解即是一个最优解。

(ii) 如果所有的分量都不大于0，$y_j \leq 0$，那么又该怎么办呢？此时，也不需要做任何事，所解的线性规划问题不存在有界最优解。

然而要实现上面的算法，还需要考虑如下两个问题：

- 如何求得一个初始的基础可行解呢? (有很多种方法)
- 如何处理退化的情形呢? (有很多种方法)

定理 9. 任给一个非退化的线性规划问题，单纯形方法可以在有限步迭代后终止，且或者输出一个最优的基础可行解，或者确认所给问题不存在有限最优解。

1. 线性规划-单纯形法（续十一）

Dantzig 原来以为这样一种简单的方法可能效率很低：沿着一个棱从一个极点到一个极点的移动，在到达最优点时，可能要花很长时间。他后来发现在几乎所有的情况，寻找问题的解仅仅需要通过约束个数那么多次的移动就可以完成。

Haimovich 定理[1983] 在平均意义下，单纯形法从一个基础可行解到另一个基础可行解的搜索步数不会超过

$\mathbf{Min}\{\, n/2,\ (m-n+1)/2,\ (m+1)/8 \,\}$ 对于 $\max\{\, cx \mid Ax \le b \,\}$ and

$\mathbf{Min}\{\, n/2,\ (m+1)/2,\ (m+n+1)/8 \,\}$ 对于 $\max\{\, cx \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \,\}$

Smale 定理 [1983] 对任意固定的m，和线性规划问题 $\max\{c^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$，单纯形法从一个基础可行解到另一个基础可行解的平均搜索步数不会超过 $O((\log n)^{m^2+m})$。

1. 线性规划-单纯形法（续十二）

Klee 和 **Minty** 将 ***n***-维立方体的一个变形做为一个线性规划问题的可行解区域，证明单纯形算法，在最坏情况下，会搜索到可行解区域的所有 2^n 个极点。

Klee-Minty 定理[1972] 采用**Dantzig** 给出的极点移动策略的单纯形法不是一个多项式时间算法。

一个巨大的挑战： 设计一个极点移动策略使得单纯形法是一个多项式时间算法；或者证明不存在这样的策略。

练习. 设 x 是线性系统， $Ax = b, x \geq 0$，的一个极点。 则存在一个费用向量 c 使得 x 是线性规划 $\min\{ c^T x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$ 的唯一最优解。

1. 线性规划-椭球算法

在1979年春天，**L. G. Khachian** 证明了，求解线性规划的一个算法是多项式时间算法，从而解决了一个长期未解的公开难题。他的工作是基于其他学者研究非线性规划的成果。他所采用的方法与以前处理线性规划的算法完全不同，该方法完全摒弃了利用线性规划的组合结构的套路。

为了讨论和表述简单起见，我们考虑如下三个问题：

线性规划: 求解最小值问题 $\min\{ \boldsymbol{c}^T\mathbf{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \}$; (**LP**)

线性不等式组: 求解不等式组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$; (**LI**)

线性严格不等式组: 求解不等式组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<\boldsymbol{b}$. (**LSI**)

定理 11. 若存在求解线性严格不等式组 **LSI** 的多项式时间算法，则存在求解线性规划 **LP** 的多项式时间算法。

1. 线性规划-椭球算法 (续一)

设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是线性规划的一个基础解，另令

$$\alpha = \max\{|a_{ij}| \mid i, j\},\quad \beta = \max\{|b_j| \mid j = 1, \ldots, m\}。$$

则有 $|x_j| \le m!\alpha^{m-1}\beta$。这对非基变量也成立，因为 $x_j = 0$。对于基变量，x_j 是矩阵B^{-1} 中元素与向量b 中元素相乘的 m 项之和。根据线性规划问题输入的整数性假设，分子至少是1，而行列式为矩阵 A 的 $m-1$个元素的 $(m-1)!$ 项乘积的和。

再记 $L = mn + \lceil \log |P| \rceil$，其中 P 是A, b 和 c 中非0 整数的乘积。L 称为线性规划 LP 问题的输入规模。

定理 5. 线性规划 LP 的所有基础可行解都是有理数向量，且它们分量和分母的绝对值都不超过 2^L。

1. 线性规划-椭球算法(续二)

引理 6. 假设线性规划LP的两个基础可行解 x 和 y 满足 $k2^{-2L} < c^Tx,\ c^Ty \le (k+1)2^{-2L}$ 其中 k 是一个整数，则 $c^Tx=c^Ty$.

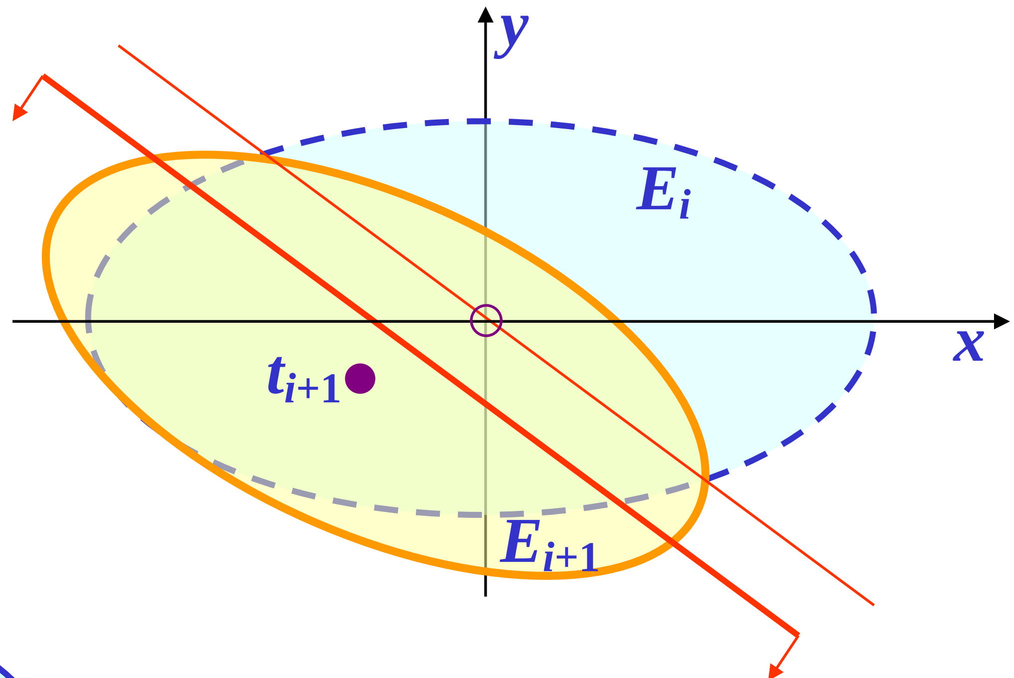
引理 7. 线性规划 LP 存在多项式时间算法当且仅当线性不等式组 LI 存在多项式时间算法。

