整数规划

线性规划问题中有一部分问题要求有整数可行解和整数最优解，例如完成任务的人数，生产机器的台数，生产任务的分配，场址的选定等。都必须部分或者全部满足整数要求，这样的问题称为整数线性规划问题。简称为整数规划问题。下面我们先举出一些整数线性规划的例子，然后讨论它的解法。

§1 整数规划问题的基本概念

1.1 实例

例 1 某厂生产 A、B 两种产品，这两种产品的单位利润分别为 25 元和 40 元。生产每种产品都需要三道工序，其各种产品的工时(单位：小时)，每一工序每周可供使用的时间如表 4-1，问工厂如何安排生产，使其获利最大？

表 1

工时/台 工序 产品	一	二	三
A	0.3	0.2	0.3
B	0.7	0.1	0.5
每周工时	200	100	150

工时/台 工序 产品	一	二	三
A	0.3	0.2	0.3
B	0.7	0.1	0.5
每周工时	200	100	150

解：假设工厂每周应生产 A 种产品 x_1 件，B 种产品 x_2 件，我们得到下面的数学模型：

$$\max z = 25x_1 + 40x_2$$

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.7x_2 \le 200 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 \le 100 \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{并且全为整数} \end{cases}$$

由于所有变量要求取整数，我们称它为**全整数规划问题**。

例 2 我们要作投资决策，就是对几个潜在的投资方案作出选择，例如投资决策可以是在可行的几个厂址 中作出选择；或设备构置的选择；或对一组研究和发展项目作出决定。在这类决策问题中，问题是在“要”或者“不要”之间进行选择，如果我们令决策变量是整数，且只取 或 1，分别表示不投资或者投资。假定 代表第 j 项投资得到的收益， 是用于第 j 项

投资的第 I 项资源的数量， 为第 I 种资源的限制 则上述问题可列成下式：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j = 0\text{或}1 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1}$$

由于所有的变量都只能取 0 或 1，所以，这样的整数规划问题称为 0−1 规划。

一般整数规划分为三种类型。整数规划中如果所有的变量都限制为非负整数，就称这类整数规划为**纯整数规划**，或称全整数规划，如例 1、例 2 是纯整数规划。纯整数规划的一个特殊情况是变量取值仅限于 0 或 1，这一类问题称为 **0-1 整数规划**问题，也称为 0-1 规划，例 2 就是 0-1 规划，在整数规划中，如果一部分变量要求取整数而另一部分不一定要求取整数，则称这一类问题为**混合整数规划问题**。

1．2 整数规划求解分析

整数规划的一般模型可表达为

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j = 0\text{或}1 & (j=1,2,\cdots,n) \\ x_s\text{为整数} & s=1,2,\cdots,t, t\le n \end{cases} \tag{2}$$

模型(2)与一般线性规划的模型很相似，区别在于除变量的非负条件外，还加了整数解的要求，为了说明这两类问题的联系和区别，请看下面的例子

例 3 已知整数规划问题

$$\max z = x_1 + 5x_2 .$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 20 ; \\ x_1 \le 2 ; \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}$$

如果先不考虑整数条件，得到如下线性规划问题(称为松弛问题)：

$$\max z = x_1 + 5x_2 ;$$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 20 ; \\ x_1 \le 2 ; \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对于这个问题，很容易用图解法得到最优解(见图 4-1)在 B 点得到最优解。$x_1 = 2, x_2 = 9/5,$ 且有 $z = 11$。

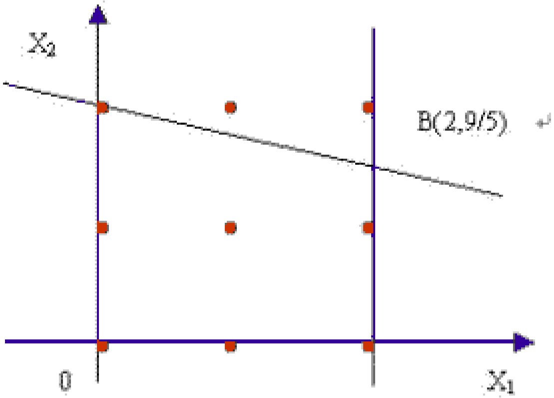

图 4-1

再考虑整数条件。如将 x_2 凑成整数 $x_2=2$，则点(2.2)落在可行域外，不是可行解；若将 x_2 凑成整数 1，但点(2.1)不是最优解。因为当 $x_1=2, x_2=1$，得到 $z=7$，而当 $x_1=0, x_2=2$ 得到 $z=10$，显然点(0,2)比点(2,1)更好。因此不能企图简单的将松弛问题的最优解圆整(例如四舍五入)就能得到整数规划的最优解。

