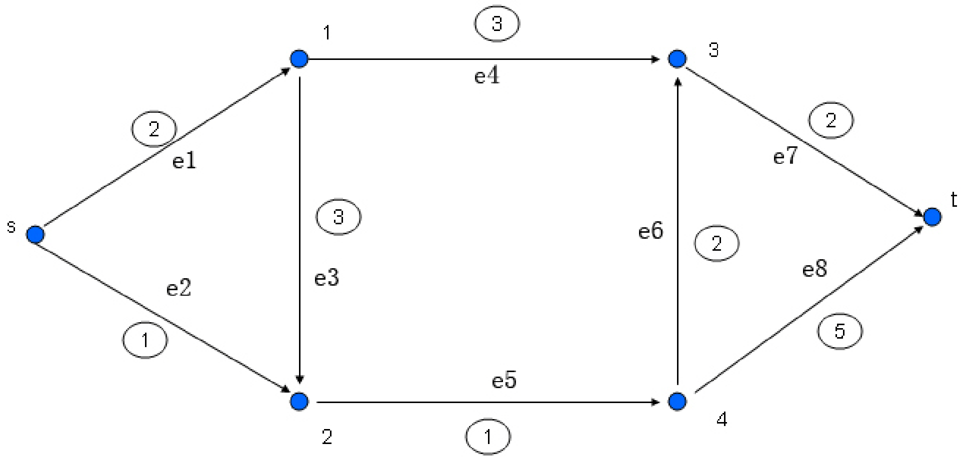
第五章 组合优化问题的原始－对偶算法-2

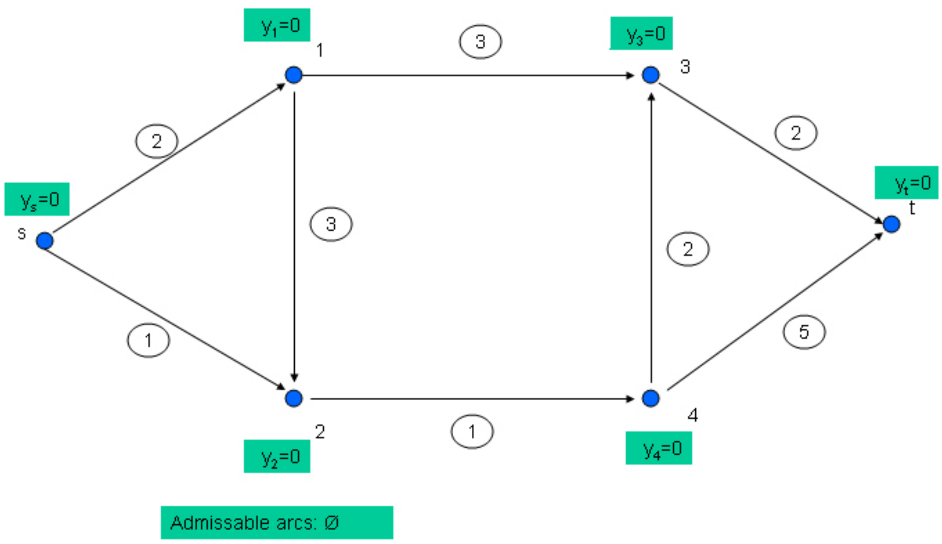
例如：



由于费用非负，所以 $y=0$ 为(D)：

$$\begin{array}{ll} \max & y_s \\ \text{s.t.} & y_i - y_j \le c_{ij} \quad (i,j)\in E \\ & y_i \text{无限制}，\ i\in V \\ & y_t = 0 \end{array} \qquad \text{(D)}$$

