



组合最优化

中国科学院大学

数学科学学院

郭田德

电话：88256412

Email: tdguo@ucas.ac.cn

2015-2016学年春季学期

第一章 引言

1.1 概述

- **Combinatorial optimization is one of the youngest and most active areas of discrete mathematics, and is probably its driving force today.**
- 组合最优化的理论和方法已经广泛地渗透于运筹学、信息论、控制论、管理科学、计算机科学、分子物理学、生物学、超大规模电路设计（**VLSI**）等领域，并在工程技术、经济、军事等诸多方面都有着极为重要的应用。
- 现代社会在很大程度上是一个由通信网络、运输网络、能源和物资分配网络构成的巨大的复杂系统，组合最优化能为人们控制和管理这个系统提供一种有效的方法。

- 由于大规模组合最优化问题的需要，研究各种有效算法一直是组合最优化问题研究的一个重点。
- 组合最优化问题中的许多问题很难找到有效算法，也不知道他们是否存在有效算法，这就使得计算复杂性理论和近似算法的研究也受到了普遍的重视。
- 研究各种有效算法和计算复杂性理论的结合正是组合最优化研究的潮流。
- 组合最优化属于交叉学科，研究的目标最终是将研究成果应用到其它学科，解决实际问题。

1.2 什么叫组合最优化？

➤ 组合最优化

1. 运筹学及其简史

2. 什么是最优化？

3. 什么是组合最优化？

➤ 最优化

➤ 运筹学

运筹学及其简史

中国古代运筹思想

Operations Research (Operational Research)

在中文里翻译为“**运筹**”。

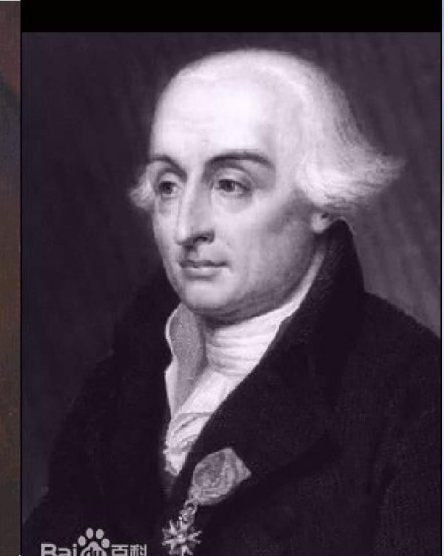
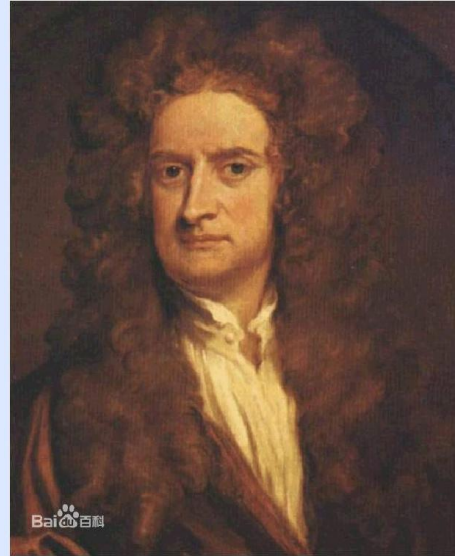
来源——公元前三世纪楚汉相争中，汉高祖刘邦的谋士张良常出谋献策，为刘邦打败项羽，推翻秦朝，统一中国立下大功。刘邦称誉他“**运筹帷幄**之中，决胜千里之外”。

运筹学的性质

运筹学是从本世纪三四十年代发展起来的一门新兴学科，它的研究对象是人类对各种资源的运用及筹划活动，它的研究目的在于了解和发现这种运用及筹划活动的基本规律，以便发挥有限资源的最大效益，来达到总体、全局最优的目标。这里所说的“资源”是广义的，既包括物质材料，也包括人力配备；既包括技术装备，也包括社会结构。

现代运筹学发展简史

- Pierre Fermat (1601-1655): 函数局部极值
- Isaac Newton (1643-1727)
- Lagrange (1736-1813)
- Cauchy (1789-1857): 最速下降法



现代运筹学发展简史

- Farkas: Farkas 引理
- Karush-Kuhn-Tucker (KKT)条件
- 二次大战

现代运筹学发展简史

真正作为一门新兴学科的系统研究并予以正式命名的运筹学这段辉煌的创业史，是在二次大战前后揭开的。

二次大战胜利后，美英各国运筹学的研究不但在军事部门继续予以保留，而且研究队伍还进一步得到扩大和发展，同时在政府和工业部门也开始推行运筹学方法，筹建运筹学小组。

中国古代的对策论

公元前四世纪战国时期齐国的将军田忌与齐王赛马的故事。双方各遣三马一对一比赛。孙臆发现田忌的马虽然不如齐王的，但相差不多。于是献策：以下马对齐王的上马，以上马对齐王中马，以中马对齐王下马，结果田忌以二比一获胜。今天来讲，这就是简单的**对策论**。

古代工程中的运筹思想

宋真宗时（公元1008-1017）宫廷失火，需要重建。采取了如下方案：先在通向宫殿的大道上就近取土，取土后大道形成深沟，于是引入汴水，成为人工小河。由此基建材料可由水路运入工地；宫殿修成后，又将基建废料弃置沟中，重新建成大道。这一方案取土近、弃土近、运输便，是**工程的优化**。

古代工程中的运筹思想

宋朝沈括所著《梦溪笔谈》中记载：“凡师行，因粮于敌，最为急务。运粮不但多费。而势难行远。余尝计之，人负米六斗，卒自携五日干粮，人饷一卒，一去可十八日：米六斗，人食日二升。二人食之，十八日尽。若计复回，只可进九日。二人饷一卒，一去可二十六日；米一石二斗，三人食，日六升，八日，则一夫所负已尽，给六日粮遣回。后十八日，二人食，日四升并粮。若计复回，止可进十三日。前八日，日食六升。后五日并回程，日食四升并粮。三人饷一卒，一去可三十一日；米一石八斗，前六日半，四人食，日八升。减一夫，给四日粮。十七日，三人食，日六升。又减一夫，给九日粮。后十八日，二人食，日四升并粮。计复回，止可进十六日。前六日半，日食八升。中七日，日食六升，后十一日并回程，日食四升并粮。三人饷一卒，极矣，若兴师十万。辎重三分之一，止得驻战之卒七万人，已用三十万人运粮，此外难复加矣。

古代工程中的运筹思想

宋朝沈括所著《梦溪笔谈》中记载：“庆历（公元1048）中，河决北都商胡，久之未塞。三司度支副使郭申锡亲往董作。凡塞河决，垂合，中间一埽，谓之‘合龙门’，功全在此。是时屡塞不合。时合龙门埽长六十步。有工高超者献议，以谓：‘谓埽身太长，人力不能压，埽不至水底，故河流不断，而绳缆多绝。今当以六十步为三节，每节埽长二十步，中间以索连属之。先下第一节，待其至底，方压第二、第三。’旧工争之，以为不可，云：‘二十步埽不能断漏，徒用三节，所费当倍，而决不塞。’超谓之曰：‘第一埽水信未断，然势必杀半。压第二埽，止用半力，水纵未断，不过小漏耳。第三节乃平地施工，足以尽人力。处置三节既定，即上两节自为浊泥所淤，不烦人功。’申锡主前议，不听超说。……既定而埽果流，而河决愈甚，申锡坐谪。卒用超计，商胡方定。”

