

# 第五章 组合优化问题的原始-对偶算法-5

## 5.4 Hitchcock 问题的原始-对偶算法—— $\alpha\beta$ 算法

Hitchcock 问题是一个非常著名的问题，在 1941 年由 Hitchcock 等人提出。

有某一种物资， $m$  个产地（发点），产量为  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ， $n$  个销地（收点），需求为  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，由第  $i$  产地运往第  $j$  个销地的运费为  $c_{ij}$ ，在满足供需要求地情况下，如何分配物资，使得总运费最小？

### 一、Hitchcock 问题的线性规划模型

给定  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ，供应量  $a_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, m$ ，需求量  $b_j \in \mathbb{R}^+, j = 1, 2, \dots, n$ ，

以及费用  $c_{ij} \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ， $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ 。令  $f_{ij}$  表示第  $i$  个发点运往第  $j$  个收点的运量，则 Hitchcock 问题的线性规划模型为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j} c_{ij} f_{ij} \\ \sum_{j=1}^n f_{ij} &= a_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (1) \\ \sum_{i=1}^m f_{ij} &= b_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (2) \\ f_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{LP})$$

当  $a_i = b_j = 1$  时，Hitchcock 问题就是著名的指派问题，而指派问题的“匈牙利方法”是一般的原始-对偶算法的先驱。

### 二、Hitchcock 问题的对偶规划

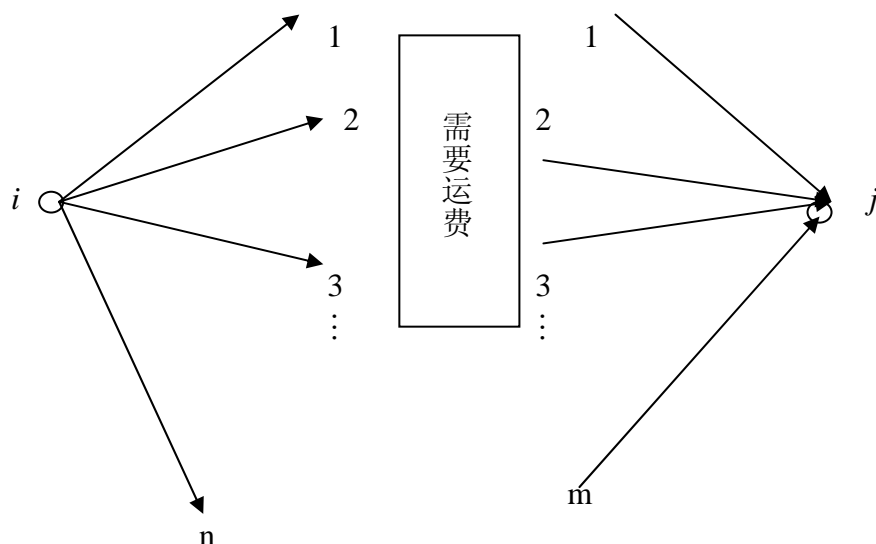
要组合化费用，就要考察 Hitchcock 问题的线性规划模型的对偶规划。对于 Hitchcock 问题的线性规划模型的第一组约束（即  $m$  个发点对应的约束）中的每一个约束定义一个对偶变量  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ，第二组约束（即  $n$  个收点对应的约束）中的每一个约束定义一个对偶变量  $\beta_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ，得到(LP)的对偶规划问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j \\ \alpha_i + \beta_j &\leq c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D}) \\ \alpha_i, \beta_j &\text{无限制} \end{aligned}$$

思考题：对偶规划问题中对偶变量  $\alpha_i$  和  $\beta_j$  的含义是什么？

$\alpha_i$  : 第  $i$  个发点对应的变量, 第  $i$  个发点有  $a_i$  单位的货物需要发走  
 $(i=1,2,\cdots,m)$ ;

$\beta_j$  : 第  $j$  个收点对应的变量, 第  $j$  个收点需要收到  $b_j$  单位的货物  
 $(j=1,2,\cdots,n)$ 。



换个思路, 假设不运输, 发点和收点都就地解决, 第  $i$  个发点有  $a_i$  单位的货物就地解决, 第  $j$  个收点需要  $b_j$  单位的货物就地解决。假设第  $i$  个发点单位货物就地解决所需要的额外费用为  $\alpha_i$ , 第  $j$  个收点单位货物就地解决所需要的额外费用为  $\beta_j$  (可以认为是中央政府提供的补贴价格), 则必须有:

