6.4 赋权匹配的有效算法－2

三、非二部图的赋权匹配问题

一般图 $G=(V,E)$ 的匹配问题可以描述为：

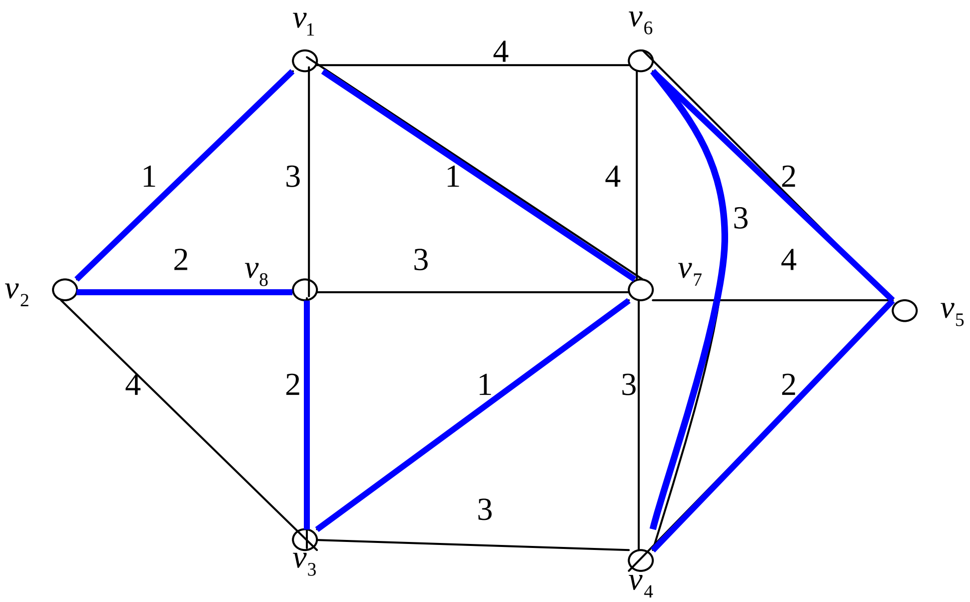
$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

其中 n 假定为偶数。

此线性规划问题可能有分数最优解，分数最优解对匹配没有任何意义。**分数最优解也可能是上述规划的基本可行解。**例如：



对应这组费用（不在图里的边的费用为 100），**其线性规划有唯一最优解**：

$x_{12}=x_{28}=x_{12}=x_{83}=x_{37}=x_{71}=x_{45}=x_{56}=x_{46}=\dfrac{1}{2}$。

最优解是两个奇圈的边所对应的变量取值为 $\dfrac{1}{2}$（大于零）。

问题：一定出现在奇圈上，使得上述线性规划模型不能完全描述匹配问题。

解决的办法：

- 克服奇圈这种病态情况，奇圈上边对应的大于零的变量不能超过奇圈边的一半

- 对奇圈上边对应的大于零变量的个数要增加约束

假定n为偶数，令$S_1, S_2 \cdots, S_N$表示集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有大于 1 的奇数个元素的集合。

集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有子集个数为2^n，其中奇数个元素和偶数个元素各占一半，即为2^{n-1}，而等于 1 的子集个数共有n个。所以，$N = 2^{n-1} - n$。

S_j中的元素的个数记为$|S_j| = 2s_j + 1$。

Edmods 定理：对于一组费用$\{c_{ij} : 1 \le i \le j \le n\}$，一般匹配问题等价于下述的 LP 问题：求一组$\{x_{ij} : 1 \le i \le j \le n\}$，使它满足：

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ & \sum_{i,j \in S_k} x_{ij} + y_k = s_k, y_k \ge 0, k = 1,2,\cdots,N \\ & x_{ij} \ge 0, \quad 1 \le i \le j \le n \end{aligned} \qquad \text{(LP)}$$

证明：

基本思路：设计原始－对偶算法，求解上述(LP)问题，证明所得的解是最小费用的完美匹配。

上述问题的对偶问题：

设变量α_i对应原始规划的约束——$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$（**每个顶点对应一个对偶变量**）；