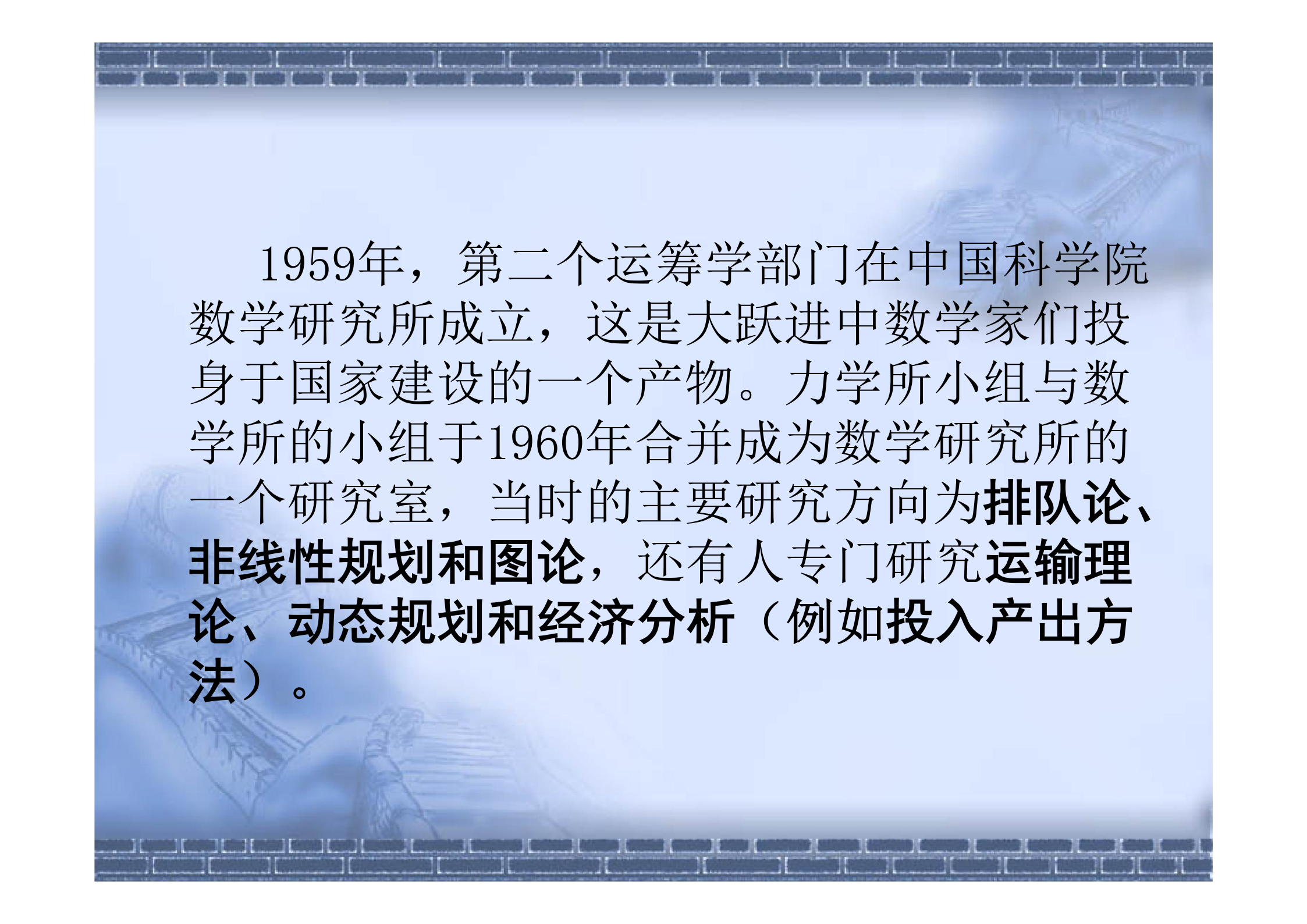
古代工程中的运筹思想

- “土木之变”：亦称土木堡之变，指发生于1449年（明正统十四年）明英宗朱祁镇北征瓦剌的惨败事变。
- 蒙古瓦剌部首领也先大举进兵明境，明英宗在宦官王振的怂恿下，不顾群臣劝阻，七月明英宗令皇弟留守，亲率大军出征。八月至大同，闻前线战败消息后，王振决定回师。退至土木堡时被也先率军包围，军队死伤惨重，王振被杀，英宗被也先俘去，兵部尚书邝埜、户部尚书王佐等66名大臣战死，史称“土木之变”，也称“土木堡之变”。
- 土木之变后，明英宗沦为瓦剌军队的阶下囚，于谦同文武官、内外臣拥立朱祁钰称帝，重新建立明朝政治核心。
- 于谦，北京保卫战，入卫京师
- 通州运粮

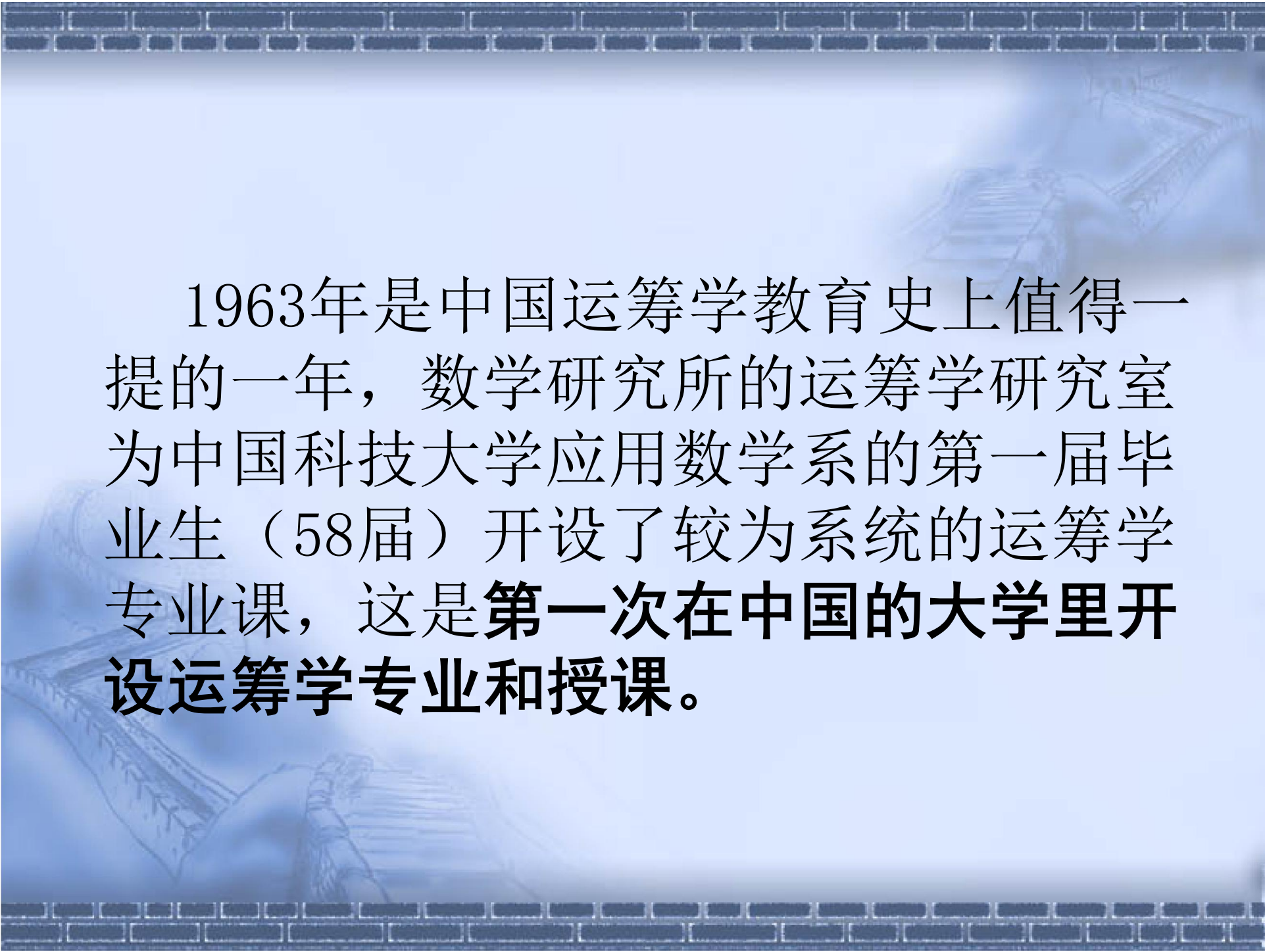
现代运筹学在中国的兴起

现代运筹学被引入中国是在五十年代后期。中国第一个运筹学小组在**钱学森、许国志**先生的推动下在1956年于中国科学院力学研究所成立。

钱学森先生在MIT取得硕士学位，在加州理工大学（California Institute of Technology）取得博士学位后成为该校的第一位Goddard讲座教授。许国志先生在堪萨斯大学取得博士学位后，在马里兰大学流体力学和应用数学研究所当研究员。他们两人是第一个运筹学小组的领导者。



1959年，第二个运筹学部门在中国科学院数学研究所成立，这是大跃进中数学家们投身于国家建设的一个产物。力学所小组与数学所的小组于1960年合并成为数学研究所的一个研究室，当时的主要研究方向为**排队论、非线性规划和图论**，还有人专门研究**运输理论、动态规划和经济分析**（例如**投入产出方法**）。



1963年是中国运筹学教育史上值得一提的一年，数学研究所的运筹学研究室为中国科技大学应用数学系的第一届毕业生（58届）开设了较为系统的运筹学专业课，这是**第一次在中国的大学里开设运筹学专业和授课。**