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$$

否则的话, 我们宁愿就将第  $i$  产地的货物运往第  $j$  个销地。在满足这个前提下, 地方政府获得的利益最大化, 即目标函数为:

$$\max \varpi = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^n b_j \beta_j$$

从而得到 Hitchcock 问题的对偶规划问题(D)。

### 三、Hitchcock 问题的原始—对偶算法——组合化费用

Hitchcock 问题的对偶规划问题(D)的初始可行解为:  $\alpha_i = 0 (i=1,2,\cdots,m)$ ,

$\beta_j = \min_{1 \leq i \leq m} \{c_{ij}\} (j=1,2,\dots,n)$ 。允许弧集合为：

$$IJ = \{(i, j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$$

从而得到限制的原始问题(RP)：

$$\begin{aligned} \min \xi &= \sum_{i=1}^{m+n} x_i^a \\ \sum_{j=1}^n f_{ij} + x_i^a &= a_i, i=1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^m f_{ij} + x_{m+j}^a &= b_j, i=1,2,\dots,n \\ x_i^a &\geq 0, i=1,2,\dots,m+n \\ f_{ij} &\geq 0, (i, j) \in IJ \\ f_{ij} &= 0, (i, j) \notin IJ \end{aligned} \quad (\text{RP})$$

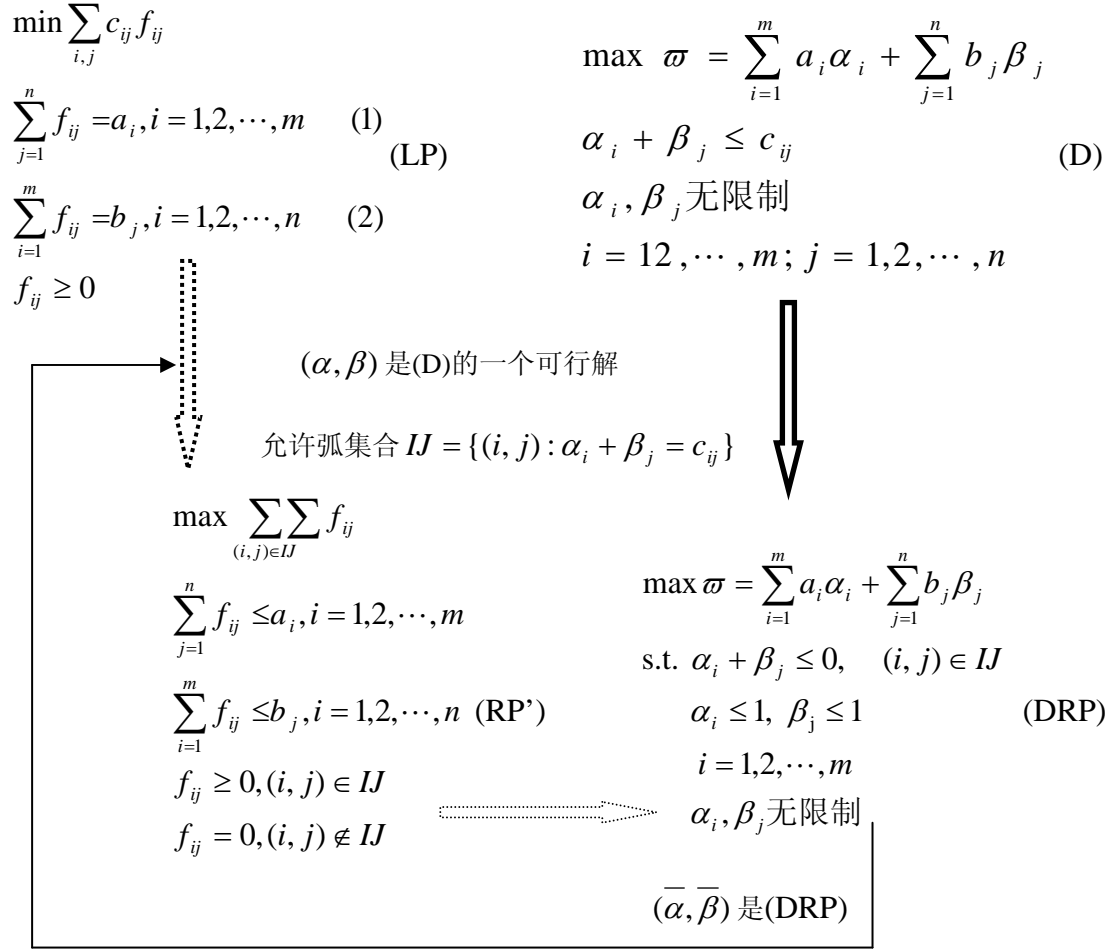
因为：

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{m+n} x_i^a = \sum_{i=1}^m x_i^a + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i^a = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{(i,j) \in IJ} \sum_{j=1}^n f_{ij} + \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{(i,j) \in IJ} \sum_{i=1}^m f_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j - 2 \sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij} \end{aligned}$$

