高级算法设计与分析

完美匹配

夏盟佶
Xia, Mingji

中科院软件所
计算机科学国家重点实验室

2016.6

积和式模2和行列式

- A是$n \times n$矩阵。
- $$Det(A) = |A| = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\pi)} \prod_{j=1}^{n} A_{j,\pi(j)}$$
- 行列式有多项式时间高斯消元算法。
- $$\mathsf{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^{n} A_{j,\pi(j)}$$
- 因为$-1 = 1 \mod 2$，$\mathsf{Permanent}(A) = |A| \mod 2$。

积和式模2^k

- $\mathcal{O}(n^{4k-3})$算法简介（$k \geq 1$）。
  Leslie G. Valiant: The Complexity of Computing the Permanent. Theor. Comput. Sci. 8: 189-201 (1979)
- $$\text{Perm}\begin{pmatrix} aA_1 + B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = a \cdot \text{Perm}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \text{Perm}\begin{pmatrix} B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$
- $$2|\text{Perm}\begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad 4|\text{Perm}\begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_4 \\ A_4 \\ A_5 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

积和式模2^k

- $T_k(n)$表示计算$n \times n$矩阵模2^k的算法时间。
- $$T_k(n) = (n-1) \cdot T'_k(n) + T_k(n-1)$$
- $T'_k(n)$表示计算有1对相同行的$n \times n$矩阵模2^k的算法时间。
- 对两个相同行展开积和式：
$$T'_k(n) \le n^2 \cdot T_{k-1}(n-2)$$
- $$T_k(n) \le n^3 \cdot T_{k-1}(n-2) + T_k(n-1)$$
- $$T_k(n) \le Cn^{4k+3}$$

Permanent：偶图的带权完美匹配数目

- A是$n \times n$矩阵。

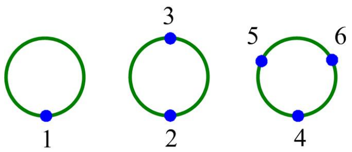
定义

$$\mathit{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^{n} A_{j,\pi(j)}$$

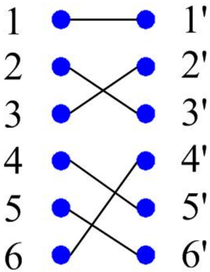
- A有两种图表示：n个点的有向图，和$2n$个点的偶图。
- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
  有向图$G(V, E, W)$中，有向边(j, k)的权重$W(j, k) = A_{j,k}$。
- Permanent(A)是G的所有圈覆盖权重之和。
- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$，$U = \{1', 2', \ldots, n'\}$。
  无向偶图$H(V, U, E, W)$中，边(j, k')的权重$W(j, k') = A_{j,k}$。
- Permanent(A)是H的所有完美匹配权重之和。

行列式：带符号的圈覆盖与偶图完美匹配

- $$\pi = (1)(23)(456)$$
- 排列的奇偶性=偶数长度的圈的数目奇偶性。

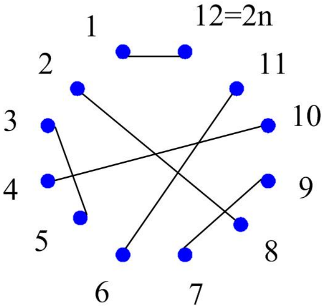


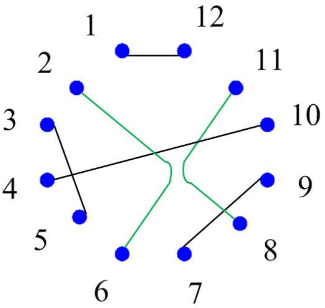
- =偶图完美匹配中交叉数目的奇偶性



Pfaffian：带符号的完美匹配

- G是一个边带权重、含$2n$个顶点的无向图。
- $$\text{Pfaffian}(G) = \sum_{M\text{是}G\text{的完美匹配}} (-1)^{M\text{的交叉数目}} \cdot M\text{的权重}$$
- 交换匹配中两个边的匹配对象，交叉数目变1。