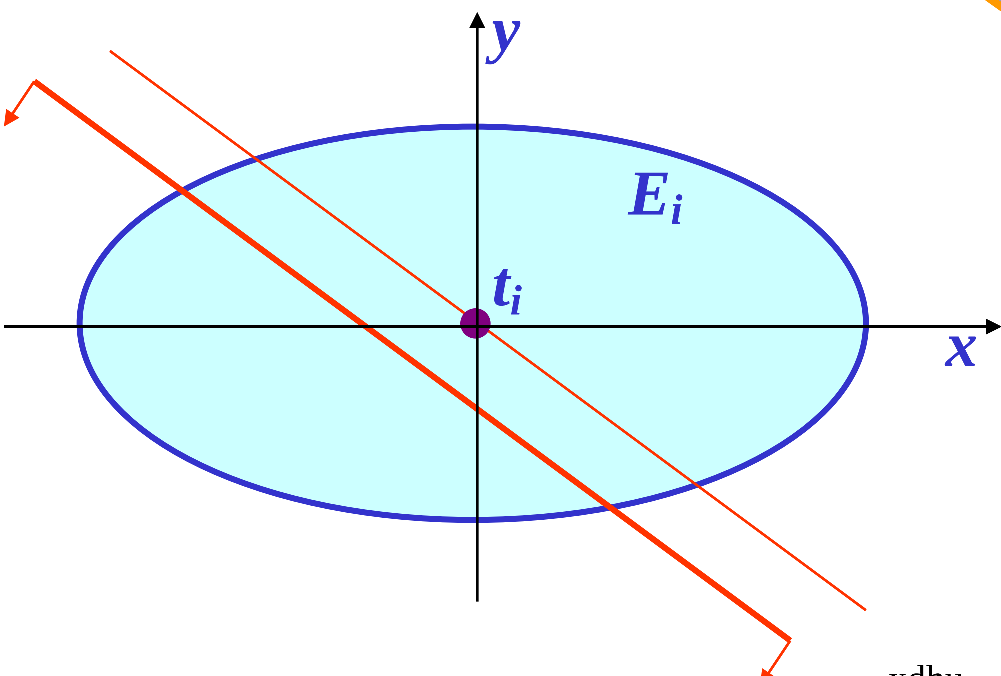
引理 8. 线性不等式组 LI $Ax \le b$ 有解当且仅当严格线性不等式组 LSI $Ax < b+\varepsilon$ 有解，其中 $\varepsilon = 2^{-2L}$。

引理 9. 如果存在求解严格线性不等式组 LSI 的多项式时间算法，则存在求解线性不等式组 LI 的多项式时间算法。

1. 线性规划-椭球算法(续三)

求解严格不等式组 LSI 的迭代算法的主要思想是：如果有一个解，那么让椭球始终包含一个解。





在每一次迭代步骤中，用一个更小的椭球替代现有的椭球，而且新的小椭球同意包含一个解（若解存在）。

1. 线性规划-椭球算法(续四)

进行足够多次这样的迭代步骤以后，将椭球的体积逐渐地缩小，我们或者发现一个解，或者确认不存在解。

引理 10. 椭球算法在进行了i 次迭代以后，椭球 E_i 的体积为 $\mathrm{Vol}(E_i) < 2^{-1/(n+1)}\mathrm{Vol}(E_{i-1})$，其中 $i > 2$.

引理 11. 如果输入规模为L的线性严格不等式组LSI 有解，则位于球体 $\|x\| \le n2^L$ 的解的体积至少是 $2^{-(n+2)L}$。

Theorem 12. 经过 $32n(n+1)L$ 次迭代步骤，修改的椭球算法或者收敛到一个解，或者确认严格线性不等式组无解。

1. 线性规划-对偶定理

每一个 (原始) 线性规划问题都有一个与之紧密相连的 (对偶) 线性规划问题，它有一些非常重要的性质。求对偶问题可以帮助我们求解原始问题的解，对偶问题的解有许多非常重要的性质，这些性质为我们提供了原始问题最优解的一些非常有用的性质。

原始问题 Min $c^T x$ s.t. $Ax = b$, $x \geq 0$	标准型	**对偶问题** Max $b^T w$ s.t. $A^T w \leq c$, w 无限制
原始问题 Min $c^T x$ s.t. $Ax \geq b$, $x \geq 0$	规范型	**对偶问题** Max $b^T w$ s.t. $A^T w \leq c$, $w \geq 0$

1. 线性规划-对偶定理(续一)

我们下面给出原始问题与对偶问题之间的关系。

原始问题

Min $\quad c^T x$

s.t. $\quad a_i^T x = b_i$

$a_j^T x \geq b_j$

$x_k \geq 0$

x_l 无限制

对偶问题

Max $\quad b^T w$

s.t. $\quad w_i$ 无限制

$w_j \geq 0$

$wA_k \leq c_k$

$wA_l = c_l$

其中 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = A_{m\times n} = (A_1\ A_2\ \ldots\ A_k\ \ldots\ A_n)$

练习 对偶问题的对偶问题是原始问题。

1. 线性规划-对偶定理(续二)

定理 10. 若原始问题有最优解，则它的对偶问题也有最优解，且两个最优解的目标函数值相等。

证明 (练习) 设 x 和 w 分别是原始问题标准型和其对偶问题的可行解。则有$c^T x \geq w^T A x = w^T b$。这说明两个问题都不可能有无界的解。 由单纯形算法可知，原始问题有一个最优解 x 满足 $c^T x = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b$。因此对偶问题有一个最优解$c_B^T B^{-1}$（为什么？单纯形算法的最优解判定条件）。

原始＼对偶	有限最优	无界	无解
有限最优	♠	×	×
无界	×	×	♣
无解	×	♣	♥

1. 线性规划-对偶定理(续三)

互补松弛定理 向量x 和 w 分别是线性规划规范型的原始最优解和对偶最优解当且仅当

$u_i \equiv w_i(a_i^T x - b_i) = 0$, 所有 i； $v_j \equiv (c_j - w^T a_j)\, x_j = 0$, 所有$j$ 。

原始问题		规范型	对偶问题	
	Min $c^T x$			Max $w^T b$
	s.t. $Ax \ge b$,			s.t. $w^T A \le c$,
	$x \ge 0$			$w \ge 0$

上述定理表明，当向量 x 和 w 分别是线性规划规范型的原始最优解和对偶最优解时，若对偶问题中的约束不等式不取等号，则规范型中原始问题相对应的变量一定取 0。对称地有，若非负变量是严格大于 0 的，则相对应的 约束不等式一定取等号。

1. 线性规划-对偶定理(续四)

