第九章 拟阵与组合优化

9.1 最小支撑树与 Greedy 算法

设计组合优化问题有效算法的方法：

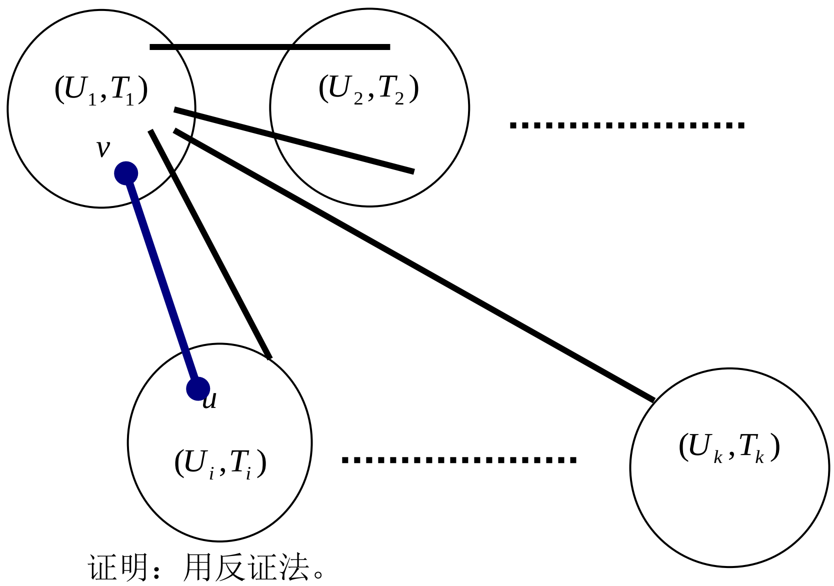
- 线性规划的原始－对偶算法：用到组合优化问题的线性规划模型上
- 图的搜索算法：将图的搜索的基本算法进行必要的改进，得到相应组合优化问题的有效算法
- 用拟阵与 Greedy 算法，设计某些组合优化问题的有效算法

一、最小支撑树问题(MST)

$G=(V,E),D=(d_{ij})_{n\times n},d_{ij}\geq 0$是距离矩阵，其中$|V|=n$。

问题：找出G的一棵最短的支撑树（G的一个无圈子图）。

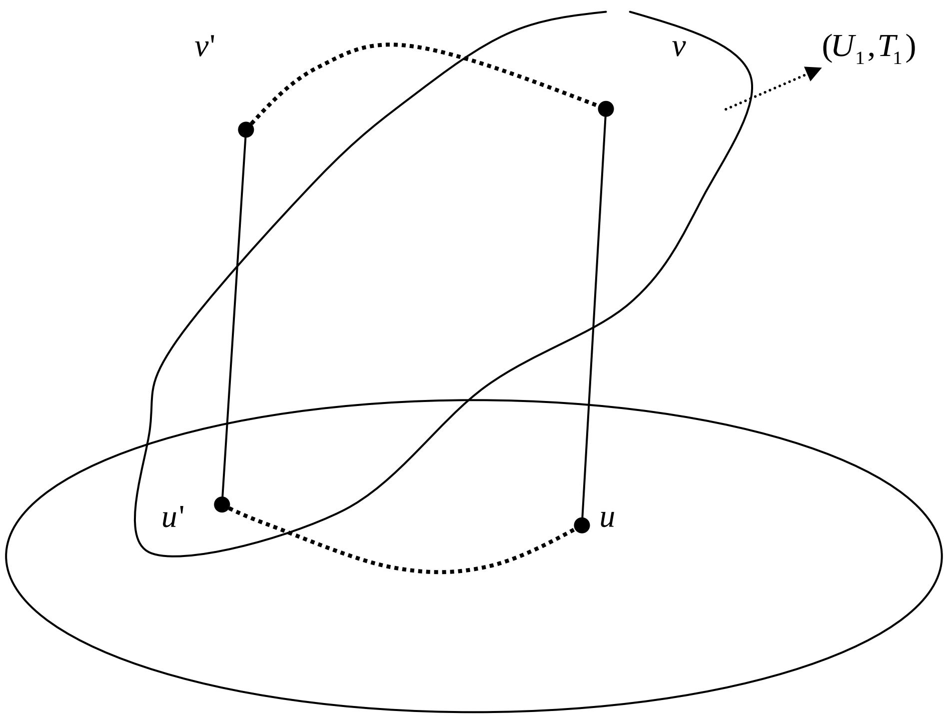
定理 9.1 令$\{(U_1,T_1)\},\{(U_2,T_2)\},\cdots,\{(U_k,T_k)\}$是支撑顶点集合$V$的一个森林。设恰有一个端点在$U_1$里的边中最短的一条边为$(v,u)$，则包含$T=\bigcup_{j=1}^{k}T_j$里所有边的支撑树中，必存在一棵包含边$(v,u)$的最优支撑树。



