第五章 组合优化问题的原始－对偶算法-5

5.4 Hitchcock 问题的原始－对偶算法——$\alpha\beta$ 算法

Hitchcock 问题是一个非常著名的问题，在 1941 年由 Hitchcock 等人提出。

有某一种物资，m 个产地（发点），产量为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，n 个销地（收点），需求为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，由第 i 产地运往第 j 个销地的运费为 c_{ij}，在满足供需要求地情况下，如何分配物资，使得总运费最小？

一、Hitchcock 问题的线性规划模型

给定 $m, n \in Z^+$，供应量 $a_i \in R^+, i = 1,2,\cdots,m$，需求量 $b_j \in R^+, j = 1,2,\cdots,n$，以及费用 $c_{ij} \in R^+, i = 12,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。令 f_{ij} 表示第 i 个发点运往第 j 个收点的运量，则 Hitchcock 问题的线性规划模型为：

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i,j} c_{ij} f_{ij} \\
&\sum_{j=1}^{n} f_{ij} = a_i, i = 1,2,\cdots,m \qquad (1) \\
&\sum_{i=1}^{m} f_{ij} = b_j, i = 1,2,\cdots,n \qquad (2) \\
&f_{ij} \geq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(LP)}
$$

当 $a_i = b_j = 1$ 时，Hitchcock 问题就是著名的指派问题，而指派问题的“匈牙利方法”是一般的原始－对偶算法的先驱。

二、Hitchcock 问题的对偶规划

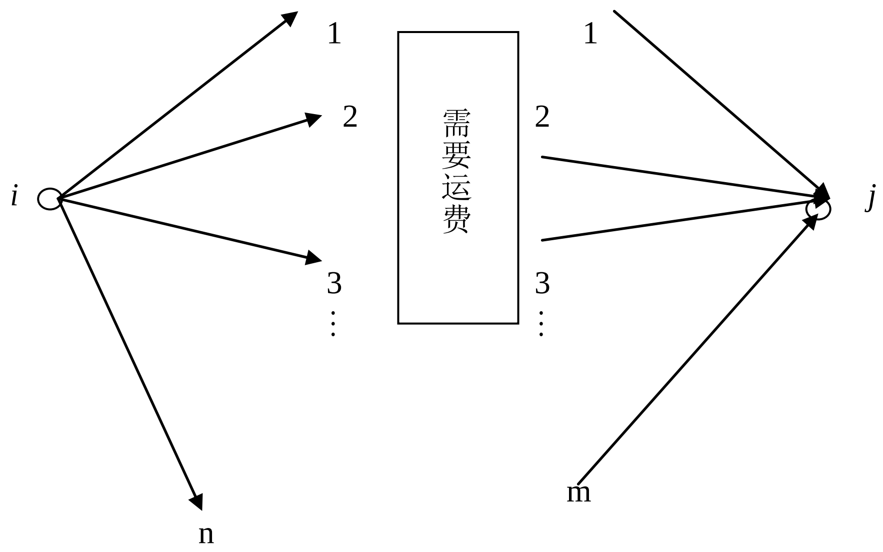
要组合化费用，就要考察 Hitchcock 问题的线性规划模型的对偶规划。对于 Hitchcock 问题的线性规划模型的第一组约束（即 m 个发点对应的约束）中的每一个约束定义一个对偶变量 $\alpha_i (i = 1,2,\cdots,m)$，第二组约束（即 n 个收点对应的约束）中的每一个约束定义一个对偶变量 $\beta_j (j = 1,2,\cdots,n)$，得到(LP)的对偶规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \varpi = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j \\
&\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}, i = 12,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \qquad \text{(D)} \\
&\alpha_i, \beta_j \text{无限制}
\end{aligned}
$$

思考题：对偶规划问题中对偶变量α_i和β_j的含义是什么？

α_i：第 i 个发点对应的变量，第 i 个发点有 a_i 单位的货物需要发走 $(i=1,2,\cdots,m)$；

β_j：第 j 个收点对应的变量，第 j 个收点需要收到 b_j 单位的货物 $(j=1,2,\cdots,n)$。



换个思路，假设不运输，发点和收点都就地解决，第i个发点有a_i单位的货物就地解决，第 j 个收点需要b_j单位的货物就地解决。假设第i个发点单位货物就地解决所需要的额外费用为α_i，第 j 个收点单位货物就地解决所需要的额外费用为β_j（可以认为是中央政府提供的补贴价格），则必须有：

$$\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}$$

否则的话，我们宁愿就将第i产地的货物运往第 j 个销地。在满足这个前提下，地方政府获得的利益最大化，即目标函数为：

$$\max \varpi=\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}b_j\beta_j$$

从而得到 Hitchcock 问题的对偶规划问题(D)。

三、Hitchcock 问题的原始－对偶算法——组合化费用

Hitchcock 问题的对偶规划问题(D)的初始可行解为：$\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，