互补松弛定理 向量x 和 w 分别是线性规划规范型的原始最优解和对偶最优解当且仅当

$$u_i \equiv w_i\,(a_i^T x - b_i) = 0,\ \text{所有 } i;\quad v_j \equiv (c_j - w^T a_j)\, x_j = 0,\ \text{所有} j\ 。$$

证明 (练习)：根据对偶性，我们有 $u_i \geq 0$ 和$v_j \geq 0$，对所有的指标 i, j。若令 $u = \sum u_i \geq 0$ 和 $v = \sum v_j \geq 0$。则有

$u = 0$ 且 $v = 0$ 当且仅当定理中的条件成立。

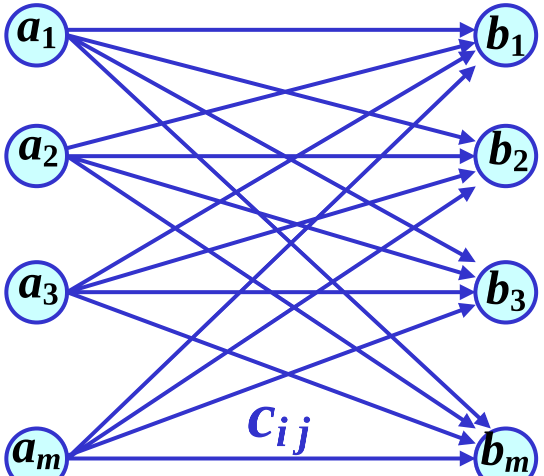
下面仅需要验证 $u + v = c^T x - w^T b$。因为条件成立当且仅当 $u + v = 0$，或者等价地有 $c^T x = w^T b$。

1. 线性规划-运输问题

运输问题是一大类特殊的线性规划问题。这类问题极其推广形式，**网络流问题**，都有一些特殊的结构，因而

- 可以设计出更简单和有效的求解算法；
- 可以帮助我们从直观上更容易理解求解线性规划的技巧，特别是单纯形法。

假设我们有 m 个源点，在每个源点处有 a_i 个单位的（同一种）货物，另有n 个终点，在每一个终点处，需要 b_j 个单位的货物。从每一个源点 i 到每一个终点 j 都有一条边相连，其权为 c_{ij}。运输问题是求将货物从源点运到终点的一个运输方案使其费用最小。



1. 线性规划-运输问题（续一）

我们用变量 x_{ij} 表示经过边 (i, j) 的货物流量。假设在源点处的货物供给量等于终点处货物的需求量。

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min}\ & c_{11}x_{11}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+\ldots+c_{mn}x_{mn} \\
\textbf{s.t.}\ & x_{11}+\ \ldots\ +x_{1n} = a_1 \\
& x_{21}+\ \ldots\ +x_{2n} = a_2 \\
& \ldots\ldots \\
& x_{m1}+\ldots+x_{mn} = a_m \\
& x_{11} + x_{21} + x_{m1} = b_1 \\
& \ldots\ldots \\
& x_{1n} + x_{2n} + x_{mn} = b_n
\end{aligned}
$$

练习 证明约束矩阵是全幺模的（亦即，矩阵的每一个行数与列数相等的子阵的行列式的值等于 **-1, 0** 或者 **1**）。

1. 线性规划-运输问题（续二）

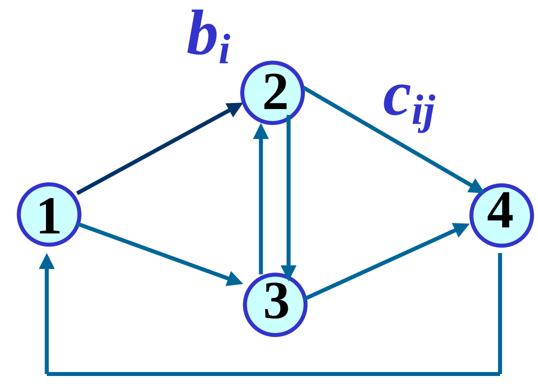
运输问题的一个重要的特殊情形称为**指派问题**。假定有 m 个工人和 m 项任务。若指派工人 i 去完成任务 j，其产生的费用为（工资）c_{ij}。我们希望付给这些工人尽可能少的工资以完成这些任务。若一个基础可行解 $x_{ij}=1$，则表示指派工人 i 去完成任务 j, $x_{ij}=0$ 表示不指派工人 i 去完成任务 j。通过松弛变量 x_{ij} 的整数性约束条件，该问题可以化成**线性规划问题**的标准型。

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & \textstyle\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t. } & \textstyle\sum_j x_{ij} = 1, & i=1,\ldots,m; \\
& \textstyle\sum_i x_{ij} = 1, & j=1,\ldots,m; \\
& x_{ij} = 1 \text{ 或 } 0, & i, j=1,\ldots,m.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Min } & \textstyle\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t. } & \textstyle\sum_j x_{ij} = 1, & i=1,\ldots,m; \\
& \textstyle\sum_i x_{ij} = 1, & j=1,\ldots,m; \\
& x_{ij} \geq 0, & i, j=1,\ldots,m.
\end{aligned}
$$

1. 线性规划-最小费用流

一个有向网络 G 是由 n 个节点及 m 条连接两个节点的弧构成。



每一个节点 i 都赋一个权值 b_i，它表示在该节点处有货物可供给若 $b_i > 0$ （称为源点）或者需要货物若 $b_i < 0$ （称为汇点）。当 $b_i = 0$ 时，该节点处既不需要货物也不能提供货物（称为中间节点）。每一条弧 (i, j) 都赋有一个权重 c_{ij}，它表示通过这条弧的运输货物的单位成本。

1. 线性规划-最小费用流（续一）

最小费用流问题是求将已有的货物供给运送到所需的网络节点处使得所需费用最小。我们不妨假定，网络中货物的供给量与需求量是相等的，亦即, $\sum_i b_i = 0$。令 $x_{ij} \geq 0$ 为经弧 $(i,\ j)$ 的货物运送量。

