

6.4 赋权匹配的有效算法—2

三、非二部图的赋权匹配问题

一般图 $G=(V,E)$ 的匹配问题可以描述为：

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

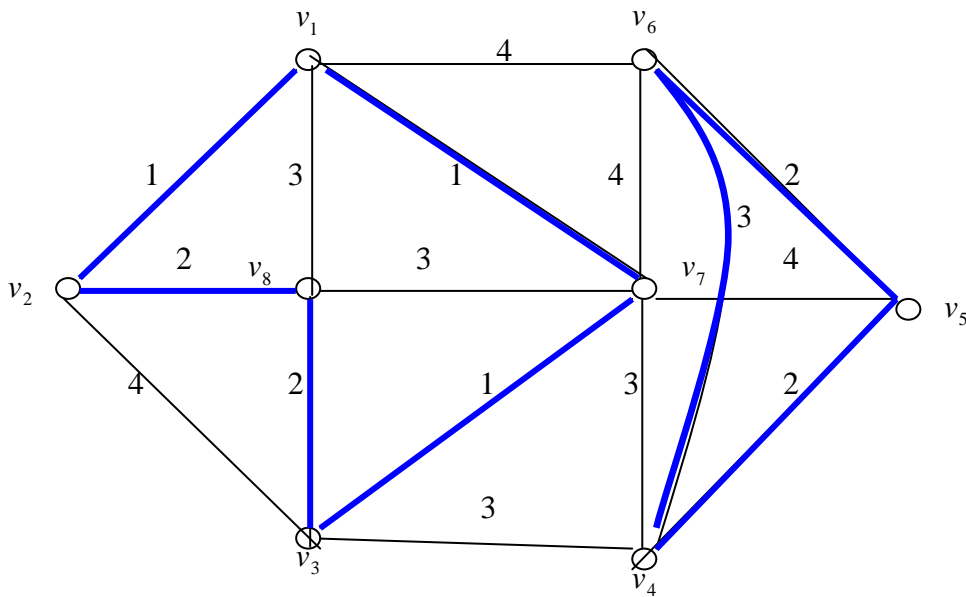
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n$$

其中 n 假定为偶数。

此线性规划问题可能有分数最优解，分数最优解对匹配没有任何意义。

分数最优解也可能是上述规划的基本可行解。例如：



对应这组费用（不在图里的边的费用为 100），其线性规划有唯一最优解：

$$x_{12} = x_{28} = x_{18} = x_{83} = x_{37} = x_{71} = x_{45} = x_{56} = x_{46} = \frac{1}{2}。$$

最优解是两个奇圈的边所对应的变量取值为 $\frac{1}{2}$ （大于零）。

问题：一定出现在奇圈上，使得上述线性规划模型不能完全描述匹配问题。

解决的办法：

- 克服奇圈这种病态情况，奇圈上边对应的大于零的变量不能超过奇圈边的一半

- 对奇圈上边对应的大于零变量的个数要增加约束

假定 n 为偶数，令 S_1, S_2, \dots, S_N 表示集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有大于 1 的奇数个元素的集合。

集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有子集个数为 2^n ，其中奇数个元素和偶数个元素各占一半，即为 2^{n-1} ，而等于 1 的子集个数共有 n 个。所以， $N = 2^{n-1} - n$ 。

S_j 中的元素的个数记为 $|S_j| = 2s_j + 1$ 。

Edmonds 定理： 对于一组费用 $\{c_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ ，一般匹配问题等价于下述的 LP

问题：求一组 $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ ，使它满足：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i,j \in S_k} x_{ij} + y_k &= s_k, \quad y_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, N \\ x_{ij} &\geq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \end{aligned} \quad (\text{LP})$$

证明：

基本思路：设计原始一对偶算法，求解上述(LP)问题，证明所得的解是最小费用的完美匹配。

上述问题的对偶问题：

设变量 α_i 对应原始规划的约束—— $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$ （每个顶点对应一个对偶变量）；

变量 γ_k 对应原始规划的约束—— $\sum_{i,j \in S_k} x_{ij} \leq s_k, k = 1, 2, \dots, N$ （每个奇圈对应一个对偶变量）

因此，上述问题的对偶规划为：

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{k=1}^N s_k \gamma_k \\
& \alpha_i + \alpha_j + \sum_{i,j \in S_k} \gamma_k \leq c_{ij} \quad i, j \leq n \\
& \gamma_k \leq 0 \quad k \leq N
\end{aligned} \tag{D}$$

