

第五章 组合优化问题的原始-对偶算法-2

5.2 最短路问题的原始-对偶算法

一、最短路问题的一个线性规划模型描述

最短路问题 (shortest path problem) 是网络优化中一个基本问题, 许多问题可化为最短路问题, 或用最短路的算法作为子程序求解。

例如: 通信网络的路由问题;

最大期望容量问题;

背包问题等。

可以说, 最短路问题的用途远远超出了其直观意义。

定义: 给定一个有向图 $G=(V,E)$ 和每一条弧 $e_j \in E$ 上的一个非负权 $c_{ij} \geq 0$ 。最短路问题(SP), 就是求从一个特殊的起始点 s 到另一个特殊的终点 t 的一条有向路, 使得路上的总权和最小。

作为优化问题, 它的可行集为:

$$F = \{ \text{序列 } P = \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}\} : P \text{ 为从 } s \text{ 到 } t \text{ 的有向路} \}$$

$$\text{其费用函数为: } c(P) = \sum_{i=1}^k c_{ji}。$$

最短路问题可以描述为一个线性规划如下:

定义图 G 的点-弧关联矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 其中: $m = |V|$ 为顶点数, $n = |E|$ 为边数,

且

$$a_{ij} = \begin{cases} +1: & \text{若 } e_j \text{ 的起点为 } i \text{ (} e_j \text{ 由顶点 } i \text{ 射出的弧)} \\ -1: & \text{若 } e_j \text{ 的终点为 } i \text{ (} e_j \text{ 由顶点 } i \text{ 射入的弧)} \\ 0: & \text{其余} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

对弧 e_j 定义一个变量 $f_j = f(e_j)$, 表示沿弧 e_j 方向通过的货流。流的守恒:

$$a_i^T f = 0 \text{ (除 } s, t \text{ 外的其它点)}$$

$$\text{其中 } f \text{ 是一个向量, } f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

$$a_i^T: A \text{ 的第 } i \text{ 行}$$

从 s 到 t 的一条路可以设想为: 一个单位流, 从 s 流向 t , 这样的流必然满足:

$$Af = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{行}s: \text{起点流进一个单位的流} \\ \text{行}t: \text{终点流出一个单位的流} \\ \text{中间结点:} & \text{流量守恒} \\ & \vdots \\ \text{中间结点:} & \text{流量守恒} \end{matrix}$$

考察最小费用问题:

$$\begin{aligned} & \min c^T f \\ & Af = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{行}s \\ \text{行}t \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (SP) \\ & f \geq 0 \\ & \text{其中: } c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \\ & c_j: \text{第}j\text{条边上的费用}; f_j: \text{第}j\text{条边上的流量} \end{aligned}$$

直观地, 存在最优解 f_j^* , 使其每一个 $f_j^* = 0$ 或 1。

f^* 就表示 G 中一个单位流从 s 沿最短路流到 t 。

注 1: $\text{rank}(A) = m - 1$, 可以去掉一个多余的方程。去掉任意一个都可以, 一般去掉行 t 。

注 2: 一个基表示 $|V| - 1$ 条弧的集合。

基中有一个子集, 对应于具有给定费用的从 s 到 t 的一条路。

这 $|V| - 1$ 条弧中不在该路上的弧表示基的退化分量。

思考: 为什么 f^* 可以不限定为 $\{0, 1\}$?

二、最短路问题对偶规划

(SP) 的对偶:

对于上述 (SP), 对每一个约束 (对应于一个节点) i , 指派一个变量 y_i , 由关联矩阵的定义可知, 可以得到 (SP) 的对偶问题:

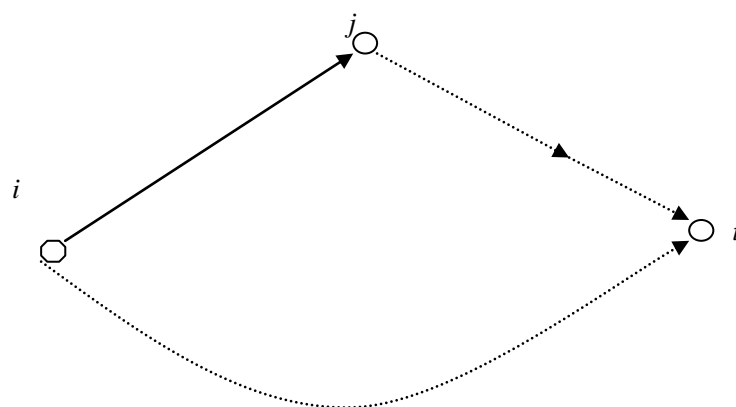
$$\begin{aligned} & \max y_s - y_t \\ & \text{s.t. } y_i - y_j \leq c_{ij} \quad (i, j) \in E \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} & \max y_s - y_t \\ & \text{s.t. } A^T y \leq c \quad (D) \\ & y \text{ 无约束} \end{aligned}$$

y_i 的意义: y_i 表示从定点 i 到终点 t 的费用——可行势。

$(i, j) \in E$, 当然有 $y_i - y_j \leq c_{ij}$ 。



互补松弛条件的意义:

根据互补松弛条件, f^* 和 y^* 分别为原问题和对偶问题的最优解的充分必要条件:

$$f_j^*(y_i^* - y_j^* - c_{ij}) = 0, \forall e_j = (i, j) \in E.$$

即:

(1) 最短路上的每一条弧 (对应于 $f_j^* > 0$), 对应于对偶问题中的不等式取等号

($y_i^* - y_j^* = c_{ij}$, 最短路走 E 中的弧 $e_j = (i, j) \in E$);

(2) 对偶问题中每一个严格不等式 $y_i^* - y_j^* < c_{ij}, e_j = (i, j) \in E$, 对应的弧不在最短路上, 即 $f_j^* = 0$ 。

三、最短路问题原始-对偶算法

由于 $y_t = 0$ 总成立, 所以(SP)的对偶问题等价于下述规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & y_s \\ \text{s.t.} \quad & y_i - y_j \leq c_{ij} \quad (i, j) \in E \\ & y_i \text{ 无限制, } i \in V \\ & y_t = 0 \end{aligned} \quad (\text{D})$$

允许弧集合定义为:

$$J = \{\text{弧}(i, j) : y_i - y_j = c_{ij}\}$$

对应的限制的原始问题为:

$$\begin{aligned}
\min \xi &= \sum_{i=1}^{m-1} x_i^a \\
Af + x^a &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{行 } s & (RP) \\
f_j &\geq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\
f_j &= 0 \quad j \notin J \\
x_i^a &\geq 0
\end{aligned}$$

限制的原始问题的对偶为:

$$\begin{aligned}
\max \omega &= y_s \\
y_i - y_j &\leq 0, \quad (i, j) \in J \\
y_i &\leq 1, \quad \text{对一切 } i & (DRP) \\
y_i &\text{无限制} \\
y_i &= 0
\end{aligned}$$

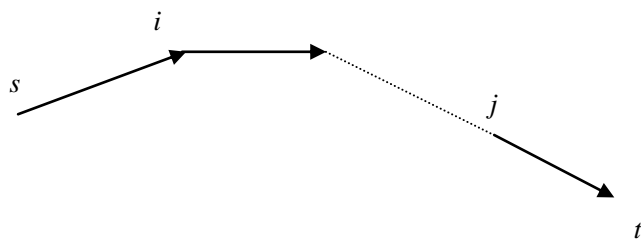
因为 $y_s \leq 1$ ，并且极大化 y_s ，因此(DRP)是很容易求解的。

我们可以试验 $y_s = 1$ 的情况:

(1) 如果存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，则由 $y_t = 0$ 可以推出 $y_s = 0$ 。

下面是仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，则由 $y_t = 0$ 且 $y_j - y_i \leq 0, (i, t) \in J$ 知 $y_j = 0$ ，

一次类推可以得到 $y_s = 0$ 。



从而，得到(DRP)的最有解， $\xi_{\min} = \omega_{\max} = 0$ ，此时 J 中的弧自 s 到 t 的任何一条路都是原问题的最有解，即 s 到 t 的最短路。

(2) 如果不存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，那么在不破坏约束 $y_i - y_j \leq 0$ 的条件下，

将仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的所有节点对应的对偶变量分配值 1 ($\overline{y_s} = 1$)，将仅

利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的所有节点对应的对偶变量分配值 0 ($\bar{y}_t = 0$):

$$\bar{y}_i = \begin{cases} 1, & \text{仅利用 } J \text{ 中的弧自 } s \text{ 有路可到达 } i \\ 0, & \text{仅利用 } J \text{ 中的弧自 } i \text{ 有路可到达 } t \\ 1, & \text{其它情形} \end{cases}$$

这样得到(DRP)的一个可行解, 其目标函数值 $\bar{y}_s = 1$, 从而是最有解(不是唯一最有解)。

然后计算 θ_1 :

$$\theta_1 = \min_{\substack{(i,j) \notin J \\ y_i - y_j > 0}} \{c_{ij} - (y_i - y_j)\}$$

修改 y 和 J , 并且重解(DRP), 直到存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路为止。

所以, 最短路问题的原始-对偶算法, 是把最短路问题归结为一系列简单的子问题: 自一个给定点出发, 求由它可到达的节点集合。