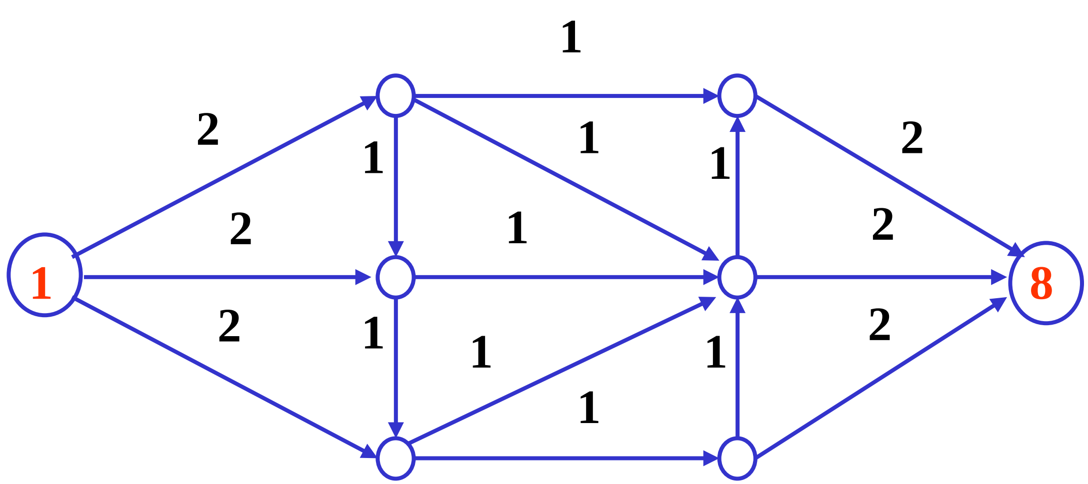
$$\text{Min} \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$
$$x_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n。$$

我们称上述等式约束为**流守恒等式**，它表示在网络中既不会产生新的流量，已有的流量也不会消失。

练习. 如何处理 $\sum_i b_i \neq 0$ 的情形呢？

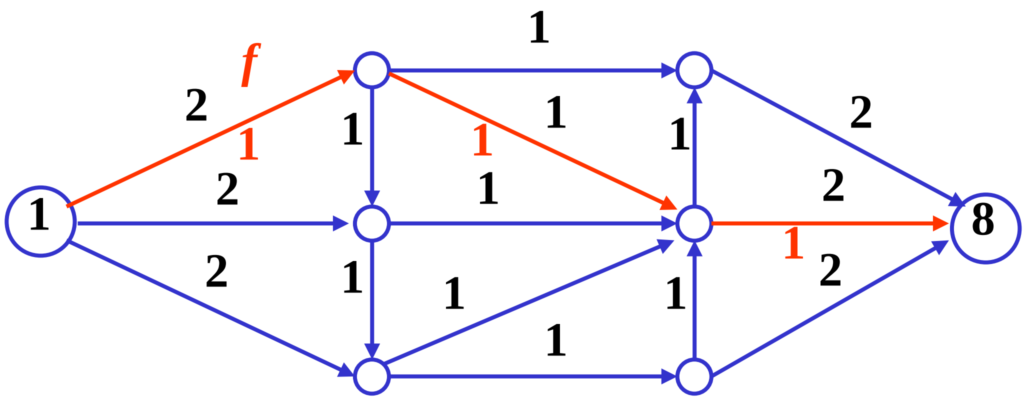
1. 线性规划-最大流

考虑一个有n 个节点和 m 条弧的网络。假设网络中有一个单商品（货物）流。每一条弧 (i, j) 有一个流量的上界 b_{ij}（称为**容量**）。**最大流问题**是求从节点 1 到节点 n 的具有最大流量的货物流，这里并不涉及费用的问题。我们用$x_{ij} \geq 0$ 表示流经弧 (i, j) 的流量。注意，令所有$x_{ij} = 0$，即可得到该问题的一个流量 $f = 0$ 的平凡可行解。



左图给出了**最大流问题**的一个实例。

1. 线性规划-最大流（续一）



左图例给出了一个可行流。它的最大流又是什么呢？

Max f

s.t. $\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} - f = 0, \qquad i=1;$

$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} + f = 0, \qquad i=n;$

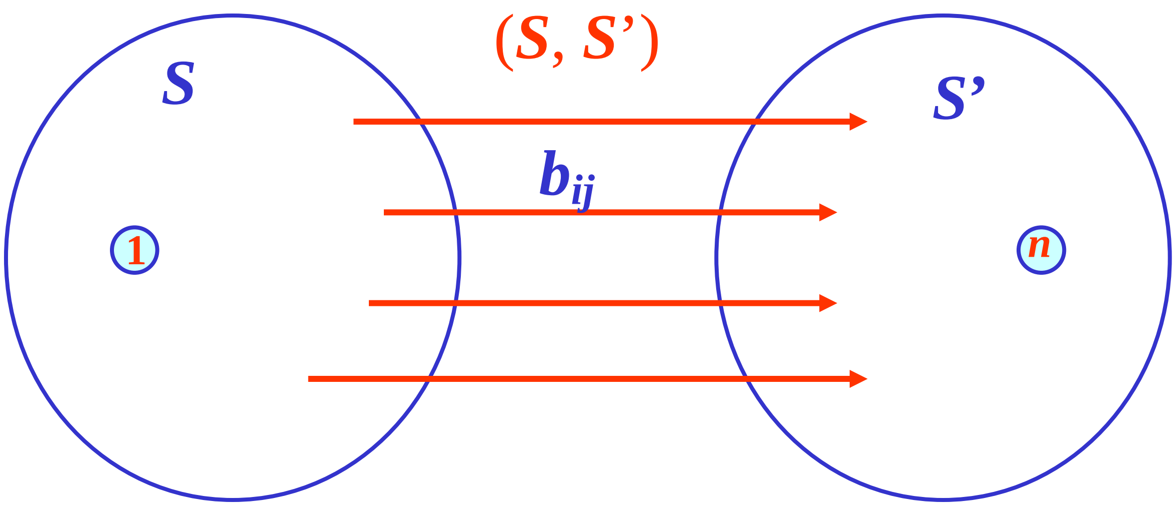
$\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0, \qquad i \neq 1$ 或者 n;

$x_{ij} \leq b_{ij}, \qquad i, j=1, \ldots, n$。

$0 \leq x_{ij}, \qquad i, j=1, \ldots, n$。

1. 线性规划-最大流（续二）

称节点子集合 S 是一个将节点 n 与节点 1 分离的**割集**若 S 包含节点 1 但是不包含节点 n。另用 $(S, S')=\{(i, j) \mid i\in S, j\in S'\}$ 表示割集，其**容量**定义为 $c(S, S') \equiv \sum\{ b_{ij} \mid (i, j) \in (S, S') \}$ 。



注意，任意一个货物流都必须流经任意一个割集的弧。因而很容易地知道，任意一个货物流的流量都不可能超过任意一个割集的容量。

1. 线性规划-最大流（续三）

给前n个约束中的每一个关联一个变量 w_i，每一个变量对应一个流守恒等式；另给 n 个容量约束中的每一个关联变量u_{ij}。即得**最大流问题**的对偶问题：

(对偶问题) $\quad \text{Min} \sum u_{ij}\, b_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & w_i - w_j + u_{ij} \ge 0, && \text{对所有边 } (i,j)\in E;\\
& -w_1 + w_n \ge 1, && \\
& u_{ij} \ge 0, && \text{对所有边 } (i,j)\in E\ 。\\
& w_i \gtrless 0, &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{Max}\ f\\
\text{s.t.}\quad & \textstyle\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} - f = 0, && i=1\ ;\\
& \textstyle\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} + f = 0, && i=n\ ;\\
& \textstyle\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = 0, && i \neq 1 \text{ 或者 } n\ ;\\
& x_{ij} \le b_{ij}, && i, j=1,\ldots, n\ ;\\
& 0 \le x_{ij}, && i, j=1,\ldots, n\ 。
\end{aligned}
$$