用原始一对偶算法求解上述(LP):

初始对偶可行解取做: $\gamma_k = 0 (k=1,2,\dots,N)$, $\alpha_j = \frac{1}{2} \min_i \{c_{ij}\} (j=1,2,\dots,n)$

设 J 为允许变量集合, 即对偶规划使得等式成立的变量集合: $J = J_e \cup J_b$, 其中

$$J_e = \{[v_i, v_j]: \alpha_i + \alpha_j + \sum_{i,j \in S_k} \gamma_k = c_{ij} \quad i, j \leq n\} \text{ 允许边集合;}$$

$$J_b = \{S_k: \gamma_k = 0 \quad k \leq N\} \text{ 允许圈集合}$$

注: 由互补松弛性条件

- **允许边集合:** 边对应的 x_{ij} 可以大于 0
- **允许圈集合:** $\gamma_k = 0$, 则可以有 $y_k > 0$, 从而可以有 $\sum_{i,j \in S_k} x_{ij} < s_k$, 即 J_b

为允许圈集合时, 其中的**奇圈非零边没有饱和**。

记: $\overline{J_b} = \{r \text{ 为奇圈}: r \notin J_b\} = \{S_k: \gamma_k < 0 \quad k \leq N\}$ 。

- $\gamma_k < 0 \Rightarrow y_k = 0 \Rightarrow \sum_{i,j \in S_k} x_{ij} = s_k$, 即**非允许圈集合 $\overline{J_b}$ 中奇圈是非零边已经饱和的奇圈。(应该收缩成一点)**

对应的 RP 为:

$$\begin{aligned}
\min \xi &= \sum_{j=1}^n x_j^a + 2 \sum_{k=1}^N x_{n+k}^a \\
\sum_{j=1}^n x_{ij} + x_i^a &= 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
\sum_{i, j \in S_k} x_{ij} + y_k + x_{n+k}^a &= s_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \\
x_{ij} \geq 0 \text{ 且 } [v_i, v_j] \notin J_e &\Rightarrow x_{ij} = 0 \\
y_k \geq 0 \text{ 且 } S_k \notin J_b &\Rightarrow y_k = 0
\end{aligned} \tag{RP}$$

(RP)的对偶为:

$$\begin{aligned}
\max \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{k=1}^N s_k \gamma_k \\
\alpha_i + \alpha_j + \sum_{i, j \in S_k} \gamma_k &\leq 0 \quad [v_i, v_j] \in J_e \\
\gamma_k &\leq 0 \quad S_k \in J_b \\
\alpha_i &\leq 1, i = 1, 2, \dots, n \\
\gamma_k &\leq 2, k = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{DRP}$$

维持对偶变量 α_i 和 γ_k 的值, 使得(RP)和(DRP)本质是组合的, 并因此得到(RP)的整数解。暂时我们做如下假设:

- (A) $x_{ij} = 0$ 或 1, 并且它们构成 (V, J_e) 的一个匹配;
- (B) 如果 $S_k \in \overline{J_b}$ (即 $r_k < 0$), 则将图 (V, J_e) 限制到 S_k 上, 它包含 s_k 条匹配边 (这意味着 S_k 已由匹配边饱和, 即 $\sum_{i, j \in S_k} x_{ij} = s_k$);
- (C) 若 $S_i, S_k \in \overline{J_b}$ 且 $S_i \cap S_k \neq \emptyset$, 则或者 $S_i \subseteq S_k$, 或者 $S_i \supseteq S_k$ 。

在这个假设下, 我们可以去掉(RP)的约束:

$$\sum_{i, j \in S_k} x_{ij} + y_k + x_{n+k}^a = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, N。$$

因为:

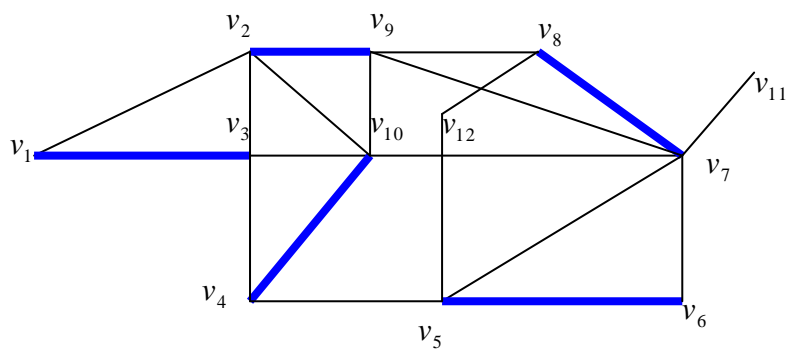
(1) 若 $\gamma_k = 0$ ，则 y_k 可以是正的，并因此可以用 y_k 填补 $\sum_{i,j \in S_k} x_{ij} - s_k$ ，而且其费用为 0，即令 $y_k := y_k + \sum_{i,j \in S_k} x_{ij} - s_k$ ，则可以取 $x_{n+k}^a = 0$ ；

(2) 另一方面，若 $\gamma_k < 0$ ，即 $S_k \in \overline{J_b}$ ，则由假设 (B) 知 $\sum_{i,j \in S_k} x_{ij} = s_k$ 。

因此，我们可以取 $x_{n+k}^a = 0 (k = 1, 2, \dots, N)$ 。因此，上述 N 个约束对求解 (RP) 没有影响，可以去掉。

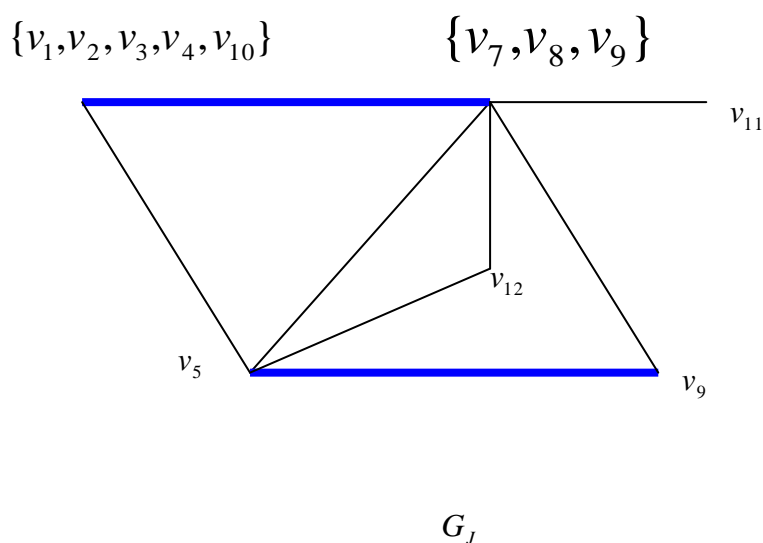
定义对应于允许变量集合 $J = J_e \cup J_b$ 的允许图 G_J ：

G_J 是由图 (V, J_e) 收缩了 $\overline{J_b}$ 中的所有奇点集合得到的图



(V, J_e)

$$\overline{J_b} = \{ \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{10}\}, \{v_7, v_8, v_9\} \}$$



注：（1）要使 G_J 有明确的定义，就要假设(C)成立；

（2）如果 $\overline{J_b}$ 中的所有奇集都由匹配边饱和，则称 (V, J_e) 的匹配是正常的。

例如：上图上的匹配是最大正常匹配，但它不是 (V, J_e) 的最大匹配。

引理： G_J 中存在一个具有 d 个未盖点的匹配 $\Leftrightarrow (V, J_e)$ 存在 d 个未盖点的正常匹配。

证明：“ \Rightarrow ”设在 G_J 中存在一个具有 d 个未盖点的匹配，那么在在 G_J 中撑开被收缩的奇集，则：

G_J 的一个匹配+被撑开奇集中的一些适当的匹配边 $= (V, J_e)$ 的一个正常匹配，

并且被撑开奇集中存在一个未盖点 $\Leftrightarrow G_J$ 中是未盖点。

“ \Leftarrow ”设 (V, J_e) 存在 d 个未盖点的正常匹配，在 (V, J_e) 中收缩 $\overline{J_b}$ 的一些极大奇集，那么由 (V, J_e) 的正常匹配就能得到 G_J 的一个匹配。又因为我们是从小正常的匹配开始的，所以这样做没有改变未盖点的数目。

证毕

推论：通过求 G_J 的最大基数匹配，可以求出 (V, J_e) 的最大基数的正常匹配。

所以：(RP)的最优解是 (V, J_e) 的最大正常匹配。

因此, 假设 $\{x_{ij}\}$ 是(RP)的最优解, 则由(RP)的约束 $\sum_{j=1}^n x_{ij} + x_i^a = 1, i = 1, 2, \dots, n$ 得