的可行解，即



$J=\Phi$

第一次迭代：对应的(DRP)为

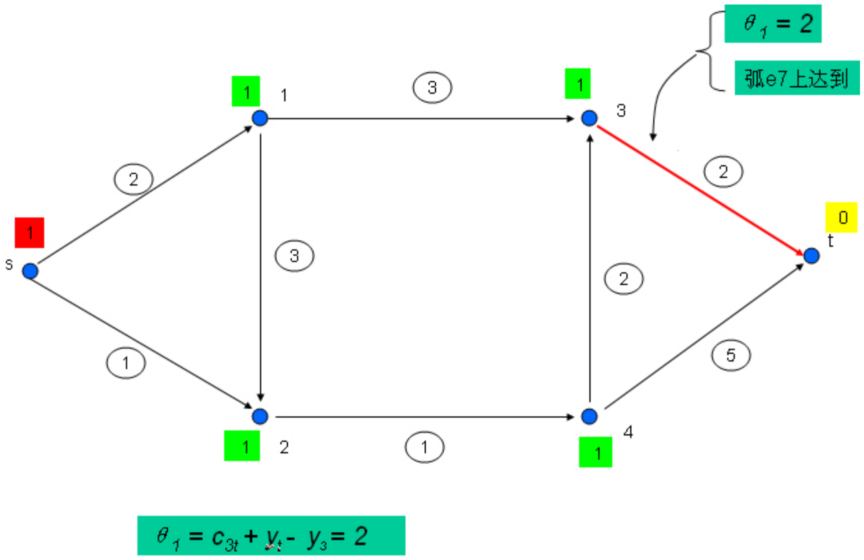
$$\begin{aligned}&\max \omega = y_s\\ &y_i - y_j \le 0,\quad (i,j)\in J=\Phi\\ &y_i \le 1,\quad 对一切 i\\ &y_i 无限制\\ &y_t = 0\end{aligned}$$

显然不存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，令 $\overline{y_s}=1$，在不破坏约束 $y_i - y_j \le 0$ 的条件下，

（1） 将仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的所有节点对应的对偶变量分配值 1；

（2） 将仅利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的所有节点对应的对偶变量分配值 0（$\overline{y_t}=0$）；

（3） 其余情形节点对应的对偶变量取值为 1：$\overline{y_i}=1(i=1,2,3,4)$

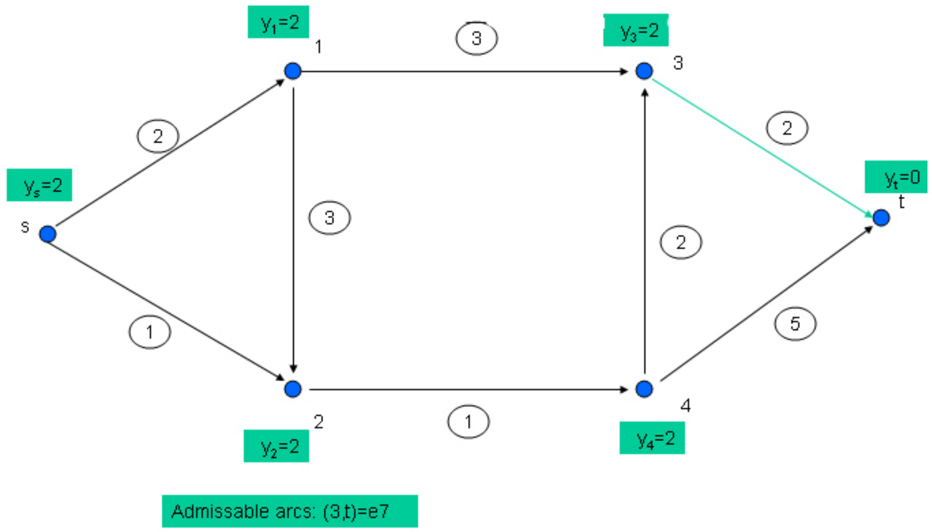


计算 $\theta_1=\min\limits_{\substack{(i,j)\notin J\\ y_i-y_j>0}}\{c_{ij}-(y_i-y_j\}=2$，弧 e_7 上达到。

注：因为 $\overline{y_t}=0$ 且 $\overline{y_i}=1(i=1,2,3,4)$，此时 $\overline{y_i}-\overline{y_j}>0$ 只有 $j=t$ 时才成立。

得到(D)的新的可行解：$y=(y_s,y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(2,2,2,2,2)^T$