1. 线性规划-最大流（续四）

引理 12. 每一个割可以确定一个可行流其割值 $c(S, S')$ 等于最大流问题的对偶解：

$u_{ij}=1$, 当 $i\in S$ 且 $j\in S'$, 否则 0, 且 $w_i=0$, $i\in S$, 否则1。

证明 (练习)：(i) 验证可行性。因为节点 i 和 j 分别可属于 S 或者 S'，所以一共有四种情形需要考虑。在每一种情形中，第一个不等式是很容易验证的，且不等式取严格不等号当且仅当 $i\in S$ 且 $j\in S'$。此外， $w_1=0$ 且 $w_n=0$ 因为 $1\in S$ 而 $n\in S'$，从而验证了最后一个不等式。

(ii) 验证流量和割值。对偶可行解的目标函数值为

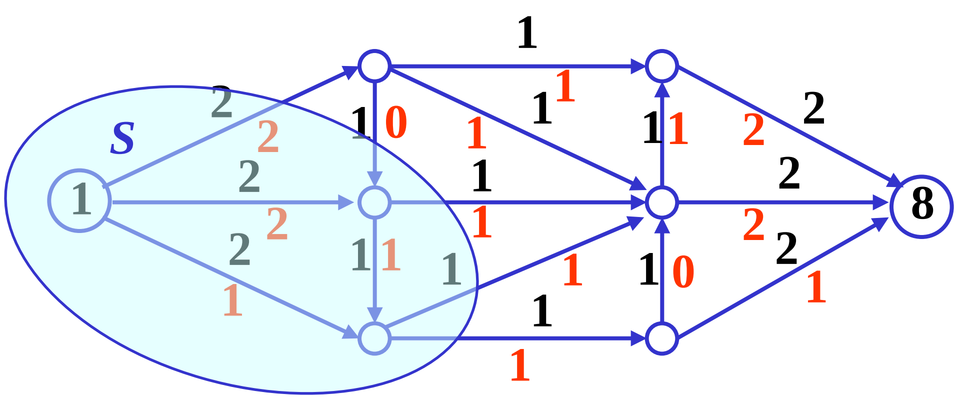
$$\sum_{(i,j)\in E} u_{ij} b_{ij} = \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ i\in S \text{ 且 } j\in S'}} b_{ij} = c(S, S')$$

1. 线性规划-最大流（续五）

最大流最小割定理 任意一个可行流的流量不会超过其容量 $c(S, S')$。最大流的流量与最小割的容量相等，且可行流 f 与割 (S, S') 分别是最优的当且仅当

$x_{ij} = 0,$　　$(i, j)\in E$ 满足 $i\in S'$ 且 $j\in S$;

$x_{ij} = b_{ij},$　　$(i, j)\in E$ 满足 $i\in S$ 且 $j\in S'$。



在该例子中，最大流量为 **5**。最小割值为 **5**。注意，割集中每一条**向前弧**上的流量是饱和的，而每一条**向后弧**上流量为零。

1. 线性规划-最大流（续六）

证明 (练习)：首先回忆一下**定理7-8**（对偶和互补松弛性）。等式表示了互补松弛条件，并可表述如下：如果 $i \in S'$ 且 $j \in S$，那么对偶不等式就是严格的：$w_i - w_j + u_{ij} = 1 - 0 + 0 > 0$。因而，相应的变量 x_{ij} 一定取 0。类似地，若存在边 $(i, j) \in E$ 使得 $i \in S$ 且 $j \in S'$，则有 $u_{ji} = 1$。因此，相应的约束不等式一定是严格的，亦即 $x_{ij} \leq b_{ij}$。

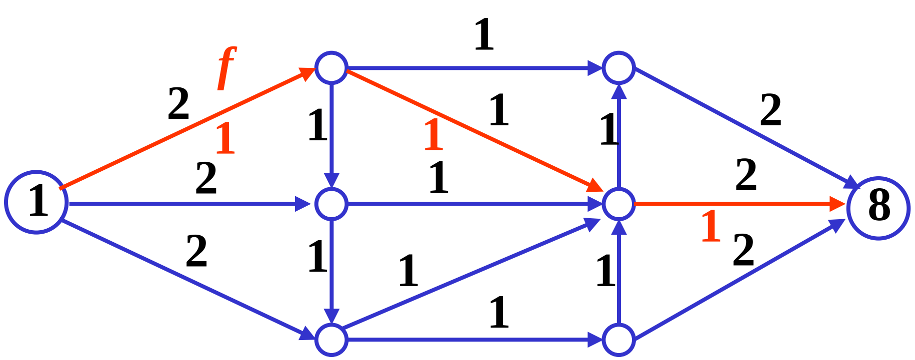
Ford-Fulkerson 标号算法的基本思想如下：搜索一条从节点1到节点 n 的路，流经其上的流量可以增加。当找不到这样的一条路时，互补松弛条件就满足了， 算法也就找到了一个最优解。

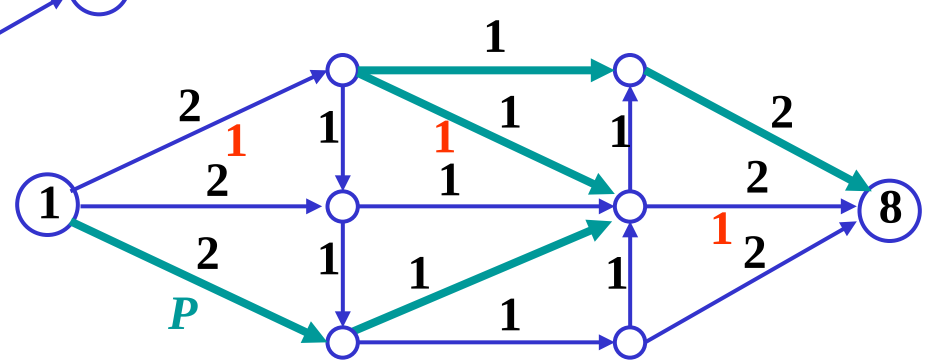
1. 线性规划-最大流（续七）

给定一个可行流 ***f***, 设 ***P*** 是由有向图 ***G*** 导出的无向图中的一条从节点 **1** 到节点 ***n*** 的路。称 ***P*** 为一条增广路如果它满足如下条件：

