第五章 组合优化问题的原始－对偶算法-2

5.2 最短路问题的原始－对偶算法

一、最短路问题的一个线性规划模型描述

最短路问题（shortest path problem）是网络优化中一个基本问题，许多问题可化为最短路问题，或用最短路的算法作为子程序求解。

例如：通信网络的路由问题；

最大期望容量问题；

背包问题等。

可以说，最短路问题的用途远远超出了其直观意义。

定义：给定一个有向图 $G=(V,E)$和每一条弧$e_j \in E$上的一个非负权$c_{ij} \geq 0$。最短路问题(SP)，就是求从一个特殊的起始点 s 到另一个特殊的终点 t 的一条有向路，使得路上的总权和最小。

作为优化问题，它的可行集为：

$$F = \{\text{序列}\, P = \{e_{j1}, e_{j2}, \cdots, e_{jk}\} : P\, \text{为中从 s 到 t 的有向路}\}$$

其费用函数为：$c(P) = \sum_{i=1}^{k} c_{ji}$。

最短路问题可以描述为一个线性规划如下：

定义图 G 的点—弧关联矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$，其中：$M = |V|$为|顶点数，$n = |E|$为边数，且

$$a_{ij} = \begin{cases} +1\text{：} & \text{若}e_j\text{的起点为}i\text{（}e_j\text{由顶点}i\text{射出的弧）} \\ \text{-1：} & \text{若}e_j\text{的终点为}i\text{（}e_j\text{由顶点}i\text{射入的弧）} \\ 0\text{：} & \text{其余} \end{cases}$$

$$i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n$$

对弧e_j定义一个变量$f_j = f(e_j)$，表示沿弧e_j方向通过的货流。流的守恒：

$$a_i^T f = 0\text{(除}s,t\text{外的其它点）}$$

$$\text{其中}f\text{是一个向量，}f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$$

$$a_i^T\text{：}A\text{的第}i\text{行}$$

从 s 到 t 的一条路可以设想为：一个单位流，从 s 流向 t，这样的流必然满足：

$$Af=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{ll}\text{行}s\text{：起点流进一个单位的流} & \\ \text{行}t\text{：终点流出一个单位的流} & \\ \text{中间结点：} & \text{流量守恒}\\ \vdots & \vdots\\ \text{中间结点：} & \text{流量守恒}\end{array}$$

考察最小费用问题：

$$\begin{aligned}&\min c^T f\\ &Af=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{行}s\\ \text{行}t\\ \\ \\ \\ \end{array}\qquad (SP)\\ &f\ge 0\\ &\text{其中：}c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\\ &c_j:\text{第}j\text{条边上的费用；}f_j\text{：第}j\text{条边上的流量}\end{aligned}$$

直观地，存在最优解 f_j*，使其每一个 $f_j*=0$ 或 1。

$f*$就表示 G 中一个单位流从 s 沿最短路流到 t。

注 1：rank(A) = m – 1，可以去掉一个多余的方程。去掉任意一个都可以，一般去掉行 t。

注 2：一个基表示|V| - 1 条弧的集合。

基中有一个子集，对应于具有给定费用的从 s 到 t 的一条路。

这|V| - 1 条弧中不在该路上的弧表示基的退化分量。

思考：为什么 $f*$可以不限定为{0，1}？

二、最短路问题对偶规划

(SP)的对偶：

对于上述(SP)，对每一个约束（对应于一个节点）i，指派一个变量 y_i，由关联矩阵的定义可知，可以得到(SP)的对偶问题：

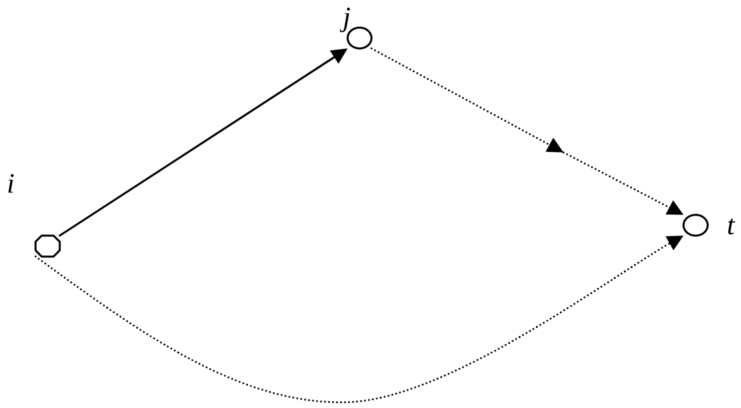
$$\begin{aligned}&\max\quad y_s-y_t\\ &\text{s.t.}\quad y_i-y_j\le c_{ij}\quad (i,j)\in E\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}&\max\quad y_s-y_t\\ &\text{s.t.}\quad \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y\le c\qquad\text{(D)}\\ &\qquad y\text{无约束}\end{aligned}$$