证明：用反证法。

假设存在一棵包含$T=\bigcup_{j=1}^{k}T_j$里所有边的支撑树(V,F)使得$F\supseteq T$，且$(v,u)\notin F$，并且它必包含T和(v,u)的最短支撑树还短。

将(v,u)加到(V,F)里，则必然得到唯一一个圈$[v,u,u'v'v]$。



由于$v \in U_1$，所以该圈不可能全部由U_1中的节点完全组成，因此，该圈上存在边$(v',u') \neq (v,u)$，且$u' \in U_1, v' \in V - U_1$。由假设$d(u',v') \geq d(v,u)$，且$(u',v') \notin T$。我们构造一棵新的支撑树$(V,F')$：

$$(V,F') = F \cup \{(v,u)\} - \{(u',v')\}$$

则$F' \supset T \cup \{(v,u)\}$且$d(F') \leq d(F)$，矛盾。

证毕

利用该定理的结果，可以导出 MST 的一个有效算法。

算法的基本过程：

（1） 取$U_j = \{v_j\}, j = 1,2,\cdots,n, \quad T = \phi$；

（2） 取与v_1关联的最短边，不妨为(v_1, v_2)，令

$$U := \{v_1, v_2\}, \quad T := \{(v_1, v_2)\}$$

（3） 取与U关联的最短边，加到T里；

（4） ……………

即：从集合$U = \{v_1\}$开始，递归地将离开U的最短边加到T里，直到所有的

节点都加到U里为止，此时我们就得到了一棵最短树。

定理 9.2 解 MST 的上述算法是正确的，其计算复杂度为$O(|V|^2)$。

证明：正确性由定理 9.1 可以直接得到。

最多需要$|V|-1$个阶段，每个阶段的计算量为$O(|V|)$，所以计算复杂度为$O(|V|^2)$。

二、Greedy 算法

最大森林问题（MWF）：

$G=(V,E), W=(w_{ij})_{n\times n}, w_{ij}\geq 0$为权矩阵，其中$|V|=n$。

问题：找出G的一个森林（G的无圈子图），使其总权和最大。

注：MWF 问题与 MST 问题是等价的。

MWF 的 Greedy 算法

算法：

Input: $G=(V,E), W=(w_{ij})_{n\times n}, w_{ij}\geq 0$为权矩阵，其中$|V|=n$

Output: G的最大权森林F

begin

$F:=\phi$

while $E\neq\phi$ do

begin

设(u,v)是E中权最大边；

$E:=E/(u,v)$；

if u和v不在(V,F)的同一个分图里（将(u,v)加到F中不形成圈）

then $F:=F\cup\{(u,v)\}$;

end

end

——每一步尽可能将权最大的边放到F里。

定理 9.3 解 MWF 的上述 Greedy 算法是正确的，其计算复杂度为$O(|V|^2)$。

9.2 拟阵基本概念

一、引言

例 9.1. 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\in R^{m\times n}$$

对每个 $e_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 定义一个非负权 $w(e_j)\geq 0$。