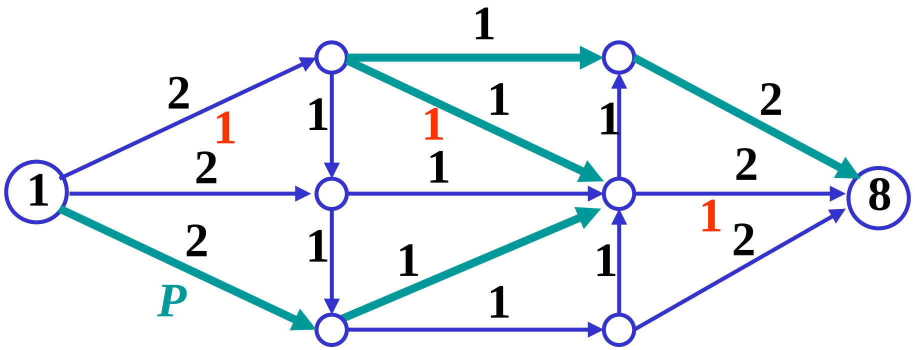
(i) $x_{ij} < b_{ij}$，对 ***P*** 上每一条前行弧 (i, j) (非饱和)；

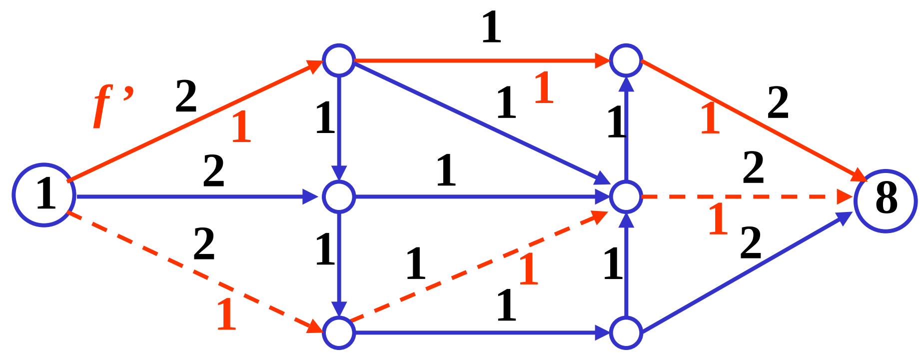
(ii) $x_{ji} > 0$， 对 ***P*** 上每一条后退弧 (i, j)。



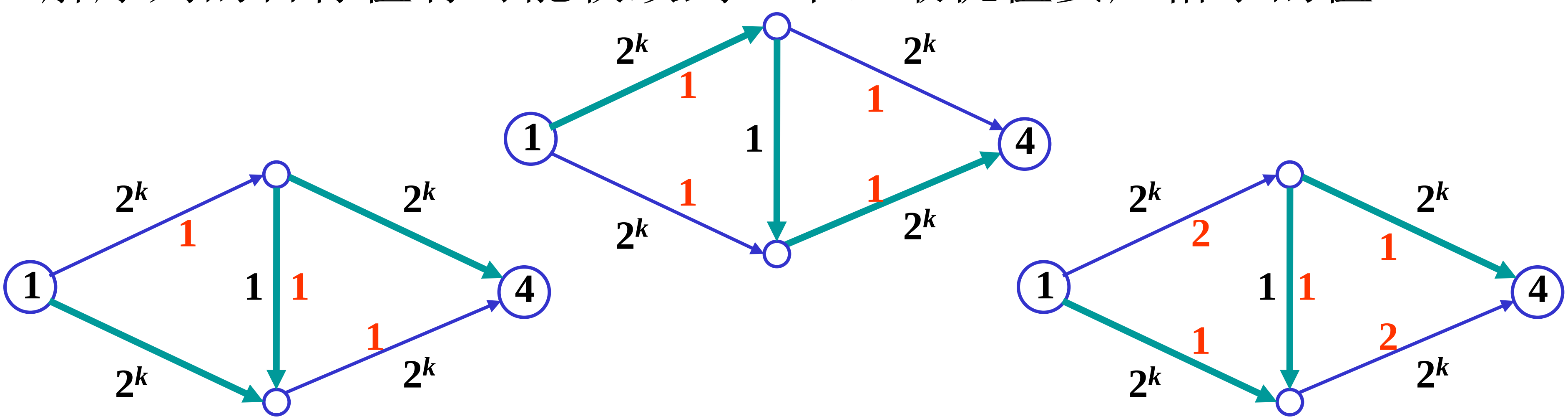


1. 线性规划-最大流（续八）





可以证明，若**Ford-Fulkerson 标号算法**终止，则其所得解即为一个最优解。然而，当容量 b_{ij} 为有理数时，该算法有可能无法终止。实际上，还可能出现更糟糕的情况，算法生成的解序列的目标值有可能收敛到一个比最优值要严格小的值。



1. 线性规划-目标规划

假设某工厂生产两种产品，受到原材料供应和设备工时的限制。在单件利润等有关数据已知的条件下，要求制定一个获利最大的生产计划。具体数据如下：

产　品	I	II	限量
原材料 (公斤/件)	**2**	**1**	**11**
设备工时 (小时/件)	**1**	**2**	**10**
利润 (元/件)	**8**	**10**	

问该工厂应制造两种产品各多少件，才能获取利润为最大？

1. 线性规划-目标规划（续一）

设产品I和产品II的产量分别为 x_1 和 x_2，其线性规划为：

$$\max\ 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{st.}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

最优值为 **62**

最优解为 $x_1=4$，$x_2=3$

工厂在实际决策中，还需要考虑一系列其他因素：

1. 产品I的产量不超过产品II的产量；
2. 超限量使用原材料，需要高价采购，成本增加；
3. 应尽可能利用设备，但不希望加班；
4. 应尽可能达到或超过计划利润56元

1. 线性规划-目标规划（续二）

目标规划的数学模型主要涉及如下基本概念：

- 偏差变量

  对决策变量 x_i，引入正、负偏差变量 d_i^+ 和 d_i^-，

  分别表示决策值超过或不足目标值的部分

- 绝对约束（硬约束）和目标约束（软约束）
- 优先因子和权系数（具有主观性）

  一个目标规划问题若有若干个目标时，为了区分主次不同，可赋予优先因子 $p_i >> p_{i+1}$，并赋予相应权重 w_i^+ 和 w_i^-

- 目标函数

  + 恰好达到目标值 $\min f(d^+ + d^-)$
  + 不超过目标值，但允许不足目标值 $\min f(d^+)$
  + 不低于目标值，但允许超过目标值 $\min f(d^-)$