计算：



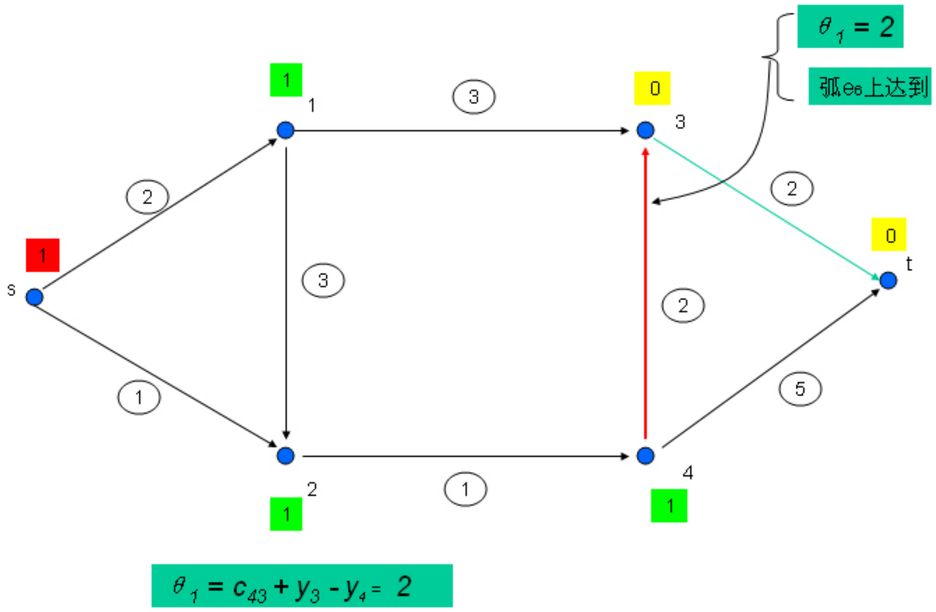
$J=\{e_7\}$

第二次迭代：令 $\overline{y_s}=1$，显然不存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，令 $\overline{y_s}=1$，在不破坏约束 $y_i-y_j\le 0$ 的条件下，

（1） 将仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的所有节点对应的对偶变量分配值 1；

（2） 将仅利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的所有节点对应的对偶变量分配值 0（$\overline{y_t}=0,\ \overline{y_3}=0$）；

（3） 其余情形节点对应的对偶变量取值为 1：$\overline{y_1}=\overline{y_2}=\overline{y_4}=1$



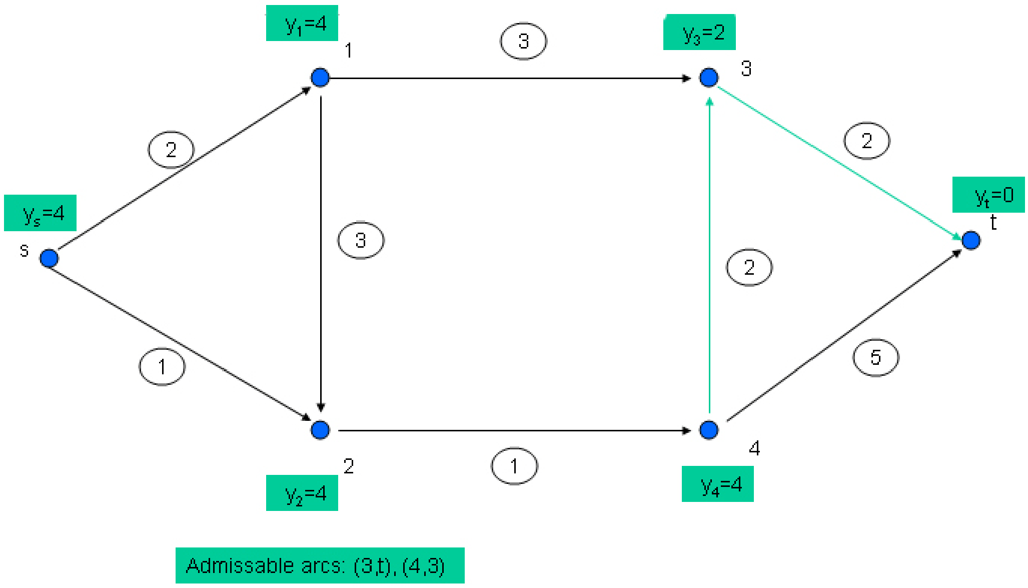
计算：

$$\theta_1 = \min_{\substack{(i,j)\notin J \\ y_i - y_j > 0}} \{c_{ij} - (y_i - y_j)\}$$