从图 4-1 可知，整数规划问题的可行解集是相应的线性规划问题的可行域内的整数格子点，它是一个有限集。显然，我们还有另一种方法，即将所有的可行解依次代入目标函数，比较低所得的目标函数的大小，从而得到最优解。这个方法称为完全枚举法。如上例有整数可行解

$$X^{(1)}=(0,0), X^{(2)}=(0,1), X^{(3)}=(0,2), X^{(4)}=(1,0), X^{(5)}=(2,0),$$
$$X^{(6)}=(1,1), X^{(7)}=(2,1).$$

目标函数值为 $z^{(1)}=0, z^{(2)}=5, z^{(3)}=10, z^{(4)}=1, z^{(5)}=2, z^{(6)}=6, z^{(7)}=7$，所以得到最优解 $X^{(3)}=(0,2)$，最优值 $z^{(3)}=10$.

完全枚举法的计算工作量是很大的，特别当变量个数和约束条件个数都很多时，有时甚至是不可能的。因此，如何巧妙构造枚举过程是必须研究的问题，目前用得较多的是将完全枚举法变成部分枚举法。常用的求解整数规划的方法有分枝定界法和割平面法，对于特别的 0-1 规划问题的求解，可以采用隐枚举法和匈牙利法。下面分别介绍。

§2　分枝定界法

除少数整数规划可以用线性规划的单纯形法直接求解外，一般整数规划必需寻找新的求解方法。这里我们介绍全整数规划的分枝定界方法，它也可以用于求解混合整数规划问题和 0-1 规划问题。下面我们从一个例子出发来讨论它的思路和步骤。

例 1　解下面的整数规划问题

$$\max z = 5x_1 + 8x_2; \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; & (2) \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45; & (3) \\ x1 \ge 0, x2 \ge 0; & (4) \\ x1, x2 \text{为整数} & (5) \end{cases} \qquad (4.3)$$

解：

（1）首先我们注意到问题(3)的可行解集为图 4-2 的阴影部分 内的整数格子点组成的集合，暂时不考虑整数限制条件(5)。解相应的线性规划(1)~(4)，即(3)的松弛问题：

$$\max z = 5x_1 + 8x_2; \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; & (2) \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45, & (3) \\ x1 \ge 0, x2 \ge 0, & (4) \\ x1 \ge 0, x2 \ge 0; & (5) \end{cases} \quad (4.4)$$

得最优解

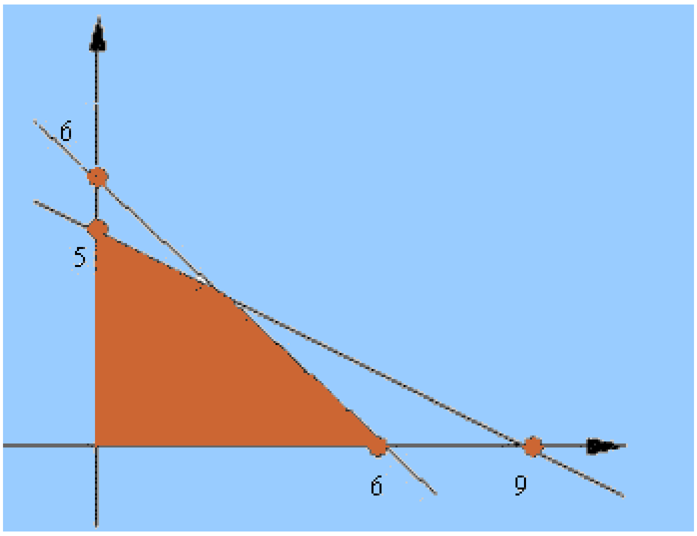

图 4-2

$$x_1 = 2.25, x_2 = 3.75, z_0 = 41.25$$

由(1)和(5)可知 ILP 的最优解 $0 \le z^* \le z_0 = 41.25$，且必为整数，从而可以断言 $0 \le z^* \le 41$。这一过程称为定界，即给出 ILP0 问题目标函数最优解 z^* 的下界和上界。