问题：求矩阵 A 的一组线性无关组 $(e_{i_{1_1}},e_{i_{1_2}},\cdots,e_{i_{1_k}})$ 使其权重和最大。

方法：依次找出权重最大的线性无关的向量组。

$M=(A,\mathscr{I})$

$\mathscr{I}$：A 中所有线性无关的向量组组成的集合（$A=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的一些子集组成的集合）

对 $\forall e\in A$，定义权重 $w(e)\geq 0$

组合优化问题：求 $\mathscr{I}$ 中权重最大者

算法：Greedy 算法

例 9.2. MWF（最大森林问题）

$G=(V,E),\forall e\in E,w(e)\geq 0$。

问题：求 G 的权重最大的一个森林（G 的无圈图）。

方法：依次找出权重最大者，直至再任加一条边都会产生圈为止。

$M=(E,\mathscr{I})$

$\mathscr{I}$：E 中所有的森林——无圈图的集合（$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的一些子集组成的集合）

组合优化问题：求 $\mathscr{I}$ 中权重最大者

算法：Greedy 算法

例 9.3. $G=(V,E),\forall e\in E,w(e)\geq 0$

问题：求 G 的最大匹配

$M=(E,\mathscr{I})$

$\mathscr{I}$：E 中所有的匹配（$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的一些子集组成的集合）

组合优化问题：求 $\mathscr{I}$ 中权重最大者

算法：不能用 Greedy 算法

拟阵理论主要研究：定义在一个集合的子集合上的抽象相关关系。
如：线性空间中向量子集合所具有的线性相关关系；
在图论中，图 G 中由边集合生成有圈子图所确定的相关关系。
确定集合 E 上的一个拟阵：指出 E 中所有相关的子集。
等价地，指出 E 中所有不是相关的子集。
不是相关的子集通常也称为独立集。

二、记号：设 E 是一个集合，$\mathscr{A} \subseteq 2^E$ 是 E 中的子集族，记：

（1）$Upp(\mathscr{A}) = \{X \subseteq E$：存在 $A \in \mathscr{A}$ 使 $A \subseteq X\}$

即：（E 的）包含“$\mathscr{A}$ 中集合”的所有子集构成的集合；

（2）$Low(\mathscr{A}) = \{X \subseteq E$：存在 $A \in \mathscr{A}$ 使 $X \subseteq A\}$

即：（E 的）包含在“$\mathscr{A}$ 中集合”的所有子集构成的集合；

（3）$Max(\mathscr{A}) = \{X \in \mathscr{A}$：对任意 $Y \in \mathscr{A}$，若 $X \subseteq Y$，则 $X = Y\}$

（4）$Min(\mathscr{A}) = \{X \in \mathscr{A}$：对任意 $Y \in \mathscr{A}$，若 $Y \subseteq X$，则 $X = Y\}$

（5）$Opp(\mathscr{A}) = \{X \subseteq E:\ X \notin \mathscr{A}\}$

（6）$Com(\mathscr{A}) = \{X \subseteq E:\ E - X \in \mathscr{A}\}$

三、独立集公理

设 $\mathscr{F}$ 是一个域，我们用 $V(n, \mathscr{F})$ 表示域 $\mathscr{F}$ 上的全体 n 维向量组成的线性空间。

例 9.4：设 $E \subseteq V(n, \mathscr{F})$ 是一个向量子集：

(1) 若 $X \subseteq E$ 是 E 中的一个线性无关向量组，则 X 的任一子集 Y 也是一个线性无关向量组；

(2) 若 $X_1, X_2 \subseteq E$ 是 E 中的两个线性无关向量组，并且 $|X_1| < |X_2|$ 时，则 X_1 不是 $X_1 \cup X_2$ 中的极大线性无关向量组，因而 $\exists x \in X_2 - X_1$，使得 $X_1 \cup x$ 也是中 E 的一个线性无关向量组。

例 9.5：设 G 是一个图，其边集为 $E = E(G)$：

(1) 当 $X \subseteq E$ 是图 G 的一个无圈子图（不含有极小圈的子图），则 X 的任一子集 Y 也是 G 的一个无圈子图；

(2) 当 $X_1, X_2 \subseteq E$ 是图 G 的两个无圈子图并且 $|X_1|<|X_2|$ 时，则在 G 的子图 $X_1 \cup X_2$ 中，X_1 也不是 $X_1 \cup X_2$ 的极大无圈子图，因而 $\exists x \in X_2 - X_1$，使得 $X_1 \cup x$ 也是 G 的一个无圈子图。