所以：  $\min \xi = \max \sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij}$ ，故(RP)可重写成：

$$\begin{aligned} \max \sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij} \\ \sum_{j=1}^n f_{ij} &\leq a_i, i=1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^m f_{ij} &\leq b_j, i=1,2,\dots,n \\ f_{ij} &\geq 0, (i, j) \in IJ \\ f_{ij} &= 0, (i, j) \notin IJ \end{aligned} \quad (\text{RP}')$$

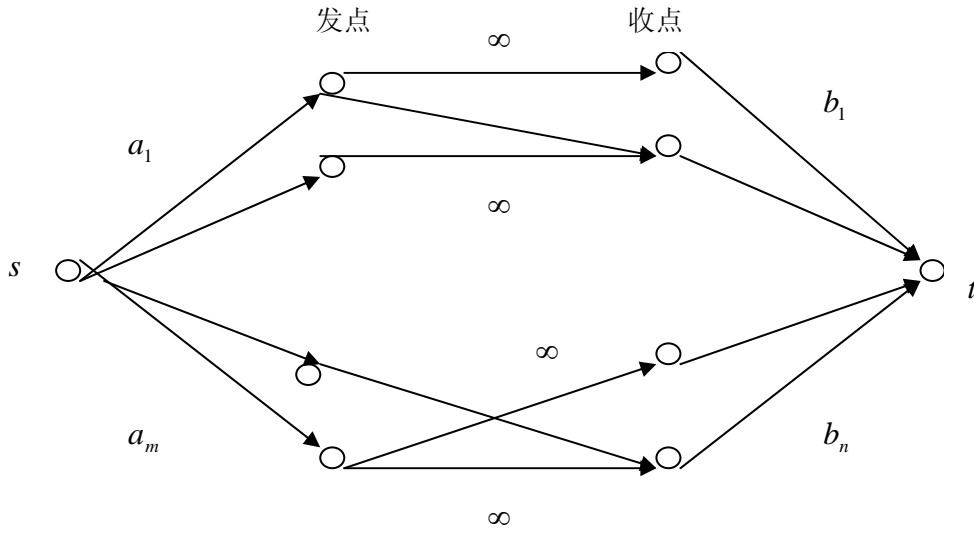
原始一对偶算法的过程：



调整对偶可行解  $(\alpha, \beta) := (\alpha, \beta) + \theta(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$

求解(RP')和(DRP)的方法：

(RP')是一个最大流问题的数学规划模型。虚拟一个超级发点  $s$  和超级收点  $t$ ，当  $(i, j) \in IJ$  时，自  $i$  到  $j$  有一条弧，其容量为  $\infty$ ，它保证仅当弧  $(i, j)$  是允许弧时， $f_{ij}$  才可以大于 0。



(RP')对应的最大流问题

用 Ford-Fulkerson 标号算法求解(RP')对应的最大流问题, 标号算法结束时, 得到最大流, 同时得到的  $s-t$  最小截就对应于(DRP)的最优解  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 。

**定义 5.6** 当应用 Ford-Fulkerson 标号算法求解(RP')得到最优解时, 我们称此时为处于阻塞状态。在处于阻塞状态时, 令

$$I^* = \{i: i \text{ 为已标号的发点}\}, \quad J^* = \{j: j \text{ 为已标号的收点}\}$$

**引理 5.1** 在解(RP')处于阻塞状态时, (RP)的对偶问题(DRP)的最优解  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  为:

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} 1, & i \in I^* \\ -1, & i \notin I^* \end{cases}, \quad \bar{\beta}_j = \begin{cases} -1, & j \in J^* \\ 1, & j \notin J^* \end{cases}$$