五十年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上，其中一个广为流传容易明白的例子就是“打麦场的选址问题”，目的在于解决当时手工收割为主的情况下如何节省人力和时间。国际上大家都知道的“中国邮路问题”（Chinese Postman Problem）模型也是在那个时期由管梅谷教授提出的。这些都是典型的组合优化问题。所以，现在非常热门的“物流学”，在当时就有一些雏形的研究，但可惜中国的大工业落后，又不是市场环境，使我们在相当长的时期中远离了当代“物流学”的发展主流。

什么是最优化？

- 从若干可能的安排或方案中寻求某种意义下的最优安排或方案，数学上称为之为最优化 (Optimization)。
- 运筹学 (Operations Research - OR) 的一个分支。

什么是组合最优化？

定义： 所谓组合最优化 (Combinatorial Optimization) 又称离散优化 (Discrete Optimization)，它是通过数学方法去寻找离散事件的最优编排、分组、次序或筛选等。这类问题可用数学模型描述为：

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.t. } & g(x) \geq 0, \\ & x \in D, \end{aligned}$$

其中 D 表示有限个点组成的集合 (定义域)， f 为目标函数， $F=\{x|x \in D, g(x) \geq 0\}$ 为可行域。

优化问题三要素：(Min, f , F) 或 (Max, f , F)

组合最优化的研究领域

- 组合优化研究具有离散结构的优化问题解的性质和求解方法，把组合学与图论、拟阵与多面体、网络流与连通性、近似算法与计算复杂性、计算几何等有机地结合起来。
- 属于运筹学与计算机科学的交叉领域。
- 运筹学和计算机科学共同关注的关键研究课题就是求解问题的有效性。
- 组合优化为离散问题的有效计算提供了理论基础和各类方法。

组合最优化的研究领域

- 随着信息科学和网络技术的快速发展，特别是改变世界和人类生活方式的互联网及其延伸出来的物联网和社会网络的创新式生长，组合优化研究的模型、理论及方法愈来愈丰富。
- 组合优化研究领域可分为**计算复杂性理论、算法设计与分析和应用**三个主要研究范畴。

组合最优化的研究领域

- 计算复杂性理论研究组合优化问题的困难程度和相应计算效能的极限；
- 算法理论在复杂性的假设下致力于最有效的算法的设计和分析；
- 应用领域则利用算法的理论成果结合模型本身的特点去解决实际问题。

两类组合优化问题

- 组合优化问题依据其特征可以分成如下两类：
- **数字化的优化问题：**如划分问题（Partition）、装箱（Bin Packing）、背包（Knapsack）、调度（Scheduling）等。这类问题的刻画依赖于数量或向量值及其之间的约束。
- **结构化的优化问题：**如网络流（Flow）、网络设计（Network Design）、旅行商（Travelling Salesman Problem）、选址问题（Facility Location）等。这类问题则通过图和网络刻画元素之间的拓扑联系。

算法设计与分析的研究方法

1. 一般问题的算法设计与分析

- 一类结构优化问题的原始-对偶算法
- 多面体组合学
- 拟阵

2. NP-难问题的算法设计与分析

- NP-难问题的最优化算法：整数规划、动态规划、分支定界、割平面
- NP-难问题的近似算法
- NP-难问题的近似方案
- NP-难问题的启发式算法

算法设计与分析的研究方法

3. 一些著名的 **NP**-难的算法设计与分析

- 旅行商问题
- 调度问题装箱问题
- 斯坦纳树问题
- 选址问题
- 背包问题

1.3 组合最优化与计算机数学

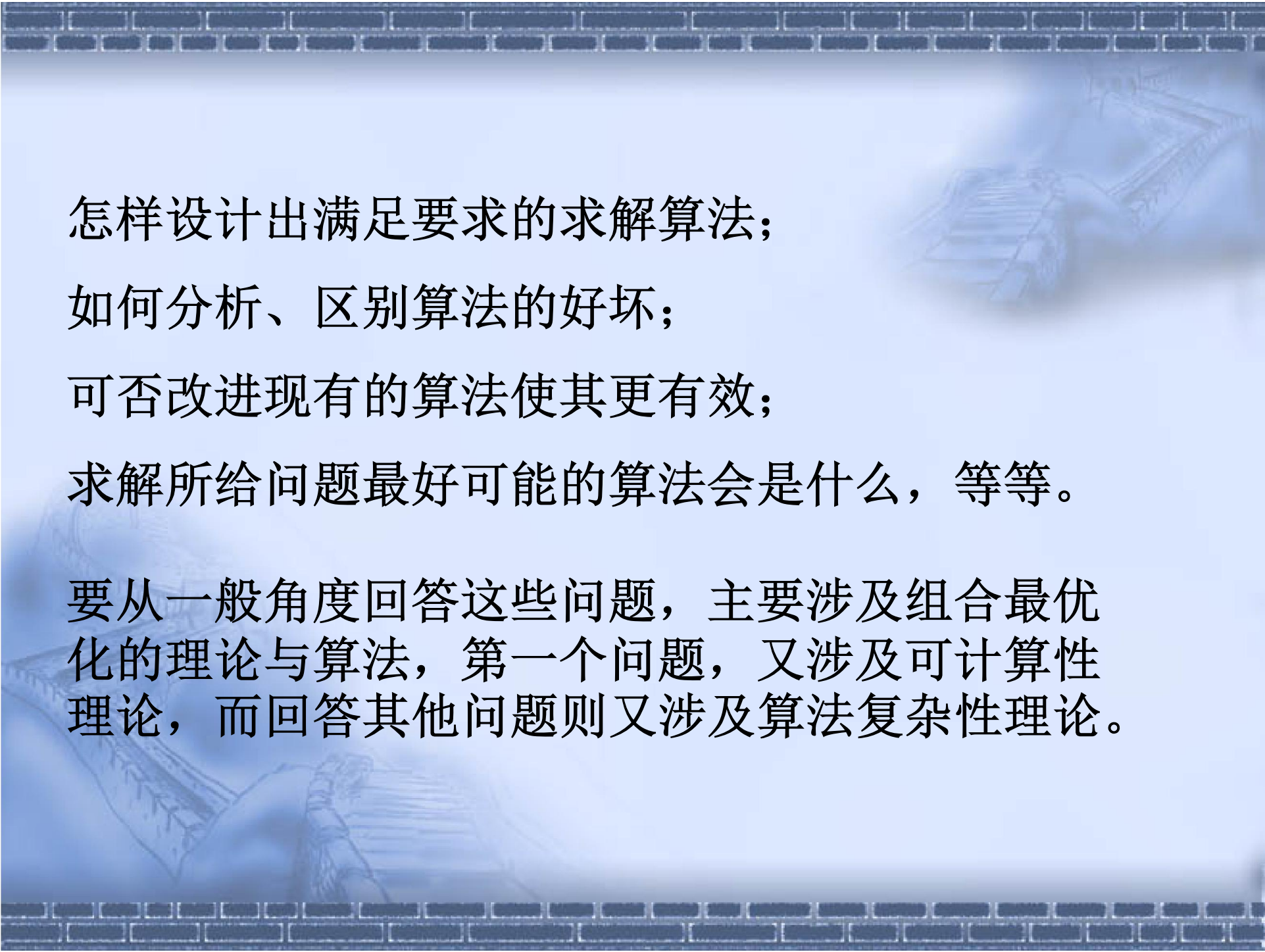
(1) 什么是计算机数学？

依剑桥大学计算机系列丛书中《计算机数学》一书的作者Cooke & Bez的观点，早期：国外所指计算机数学相当于我们现在所说的主要包括集合论、关系、代数结构、数据结构、基本的计算几何、形式语言和自动机等内容。因此，计算机数学是以离散量为研究对象的，它与计算机的软硬件结构密切相关，其目的在于帮助人们更深入地理解计算机的基本原理。

现在：随着计算机科学与技术的蓬勃发展，特别是计算机在各个领域的广泛应用，计算机数学所研究的内容也在不断拓广与深入。人们发现由数理逻辑研究所产生的可计算性理论对于准确刻画计算机的计算能力非常有用，并由此导致了所谓的不可解性、难解性以及计算复杂性等理论。现在，谈到计算机数学较深层次的内容时，人们则主要是指形式语言与自动机、可计算性、不可解性与计算复杂性等理论。

(2) 组合最优化与计算机数学之间的关系

实际应用中，当我们想利用计算机做任何一件事情（包括传统的各种数值计算与越来越多的非数值计算）时，首先会考虑的是所给问题能不能用计算机解决？若能解决，则总是希望在内存空间占用量尽可能少的同时，用尽可能短的时间来完成其求解任务。这一要求引出一系列相互联系而又非常实际的问题：



