第九章 拟阵与组合最优化

9.2 拟阵与组合最优化问题

拟阵有一个最为基本的优化性质：极大独立集一定是最大独立集合——表示为拟阵的 Greedy 算法。

记号：

设 $M = M\ (E, \mathscr{I})$ 是拟阵

（1） R^E 表示定义在 E 上的全体实函数（若 $|E| = m$， R^E 可以看作 R^m）。

(2) 每个映射 $c \in R^E$ 称为拟阵的一个权函数。

(3) 对于子集 $X \subseteq E$，记 $c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$，约定 $c(\phi) = 0$。

（4）对于每个子集 $J \subseteq E$，令 x_J 为 J 的特征函数，即

$$x_J(E) = \begin{cases} 1, e \in J \\ 0, e \notin J \end{cases}$$

显然 $c(J) = c^T x_J$。

（5）若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$， 且 $x_i \le y_i (i = 1,2,\cdots,n)$， 则记为 $x \le y$。

一、Greedy 算法和最大权独立集问题

定义 9.6 对于给定权函数 c 的拟阵 M，拟阵的最大权独立集问题是：求一个确定的子集 $J \subseteq E(M)$， 使得 $J \in \mathscr{I}(M)$ 并且 $c(J) = \max\{c(J): I \in \mathscr{I}(M)\}$。

拟阵最大权独立集的性质启发了下面的 Greedy 算法（Greedy Algorithm）。

拟阵最大权独立集的 Greedy 算法：

给定 E 上的拟阵 M 和 E 上的实值函数 c， 以及一个查询时间为 $O(|E|)$ 的权独立集查询子程序，Greedy 算法步骤如下:

（i）对于 $E(M)$ 中的元素重新标号，使得 $E(M) = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 满足

$$c(e_1) \ge c(e_2) \ge \cdots \ge c(e_m)$$

（ii）置 $J := \phi$

（iii）对 $i = 1$ 到 m， 若 $J \bigcup \{e_i\} \in \mathscr{I}(M)$， 则置 $J := J \bigcup \{e_i\}$

定理 9.16 拟阵最大权独立集的 Greedy 算法得到拟阵最大权独立集问题的最

优解。若对任意的$x, y \in E(M)$，当$x \neq y$时总有$c(x) \neq c(y)$，则算法得到问题的唯一最优解。
证明：反证法。

例 9.10：MWF（最大森林问题）

$G=(V,E), \forall e \in E, w(e) \geq 0$。

问题：求G的权重最大的一个森林（G的无圈图）。

子集系统：$M=(E,\mathscr{I})$是一个拟阵

其中$\mathscr{I}$：E中所有的森林——无圈图的集合

组合优化问题：求$\mathscr{I}$中权重最大者

Greedy 算法能够得到问题的最优解

例 9.11： 设E是一个有限集合，$\forall e \in E$，定义$w(e) \geq 0$ Π是E的一个划分，即$\Pi=\{E_1, E_2, \cdots, E_p\}$为 E 的不相交子集的集合，并且覆盖 E 。定义子集系统$M_\Pi=(E,\mathscr{I})$

其中E的一个子集I是独立的（$I \in \mathscr{I}$）$\Leftrightarrow$ I中任何两个元素不在Π的同一个集合里，即$|I \cap E_j| \leq 1 (j=1,2,\cdots,p)$。

子集系统$M_\Pi=(E,\mathscr{I})$是一个拟阵——**称为划分拟阵**

组合优化问题：求$\mathscr{I}$中权重最大者

Greedy 算法能够得到问题的最优解

例 9.12： $G=(V,A)$， $\forall a \in A$，定义$w(a) \geq 0$。

问题：找出A的一个最大权的子集B，使得B任何两条弧都没有公共终点。

子集系统：$(A,\mathscr{B})$是一个拟阵

其中$B \subseteq A$， $B \in \mathscr{B}$ $\Leftrightarrow$ B中任何两条弧都没有公共终点

组合优化问题：求$\mathscr{B}$中权重最大者

Greedy 算法能够得到问题的最优解

注：$B \subseteq A$，$B \in \mathscr{B}$ $\Leftrightarrow$ B中任何两条弧都没有公共终点，等价于把弧集合A进行划分，使得指向同一个节点v_j的弧之集合定义为E_j。因此，这个子集系统