证明: 只要证明  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  是(DRP)的可行解, 且其目标函数值与(RP)的目标函数值相等即可 (习题)。

(1) 如果在阻塞状态时(RP)的最优值  $\xi_{opt} = 0$ , 则根据原始-对偶算法的最优性条件知, 得到(LP)和(D)的最有解  $f_{ij}, (\alpha_i, \beta_j) (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ , 其流

$$\text{值为: } \sum_{(i,j) \in IJ} f_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \text{。}$$

(2) 如果在阻塞状态时(RP)的最优值  $\xi_{opt} > 0$ , 那么原始-对偶算法中有两种情况:

(i) 对一切  $(i, j) \notin IJ$  都有  $\bar{\alpha}_i + \bar{\beta}_j \leq 0$ ;

(ii) 存在  $(i, j) \notin IJ$  , 有  $\overline{\alpha_i} + \overline{\beta_j} > 0$  。

若(i)成立, 说明(D)无上界, 从而(P)无可行解。但由于(P)是一个 Hitchcock 问题, 总是有可行解, 所以(i)不可能发生, 即(ii)必然成立。由引理 4.1,  $(i, j) \notin IJ$

且  $\overline{\alpha_i} + \overline{\beta_j} > 0 \Leftrightarrow i \in I^*$  且  $j \notin J^*$ , 此时,  $\overline{\alpha_i} + \overline{\beta_j} = 2$ 。所以

$$\theta_1 = \min_{\substack{i,j \\ \overline{\alpha_i} + \overline{\beta_j} > 0 \\ (i,j) \notin IJ}} \left\{ \frac{c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)}{\overline{\alpha_i} + \overline{\beta_j}} \right\} = \min_{\substack{i \in I^* \\ j \notin J^*}} \left( \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} \right)$$

所以新的对偶可行解  $(\alpha, \beta) := (\alpha, \beta) + \theta_1(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ , 其中

$$\alpha_i := \begin{cases} \alpha_i + \theta_1, & i \in I^* \\ \alpha_i - \theta_1, & i \notin I^* \end{cases}, \quad \beta_j := \begin{cases} \beta_j - \theta_1, & j \in J^* \\ \beta_j + \theta_1, & j \notin J^* \end{cases}$$

**Hitchcock 问题的原始一对偶算法—— $\alpha\beta$  算法:**

开始: 对偶规划问题 (D) 的初始可行解为:  $\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ ,

$$\beta_j = \min_{1 \leq i \leq m} \{c_{ij}\} (j = 1, 2, \dots, n)。$$

第 1 步: 构造对偶可行解  $(\alpha, \beta)$  对应的允许弧集合:  $IJ = \{(i, j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$ ;

第 2 步: 构造(RP')对应的最大流问题, 用 Ford-Fulkerson 标号算法求解(RP')对应的最大流问题, 标号算法结束时, 令

$$I^* = \{i : i \text{ 为已标号的发点}\}, \quad J^* = \{j : j \text{ 为已标号的收点}\}$$

令

$$\overline{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & i \in I^* \\ -1, & i \notin I^* \end{cases}, \quad \overline{\beta_j} = \begin{cases} -1, & j \in J^* \\ 1, & j \notin J^* \end{cases}$$

第 3 步: 若(RP)的最优值  $\xi_{opt} = 0$ , 则得到 Hitchcock 问题的最有解:

$$f_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

算法终止。否则, 转第 4 步。

第 4 步: 计算

$$\theta_1 = \min_{\substack{i \in I^* \\ j \notin J^*}} \left( \frac{c_{ij} - \alpha_i - \beta_j}{2} \right)$$

调整(D)的可行解:

$$\alpha_i := \begin{cases} \alpha_i + \theta_1, & i \in I^* \\ \alpha_i - \theta_1, & i \notin I^* \end{cases}, \quad \beta_j := \begin{cases} \beta_j - \theta_1, & j \in J^* \\ \beta_j + \theta_1, & j \notin J^* \end{cases}$$

转第 1 步。