怎样设计出满足要求的求解算法；

如何分析、区别算法的好坏；

可否改进现有的算法使其更有效；

求解所给问题最好可能的算法会是什么，等等。

要从一般角度回答这些问题，主要涉及组合最优化的理论与算法，第一个问题，又涉及可计算性理论，而回答其他问题则又涉及算法复杂性理论。

(3) 组合最优化是计算机数学的一个重要组成部分

以上既是组合最优化的研究内容，也是计算机数学深层次的主要内容。所以，可以说：组合最优化是计算机数学的一个重要组成部分。

(4) 计算机科学中最重要的32个算法

奥地利符号计算研究所（Research Institute for Symbolic Computation，简称RISC）的Christoph Koutschan博士在自己的页面上发布了一篇[文章](#)，提到他做了一个调查，参与者大多数是计算机科学家，他请这些科学家投票选出最重要的算法，以下是这次调查的结果，按照英文名称字母顺序排序。

1. **A* 搜索算法**——图形搜索算法，从给定起点到给定终点计算出路径。其中使用了一种启发式的估算，为每个节点估算通过该节点的最佳路径，并以之为各个地点排定次序。算法以得到的次序访问这些节点。因此，**A*搜索算法**是最佳优先搜索的范例。
2. **集束搜索**（又名定向搜索，**Beam Search**）——最佳优先搜索算法的优化。使用启发式函数评估它检查的每个节点的能力。不过，集束搜索只能在每个深度中发现最前面的**m**个最符合条件的节点，**m**是固定数字——集束的宽度。
3. **二分查找**（**Binary Search**）——在线性数组中找特定值的算法，每个步骤去掉一半不符合要求的数据。
4. **分支界定算法**（**Branch and Bound**）——在多种最优化问题中寻找特定最优化解决方案的算法，特别是针对离散、组合的最优化。

5. **Buchberger**算法——一种数学算法，可将其视为针对单变量最大公约数求解的欧几里得算法和线性系统中高斯消元法的泛化。
6. **数据压缩**——采取特定编码方案，使用更少的字节数（或是其他信息承载单元）对信息编码的过程，又叫来源编码。
7. **Diffie-Hellman**密钥交换算法——一种加密协议，允许双方在事先不了解对方的情况下，在不安全的通信信道中，共同建立共享密钥。该密钥以后可与一个对称密码一起，加密后续通讯。
8. **Dijkstra**算法——针对没有负值权重边的有向图，计算其中的单一起点最短算法。
9. **离散微分算法**（**Discrete differentiation**）
10. **动态规划算法**（**Dynamic Programming**）——展示互相覆盖的子问题和最优子架构算法。

11. 欧几里得算法 (Euclidean algorithm) —— 计算两个整数的最大公约数。最古老的算法之一，出现在公元前300年前欧几里得的《几何原本》。

12. 期望-最大算法 (Expectation-maximization algorithm, 又名EM-Training) —— 在统计计算中，期望-最大算法在概率模型中寻找可能性最大的参数估算值，其中模型依赖于未发现的潜在变量。**EM**在两个步骤中交替计算，第一步是计算期望，利用对隐藏变量的现有估计值，计算其最大可能估计值；第二步是最大化，最大化在第一步上求得的最大可能值来计算参数的值。

13. 快速傅里叶变换 (Fast Fourier transform, FFT) —— 计算离散的傅里叶变换 (**DFT**) 及其反转。该算法应用范围很广，从数字信号处理到解决偏微分方程，到快速计算大整数乘积。

14. 梯度下降 (Gradient descent) —— 一种数学上的最优化算法。

15. 哈希算法 (Hashing)

16. 堆排序 (Heaps)

17. Karatsuba乘法——需要完成上千位整数的乘法的系统中使用，比如计算机代数系统和大数程序库，如果使用长乘法，速度太慢。该算法发现于1962年。

18. LLL算法 (Lenstra-Lenstra-Lovasz lattice reduction) ——以格规约 (lattice) 基数为输入，输出短正交向量基数。LLL算法在以下公共密钥加密方法中有大量使用：背包加密系统 (knapsack)、有特定设置的RSA加密等等。

19. 最大流量算法 (Maximum flow) ——该算法试图从一个流量网络中找到最大的流。它优势被定义为找到这样一个流的值。最大流问题可以看作更复杂的网络流问题的特定情况。最大流与网络中的界面有关，这就是最大流-最小截定理 (Max-flow min-cut theorem)。Ford-Fulkerson 能找到一个流网络中的最大流。

20. 合并排序 (Merge Sort)

21. 牛顿法 (Newton's method) ——求非线性方程 (组) 零点的一种重要的迭代法。

22. Q-learning学习算法——这是一种通过学习动作值函数 (action-value function) 完成的强化学习算法, 函数采取在给定状态的给定动作, 并计算出期望的效用价值, 在此后遵循固定的策略。Q-learning的优势是, 在不需要环境模型的情况下, 可以对比可采纳行动的期望效用。

23. 两次筛法 (Quadratic Sieve) ——现代整数因子分解算法, 在实践中, 是目前已知第二快的此类算法 (仅次于数域筛法Number Field Sieve)。对于110位以下的十位整数, 它仍是最快的, 而且都认为它比数域筛法更简单。

24. RANSAC——是“RANdom SAmple Consensus”的缩写。该算法根据一系列观察得到的数据, 数据中包含异常值, 估算一个数学模型的参数值。其基本假设是: 数据包含非异化值, 也就是能够通过某些模型参数解释的值, 异化值就是那些不符合模型的数据点。

25. RSA——公钥加密算法。首个适用于以签名作为加密的算法。**RSA**在电商行业中仍大规模使用，大家也相信它有足够安全长度的公钥。

26. Schönhage-Strassen算法——在数学中，**Schönhage-Strassen**算法是用来完成大整数的乘法的快速渐近算法。其算法复杂度为： $O(N \log(N) \log(\log(N)))$ ，该算法使用了傅里叶变换。

27. 单纯型算法（Simplex Algorithm）——在数学的优化理论中，单纯型算法是常用的技术，用来找到线性规划问题的数值解。

28. 奇异值分解（Singular value decomposition，简称SVD）——在线性代数中，**SVD**是重要的实数或复数矩阵的分解方法，在信号处理和统计中有多种应用，比如计算矩阵的伪逆矩阵（以求解最小二乘法问题）、解决超定线性系统（**overdetermined linear systems**）、矩阵逼近、数值天气预报等等。

29. 求解线性方程组（**Solving a system of linear equations**）——线性方程组是数学中最古老的问题，它们有很多应用，比如在数字信号处理、线性规划中的估算和预测、数值分析中的非线性问题逼近等等。求解线性方程组，可以使用**Gauss-Jordan elimination**，或是 **Cholesky decomposition**。

30. **Strukturtensor**算法——应用于模式识别领域，为所有像素找出一种计算方法，看看该像素是否处于同质区域（**homogenous region**），看看它是否属于边缘，还是是一个顶点。

31. 合并查找算法（**Union-find**）——给定一组元素，该算法常常用来把这些元素分为多个分离的、彼此不重合的组。不相交集（**disjoint-set**）的数据结构可以跟踪这样的切分方法。合并查找算法可以在此种数据结构上完成两个有用的操作：

查找：判断某特定元素属于哪个组。

合并：联合或合并两个组为一个组。

32. 维特比算法（Viterbi algorithm）——寻找隐藏状态最有可能序列的动态规划算法，这种序列被称为维特比路径，其结果是一系列可以观察到的事件，特别是在隐藏的Markov模型中。

这些算法中直接是运筹学中的算法就有**12**个！

其中是组合优化中的算法有**9**个！

1.4 组合最优化与计算机通讯网络

(1) 通信网络优化问题与组合优化问题

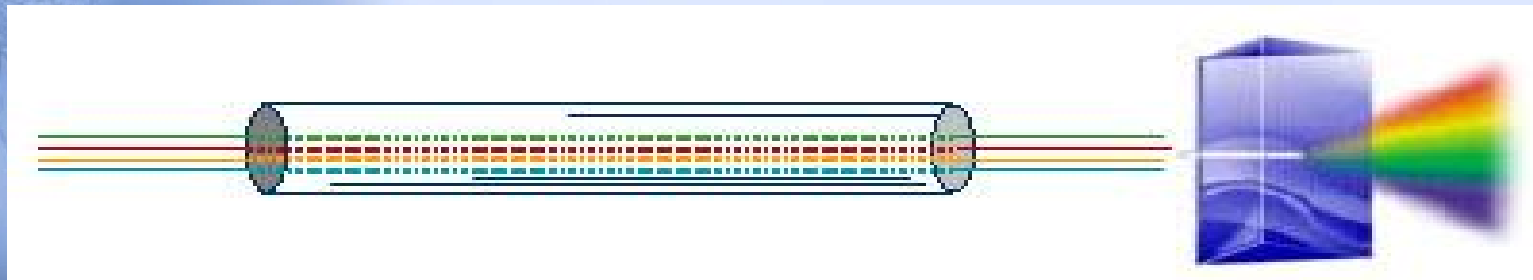
1) 网络中波长分配问题

《Physics World》(2002年9月)刊登了由读者评选出的最美丽的物理实验前10位的排名，其中第四位是牛顿的棱镜分解太阳光（随后美国《New York Times》作了简单的解释）。以前大家都认为白光是一种纯的没有其它颜色的光（亚里士多德就是这样认为的），而彩色光是一种不知何故发生变化的光。而牛顿并不这样认为。为了验证这个假设，牛顿把一面三棱镜放在阳光下，透过三棱镜，光在墙上被分解为不同颜色(光谱)。牛顿的结论是：正是这些红、橙、黄、绿、青、蓝、紫基础色有不同的色谱才形成了表面上颜色单一的白色光，如果你深入地看看，会发现白光是非常美丽的。