定义 9.1 一个子集系统 $S=(E,\mathcal{I})$ 是一个有序对，其中 E 是一个有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ 是 E 的子集组成的集合，使得在集合的包含关系下，$\mathcal{I}$ 是封闭的，即若 $A, A' \subset E$ 且 $A \in \mathcal{I}$，则由 $A' \subseteq A$ 可以推出 $A' \in \mathcal{I}$。**称 $\mathcal{I}$ 中的成员为独立集**。

定义 9.2 一个拟阵（matroid）M 是一个有序对 $(E,\mathcal{I})$，其中 E 是一个有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ 是 E 的子集组成的集合，它们满足以下公理：

（I1） $\phi \in \mathcal{I}$。

（I2） 若 $I \in \mathcal{I}$，及 $I' \subseteq I$，则 $I' \in \mathcal{I}$。——独立集集合

（I3） 若 $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ 且 $|I_1|<|I_2|$，则 $\exists e \in I_2 - I_1$，使得 $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$。

说明：

（1） 集合 $\mathcal{I}$ 中的元素称为拟阵 M 的独立集(independent set)。因此，公理(I1)-(I3)称为拟阵的独立集公理。

（2） 拟阵 M 通常记为 $M = M\ (E,\mathcal{I})$，表明是在 E 上，以 $\mathcal{I}$ 中的元素为独立集的拟阵。用 $E=E(M)$ 和 $\mathcal{I}=\mathcal{I}(M)$ 表示 $E(M)$ 是 M 的元素集合，$\mathcal{I}(M)$ 是 M 的独立集集合。当 $I \in \mathcal{I}(M)$ 且 $|I|=k$ 时，也称 I 是 M 的一个 $k-$独立集($k-$independent subset)。

（3） 条件(I1)保证 $\mathcal{I}$ 不空，条件(I3)称为独立扩充公理，**它表示任何一个 M 中的任何两个极大独立集都有相同的基数。**

例 9.6：设 A 是域 F 上的一个 $n \times m$ 的矩阵，A 的列向量的标号集合为 $E=E(A)$。定义 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ 为这样的一个集合：$X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow X$ 所标记的列向量在向量空间 $V(n,\mathcal{F})$

中线性无关，那么 $(E,\mathcal{I})$ 是一个拟阵，称之为**向量拟阵**(vector matroid)，记作 $M[A]$ 或 $M_F[A]$，若 F 是 q 个元素的域，也用 $M_q[A]$ 来表示。

例 9.7：设 G 是一个图，其边集为 $E=E(G)$，定义 $\mathcal{I}\subseteq 2^E$ 为这样的一个集合：$X\in\mathcal{I}\Leftrightarrow X$（作为 G 的子图）不含有极小圈，那么 $(E,\mathcal{I})$ 是一个拟阵，称之为**圈拟阵**(cycle matroid)，记作 $M(G)$。

例 9.8：考虑实数域 R 上的矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \mathrm{A}= & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

令 $a_i(i=1,2,3,4)$ 代表 A 的第 i 个列向量的标号，$E_1=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 为 A 的列向量的标号集合。要确定所有独立集的集族 $\mathcal{I}$，就是要找出所有的子集 $I\subseteq E_1$，使得 I 中的元素所标号的向量族在 $V(3,R)$ 中线性无关。