$$= \min\{c_{43} - (y_4 - y_3), c_{4t} - (y_4 - y_t)\} = 2$$

所以，(D)的新的可行解为：

$$y = (y_s, y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (2,2,2,2,2)^T + \theta_1(1,1,1,0,1)^T = (4,4,4,2,4)^T$$



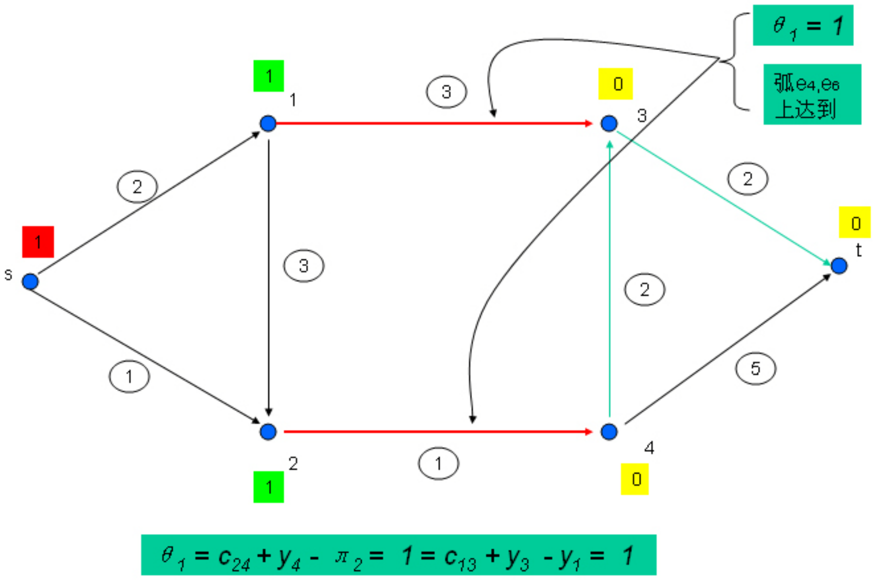
$J = \{e_7, e_6\}$

第三次迭代：令 $\overline{y_s} = 1$，显然不存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，令 $\overline{y_s} = 1$，在不破坏约束 $y_i - y_j \le 0$ 的条件下，

（1） 将仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的所有节点对应的对偶变量分配值 1；

（2） 将仅利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的所有节点对应的对偶变量分配值 0（$\overline{y_t} = 0, \overline{y_3} = \overline{y_4} = 0$）；