1. 线性规划-目标规划（续三）

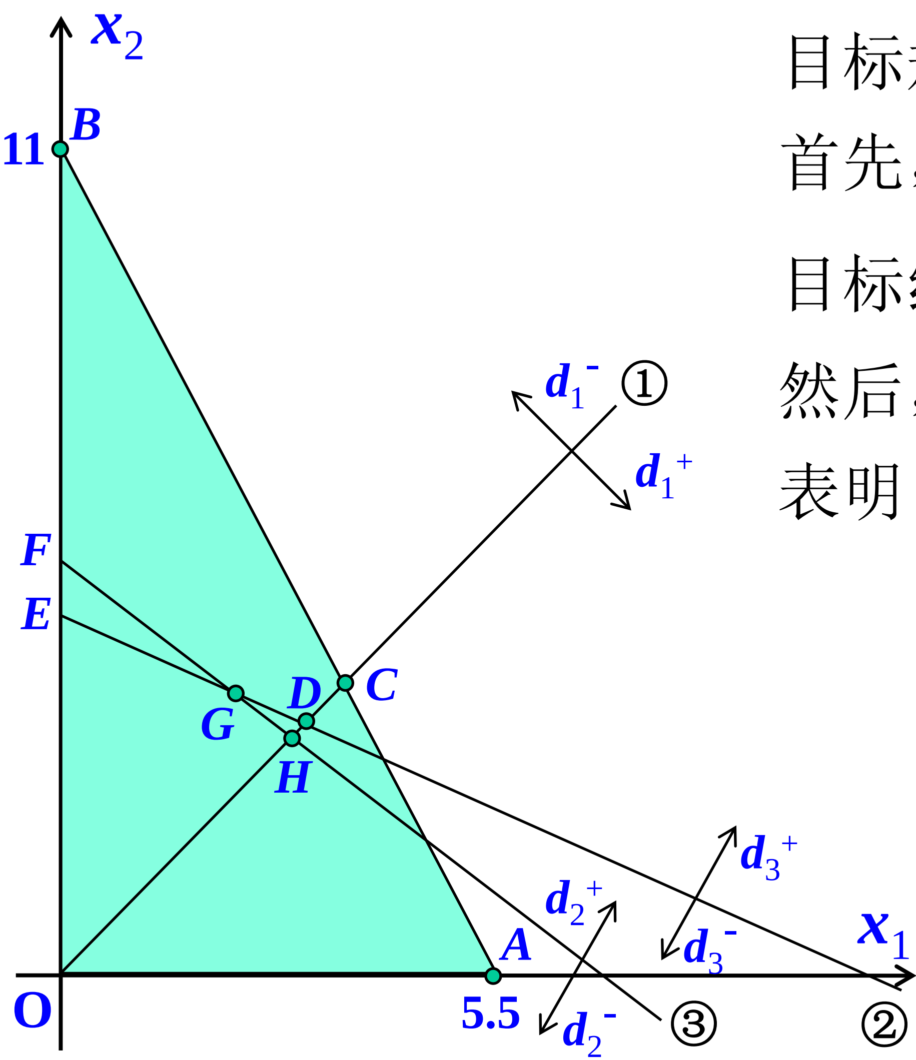
$$\min \; p_1 d_1^- + p_2 (d_2^- + d_2^+) + p_3 d_3^-$$

$$\text{st.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & ① \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & ② \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & ③ \\ x_1, \; x_2, \; d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

最优值为 **0**，其对应的最优解为 $x_1 = 2$，$x_2 = 4$，

$d_1^- = 0$， $d_1^+ = 2$， $d_2^- = 0$， $d_2^+ = 0$， $d_3^- = 0$， $d_3^+ = 0$

注意：目标规划问题求解时，把绝对约束作最高优先级考虑。上例中可先后次序恰好满足 $d_1^- = 0$，$d_2^- + d_2^+ = 0$，$d_3^- = 0$。一般情况并非如此，还可出现非可行解。故通常称目标优化问题的最优解为满意解。