$\beta_j = \min\limits_{1\le i\le m}\{c_{ij}\}(j=1,2,\cdots,n)$。允许弧集合为：

$$IJ = \{(i,j): \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$$

从而得到限制的原始问题(RP)：

$$
\begin{aligned}
&\min \xi = \sum_{i=1}^{m+n} x_i^a \\
&\sum_{j=1}^{n} f_{ij} + x_i^a = a_i, i=1,2,\cdots,m \\
&\sum_{i=1}^{m} f_{ij} + x_{m+j}^a = b_j, i=1,2,\cdots,n \qquad\qquad \text{(RP)} \\
&x_i^a \ge 0, i=1,2,\cdots,m+n \\
&f_{ij} \ge 0, (i,j)\in IJ \\
&f_{ij} = 0, (i,j)\notin IJ
\end{aligned}
$$

因为：

$$
\begin{aligned}
\xi &= \sum_{i=1}^{m+n} x_i^a = \sum_{i=1}^{m} x_i^a + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i^a = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{(i,j)\in IJ}\sum f_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{(i,j)\in IJ}\sum f_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j - 2\sum_{(i,j)\in IJ}\sum f_{ij}
\end{aligned}
$$

所以：$\min \xi = \max \sum\limits_{(i,j)\in IJ}\sum f_{ij}$，故(RP)可重写成：

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{(i,j)\in IJ}\sum f_{ij} \\
&\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \le a_i, i=1,2,\cdots,m \\
&\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \le b_j, i=1,2,\cdots,n \qquad\qquad \text{(RP')} \\
&f_{ij} \ge 0, (i,j)\in IJ \\
&f_{ij} = 0, (i,j)\notin IJ
\end{aligned}
$$

原始－对偶算法的过程：

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} f_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} = a_i, i = 1,2,\cdots,m \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} = b_j, i = 1,2,\cdots,n \quad (2)$$

$$f_{ij} \ge 0$$

(LP)

$$\max \varpi = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j$$

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}$$

α_i, β_j无限制

$$i = 12,\cdots,m; \ j = 1,2,\cdots,n$$

(D)

(α, β) 是(D)的一个可行解

允许弧集合 $IJ = \{(i,j) : \alpha_i + \beta_j = c_{ij}\}$

$$\max \sum_{(i,j)\in IJ} \sum f_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \le a_i, i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \le b_j, i = 1,2,\cdots,n$$

$$f_{ij} \ge 0, (i,j) \in IJ$$

$$f_{ij} = 0, (i,j) \notin IJ$$

(RP')

$$\max \varpi = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j$$

s.t. $\alpha_i + \beta_j \le 0, \quad (i,j) \in IJ$

$\alpha_i \le 1, \ \beta_j \le 1$

$i = 1,2,\cdots,m$

α_i, β_j无 限 制

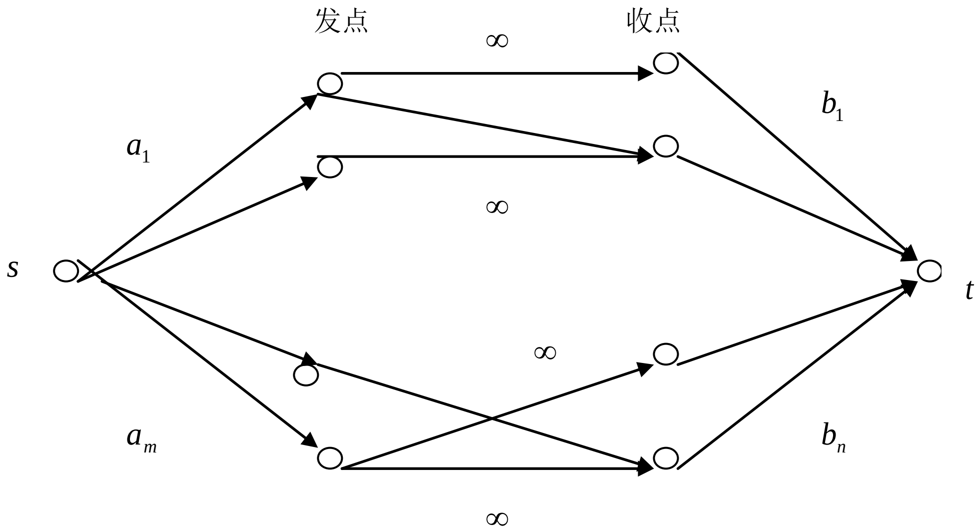
(DRP)

$(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ 是(DRP)

调整对偶可行解 $(\alpha, \beta) := (\alpha, \beta) + \theta(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$

求解(RP')和(DRP)的方法：

(RP')是一个最大流问题的数学规划模型。虚拟一个超级发点 s 和超级收点 t，当 $(i,j) \in IJ$ 时，自 i 到 j 有一条弧，其容量为 ∞，它保证仅当弧 (i,j) 是允许弧时，f_{ij} 才可以大于 0。