变量γ_k对应原始规划的约束——$\sum_{i,j \in S_k} x_{ij} \le s_k, k = 1,2,\cdots,N$（**每个奇圈对应一个对偶变量**）

因此，上述问题的对偶规划为：

$$\max \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{k=1}^{N} s_k \gamma_k$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \sum_{i,j \in S_k} \gamma_k \le c_{ij} \quad i,j \le n \qquad \text{(D)}$$

$$\gamma_k \le 0 \quad k \le N$$

用原始－对偶算法求解上述(LP)：

初始对偶可行解取做：$\gamma_k = 0 (k = 1,2,\cdots,N)$，$\alpha_j = \frac{1}{2}\min_i \{c_{ij}\} (j = 1,2,\cdots,n)$

设 J 为允许变量集合，即对偶规划使得等式成立的变量集合：$J = J_e \cup J_b$，其中

$$J_e = \{[v_i, v_j] : \alpha_i + \alpha_j + \sum_{i,j \in S_k} \gamma_k = c_{ij} \quad i,j \le n\}$$ *允许边集合*；

$$J_b = \{S_k : \gamma_k = 0 \quad k \le N\}$$ *允许圈集合*

注：由互补松弛性条件

- ***允许边集合***：边对应的 x_{ij} 可以大于 0
- ***允许圈集合***：$\gamma_k = 0$，则可以有 $y_k > 0$，从而可以有 $\sum_{i,j \in S_k} x_{ij} < s_k$，即 J_b 为允许圈集合时，其中的奇圈非零边没有饱和。

  记：$\overline{J_b} = \{r 为奇圈 : r \notin J_b\} = \{S_k : \gamma_k < 0 \quad k \le N\}$。
- $\gamma_k < 0 \quad \Rightarrow y_k = 0 \quad \Rightarrow \sum_{i,j \in S_k} x_{ij} = s_k$，即非允许圈集合 $\overline{J_b}$ 中奇圈是非零边已经饱和的奇圈。（应该收缩成一点）

对应的 RP 为：

$$\min \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j^a + 2\sum_{k=1}^{N} x_{n+k}^a$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i^a = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i,j\in S_k} x_{ij} + y_k + x_{n+k}^a = s_k, \quad k = 1,2,\cdots,N$$

$$x_{ij} \ge 0 \text{且} [v_i, v_j] \notin J_e \Rightarrow x_{ij} = 0 \qquad \text{(RP)}$$

$$y_k \ge 0 \text{且} S_k \notin J_b \Rightarrow y_k = 0$$

(RP)的对偶为：

$$\max \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{k=1}^{N} s_k \gamma_k$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \sum_{i,j\in S_k} \gamma_k \le 0 \quad [v_i, v_j] \in J_e$$

$$\gamma_k \le 0 \quad S_k \in J_b$$

$$\alpha_i \le 1, i = 1,2,\cdots,n \qquad \text{（DRP）}$$

$$\gamma_k \le 2, k = 1,2,\cdots,N$$

维持对偶变量 α_i 和 γ_k 的值，使得(RP)和(DRP)本质是组合的，并因此得到(RP)的整数解。暂时我们做如下假设：

(A) $x_{ij} = 0$ 或 1，并且它们构成 (V, J_e) 的一个匹配；

(B) 如果 $S_k \in \overline{J_b}$ （即 $r_k < 0$），则将图 (V, J_e) 限制到 S_k 上，它包含 s_k 条匹配边（这意味着 S_k 已由匹配边饱和，即 $\sum_{i,j\in S_k} x_{ij} = s_k$）；

(C) 若 $S_i, S_k \in \overline{J_b}$ 且 $S_i \cap S_k \ne \phi$，则或者 $S_i \subseteq S_k$，或者 $S_i \supseteq S_k$。

在这个假设下，我们可以去掉(RP)的约束：

$$\sum_{i,j\in S_k} x_{ij} + y_k + x_{n+k}^a = s_k, \quad k = 1,2,\cdots,N \text{。}$$