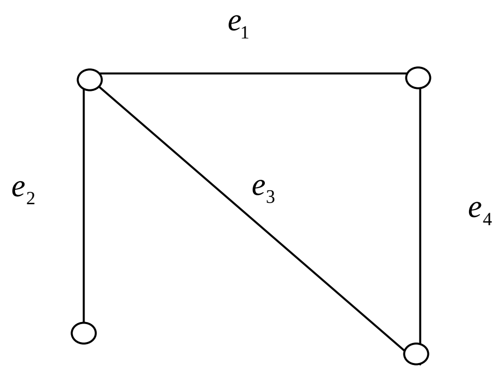
因为：任何一个线性无关向量组都被一个极大线性无关向量组所包含，
所以：我们只要找出 A 的列向量中的全体极大线性无关向量组即可。
显然：A 的列向量中的全体极大线性无关向量组为：

$$\{a_1,a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_4\},\{a_2,a_3,a_4\}$$

所以，$\mathcal{I}= Low\{\{a_1,a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_4\},\{a_2,a_3,a_4\}\}$ ＝

$$\left\{\begin{array}{l} \{a_1,a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_4\},\{a_2,a_3,a_4\}, \\ \{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_4\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\{a_3,a_4\} \\ \{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\},\phi \end{array}\right\}$$

例 9.9：考虑下图G，其中边集为$E_2\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$



要确定所有无圈子图的边的集合族 $\mathcal{I}$，就是要找出图G的所有无圈子图。

由于：任何一个无圈子图都是某一个支撑树的子图
所以：只要找出图G的所有支撑树即可。
显然：图G的所有支撑树对应的边的子集为：

$$\{e_1,e_2,e_3\},\{e_1,e_2,e_4\},\{e_2,e_3,e_4\}$$

所以，$\mathcal{I} = Low\{\{e_1,e_2,e_3\},\{e_1,e_2,e_4\},\{e_2,e_3,e_4\}\} =$

$$\left\{\begin{array}{l}\{e_1,e_2,e_3\},\{e_1,e_2,e_4\},\{e_2,e_3,e_4\},\\ \{e_1,e_2\},\{e_1,e_3\},\{e_1,e_4\},\{e_2,e_3\},\{e_2,e_4\},\{e_3,e_4\}\\ \{e_1\},\{e_2\},\{e_3\},\{e_4\},\phi\end{array}\right\}$$

显然：例 9.8 和例 9.9 中，除了一个是矩阵、一个是图外，其对应的独立集没有本质的区别。

定义 9.3 对于给定的两个拟阵$M_1\,(E_1,\mathcal{I}_1$ 和$M_2\,(E_2,\mathcal{I}_2)$，若一一映射$\phi: E_1 \to E_2$满足：对$\forall X \subseteq E_1$，$X \in \mathcal{I}_1 \Leftrightarrow \phi(X) \in \mathcal{I}_2$。则称$\phi: E_1 \to E_2$为$M_1\,(E_1,\mathcal{I}_1)$到$M_2\,(E_2,\mathcal{I}_2)$的同构映射。若$M_1\,(E_1,\mathcal{I}_1)$到$M_2\,(E_2,\mathcal{I}_2)$的存在同构映射，则称$M_1\,(E_1,\mathcal{I}_1)$和$M_2\,(E_2,\mathcal{I}_2)$同构。记作$M_1 \cong M_2$。

定义 9.4 设M是一个拟阵。若存在某个域F及域F上的一个矩阵A使得$M \cong M_F[A]$，则**称M是一个F－可线性表示拟阵，或简称为M是一个可线性表示拟阵，且称矩阵A为M的一个F－线性表示**。

有时也称A为M在F上的一个坐标化。若存在某个图G，使得$M \cong M(G)$，则**称M为可图拟阵(graphic matroid)**。

注：

- 若 M 为可图拟阵，则存在连通图 G，使得 $M \cong M(G)$。（作业题）
- 对任意域 F，若拟阵 M 为可图的，则 M 也是坐标化的。（作业题）
- 设 $M\ (E,\mathscr{I})$ 是个拟阵，$X \subseteq E$，令 $\mathscr{I}_X = \{I \subseteq X : I \in \mathscr{I}\}$，证明 $(X, \mathscr{I}_X)$ 为拟阵。（这个拟阵称为 M 在 X 上的限制(restriction)，记作 $M \mid X$。（作业题）