(RP')对应的最大流问题

用 Ford-Fulkerson 标号算法求解(RP')对应的最大流问题，标号算法结束时，得到最大流，同时得到的 $s-t$ 最小截就对应于(DRP)的最优解 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$。

定义 5.6 当应用 Ford-Fulkerson 标号算法求解(RP')得到最优解时，我们称此时为处于阻塞状态。在处于阻塞状态时，令

$I^*=\{i:i$ 为已标号的发点$\}$， $J^*=\{j:j$ 为已标号的收点$\}$

引理 5.1 在解(RP')处于阻塞状态时，(RP)的对偶问题(DRP)的最优解 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ 为：

$$\overline{\alpha_i}=\begin{cases}1, & i\in I^*\\ -1, & i\notin I^*\end{cases},\quad \overline{\beta_j}=\begin{cases}-1, & j\in J^*\\ 1, & j\notin J^*\end{cases}$$

证明：只要证明 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ 是(DRP)的可行解，且其目标函数值与(RP)的目标函数值相等即可（习题）。

（1）如果在阻塞状态时(RP)的最优值 $\xi_{opt}=0$，则根据原始－对偶算法的最优性条件知，得到(LP)和(D)的最有解 $f_{ij},(\alpha_i,\beta_j)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，其流值为：$\sum_{(i,j)\in IJ}f_{ij}=\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$。

（2）如果在阻塞状态时(RP)的最优值 $\xi_{opt}>0$，那么原始－对偶算法中有两种情况：

(i) 对一切 $(i,j)\notin IJ$ 都有 $\overline{\alpha_i}+\overline{\beta_j}\le 0$；

(ii) 存在 $(i,j)\notin IJ$，有 $\overline{\alpha_i}+\overline{\beta_j}>0$。

若(i)成立，说明(D)无上界，从而(P)无可行解。但由于(P)是一个 Hitchcok 问题，总是有可行解，所以(i)不可能发生，即(ii)必然成立。由引理 4.1，$(i,j)\notin IJ$ 且 $\overline{\alpha_i}+\overline{\beta_j}>0 \Leftrightarrow i\in I^*$ 且 $j\notin J^*$，此时，$\overline{\alpha_i}+\overline{\beta_j}=2$。所以

$$\theta_1=\min_{\substack{i,j\\ \overline{\alpha_i}+\overline{\beta_j}>0\\ (i,j)\notin IJ}}\left\{\frac{c_{ij}-(\alpha_i+\beta_j)}{\overline{\alpha_i}+\overline{\beta_j}}\right\}=\min_{\substack{i\in I^*\\ j\notin J^*}}\left(\frac{c_{ij}-\alpha_i-\beta_j}{2}\right)$$

所以新的对偶可行解 $(\alpha,\beta):=(\alpha,\beta)+\theta_1(\overline{\alpha},\overline{\beta})$，其中

$$\alpha_i:=\begin{cases}\alpha_i+\theta_1, i\in I^*\\ \alpha_i-\theta_1, i\notin I^*\end{cases},\quad \beta_j:=\begin{cases}\beta_j-\theta_1, j\in J^*\\ \beta_j+\theta_1, j\notin J^*\end{cases}$$

Hitchcock 问题的原始－对偶算法——$\alpha\beta$ 算法：

开始：对偶规划问题(D)的初始可行解为：$\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，$\beta_j=\min\limits_{1\le i\le m}\{c_{ij}\}(j=1,2,\cdots,n)$。

第 1 步：构造对偶可行解 (α,β) 对应的允许弧集合：$IJ=\{(i,j):\alpha_i+\beta_j=c_{ij}\}$；

第 2 步：构造(RP’)对应的最大流问题，用 Ford-Fulkerson 标号算法求解(RP’)对应的最大流问题，标号算法结束时，令

$I^*=\{i:i$ 为已标号的发点$\}$，$J^*=\{j:j$ 为已标号的收点$\}$

令

$$\overline{\alpha_i}=\begin{cases}1, & i\in I^*\\ -1, & i\notin I^*\end{cases},\quad \overline{\beta_j}=\begin{cases}-1, & j\in J^*\\ 1, & j\notin J^*\end{cases}$$

第 3 步：若(RP)的最优值 $\xi_{opt}=0$，则得到 Hitchcok 问题的最有解：

$$f_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

算法终止。否则，转第 4 步。

第 4 步：计算

$$\theta_1=\min_{\substack{i\in I^*\\ j\notin J^*}}\left(\frac{c_{ij}-\alpha_i-\beta_j}{2}\right)$$

调整(D)的可行解：

$$\alpha_i := \begin{cases} \alpha_i + \theta_1, i \in I^* \\ \alpha_i - \theta_1, i \notin I^* \end{cases}, \quad \beta_j := \begin{cases} \beta_j - \theta_1, j \in J^* \\ \beta_j + \theta_1, j \notin J^* \end{cases}$$

转第 1 步。