波长分配问题是光纤通信网络中的核心问题之一

在光纤通信网络中，通过使用波分复用技术（**WDM-Wavelength Division Multiplexing**）来充分利用巨大的带宽。一束光纤可以同时传输多个信道，只要它们使用不同的波长。因为波长是一种有限的网络资源，所以如何充分利用有限的波长资源，即给所需要建立的信道合理地分配波长

（**wavelength assignment**），以满足尽可能多的通信需求，就是光纤通信网络中的核心问题之一。



波长分配问题(Wavelength assignment problem, WAP):

- 实例：一个图 $G(V, E)$ 和一些路(path)的集合 P .
- 可行解： w 个波长恰当地分配给集合 P 中地所有路.
- 目标：使得 w 尽可能地小。

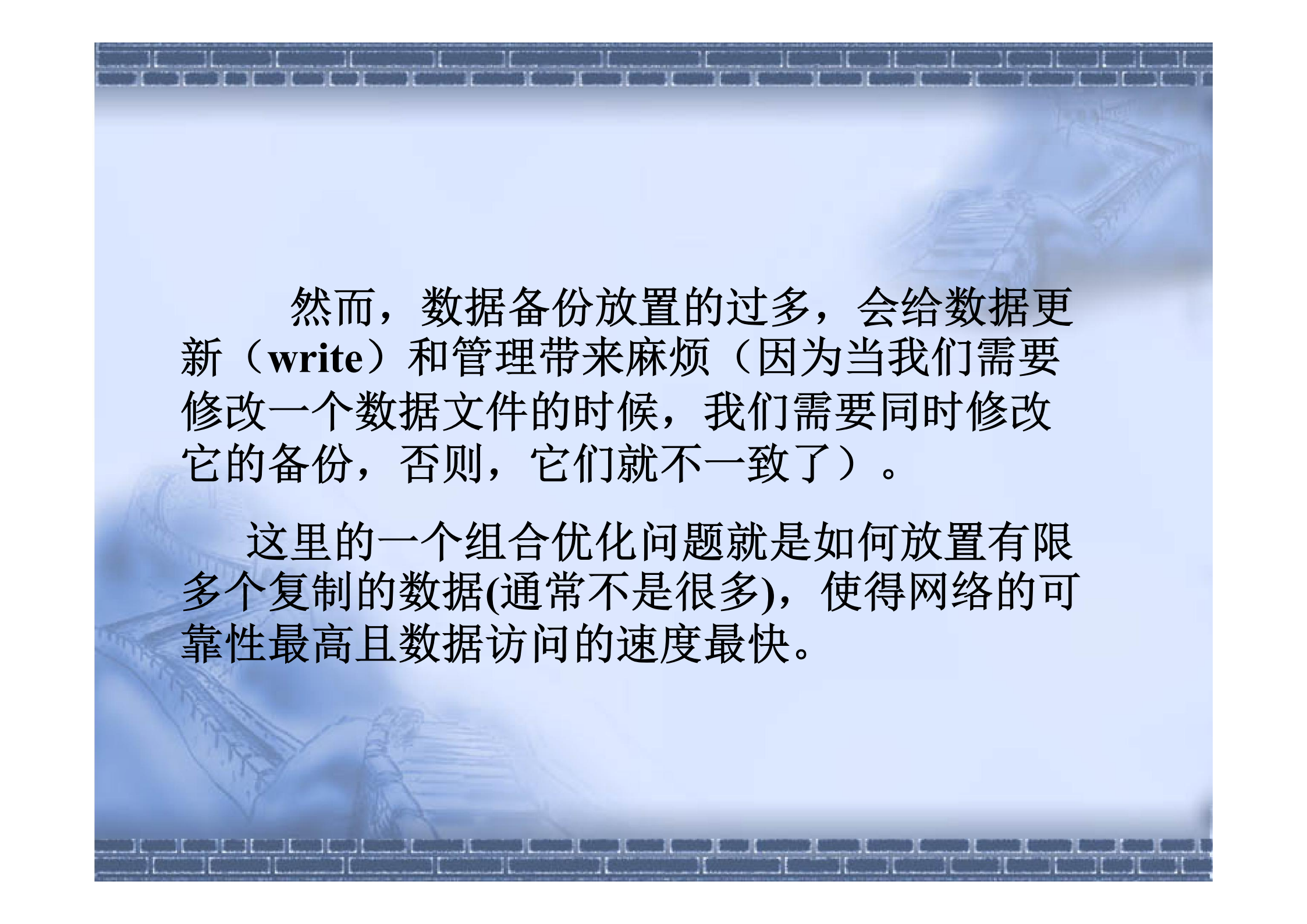
路由和波长分配问题(Routing-WAP, RWAP):

- 实例：一个图 $G(V, E)$ 和一些点对(node-pair)的集合 P .
- 可行解：给 P 中的每一个点对找一条路，
并且将 w 个波长恰当地分配给所有的路.
- 目标：使得 w 尽可能地小。

2)数据备份的放置问题

在计算机分布式系统中，可以把一个数据(文件)复制若干份（**replica**），然后把它们放到计算机网络中不同的节点上。

一方面可以达到提高终端用户读取（**read**）数据文件的速度（因为我们可以通过访问最近的网络节点来获得数据文件）；另一方面也可以增强网络的可靠性（因为某一个网络发生了故障，我们还可以通过访问（**access**）其它的网络节点来获得同样的数据文件）。



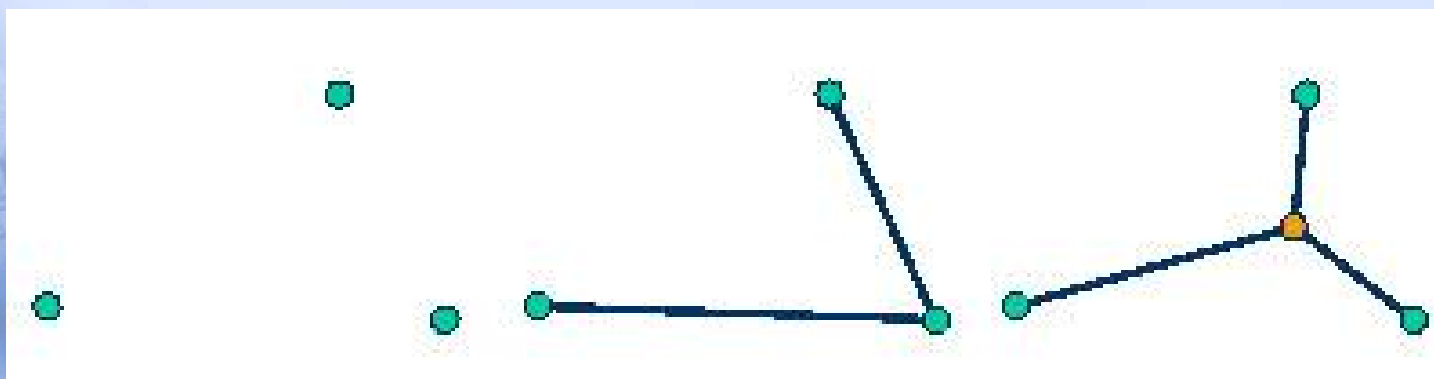
然而，数据备份放置的过多，会给数据更新（**write**）和管理带来麻烦（因为当我们需要修改一个数据文件的时候，我们需要同时修改它的备份，否则，它们就不一致了）。

这里的一个组合优化问题就是如何放置有限多个复制的数据(通常不是很多)，使得网络的可靠性最高且数据访问的速度最快。

(2).通信网络中的基本问题和数学模型

1) 网络优化设计问题

经典的最小Steiner树问题可以简单地叙述为：给定平面上若干个点，如何将它们连接起来使得连线的总长最短。注意该问题的解一定有树的结构(Steiner树)，而且可能会引入一些新的点(Steiner点)。



费玛问题

最小生成树

最小Steiner 树

在通讯网络的具体设计中，我们通常还要考虑其它实际因素/约束。例如：如果连接两点的通讯线路太长，那么信号在传输的过程中会有衰竭。一个解决的方法就是在长线路中放置若干个信号放大器（**amplifier**）。

很自然地就产生了一个组合优化的问题：就是如何设计网络使得所需要的信号放大器最少。

2) 网络优化路由问题

在通信服务中经常需要把信息从一个源点传到多个收点，即多播传输（**multicast**），如有线电视服务（**video-on-demand**），或者要把一组点联结起来（**group communication**），如电视/电话会议（**tele-conference**）。这里的核心问题之一就是如何将这些点连接起来（**routing**）。

Carlos A.S. Oliveria, Panos M. Pardalos, “A Survey of combinatorial optimization problems in multicast routing”, *Computers & Operations Research*, 32 (2005) 1953-1981.