- 但是，交换一条匹配边的两个端点，例如4和10，交叉数目的奇偶性不变。如果这种交换也变号，就成了置换的奇偶

反对称矩阵的Pfaffian

- 反对称矩阵M：$M_{j,k}=-M_{k,j}$。
- 奇数大小的反对称矩阵M的Pfaffian是0；如果是偶数$2n$，定义为：

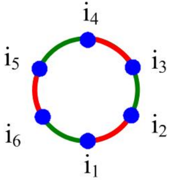
$$\mathrm{P}f(M)=\sum_{\pi}(-1)^{\epsilon(\pi)}M(i_1,i_2)M(i_3,i_4)\ldots M(i_{2n-1},i_{2n}),$$

其中，$\pi=(i_1,\ldots,i_{2n})$，$i_1<i_3<\cdots<i_{2n-1}$，$i_1<i_2,i_3<i_4,\ldots,i_{2n-1}<i_{2n}$。
- Pfaffian有类似高斯消元的算法。
- $$Pf^2(A)=Det(A)$$

平面图完美匹配

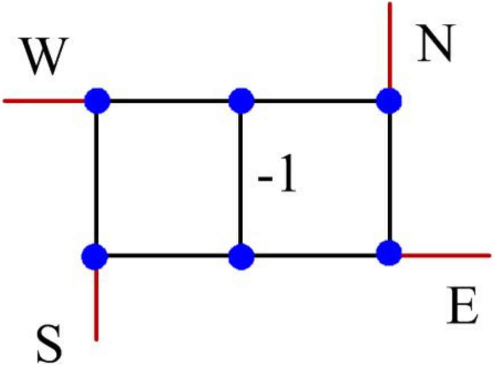
- 一般图包括平面图的，带符号的完美匹配权重和，可以多项式时间内计算。
- 平面图完美匹配的多项式时间的FKT算法是如何计算的？
- 从Pfaffain的第一个定义角度说，故意给平面图的一些边的权重添加负号，使得对每个匹配，权重的新负号能和交叉数目带来的负号相消。
- 从Pfaffain的第二个定义角度说，对于一条无向边(j,k)及其权重w，在反对称矩阵M中，令$M_{j,k}=-M_{k,j}=w$，还是$-M_{j,k}=M_{k,j}=w$，可自由选择。
- 视为无向图G的一个边定向，取前者认为$j\to k$，取后者认为$j\leftarrow k$。
- 取一个适当的定向，使得#PerfectMathing$(G)=\mathrm{Pf}(M)$。

平面图完美匹配归约到Pfaffian

- 思路：让平面图G的任何两个完美匹配的符号相同。
- 符号来自两部分：π的奇偶性，对称矩阵中元素的负号。
- $$\pi = ((i_1 i_2)(i_3, i_4)(i_5, i_6)\cdots)$$
$$\tau = ((i_2 i_3)(i_4, i_5)(i_6, i_1)\cdots)$$
- 定义
$$\delta = \begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \cdots \\ i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_1 \cdots \end{pmatrix}$$
- $$(-1)^{\epsilon(\pi)}(-1)^{\epsilon(\tau)} = (-1)^{\epsilon(\delta)}$$
- 

- Pfaffian Orientation: https://en.wikipedia.org/wiki/FKT_algorithm

匹配门

- 完美匹配就是$[0, 1, 0, \ldots, 0]$构成的张量网络。
  权重w的边，本质是一个点$[1, 0, w]$。
- 如下张量网络（匹配门）实现了一个函数$C(N, E, S, W)$，
  $C(0, 1, 0, 1) = C(1, 0, 1, 0) = C(0, 0, 0, 0) = 1$，$C(1, 1, 1, 1) = -1$，并且其他函数值都是0。
- 

用平面图模拟一般图

- $C(0,1,0,1) = C(1,0,1,0) = C(0,0,0,0) = 1$，$C(1,1,1,1) = -1$，并且其他函数值都是0。
- $|C|$可以把一个一般图上的问题归约到平面图上的问题。
- C恰好模拟了Pfaffian中的交叉。

- 推论

*Pfaffian*可以归约到平面完美匹配权重和问题。

匹配门等式

- 一个匹配门的函数$F:\{0,1\}^n \to \mathcal{C}$满足如下等式。
- 对任意两个长n的串$\alpha,\beta \in \{0,1\}^n$，集合$\{i|\alpha_i \neq \beta_i\}$的标号从小到大记为$\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$，
- $$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j F(\alpha \oplus e_{p_j})F(\beta \oplus e_{p_j}) = 0$$
- 最初的证明来自Pfaffian的Grassmann-Plücker等式。