y_i 的意义：y_i 表示从定点 i 到终点 t 的费用——可行势。

$(i,j)\in E$，当然有 $y_i-y_j\le c_{ij}$。



互补松弛条件的意义：

根据互补松弛条件，f^*和y^*分别为原问题和对偶问题的最优解的充分必要条件：

$$f_j^*(y_i^* - y_j^* - c_{ij}) = 0, \forall e_j = (i, j) \in E.$$

即：

（1）最短路上的每一条弧（对应于$f_j^* > 0$），对应于对偶问题中的不等式取等号（$y_i^* - y_j^* = c_{ij}$，最短路走E中的弧$e_j = (i, j) \in E$）；

（2）对偶问题中每一个严格不等式 $y_i^* - y_j^* < c_{ij}, e_j = (i, j) \in E$，对应的弧不在最短路上，即$f_j^* = 0$。

三、最短路问题原始－对偶算法

由于$y_t = 0$总成立，所以(SP)的对偶问题等价于下述规划问题

$$\begin{aligned}
\max \quad & y_s \\
\text{s.t.} \quad & y_i - y_j \le c_{ij} \quad (i, j) \in E \\
& y_i \text{无限制，} i \in V \\
& y_t = 0
\end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

允许弧集合定义为：

$$J = \{\text{弧}(i, j) : y_i - y_j = c_{ij}\}$$

对应的限制的原始问题为：

$$\min \xi = \sum_{i=1}^{m-1} x_i^a$$

$$Af + x^a = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{行}s \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad\qquad (RP)$$

$$f_j \ge 0 \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$f_j = 0 \quad j \notin J$$

$$x_i^a \ge 0$$

限制的原始问题的对偶为：

$$\max \omega = y_s$$

$$y_i - y_j \le 0, \quad (i,j) \in J$$

$$y_i \le 1, \quad \text{对一切}i \qquad\qquad \text{(DRP)}$$

$$y_i\text{无限制}$$

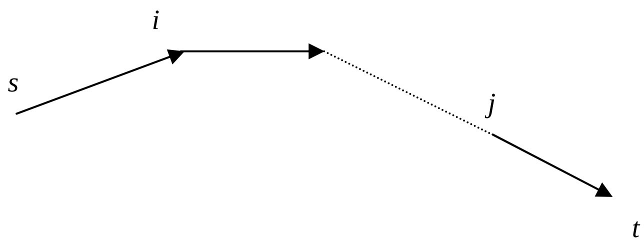
$$y_t = 0$$

因为 $y_s \le 1$，并且极大化 y_s，因此(DRP)是很容易求解的。

我们可以试验 $y_s = 1$ 的情况：

(1) 如果存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，则由 $y_t = 0$ 可以推出 $y_s = 0$。

下面是仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，则由 $y_t = 0$ 且 $y_j - y_t \le 0, \quad (i,t) \in J$ 知 $y_j = 0$，一次类推可以得到 $y_s = 0$。



从而，得到(DRP)的最有解，$\xi_{\min} = \omega_{\max} = 0$，此时 J 中的弧自 s 到 t 的任何一条路都是原问题的最有解，即 s 到 t 的最短路。

（2）如果不存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，那么在不破坏约束 $y_i - y_j \le 0$ 的条件下，将仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的所有节点对应的对偶变量分配值 1（$\overline{y_s} = 1$），将仅

利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的所有节点对应的对偶变量分配值 0（$\overline{y_t}=0$）：

$$\overline{y_i}=\begin{cases}1, 仅利用J中的弧自s有路可到达路可到i \\ 0, 仅利用J中的弧自i有路可到达路可到t \\ 1, \qquad\qquad\qquad\qquad 其它情形\end{cases}$$

这样得到(DRP)的一个可行解，其目标函数值 $\overline{y_s}=1$，从而是最有解（不是唯一最有解）。

然后计算 θ_1：

$$\theta_1=\min_{\substack{\underline{(i,j)\notin J} \\ y_i-y_j>0}}\{c_{ij}-(y_i-y_j\}$$

修改 y 和 J，并且重解(DRP)，直到存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路为止。

所以，最短路问题的原始－对偶算法，是把最短路问题归结为一系列简单的子问题：自一个给定点出发，求由它可到达的节点集合。