设计求解网络优化设计问题的算法时，主要关心的是解的性质好坏（**approximation performance ratio**），主要的研究工具是（**worst-case analysis**），对于算法的复杂性（**time-complexity**）要求不是太高。另外，这类问题通常是离线问题（**off-line**），算法是全局的（**centralized**）。

设计求解网络优化路由问题的算法时，主要关心的是解是否好用或有所改进，主要的研究工具是（**simulation study**）；对于算法的时间复杂性（**time-complexity**）要求很高。因此，即使理论上有一些更好性能的算法，例如，网络上的Steiner树问题有近似比为 $11/6$ 算法（A. Zelikovsky, 1996），但是因为它们太过复杂，在实际中不会直接应用。另外，这类问题通常是在线问题（**on-line**），算法也要求是局部性的（**local**）或者是分布式的（**distributed**）。

通信网络中的基本数学模型之一就是路和树，大多数问题都是用路（**path**）和树（**tree**）来描述的。与此有关的比较典型问题，有的可以转化成下面几个组合优化问题，在度量空间（**metric spaces**）或者网络上（**networks**）。

- 极小化最小权和(最小**Steiner**树问题)
- 极小化**Steiner**点的个数(最少**Steiner** 点的**Steiner**树问题)
- 极小化最小权和(在直径约束下) (**S. Khuller et al, 1995**)
- 极小化平均点到点的距离(**D. W. Wall, 1980**)
- 极小化最大的顶点度数(**M. Furer et al, 1994**)
- 极小化图的树的分解(**N. G. Beck et al, 1998**)

3) 通信网络中新的研究问题

通信网络的核心技术和理论是在不断更新和发展的。从传统的为话务服务（**voice**）的电话网络系统，到为数据传输（**data**）的基于互联网技术的计算机网络；从铜线（**copper**）和微波（**microwave**），到光纤（**fiber**）和无线（**wireless**）。这种更新和发展是日新月异的。当前通信网络的热点领域之一是无线通信网络（**wireless networks**），相关的应用基础理论问题可以归纳为三类。

i) 基于基站的无线通信网络 (**Cellular Networks**) :

- 基站的选址问题 (**location problem**)
- 频率分配问题 (**frequency assignment problem**)
- 信号传输功率控制问题 (**transmission power control problem**)
- 连通问题
- 信号覆盖问题
- 话务均衡问题

ii) 移动Ad Hoc网络 (mobile Ad Hoc networks)

是一种无线通讯网络。它主要是由配有信号接收发器 (transceiver) 的通讯端点所构成的。通讯端点是可以移动的, 其相互间的通讯是通过无线信号的发射与接收来实现的。当信号从某一个端点发出, 位于此端点信号接收范围以内的其它端点都可以接收到该信号。移动Ad Hoc网络有很多实际的应用背景, 其中包括

- 在野外条件下的紧急救援 (search, rescue)
- 战时环境下军事通讯和联络 (soldiers, tanks, commanders)
- 城市出租车/警车的服务调度 (taxi, police cars)

一个移动Ad Hoc网络的拓扑结构可以用一个图 $G(V, E)$ 来表示，其中图的点集 V 是网络中通讯端点的集合，图的边集 E 是直接相连的通讯端点对的集合。移动Ad Hoc网络的拓扑结构的一个最显著特点就是其拓扑结构是动态的，它随着网络上通讯端点的移动和其信号发射功率强弱的调整而改变。因为在移动Ad Hoc网络中，支持通讯端点接收发无线信号的能量是由电池（battery）提供的，所以它是非常有限的网络资源。

移动Ad Hoc网络中的一个核心问题就是如何建立网络的拓扑结构以支持各种各样通讯。比较典型的问题有：

- 如何调整各个端点的无线信号发射功率（**power adjustment**），使得拓扑结构满足一定的连通性质（**connectivity**）
- 如何设计单播或者多播路由算法（**unicast/multicast routing**）
- 如何动态地检测和恢复拓扑结构的特定性质（**dynamic rebuild**）

可以选择最小化能量消耗（**energy consumption**）为上述三个问题的优化目标。这里可以是最小化所有通讯端点消耗能量的总和(以节省整个网络的能量资源)，也可以是所有通讯端点消耗能量中的最大值(以避免某个通讯端点因能源消耗过大而不能接收发信号，造成网络完全或部分地瘫痪)。

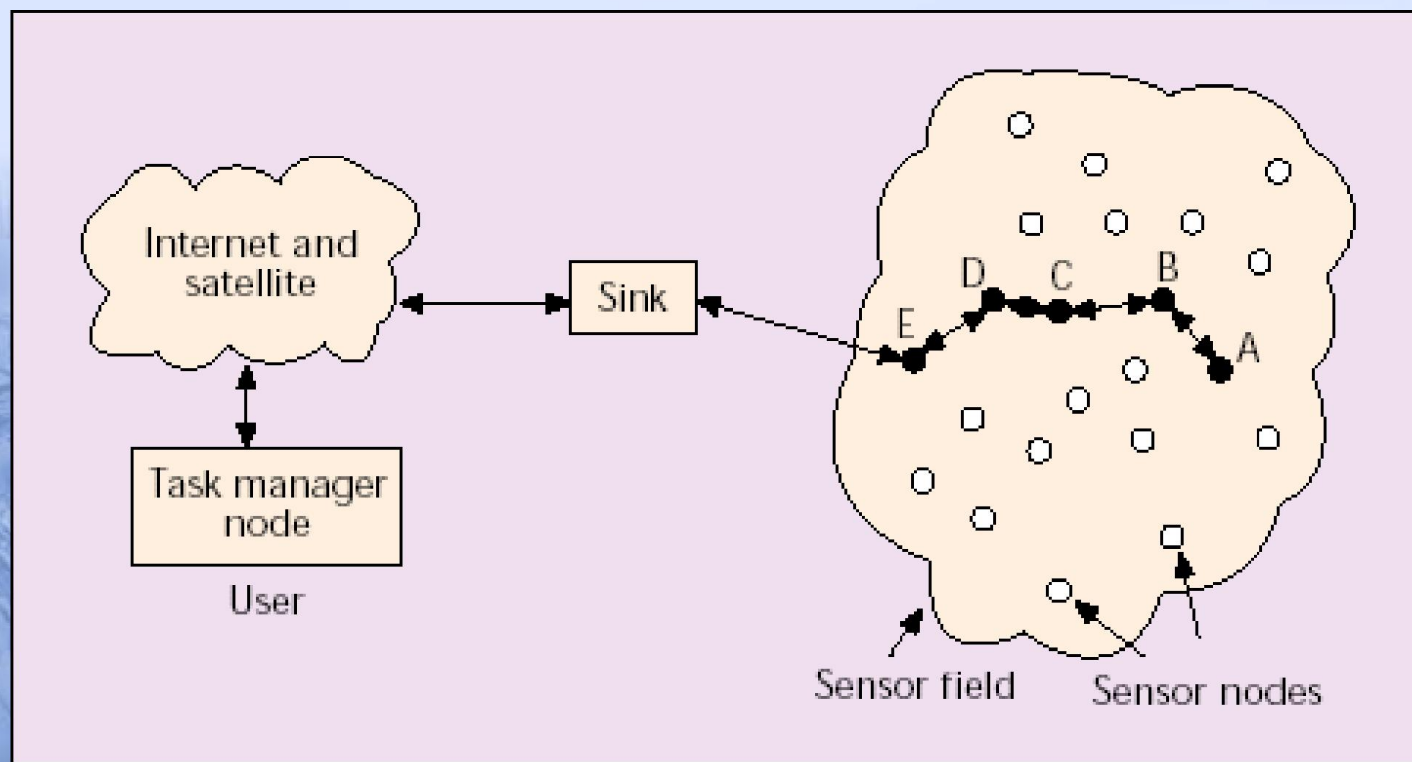
iii) 物联网--无线传感器网络 (**Wireless sensor networks**)