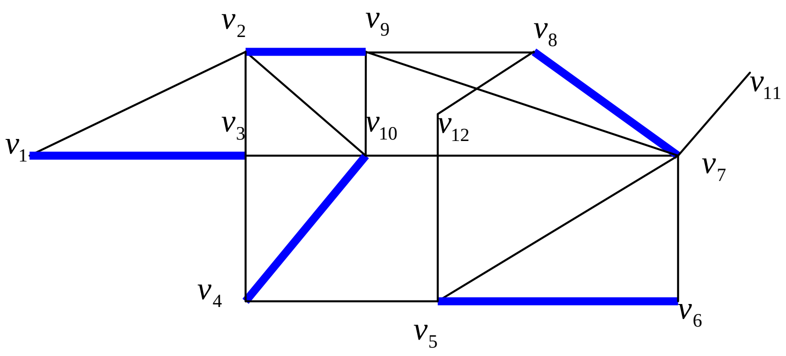
因为：

（1）若 $\gamma_k = 0$，则 y_k 可以是正的，并因此可以用 y_k 填补 $\sum_{i,j\in S_k} x_{ij} - s_k$，而且其费用为 0，即令 $y_k := y_k + \sum_{i,j\in S_k} x_{ij} - s_k$，则可以取 $x_{n+k}^a = 0$；

（2）另一方面，若 $\gamma_k < 0$，即 $S_k \in \overline{J_b}$，则由假设（B）知 $\sum_{i,j\in S_k} x_{ij} = s_k$。因此，我们可以取 $x_{n+k}^a = 0 (k = 1,2,\cdots,N)$。

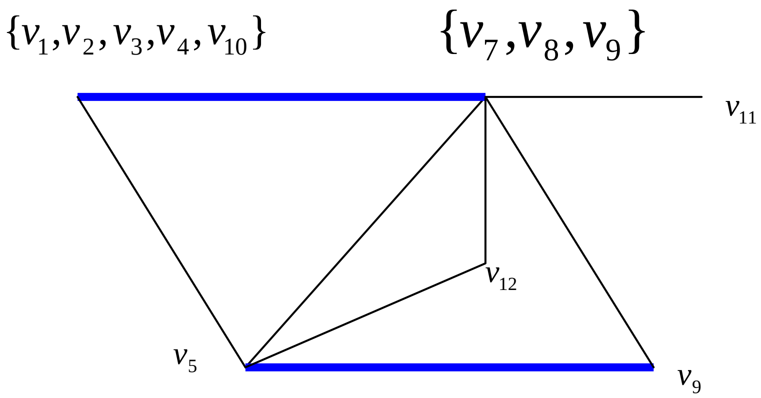
定义对应于允许变量集合 $J = J_e \cup J_b$ 的允许图 G_J：

G_J 是由图 (V, J_e) 收缩了 $\overline{J_b}$ 中的所有奇点集合得到的图



(V, J_e)

$$\overline{J_b} = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{10}\}, \{v_7, v_8, v_9\}\}$$



G_J

注：（1）要使G_J有明确的定义，就要假设(C)成立；

（2）如果$\overline{J_b}$中的所有奇集都由匹配边饱和，则称(V,J_e)的匹配是正常的。

例如：上图上的匹配是最大正常匹配，但它不是(V,J_e)的最大匹配。

引理：G_J中存在一个具有d个未盖点的匹配$\Leftrightarrow$ (V,J_e)存在d个未盖点的正常匹配。

证明："$\Rightarrow$"设在G_J中存在一个具有d个未盖点的匹配，那么在在G_J中撑开被收缩的奇集，则：

G_J的一个匹配＋被撑开奇集中的一些适当的匹配边＝(V,J_e)的一个正常匹配，

并且被撑开奇集中存在一个未盖点$\Leftrightarrow$ G_J中是未盖点。

"$\Leftarrow$"设(V,J_e)存在d个未盖点的正常匹配，在(V,J_e)中收缩$\overline{J_b}$的一些极大奇集，那么由(V,J_e)的正常匹配就能得到G_J的一个匹配。又因为我们是从正常的匹配开始的，所以这样做没有改变未盖点的数目。