（2）其次我们注意到线性规划(4)的解 x_1, x_2 具有小数，但这两个变量在(3)中都必须是整数，那就是说必须把小数部分“划掉”。我们注意到，对 $x_2 = 3.75$ 而言(对 x_1 也是如此)，最终的最优解不会在 3 和 4 之间取值，亦即必然有：

$$x_2 \le 3 或 x_2 \ge 4 \qquad (4.5)$$

这种表达式实际上是将 x_2 在 3 和 4 间的小数部分划掉了，把可行域 v_0 分成了 v_1 和 v_2，显然这种分法把原来线性规划的解 A 点(2.25,3.75)排除出去了。但没有排除任何整数可行解。这一过程称为分枝，即用两个矛盾的约束条件(5)分别代入原问题(3)形成两个子问题 ILP1 和 ILP2：

$$\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad (1)$$

$$ILP_1 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 & (2) \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 & (3) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & (4) \\ x_1, \quad x_2 为整数 & (5) \\ x_2 \ge 4 & \end{cases}$$

$$\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad (1)$$

$$ILP_2 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 & (2) \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 & (3) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & (4) \\ x_1, \quad x_2\text{为整数} & (5) \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

解 ILP1 的松弛问题 ILP1 得到

$$x_1 = 1.8, x_2 = 4, z = 41$$

。

解 ILP2 的松弛问题 ILP2 得到

$$x_1 = 3, x_2 = 3, z_2 = 39$$

。

（3）修改上下界：从 LP1 和 LP2 的解我们知道有 $39 \le z^* \le 41$.

（4）再分枝：

下面我们就是要划掉 $39 \le z^* \le 41$. LP1 的解中 $x_1 = 1.8$ 的小数部分，增加约束 $x_1 \le 1, x_1 \ge 2$ 对 ILP1 进一步的分枝，即

$$\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad (1)$$

$$ILP_3 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 & (2) \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 & (3) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & (4) \\ x_1, \quad x_2\text{为整数} & (5) \\ x_2 \ge 4 \\ x_1 \le 1 \end{cases}$$

$$\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad (1)$$

$$ILP_4 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 & (2) \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 & (3) \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 & (4) \\ x_1, \quad x_2\text{为整数} & (5) \\ x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 2 \end{cases}$$

求解 LP3 得：

$$x_1 = 1, x_2 = 4.44, z_3 = 40.56$$

对于 LP4，不难看出，无可行解。

（5）再修改界，此时我们又有 $39 \le z^* \le 40.56.$

（6）再分枝，继续对 ILP3 进行分枝(由于 x_2 是小数，增限制条件 $x_2 \le 4 \text{或} x_2 \ge 5$)又得到

$$\max z = 5x_1 + 8x_2 \qquad (1)$$

$$ILP_5\quad\begin{cases}x_1+x_2\le 6 & (2)\\ 5x_1+9x_2\le 45 & (3)\\ x_1\ge 0,\qquad x_2\ge 0 & (4)\\ x_1,\qquad x_2\text{为整数} & (5)\\ x_2\ge 4\\ x_1\le 1\\ x_2\le 4\end{cases}$$

及

$$\max z=5x_1+8x_2 \qquad (1)$$

$$ILP_6\quad\begin{cases}x_1+x_2\le 6 & (2)\\ 5x_1+9x_2\le 45 & (3)\\ x_1\ge 0,\qquad x_2\ge 0 & (4)\\ x_1,\qquad x_2\text{为整数} & (5)\\ x_2\ge 4\\ x_1\le 1\\ x_2\ge 5\end{cases}$$