（3） 其余情形节点对应的对偶变量取值为 1：$\overline{y_1} = \overline{y_2} = 1$



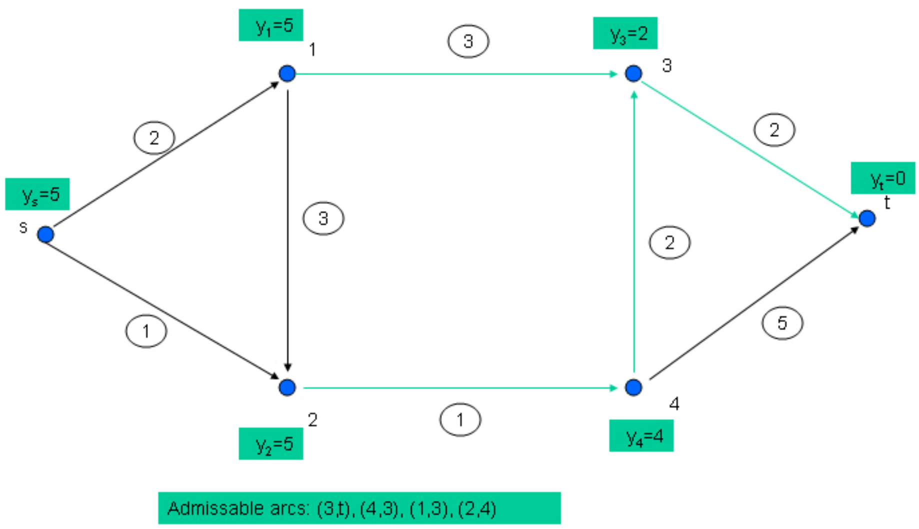
计算：

$$\theta_1 = \min_{\substack{(i,j)\notin J \\ y_i - y_j > 0}} \{c_{ij} - (y_i - y_j)\}$$

$$= \min\{c_{13} - (y_1 - y_3), c_{24} - (y_2 - y_4)\} = 1$$

所以，(D)的新的可行解为：

$$y = (y_s, y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (4,4,4,2,4)^T + \theta_1(1,1,1,0,0)^T = (5,5,5,2,4)^T$$



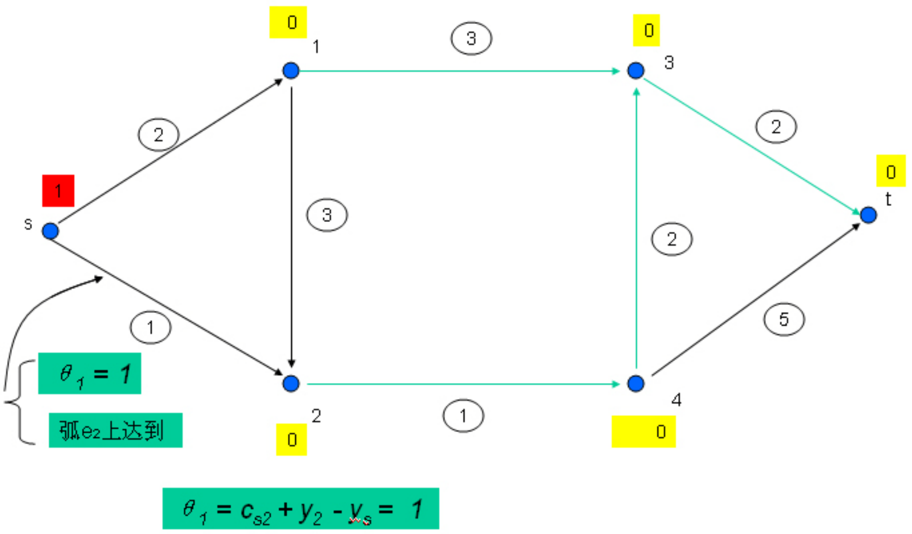
$$J = \{e_7, e_6, e_5, e_4\}$$

第四次迭代：令 $\overline{y_s} = 1$，显然不存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，令 $\overline{y_s} = 1$，在不破坏约束 $y_i - y_j \le 0$ 的条件下，

（1） 将仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的所有节点对应的对偶变量分配值 1；

（2） 将仅利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的所有节点对应的对偶变量分配值 0（$\overline{y_t}=0,\ \overline{y_1}=\overline{y_2}=\overline{y_3}=\overline{y_4}=0$）；