目标规划的图解法：

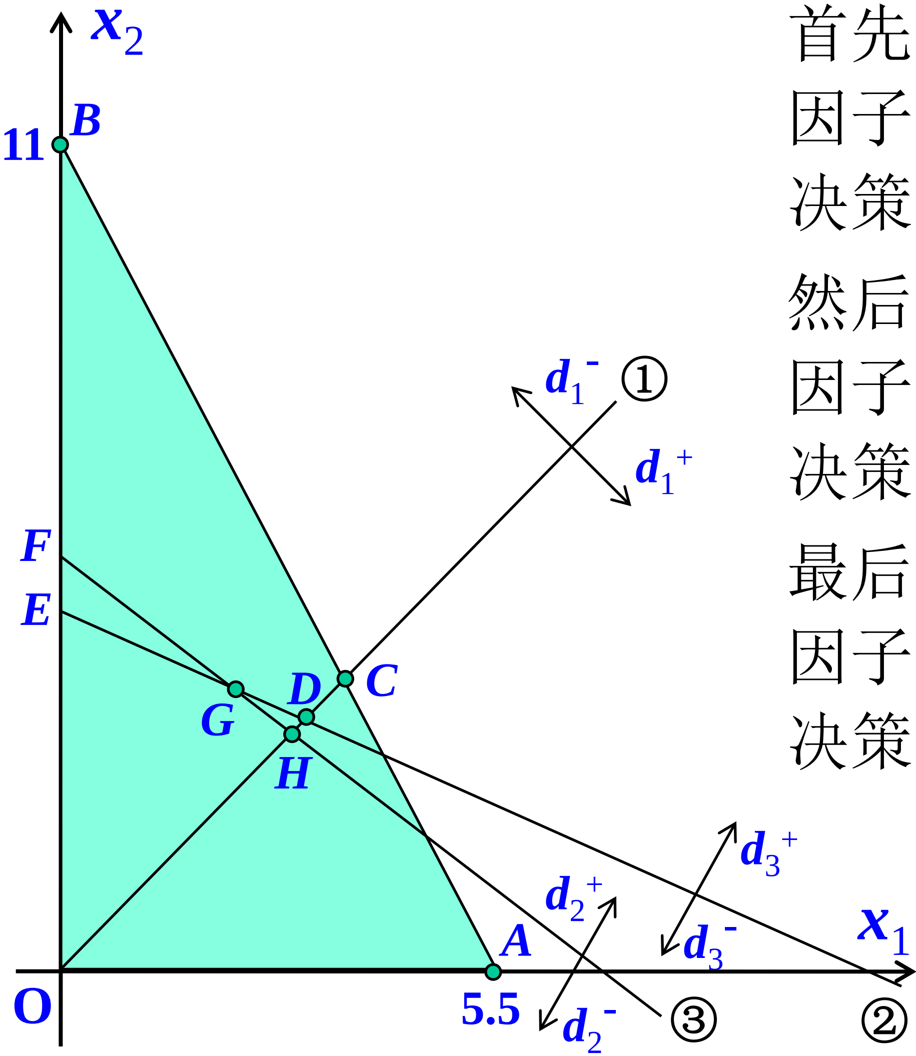
首先，画出各个约束条件，

目标约束条件，令 $d_i^-, d_i^+ = 0$；

然后，在相应直线旁标上 d_i^-, d_i^+，

表明目标约束可以沿该方向平移。

1. 线性规划-目标规划（续五）



首先，考虑如何实现具有 p_1 优先因子的目标：要满足 $d_1^+ = 0$，决策变量需要在△OBC中。

然后，考虑如何实现具有 p_2 优先因子的目标：要满足 $d_2^-, d_2^+ = 0$，决策变量需要在线段ED上。

最后，考虑如何实现具有 p_3 优先因子的目标：要满足 $d_3^- = 0$，决策变量需要在线段GD上。

G的坐标是 (2, 4)，

D的坐标是 (10/3, 10/3)。

G和D的凸组合都是该目标规划的解。

1. 线性规划-总结

线性规划可以视为伟大的革命性进展中的一部分，它赋予人类一种表述一般目标的能力，并在面对充满巨大复杂性的实际情况下，为能“最好”地实现其目标而给出了一条详细的决策方案。我们要达到这些目标所取的工具是：将现实世界中的问题用数学术语公式化（模型），解决模型所需的技巧（算法），执行算法的每一步所需的动力（计算机和软件）。

如果让我总结我在线性规划方面早期或许是最重要的贡献，那么我会说有三个：

1.认识到多数的实际计划关系都可以用一组线性不等式来刻画
2.用一个目标函数作为选取一个较好计划而设定的一基本规则
3.发明了单纯形法，使得有关经济的不太复杂的线性规划模型变成了对大而复杂系统进行实际规划的一个基本工具

1. 线性规划-总结（续一）

这种能力开始于二战结束后不久的1947年，随着计算能力的突飞猛进而同步发展。由于其在决策科学中的发展太迅猛了，因此很少有人能记住那些开创这一工作的伟大先驱者们。他们当中的几位是：

J. V. Neumann
L. Kantorovich
W. Leontief
T. Koopmans

前两位是著名数学家，而后三位曾获得了诺贝尔经济学奖(**K. J. Arrow, P. A. Samuelson, H. A. Simon**)。

思考题： Dantzig 本人为何没获诺贝尔经济学奖呢？

1. 线性规划-总结（续二）

Von Neumann Theory Prize
in Operational Research in 1975;

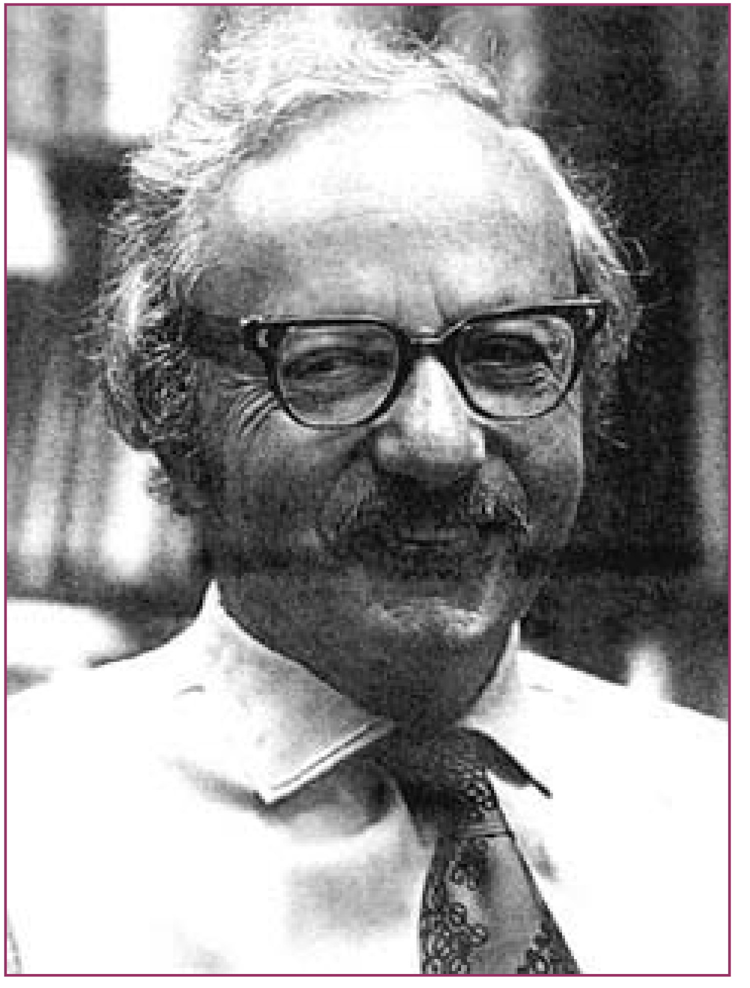
The National Medal of Science
of USA in 1976;

National Academy of Sciences Award
of USA in 1977;

Harvey Prize
in Science and Technology in 1985;

Silver Medal
from the OR Society of Britain in 1986;

Special Recognition Award
from Math Programming Society in 1994.



1. 线性规划-总结（续三）

自1947年由我首次提出（与军事计划活动相联系）线性规划这一概念以来，线性规划及其推广得到了广泛的应用。在学术界，决策科学家（运筹学家和管理学家），数值分析学家，数学家和经济学家就这个专题出版了几百部著作并发表了无以记数的论文。

在1950年代早期，后来被我们统称为数学规划的许多领域也已开始出现了。线性规划在其迅速发展的过程中扮演了一个核心角色。我将就其中的每一个略加叙述。

非线性规划 (1951)
网络流理论 (1950)
随机规划 (1955)
整数规划 (1958)
计算复杂性 (1970)

1. 线性规划-总结（续四）

- **J V Neumann Theory Prize Winners**
  (INFORMS, since 1975; **Yinyu Ye**: 2009)
- **The Dantzig Prize**
  (Math Programming Society, since 1979; **Jong-Shi Pang**: 2003)
- **The Fulkerson Prize**
  (Math Programming Society, since 1979)
- **The Beale-Orchard-Hays Prize**
  (Math Programming Society, since 1985)
- **The Tucker Prize**
  (Math Programming Society, since 1988)
- **George B. Dantzig Dissertation Award**
  (INFORMS, since 1994)

1. 线性规划-复习题

练习： 求出下述线性规划问题的所有最优解。

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z &= 10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \\
\textbf{s.t. } \quad & 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \le 9, \\
& 5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8, \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

练习： 考虑下述线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max } z &= x_1 - x_2 + x_3 \\
\textbf{s.t. } \quad & x_1 - x_3 \ge 4, \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

应用对偶理论证明该问题无最优解。