是一个划分拟阵 M_{Π}，并称其为**有向图 $G=(V,A)$ 的入弧划分矩阵**。当然也可以等定义**有向图 $G=(V,A)$ 的出弧划分矩阵。**

例 9.13：$G=(V,E),\forall e\in E,w(e)\geq 0$

子集系统：$M=(E,\mathscr{I})$

其中 $\mathscr{I}$：$I\subseteq E$，$I\in\mathscr{I}\Leftrightarrow I$ 是一些不交路之并集

组合优化问题：求 $\mathscr{I}$ 中权重最大者

关于子集系统 $(E,\mathscr{I})$ 的上述组合优化问题，是一个变了形的 TSP 问题，TSP 是一个环游，而此处为路，与 TSP 问题等价

它不是一个拟阵

Greedy 算法不能得到问题的最优解

二、两个拟阵的交

二部图的匹配问题

$B=(V,U,E),\forall e\in E,w(e)\geq 0$

问题：求 B 的最大匹配

$M=(E,\mathscr{M})$

$\mathscr{M}$：E 中所有的匹配（$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的一些子集组成的集合）

组合优化问题：求 $\mathscr{I}$ 中权重最大者

算法：不能用 Greedy 算法

所以，$M=(E,\mathscr{M})$ 不是一个拟阵。但是，$\mathscr{M}$ 有比较好的性质，它是两个拟阵的交。即：

$\mathscr{M}$ 是两个拟阵 $M=(E,\mathscr{F})$ 和 $N=(E,\mathscr{K})$ 的公共独立子集的集合，即 $\mathscr{M}=\mathscr{F}\bigcap\mathscr{K}$，其中 M 和 N 都是划分拟阵。

M 是 $B_1=(V,E)$ 的划分拟阵 $M_{\Pi_V}=(E,\mathscr{F}_V)$，其中 $E_{vj}\in\Pi_V\Leftrightarrow E_{vj}$ 是 V 中第 v_j 个节点所关联的所有边的集合；

N 是 $B_2=(U,E)$ 的划分拟阵 $M_{\Pi_U}=(E,\mathscr{F}_U)$，其中 $E_{ui}\in\Pi_U\Leftrightarrow E_{ui}$ 是 U 中第 u_i 个节点所关联的所有边的集合；

所以：

二部图的匹配问题的子集系统$M=(E,\mathcal{M})$满足：

$I\subseteq E$是一个匹配（$I\in\mathcal{M}$）$\Leftrightarrow$ I在拟阵$M_{\Pi_V}=(E,\mathcal{F}_V)$中是独立集（$I\in\mathcal{F}_V$，即$I$中任何两条边在$V$中没有公共端点）且$I$在拟阵$M_{\Pi_U}=(E,\mathcal{F}_U)$中是独立集（$I\in\mathcal{F}_U$，即$I$中任何两条边在$U$中没有公共端点）。

所以：$\mathcal{M}=\mathcal{F}_V\cap\mathcal{F}_U$

所以，二部图的匹配问题可以变为求两个拟阵的最大公共独立子集问题。

一般的，我们假设$M_1=(E,\mathcal{I}_1)$和$M_2=(E,\mathcal{I}_2)$是定义在同一个集合上的两个拟阵，且$r_1=r_{M_1}$，$r_2=r_{M_2}$分别表示M_1和M_2的秩函数。

定义 9.7 给出定义在同一个集合上的两个拟阵$M_1=(E,\mathcal{I}_1)$和$M_2=(E,\mathcal{I}_2)$，最大公共独立集问题是找出一个E的元素最多的子集X，满足$X\in\mathcal{I}(M_1)\cap\mathcal{I}(M_2)$。