（3） 其余情形节点对应的对偶变量取值为 1



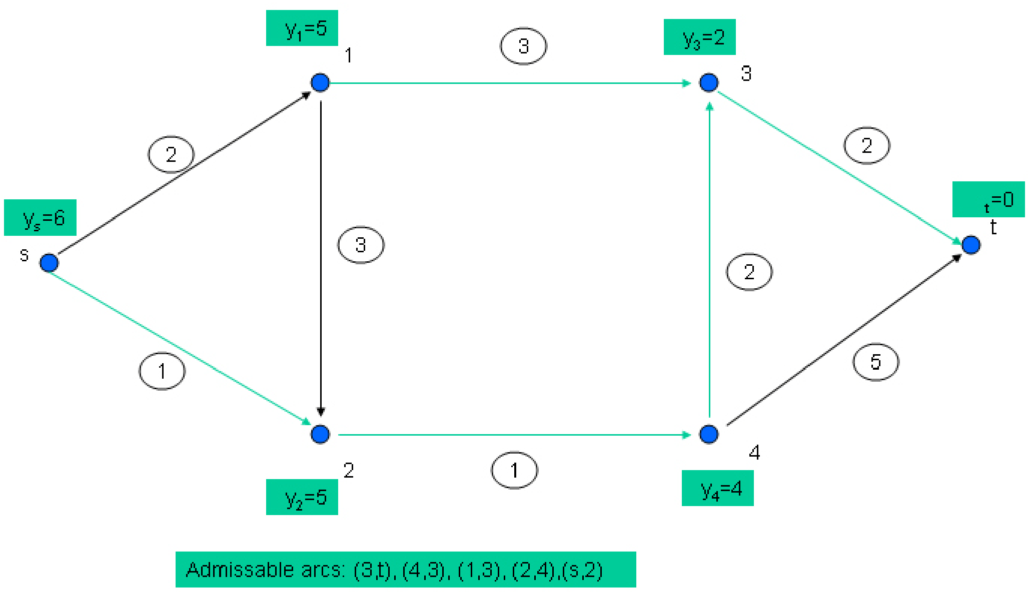
计算：

$$\theta_1 = \min_{\substack{(i,j)\notin J \\ y_i - y_j > 0}} \{c_{ij} - (y_i - y_j\}$$

$$= \min\{c_{s1} - (y_s - y_1), c_{s2} - (y_s - y_2)\} = 1$$

所以，(D)的新的可行解为：

$$y = (y_s, y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (5,5,5,2,4)^T + \theta_1(1,0,0,0,0)^T = (6,5,5,2,4)^T$$



$J = \{e_7, e_6, e_5, e_4, e_2\}$

显然存在仅利用 J 中的弧自 s 到 t 的路，得到最优路：e_2, e_5, e_6, e_7，其最优费用为 $y_s = 6$。

四、最短路问题原始－对偶算法的几点说明

（1）在算法的任何一个阶段，如果我们定义集合

$$W = \{i : 在允许弧集合中有自\, i\, 到\, t\, 的路\} = \{i : \overline{y_i} = 0\}$$

那么，在接下来的迭代过程中，任给 $i \in W$，将始终保持 $\overline{y_i} = 0$，从而，始终保持第 i 个节点对应的对偶变量 y_i 的取值保持不变；

（2）若某一弧 $(i, j) \in E$，一旦有 $y_i - y_j = c_{ij}$，即弧 $(i, j) \in E$ 变成允许弧后，则在接下来的迭代过程中：

（a）若存在仅利用 J 中的弧自 j 到达节点 t 的路，则必存在仅利用 J 中的弧自 i 到达节点 t 的路，从而 $\overline{y_i} = \overline{y_j} = 0$；

（b）若存在仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的节点 i 的路，则必存在仅利用 J 中的弧自 s 有路可到达的节点 j 的路，从而 $\overline{y_i} = \overline{y_j} = 1$；

（c）其它情形：$\overline{y_i} = \overline{y_j} = 1$

因此，在接下来的迭代过程中，y_i 和 y_j 始终保持相同的改变量，也即始终保持 $y_i - y_j = c_{ij}$，所以，**任何一弧变为允许弧后（即进入 J），则在算法的接下来的过程中它始终保持是允许的**。

（3）算法表明，对于 $i \in W$，y_i 表示自 i 到达节点 t 的最短路长度，并且算法进行中，每一步加到 W 里的点都是 $\overline{W} = E / W$ 中最靠近 t 的点。所以：**最短路问题的原始－对偶算法，实际上就是 Dijkstra 算法。**