用封闭性证明

- 起始：$[0,1,0,\ldots,0]$满足匹配门等式。
- 平面图的一个点的边有一个自然的次序，例如，顺时针次序。p
- 形成平面张量网络两种运算：

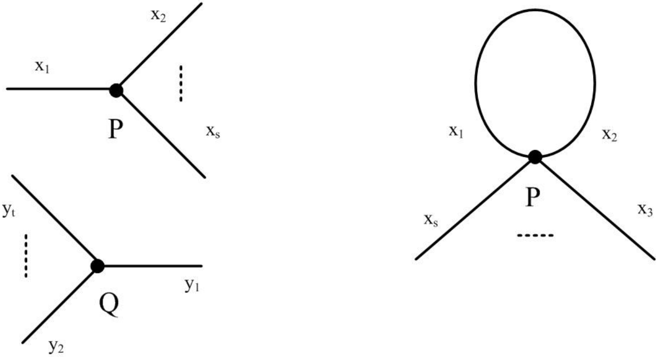


Figure: Juxtaposition and Jumper

在两种运算下封闭：Juxtaposition

- $$F(x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_t)=P(x_1,\dots,x_s)Q(y_1,\dots,y_t).$$
- 回想
$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j F(\alpha\oplus e_{p_j})F(\beta\oplus e_{p_j})=0$$
- 记为$I(F,\alpha,\beta)=0$。
- $$I(F,\alpha\alpha',\beta\beta')=Q(\alpha')Q(\beta')I(P,\alpha,\beta)\pm P(\alpha)P(\beta)I(Q,\alpha',\beta')=0.$$

Jumper

- 回想
$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j F(\alpha \oplus e_{p_j})F(\beta \oplus e_{p_j}) = 0$$
- 记为$I(F,\alpha,\beta)=0$。
-
$$F(x_3,\ldots,x_s) = P(0,0,x_3,\ldots,x_s) + P(1,1,x_1,\ldots,x_s)$$
-
$$I(F,\alpha,\beta) = I(P,00\alpha,00\beta) + I(P,11\alpha,11\beta) +$$
$$(I(P,00\alpha,11\beta) + P(10\alpha)P(01\beta) - P(01\alpha)P(10\beta)) +$$
$$(I(P,11\alpha,00\beta) + P(01\alpha)P(10\beta) - P(10\alpha)P(01\beta)) = 0$$

匹配门的简洁表示给出算法

- 因为匹配门F满足匹配门等式，可以证明用n^2个值即可存储表示一个匹配门函数。
- 已知运算前的匹配门（的表示），怎么计算运算后的匹配门（的表示）。
- 还有些细节处理。

此算法能否给出矩阵乘法的更快的算法?
在定义域大小为3的时候，有没有类似的封闭性质，有没有用于bridgeless平面图的一些封闭性质能够证明四色定理?

亏格

- 一个亏格为k的曲面上的无交叉边的图，可以在$4^k\text{poly}(n)$ 时间内计算它的完美匹配权重和。

完美匹配与Minor

- 一个图是平面图当且仅当它没有$K_{3,3}$和K_5作为Minor。
- 以下图集合的完美匹配权重和问题，都有多项式时间算法。
  - 没有$K_{3,3}$Minor
  - 没有K_5Minor
  - 没有HMinor，H可以只用一个交叉画在平面上。
- 以不含K_7Minor的图作为实例的完美匹配权重和问题，是$\#P$难的。
- 边界在哪？

参考文献

- https://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian
- https://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian
- Radu Curticapean: Counting perfect matchings in graphs that exclude a single-crossing minor
  http://arxiv.org/abs/1406.4056
- Daniel Marx: Algorithmic Graph Structure Theory
  http://resources.mpi-inf.mpg.de/conferences/adfocs13/material.htm

前四讲回顾

- 定义：
  张量网络、#CSP问题、SAT问题
- 二分定理（算法部分浅酌）：
  复数值域#CSP($\mathcal{A}$)，图同态，Holant问题（斐波那契门）
- 张量网络的各种例子，结合律与全息归约
- 全息归约的奇特应用：线性检测，积和式算法
- Pfaffian与平面图完美匹配