下面只讨论不带权拟阵的最大公共独立集问题。

定理 9.16 设$J\in\mathcal{I}(M_1)\cap\mathcal{I}(M_2)$，则

(i) 对任意的$X\subseteq E$，$|J|\le r_1(X)+r_2(E-X)$。

(ii) 若有$X\subseteq E$，使得$|J|=r_1(X)+r_2(E-X)$，则J必是一个最大公共独立集。

证明：

(i) 由于$J=(J\cap X)\cup(J\cap(E-X))$，根据秩函数的定义，$|J|=|J\cap X|+|J\cap(E-X)|\le r_1(X)+r_2(E-X)$。

(ii) 设J'是一个最大公共独立集，则有$|J|\le|J'|\le r_1(X)+r_2(E-X)=|J|$，从而$|J|=|J'|$，即$J$也是一个最大公共独立集。

问题：寻找最大公共独立集是否等价于寻找满足定理 9.16 中(ii)的子集J和X？下面的著名定理回答了这个问题。

定理 9.17 (Edmonds)对E上的两个拟阵$M_1=(E,\mathcal{I}_1)$和$M_2=(E,\mathcal{I}_2)$，定义$k_1=\max\{|J|:J\in\mathcal{I}(M_1)\cap\mathcal{I}(M_2)\}$和$k_2=\min\{r_1(X)+r_2(E-X):X\subseteq E\}$，则恒

有 $k_1 = k_2$。

上述定理满足定理 9.16 中(ii)的子集 J 和 X 的存在性，但不能从上述定理的证明中把 J 构造出来。因此，需要讨论拟阵交算法(Matroid Intersection Algorithm: MIA)。

二部图的匹配问题是两个拟阵交的特殊情况，求两个拟阵 $M = (E, \mathcal{F})$ 和 $N = (E, \mathcal{K})$ 的最大公共独立子集的算法是基于二部图的匹配的增广路算法。

利用增广路逐步增大匹配等价于逐步增大在两个拟阵 $M = (E, \mathcal{F})$ 和 $N = (E, \mathcal{K})$ 中均独立的集合。

所以，先复习一下二部图的匹配的增广路算法。

因此，对于公共独立集 $J \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)$（即对应于二部图的一个匹配），引进辅助有向图 $G(J)$。

定义 9.8 对子集 $J \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)$，定义辅助有向图 $G(J)$ 如下：图 G 的节点集合为 $E \cup \{s,t\}$，其中 s 和 t 是两个在 E 之外的元素；$G(J)$ 的边集则由下列有向边组成

(i) 对每个 $e \in E - J$，若 $J \cup e \in \mathcal{I}(M_1)$，则 (e,t) 为 $G(J)$ 中的有向边；

(ii) 对每个 $e \in E - J$，若 $J \cup e \in \mathcal{I}(M_2)$，则 (s,e) 为 $G(J)$ 中的有向边；

(iii) 对每个 $e \in E - J$ 和 $f \in J$，若 $(J \cup e) - f \in \mathcal{I}(M_1)$，则 (e,f) 为 $G(J)$ 中的有向边；

(iv) 对每个 $e \in E - J$ 和 $f \in J$，若 $(J \cup e) - f \in \mathcal{I}(M_2)$，则 (f,e) 为 $G(J)$ 中的有向边；

定理 9.17 给定 $J \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)$，令 $G = G(J)$，则

(i) 若 G 中有一条 $s-t$ 有向路 $P = \{s, e_1, f_1, \cdots, e_k, f_k, e_{k+1}, t\}$，则

$$J' = (J \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}\}) - \{f_1, f_2, \cdots, f_k\} \in \mathcal{I}(M_1) \cap \mathcal{I}(M_2)。$$

(ii) 若有子集 $X \subseteq E$，使得在 G，没有以节点 u 为尾，以节点 v 为头的有向边 (u,v)，满足 $u \in X \cup s$ 和 $v \in (E-x) \cup t$（即 G 中不存在任何 $s-t$ 有