到: $\sum_{i=1}^n x_i^a = n - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} = d$ (表示 (V, J_e) 的最大正常匹配中未盖点的个数)

下面将通过给出费用为 d 的(DRP)的一个解的方法, 从而(DRP)的目标函数值和(RP)的目标函数值都等于 d , 所以同时得到(DRP)和(RP)的最优解, 证明了结论成立。

假设用前面的非二部图的最大基数匹配算法已经求出了 G_J 的最大匹配, 并设 G_c 是由收缩 G_J 的某些花得到的图, 因此当前图 G_c 中没有增广路。 G_c 的顶点集是由拟点组成。

拟点是指下述三种类型的点:

(1) V 中的节点;

(2) $\overline{J_b}$ 的极大奇集——收缩为一个点;

(3) V 中的一些节点与 $\overline{J_b}$ 的某些极大奇集合并为 G_J 的最外层的花 (即不包含在其它花里的花) ——收缩为一个点。

G_c 的一个拟点可以是:

- 外点——从一个未盖的拟点有偶数长的交错路可到达它;
- 内点——外拟点的配偶;
- 既不是外点也不是内点。

所以, 集合 V 被划分为三部分:

- 外点集 O (外拟点中的节点集合)
- 内点集 I (内拟点中的节点集合)
- 其余部分

类似地, G_c 中的拟点 (非 V 中的节点) 也可以划分为三部分:

- Ψ_o ——对应于外拟点或者对应于花的极大奇集
- Ψ_I ——对应于内拟点的极大奇集
- 其余部分

可以定义(DRP)的解如下:

$$\overline{\alpha}_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } v_i \in O \\ -1, & \text{若 } v_i \in I, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \overline{\gamma}_i = \begin{cases} -2, & \text{若 } S_k \in \Psi_o \\ 2, & \text{若 } S_k \in \Psi_I \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (\text{容易验证可行性})$$

对应的费用为:

$$|O| - |I| - 2 \sum_{S_k \in \Psi_O} s_k + 2 \sum_{S_k \in \Psi_I} s_k$$

$= \#G_c$ 中的外拟点 $- \#G_c$ 中的内拟点

$= \#G_c$ 中的未盖点

$= \#(V, J_e)$ 的最大正常匹配下的未盖点

此时, (DRP) 的目标函数值和 (RP) 的目标函数值都等于 d 。所以, 它正是 (RP) 的最优值。

所以, (RP) 的一切解都将是最大的正常匹配。

即最后一次迭代得到 (RP) 的最优解, 也就是 **Edmonds** 定理中的线性规划 (LP) 的最优解。

下面说明假设 (A)、(B)、(C) 是合理的。对迭代步数用归纳法。

开始: 所有 $\gamma_k = 0, x_{ij} = 0$, 满足假设 (A)、(B)、(C);

第 k 步迭代前: 如果假设 (A)、(B)、(C) 满足, 那么第 $k+1$ 步迭代前假设 (A)、(B)、(C) 满足仍然成立。因为:

- (1) 加到 $\overline{J_b}$ 里仅是允许图的花, 当然这些花是由匹配边所饱和, 所以假设 (A) 满足;
- (2) 由于 (RP) 的最大匹配必定是正常匹配, 所以已经在 $\overline{J_b}$ 里的奇集仍是由匹配边所饱和, 所以假设 (B) 满足;
- (3) 因为只有 G_j 的花加到 $\overline{J_b}$ 里, 而且这些花肯定满足假设 (C), 所以假设 (C) 成立。

定理证毕

对偶变量的调整:

$\theta_1 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, 其中

$$\delta_1 = \min \left\{ \frac{c_{ij} - \alpha_i - \alpha_{ji}}{2} : v_i, v_j \in O \text{ 且不在同一个拟点里} \right\}$$

$$\delta_2 = \min \{ c_{ij} - \alpha_i - \alpha_{ji} : v_i \in O, v_j \in V - I - O \}$$

$$\delta_3 = \min \left\{ -\frac{\gamma_k}{2} : S_k \in \Psi_k \right\}$$

赋权匹配算法 (阅读参考书)

定理: 赋权匹配算法是正确的, 且计算复杂度为 $O(n^4)$ 。