四、极小圈公理

设 $M = M\ (E,\mathscr{I})$ 是一个拟阵，若子集 $X \in Opp(\mathscr{I}) = 2^E - \mathscr{I}$，则称 X 为 M 的一个相关集(dependent set)。极小的相关集称为极小圈(circuit)。

令 $\mathscr{C}(M)$ 表示拟阵 M 的所有极小圈组成的集合，则 $\mathscr{C}(M) = Min(Opp(\mathscr{I}))$。

当 $C \in \mathscr{C}(M)$ 且 $|C| = k$ 时，称 C 为 M 的一个 $k-$极小圈($k-$circuit)，k 为 C 的长度。

定理 9.4 设 $M = M\ (E,\mathscr{I})$ 是一个拟阵，$\mathscr{C} = \mathscr{C}(M)$，则 $\mathscr{C}$ 满足下列性质：

(C1) $\phi \notin \mathscr{C}$

(C2) 若 $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ 且 $C_1 \subseteq C_2$，则 $C_1 = C_2$

(C3) 若 $C_1 \neq C_2$，$C_1, C_2 \in \mathscr{C}$，并且存在 $e \in C_1 \cap C_2$，则恒有 $C_3 \in \mathscr{C}$，满足 $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$。

设 M 是一个拟阵，$C \in \mathscr{C}(M)$。若 $C = \{e\}$，则 e 称为 M 的一个环（或环元）(loop)；若 $C = \{e_1, e_2\}$，则称 e_1 与 e_2 互为平行元素，或者说 e_1 平行于 e_2。若拟阵 M 不含有环及平行元素，**则称 M 是一个简单拟阵。一个简单拟阵也称为一个组合几何(combinatorial geometry)。**

定理 9.5 设 E 是一个集合，并设 $\mathscr{C} \subseteq 2^E$ 是一个满足条件(C1)-(C3)的子集族，则必有 E 的拟阵 M 使得 $\mathscr{C} = \mathscr{C}(M)$。

定理 9.6 设 $M = M\ (E,\mathscr{I})$ 是一个拟阵，$I \in \mathscr{I}$ 且 $e \in E - I$，则或者 $I \cup e \in \mathscr{I}$，或者 $I \cup e$ 含有唯一的一个极小圈 $C \in \mathscr{C}(M)$，使得 $e \in C \subseteq I \cup e$。

五、基公理

称拟阵M中的极大独立子集为M的基(base)。记$\mathscr{B}(M)$为M中全体基的集合，则$\mathscr{B}(M)=Max(\mathscr{I})$。

（1） 若E是某个有限维线性空间$V(n,F)$的子集，则E中任意两个极大线性无关子集含有相同个数的元素；

（2） 若B为E中一个极大线性无关子集，且$x\in E-B$，则$B\cup x$含有唯一的一个线性相关子集。

定理 9.7 设B是拟阵M的一个基，且$x\in E-B$，则$B\cup x$含有唯一的极小圈C（称$B\cup x$含有的这个唯一的极小圈C为元素x对应于基B的基本极小圈），记作$C_M(x,B)$或$C(x,B)$。

定理 9.8 设$M=M\ (E,\mathscr{I})$是一个拟阵，令$\mathscr{B}=\mathscr{B}(M)$，则$\mathscr{B}$具有如下性质：

(B1) $\mathscr{B}$至少含有一个元素（即M至少有一个基）；

(B2) 若$B_1,B_2\in\mathscr{B}$且$x\in B_1-B_2$，则必有$y\in B_2-B_1$使得$(B_1-x)\cup y\in B$。

定理 9.9 设E是一个非空集合，$\mathscr{B}\subseteq 2^E$，则

(B3) 若$B_1,B_2\in\mathscr{B}$，则$|B_1|=|B_2|$。

拟阵的基完全由条件(B1)和(B2)所决定。像拟阵的独立集和极小圈一样，拟阵的基也唯一地确定了所在的拟阵。故条件(B1)和(B2)叫做**拟阵的基公理**。

定理 9.10 设E是一个非空集合，$\mathscr{B}\subseteq 2^E$满足条件(B1)和(B2)，则存在拟阵$M=M\ (E,\mathscr{I})$，满足$B=\mathscr{B}(M)$。