证毕

推论：通过求G_J的最大基数匹配，可以求出(V,J_e)的最大基数的正常匹配。

所以：**(RP)的最优解是(V,J_e)的最大正常匹配。**

因此，假设$\{x_{ij}\}$是(RP)的最优解，则由(RP)的约束$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_i^a = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$得

到：$\sum_{i=1}^{n} x_i^a = n - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d$（表示$(V, J_e)$的最大正常匹配中未盖点的个数）

下面将通过给出费用为d的(DRP)的一个解的方法，从而(DRP)的目标函数值和(RP)的目标函数值都等于d，所以同时得到(DRP)和(RP)的最优解，证明了结论成立。

假设用前面的非二部图的最大基数匹配算法已经求出了G_J的最大匹配，并设G_c是由收缩G_J的某些花得到的图，因此当前图G_c中没有增广路。G_c的顶点集是由拟点组成。

拟点是指下述三种类型的点：

（1）V中的节点；

（2）$\overline{J}_b$的极大奇集——收缩为一个点；

（3）V中的一些节点与$\overline{J}_b$的某些极大奇集合并为G_J的最外层的花（即不包含在其它花里的花）——收缩为一个点。

G_c的一个拟点可以是：

- 外点——从一个未盖的拟点有偶数长的交错路可到达它；
- 内点——外拟点的配偶；
- 既不是外点也不是内点。

所以，集合V被划分为三部分：

- 外点集O（外拟点中的节点集合）
- 内点集I（内拟点中的节点集合）
- 其余部分

类似地，G_c中的拟点（非V中的节点）也可以划分为三部分：

- Ψ_O——对应于外拟点或者对应于花的极大奇集
- Ψ_I——对应于内拟点的极大奇集
- 其余部分

可以定义(DRP)的解如下：

$$\overline{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & 若 v_i \in O \\ -1, & 若 v_i \in I \\ 0, & 其它 \end{cases}, \qquad \overline{\gamma_i} = \begin{cases} -2, & 若 S_k \in \Psi_O \\ 2, & 若 S_k \in \Psi_I \\ 0, & 其它 \end{cases}$$（容易验证可行性）

对应的费用为：

$$|O|-|I|-2\sum_{S_k\in\Psi_O}s_k+2\sum_{S_k\in\Psi_I}s_k$$

＝#G_c 中的外拟点－#G_c 中的内拟点

＝#G_c 中的未盖点

＝#(V,J_e) 的最大正常匹配下的未盖点

此时，(DRP)的目标函数值和(RP)的目标函数值都等于 d。所以，它正是(RP)的最优值。

所以，**(RP)的一切解都将是最大的正常匹配**。

即最后一次迭代得到(RP)的最优解，也就是 **Edmods** 定理中的线性规划(LP)的最优解。

下面说明假设(A)、(B)、(C)是合理的。对迭代步数用归纳法。

开始：所有 $\gamma_k=0, x_{ij}=0$，满足假设(A)、(B)、(C)；

第 k 步迭代前：如果假设(A)、(B)、(C)满足，那么第 k＋1 步迭代前假设(A)、(B)、(C)满足仍然成立。因为：

（1） 加到 $\overline{J_b}$ 里仅是允许图的花，当然这些花是由匹配边所饱和，所以假设(A)满足；

（2） 由于(RP)的最大匹配必定是正常匹配，所以已经在 $\overline{J_b}$ 里的奇集仍是由匹配边所饱和，所以假设(B)满足；

（3） 因为只有 G_J 的花加到 $\overline{J_b}$ 里，而且这些花肯定满足假设(C)，所以假设(C)成立。

定理证毕

对偶变量的调整：

$\theta_1=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$，其中

$$\delta_1=\min\left\{\frac{c_{ij}-\alpha_i-\alpha_{ji}}{2}:v_i,v_j\in O\text{且不在同一个拟点里}\right\}$$

$$\delta_2=\min\{c_{ij}-\alpha_i-\alpha_{ji}:v_i\in O,v_j\in V-I-O\}$$

$$\delta_3=\min\left\{-\frac{\gamma_k}{2}:S_k\in\Psi_k\right\}$$

赋权匹配算法（阅读参考书）

定理：赋权匹配算法是正确的，且计算复杂度为 $O(n^4)$。