是一种与移动Ad Hoc网络相似的无线通讯网络。它主要是由配有传感器 (**sensors**) 的通讯端点所构成的。通讯端点通常是不动的，其相互间的通讯是通过无线信号的发射与接收来实现的。当信号从某一个端点发出，位于此端点信号接收范围以内的其它端点都可以接收到该信号。传感器网络有很多实际的应用背景。

- 由于近来微型制造的技术、通讯技术及电池技术的改进，促使微小的传感器可具有感应、无线通讯及处理信息的能力；
- 此类传感器不但能够能感应及侦测环境的目标物及改变，并且可处理收集到的数据，并将处理过的资料以无线传输的方式送到资料收集中心或基地台 (base station)；
- 无线传感器网络由称为“微尘 (mote)”的微型计算机构成。这些微型计算机通常指带有无线链路的微型独立节能型计算机。无线链路使得各个微尘可以通过自我重组形成网络，彼此通信，并交换有关现实世界的信息。

Sensor Networks System Architecture:

一个典型的传感器网络的体系构建包括分布式传感器节点（群）、接收发送器、互联网和用户界面等。



无线传感器网络的应用

军事应用

- 在友军的人员、装备及军火上加装**sensor**以供识别；
- 监控战场上的状态；
- 将**sensor**投掷于敌军阵营，完成侦察任务；
- 当智能军火导引器；
- 侦察及判定核子、生物和化学攻击；
- 实现网络中心战的关键技术(SSW:Smart Sensor Web)。

环境应用

- 将几百万个sensor布置于森林中，以对任何火灾地点的判定提供最快的信息；
- sensor network能提供遭化学污染的位置及检定出何种化学污染，不需要人亲自冒险进入受污染区；
- 水灾判定；
- 监测空气污染、水污染及土壤污染；
- 生态上的监控，例如生物栖息地与觅食习惯。

健康应用

家庭应用

传感器网络中的一个核心问题就是能量控制问题。比较典型的问题有：

- 路由问题；
- 能量消耗控制问题
- 低能耗、高速率、长生命周期的无线传感器网络的随机自组织通信协议、通信方式及自重构、自调整性；
- 传感器网络的可扩展性、容错性、可维护性及安全性、隐私性；
- 适用于传感器网络的网络通信模式、支持传感器网络通信的各种协议、时间同步、任务分配与协调控制以及相应的软硬件资源等。

压缩感知的组合优化模型

- 经典的香农采样定理认为，为了不失真地恢复模拟信号，采样频率应该不小于奈奎斯特频率（即模拟信号频谱中的最高频率）的两倍。但是其中除了利用到信号是有限带宽的假设外，没利用任何的其它先验信息。采集到的数据存在很大程度的冗余。
- Donoho等人提出的压缩感知方法(**Compressed Sensing**或**Compressive Sampling, CS**)充分运用了大部分信号在预知的一组基上可以稀疏表示这一先验信息，利用随机投影实现了在远低于奈奎斯特频率的采样频率下对压缩数据的直接采集。
- 该方法不仅为降低采样频率提供了一种新思路，也为其它科学领域的研究提供了新的契机。

压缩感知的组合优化模型

压缩感知组合优化模型：在满足 $y = \phi f$ 的所有情况中找到的具有最稀疏特性的信号即为所求，即求解如下的最优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \|f\|_0 \\ \text{s.t.} \quad & y = \phi f \end{aligned}$$

其中 $\|f\|_0$ 代表 f 的零范数，即其中非零元素的个数。

1.5 组合最优化与管理科学

- 经典问题：

旅行商问题、背包问题；

- 典型问题：

定价问题、占线问题、组合投资、股票买卖、物流配送（运输、选址、仓储）、博弈中有效均衡解的计算

- 定价问题：一个商品如何定价，可以转化为 $\min\max$ 问题

$$\min \max(P)$$

用户 厂商

- 占线问题：指只知道局部信息而需要对全局做出决策的一类问题

占线维修队调度问题：

- 某工厂的用户分布于全国几十个大中城市，所有的维修任务都由往来于各个城市之间的维修小分队来完成。由于维修任务较多，维修人员长期驻外，而且维修小分队调度频繁，如何减少开支。管理者虽然可以设计出调度的方案，但是对于维修任务的随机性，不能提前决定新的任务由哪个维修队来完成。可以看做是一个占线交通费用管理问题。

占线车辆选线(堵塞)问题:

- 在一个有限网络（连通图 G ）中，车辆在运输过程中希望从 O 点运到 D 点，尽管事先的最优路径是已知的，但是有时某些路径因为天气或路况原因不能通过，并且仅当到达了某一点时才能知道下一条路径是否堵塞。问题是在这种不确定的情况下，如何设计出一个好的运输路径方案。

大规模网络的布线,Wireless Broadcast问题

- **Global (Centralize)**

传统的方法:

- 采用集中式处理 (**Centralize**) , 实现全局 (**Global**) 最优化的近似。
- 需要大规模的数据收集和功能强大的处理器。
- 随着网络的增大和动态化,传统的方法已不适用。

Local (Localize)

- 采用局部（**Localize**）处理的方法，实现全局最优化的近似。
- 不需要处理大规模的数据和功能强大的处理器，局部调整方便，及时处理数据，应对各种变化。

国家物流

- **国家物流：**国家物流在总体上是一个有机的整体，通过整体优化实现全局最优。
- **目标**
 - 优质服务水准
 - 最低物流费用
- **区域物流**
 - 通过区域物流规划和区域物流优化，实现国家物流最优化的近似。

最优化/运筹学与诺贝尔奖

1968年诺贝尔奖设经济学奖,

从1969到1992年32名获奖者中有13人(40%)从事过与线性规划有关的研究工作

还有因研究经济博弈论而获奖的NASH等3人 (1994)

1.6 组合最优化问题的研究方法

- 对于组合优化问题，我们关心的一般不是最优解的存在性和唯一性。
- 如何有效地求解？
- 复杂性的度量？

1.7 本课程特点

- This course describes the most important ideas, theoretical results, and algorithms in combinatorial optimization.
- We have conceived it as an advanced graduate text which can also be used as an up-to-date reference work for current research.