六、秩函数

任意取定一个子集$X\subseteq E$，根据(B3)，对不同的$B_1,B_2\in\mathscr{B}(M\,|\,X)$，恒有$|B_1|=|B_2|$。把$\mathscr{B}(M\,|\,X)$中一个基$B_X$的元素个数定义为$X$的秩(rank)，记作$r_M(X)=|B_X|$。

定义 9.5 称$r_M:2^E\to Z$为拟阵M的秩函数(rank function)，其中

$$r_M(X)=\max\{|I|: I\subseteq X, I\in\mathscr{I}(M)\}$$

注：数值$r_M(E)$称为拟阵M的秩，有时也把$r_M(X)$直接记为$r(X)$，记

$r(M)=r_M(E)$。当 $r(M)=r$，称拟阵 M 是秩一 r 拟阵，或者秩 r 拟阵(rank-r matroid)。

定理 9.11 设 $M=M\ (E,\mathcal{I})$ 是拟阵，$r(M)$ 是拟阵 M 的秩函数，则对任意的子集 $X\subseteq E$，$X\in\mathcal{I}(M)\Leftrightarrow r_M(X)=|X|$。

证明：$\Rightarrow$ 设 $X\in\mathcal{I}(M)$，则对任意子集 $I\subseteq X$，都有 $I\in\mathcal{I}(M)$ 且 $|X|\geq|I|$，由定义 9.5 即得。

$\Leftarrow$ 设 $r_M(X)=|X|$，若 $X\notin\mathcal{I}(M)$，则对任一个 X 中的满足 $I\in\ \mathcal{I}(M)$ 的子集 I，都不能有 $I=X$。因此，必有 $r_M(X)<|X|$，矛盾。

定理 9.12 设 A 是域 F 上的一个 $m\times n$ 的矩阵，$M=M_F[A]$ 是 A 的向量拟阵，而 $E=E(M)$ 是 A 的列向量标号集合。则对任意一个子集 $X\subseteq E$，$X\in\mathcal{I}(M)\Leftrightarrow X$ 所标记的列向量在 $V(m,F)$ 中线性无关。

记 A 中由 X 所标记的列向量组成的子阵为 A_X，则 A_X 的矩阵秩等于 A_X 列向量中极大线性无关向量的个数，则由定理 9.11 可得：

$$A_X\text{ 的矩阵秩}=r_M(X)。$$

定理 9.13 对于图 $G=(V,E)$，对子集 $X\subseteq E$，仍用 X 表示 $G=(V,E)$ 中由 X 生成的子图，记 $M=M(G)$ 是 G 的圈拟阵。则对任意一个子集 $I\subseteq E$，$I\in\mathcal{I}(M)\Leftrightarrow I$ 是图 $G=(V,E)$ 中的一个无圈子图。。

用 $V(X)$ 表示子图 X 的节点集合，$\varpi(X)$ 表示 X 中连通分支的个数。对于 $I\subseteq X$，由于 I 是 X 的一个极大无圈子图 $\Leftrightarrow|I|=|V(X)|-\varpi(X)$，则由定理 9.11 可得：

$$r_M(X)=|V(X)|-\varpi(X)。$$

定理 9.14 设 $M=M\ (E,\mathcal{I})$ 是拟阵，$r(M)$ 是拟阵 M 的秩函数，则 r 满足下列性质：

(R1) 任意 $X\in 2^E$，有 $0\leq r(X)\leq|X|$。

(R2) 单调性：若 $X\subseteq Y\subseteq E$，则 $r(X)\leq r(Y)$。

(R3) 次模性：若 $X, Y \subseteq E$，则 $r(X \bigcup Y) \le r(X) + r(Y) - r(X \bigcap Y)$。

定理 9.15 设 E 是一个集合，又设函数 $r: 2^E \to Z$ 满足(R1)－(R3)，则存在拟阵 $M = M\ (E, \mathscr{I})$ 使得 $r = r_M$ 是 M 的秩函数。