向路），则$|J|=r_1(X)+r_2(E-X)$。

算法（拟阵交算法：MIA）

第 1 步：置$J=\phi$；

第 2 步：构造辅助有向图$G=G(J)$；

第 3 步：在辅助有向图$G=G(J)$搜索$s-t$有向路：

$$P=\{s,e_1,f_1,\cdots,e_k,f_k,e_{k+1},t\}$$

若不存在$s-t$有向路，则J为最大公共独立集，算法停止；否则转第 4 步；

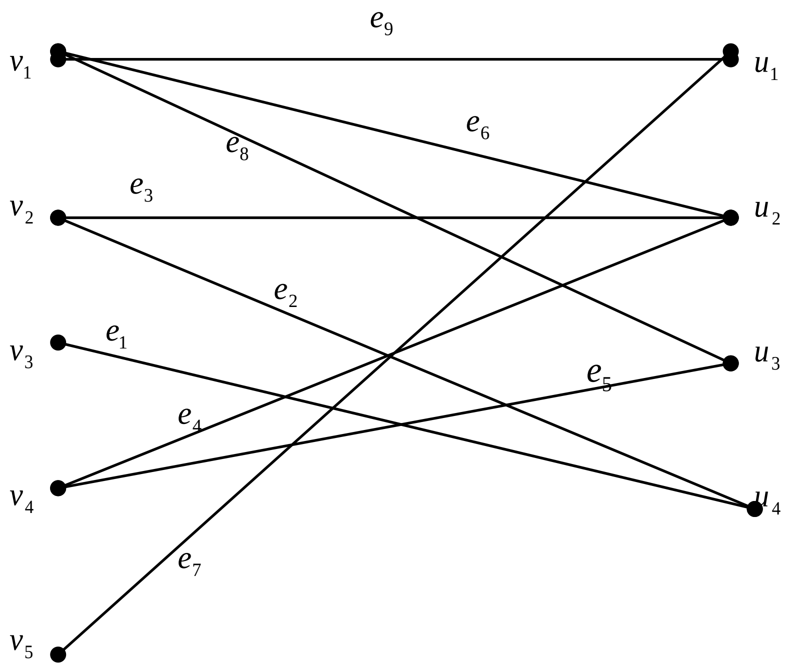
第 4 步：置$J:=(J\bigcup\{e_1,e_2,\cdots,e_{k+1}\})-\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}$，转第 2 步。