（4）由于算法的每一个阶段，W 中至少增加一个节点，所以，**最短路问题的原始－对偶算法的迭代步数是有界的，并且不超过** $|V|$。

五、关于原始－对偶算法的进一步说明

原始－对偶算法的过程：

$$\begin{aligned} &\min z = c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \ge 0 \quad \text{(P)} \\ &\qquad x \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max \varpi = b^T y \\ &\text{s.t. } \ A^T y \le c \qquad \text{(D)} \\ &\qquad y\text{无限制} \end{aligned}$$

y 是(D)的一个可行解

$$J = \{ j : A_j^T y = c_j \}$$

$$\begin{aligned} &\min \xi = \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ &\text{s.t. } \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + x_i^a = b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ &\qquad x_j \ge 0, \quad j \in J \qquad\qquad \text{(RP)} \\ &\qquad x_j = 0, \quad j \notin J \\ &\qquad x_i^a \ge 0, \ i = 1,2,\cdots,m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\max \varpi = b^T y \\ &\text{s.t. } A_j^T y \le 0, \quad j \in J \\ &\qquad y_i \le 1, \ i = 1,2,\cdots,m \qquad \text{(DRP)} \\ &\qquad y_i\text{无限制} \end{aligned}$$

用单纯形类方法求解(RP)， 若：

- (RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}} = 0$，则得到(LP)和(D)的最优值，算法终止；
- (RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}} > 0$，设 $\bar{y}$ 是(DRP)的最优解，若 $A_j^T \bar{y} \le 0, j \notin J$，则(D)无上界，从而(LP)不可行，算法终止；

否则，取 $\theta \le \theta_1 = \min\limits_{\substack{A_j^T \bar{y} > 0, \\ j \notin J}} \left\{ \dfrac{c_j - A_j^T y}{A_j^T \bar{y}} \right\}$， $y := y + \theta \bar{y}$

1. 从原始问题的观点看

$(P, c) \to$ 迭代地求解 RP，其中 RP 不明显地依赖于费用向量 c，而是通过允许变量集 $J = \{ j : A_j^T y = c_j \}$ 间接地应用到费用向量 c。

由价格向量 y 的迭代循环可见，我们**已消除了一般费用向量的困难**，所以称之为**"组合化费用"**。

2. 从对偶问题的观点看

在从 D 到 DRP 时，DRP 不明显地依赖于 D 的右端项，所以称之为**"组合化右端项"**。

因此：

$P \to RP$	**组合化费用**
$D \to DRP$	**组合化右端项**

在最短路问题里，P 的右端项本质上平凡的，而所有数据是通过费用向量 c 表示出来的。所以，RP 和它的对偶 DRP 都不明显地依赖于数值问题的数据，而只依赖于允许变量集 J，从而导致一个纯组合的子问题。在最短路问题里就是一个简单的可达性问题。

从一个问题开始，用原始－对偶算法迭代地求解组合性的子问题，这一技术是组合优化的核心。组合优化中的一类重要问题——流和匹配问题的几乎所有有效算法，都是以此为基础。

六、最短路问题的 Dijkstra 标号算法

Dijkstra 标号算法：最短路问题的原始－对偶算法的一种有效实施。迭代步数至多为 n，算法的计算复杂度为 $O(n^2)$。

思考题：将 Dijkstra 标号算法与最短路问题的原始－对偶算法进行比较，说明 Dijkstra 标号算法实际上就是最短路问题的原始－对偶算法的一种具体实施。

七、最短路问题的 Floyd-Washall 算法

1. 特点：对一个图，同时求出所有节点对之间的最短路：
   (1) 算法程序简单有效；
   (2) 与 Dijkstra 标号算法比较，允许网络中的弧有负权，而且可以探测网络中的负费用圈；
   (3) 不像是原始－对偶算法。
2. 方法：直接在一个 $n \times n$ 的距离矩阵 $(d_{ik})_{n \times n}$ 上进行操作。
3. 算法的核心：三角运算
4. 算法的理论基础：如果对相继值 $j = 1, 2, \cdots, n$ 对距离矩阵 $(d_{ik})_{n \times n}$ 相继进行三角运算，那么每一个 d_{ik} 都变为从 i 到 k 的最短路的长度。
5. 算法的计算复杂度：$O(n^3)$。

要求：理解掌握最短路问题的 Floyd-Washall 算法。