1.8 本课程包含的基本内容

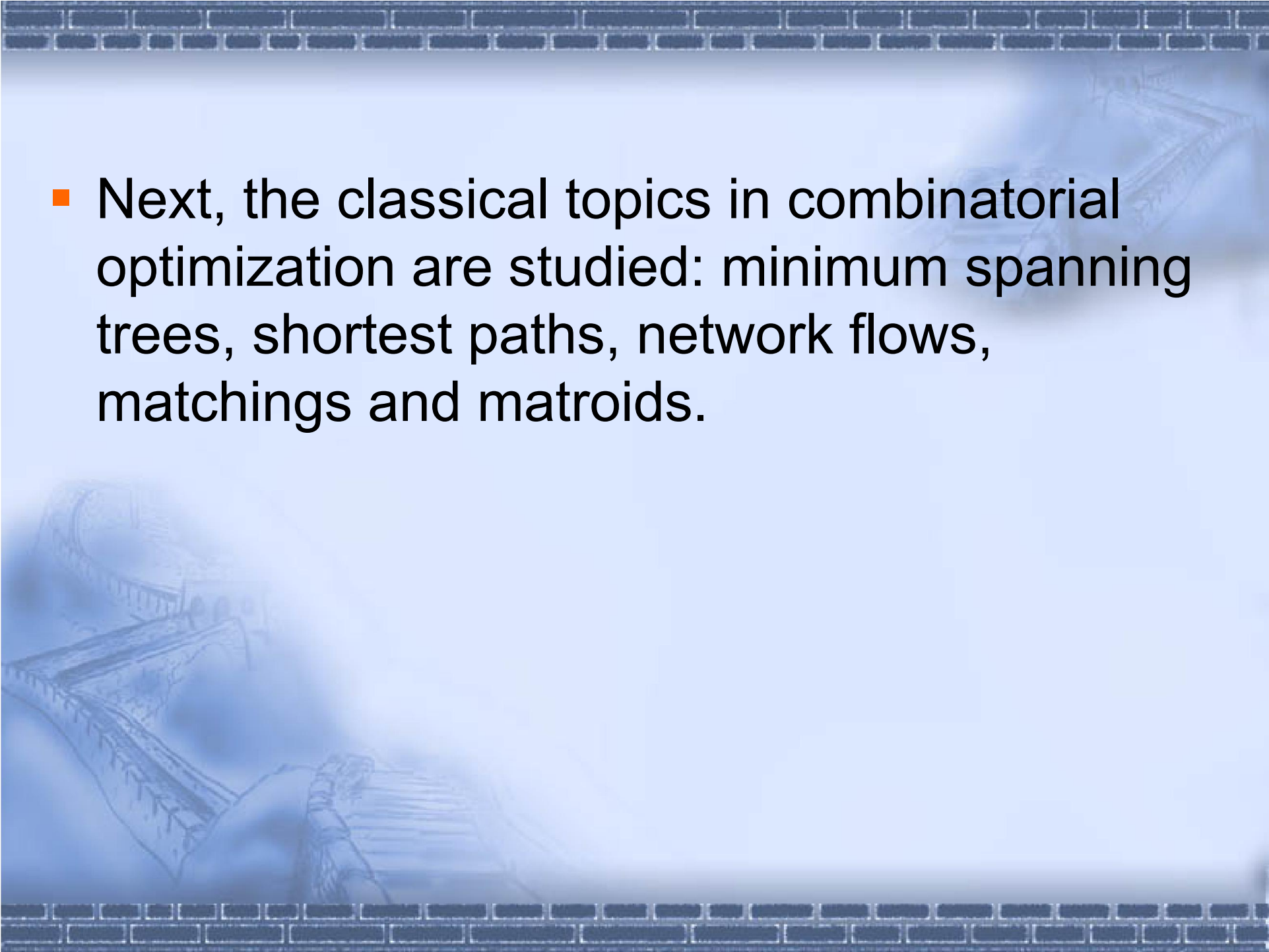
- graph theory, linear and integer programming, and complexity theory.
- covers classical topics in combinatorial optimization as well as very recent ones.
- the emphasis is on theoretical results and algorithms with provably good performance.
- Applications and heuristics are mentioned only occasionally.

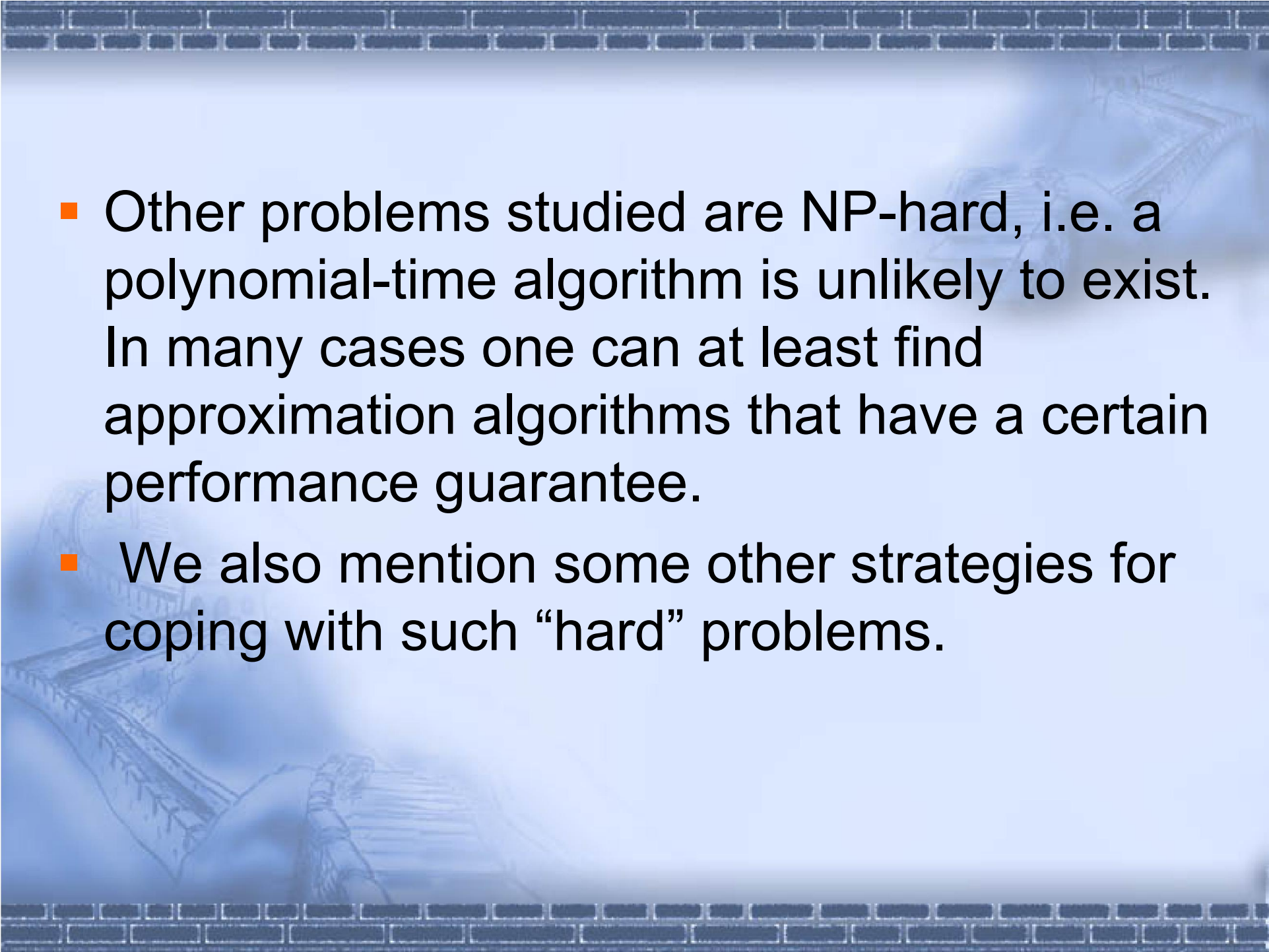
1.9 Roots, Motivation and Focus on

- Combinatorial optimization has its roots in combinatorics, operations research, and theoretical computer science.
- A main motivation is that thousands of real-life problems can be formulated as abstract combinatorial optimization problems.
- We focus on the detailed study of classical problems which occur in many different contexts, together with the underlying theory.

1.10 Structure of the Course

- Most combinatorial optimization problems can be formulated naturally in terms of graphs and as (integer) linear programs.
- Therefore this course starts, after an introduction, by reviewing basic graph theory and proving those results in linear and integer programming which are most relevant for combinatorial optimization.

- 
- Next, the classical topics in combinatorial optimization are studied: minimum spanning trees, shortest paths, network flows, matchings and matroids.

- 
- Other problems studied are NP-hard, i.e. a polynomial-time algorithm is unlikely to exist. In many cases one can at least find approximation algorithms that have a certain performance guarantee.
 - We also mention some other strategies for coping with such “hard” problems.

1.11 课程简介

- 内容：组合优化模型、算法及复杂性理论
- 对象：数学、计算机科学、管理科学、工程科学等
- 主要参考书：

[1] C.H. Papadimitriou & K. Steiglitz, “Combinatorial Optimization -Algorithm and Complexity”

[2] Alexander Schrijver, “A Course in Combinatorial Optimization”

[3] W. J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank & A. Schrijver, “Combinatorial Optimization ”

- 成绩：作业 ---- 30%左右 考试 ---- 70%左右

1.12 课程主要内容

- 一类结构组合优化问题的原始-对偶算法
- 一类结构组合优化问题的有效算法
- 多面体组合学
- 拟阵
- NP和NP-完备性
- NP-难问题的研究方法

1.13 课程计划

- 第一章 引言
- 第二章 预备知识
- 第三章 算法与计算复杂性
- 第四章 多面体、多胞形、**Farkas**引理、线性规划
- 第五章 一类结构组合优化问题的原始-对偶算法
- 第六章 一类结构组合优化问题的有效算法
- 第七章 多面体组合学
- 第八章 旅行售货商问题
- 第九章 拟阵
- 第十章 **NP**和**NP**-完备性

1.14 课程选课情况

- 77人（截止到2016年2月29日）
- 分布在20个培养单位
- 分布在13个一级学科
- 分布在22个专业

“组合最优化”按一级学科统计选课信息

序号	一级学科名称	人数
1	计算机科学与技术	24
2	数学	22
3	控制科学与工程	10
4	管理科学与工程	4
5	物理学	4
6	信息与通信工程	3
7	工程硕士	2
8	航空宇航科学与技术	2
9	系统科学	2
10	地球物理学、电子科学与技术等	各1