定理 9.18 上述拟阵交算法是正确的，并且是多项式算法。

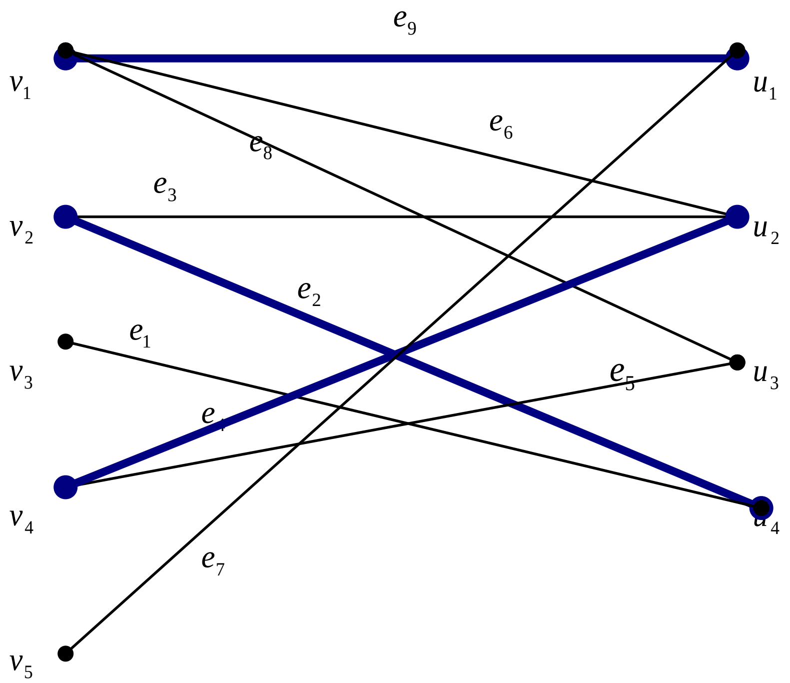
证明：正确性由定理 9.17 直接可得。

利用二部图的增广路算法设计算法：

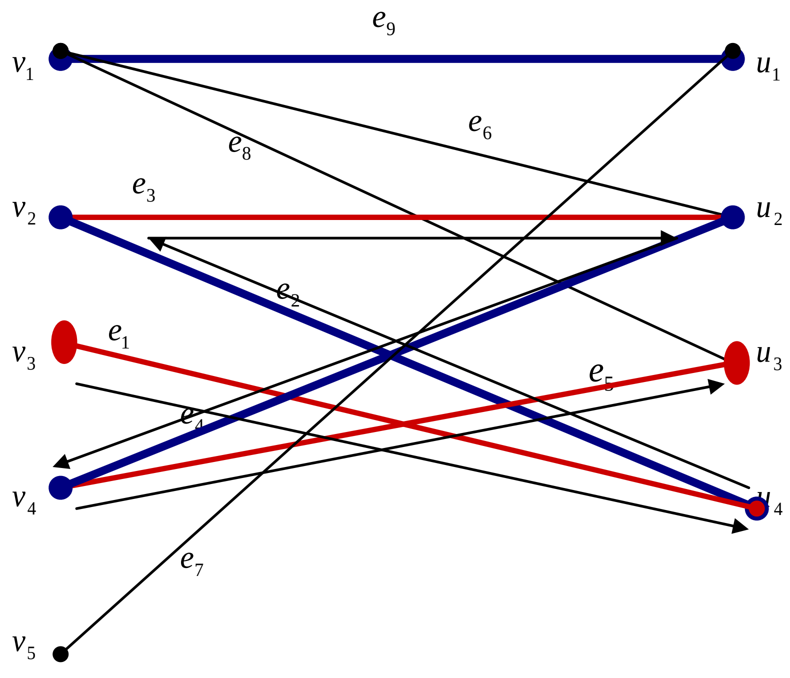
例 9.14：求下列二部图的最大匹配



(e_9, e_2, e_4)是一个极大匹配。



从未盖点e_1开始， $P=[e_1,e_2,e_3,e_4,e_5]$是关于匹配(e_9,e_2,e_4)的增广路。



$I \Rightarrow I+e_1-e_2+e_3-e_4+e_5 \Rightarrow I\oplus P$

因为：从V中的未盖点e_1开始，所以：$I+e_1$是M的独立集（从v_3出发只

有一条边）

但是：$I+e_1$在N中不是独立集（从u_4出发有两条边e_1和e_2，否则e_1就是一条增广路），

所以：$I+e_1$在N中有一个圈$\{e_1,e_2\}$（有公共端点u_4）

所以：去掉e_2，从而$I+e_1-e_2$在M中和N中都是独立的，但它和I的基数相等，再加上e_3，••••••••••••••••，

我们希望得到一个元素e_k，使得$I+e_1-e_2+e_3-e_4+\cdots+e_k$在$M$中和$N$中都是独立的，且比$|I|$多一个。

二、拟阵交问题的某些推广

1. 两个带权拟阵的交问题

更一般地，还可以考虑两个定义在同一个集合上的两个带权拟阵$M_1=(E,\mathcal{I}_1)$和$M_2=(E,\mathcal{I}_2)$，权函数分别为c_1和c_2。带权拟阵最大公共独立集问题是找出一个E的子集$X\in\mathcal{I}(M_1)\cap\mathcal{I}(M_2)$，使得$c_1(X)+c_2(X)$最大。

类似于赋权二部图的匹配，可以设计多项式算法。

2. 三个拟阵的交问题

三个拟阵的最大公共独立集问题——NP 完备问题。