求解 LP5 得到：

$$x_1=1\,,\,x_2=4\,;\,z_5=37$$

求解 LP6 得到：

$$x1=0\,,\,x2=5\;\;;z_6=40.$$

至此，所有的子问题都已探明，求解结束。我们得到了 ILP_0(即原问题)的最优解：

$$x_1^*=0\qquad x_2^*=5\qquad z^*=40$$

分枝定界法的一般步骤如下：

第一步，先不考虑原问题的整数限制，求解相应的松弛问题，若求得最优解，检查它是否符合整数约束条件；如符合整数约束条件，即转下一步。

第二步，定界。在各分枝问题中，找出目标函数值最大者作为整数规划最优值 z^* 的上界记为 $\bar{z}$，从已符合整数条件的分枝中，找出目标函数值最大者作为下界，记为 $\underline{z}$。即 $\underline{z}\le z^*\le\bar{z}.$

第三步，分枝。根据对变量重要性的了解，在最优解中选择一个不符合整数条件的 x_j，令 $x_j=b_j^{'}$，($b_j^{'}$ 不为整数)则用下列两个约束条件：

$$x_j\le\left[b_j^{'}\right],$$
$$x_j\ge\left[b_j^{'}\right]+1$$

其中 $\left[b_j^{'}\right]$ 表示不超过 $b_j^{'}$ 的最大整数，分别加入问题形成两个子问题。

第四步，应用对目标函数估界的方法，或对某一分枝重要性的了解，确定出首先要解的某一分枝的后继问题，并解此问题。若所获得的最优解符合整数条件，则就是原问题的解，若不符合整数条件，再回到第二步，并参照第四步终止后继问题。

在上述过程中，要不断应用分枝、定界、估界来进行判断。当我们求解某子问题的松弛问题时，只要出现下列情况之一，该问题就已探明：

(1) 松弛问题没有可行解，则原问题也没有可行解；

(2) 松弛问题的最优解恰好全取整数，则该最优解也是其对应的子问题的最优解；

(3) 松弛问题的最大值小于现有的下界 z，则无论其最优解是否取整数值，都将对应的子问题剪枝；

已探明的子问题就不再用分枝了，如果所有的子问题都已探明，，则原整数规划的最优解就一定可以求出，或可以判定它无解。

§3 割平面法

割平面法也是求解整数规划问题常用方法之一。

3.1 基本思路

用割平面法求解整数规划的基本思路是：先不考虑整数约束条件，求松弛问题的最优解，如果获得整数最优解，即为所求，运算停止。如果所得到最优解不满足整数约束条件，则在此非整数解的基础上增加新的约束条件重新求解。这个新增加的约束条件的作用就是去切割相应松弛问题的可行域，即割去松弛问题的部分非整数解(包括原已得到的非整数最优解)。而把所有的整数解都保留下来，故称新增加的约束条件为割平面。当经过多次切割后，就会使被切割后保留下来的可行域上有一个坐标均为整数的顶点，它恰好就是所求问题的整数最优解。即切割后所对应的松弛问题，与原整数规划问题具有相同的最优解。

下面以全整数规划问题的割平面法为例，介绍割平面的求解过程。

3.2 求解步骤与举例

割平面法的具体求解步骤如下：

1. 1. 对于所求的整数规划问题(2)，先不考虑整数约束条件，求解相应的松弛问题

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m); \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m). \end{cases} \tag{4.6}$$

2. 如果该问题无可行解或已取得整数最优解，则运算停止；前者表示原问题也无可行解，后者表示已求得整数最优解。如果有一个或更多个变量取值不满足整数条件，则选择某个变量建立割平面。

3. 3. 增加为割平面的新约束条件，用前面介绍的灵敏分析的方法继续求解，返回 1。

下面介绍割平面的建立方法及其求解过程。

例 1 求解下列整数规划问题

$$\max z = x_1 + x_2;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6; \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20; \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases} \tag{4.7}$$

解引入松弛变量，写成标准形式：

$$\max z = x_1 + x_2;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6; \\ 4x_1 + 5x_2 \quad + x_4 \le 20; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0, \text{且为整数} \end{cases} \tag{8}$$

对上述模型不考虑整数条件，用单纯形法求解相应松弛问题的最终单纯形表为（表 4-2）

表 2

c_j			1	1	0	0
C_B	X_B	b'	x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_1	5/3	1	0	5/6	-1/6
1	x_2	8/3	0	1	-2/3	1/3
σ_{ij}		-13/3	0	0	-1/6	-1/6

显然，$x_1 = 5/3, x_2 = 8/3$ 为非整数解。为求得整数解，我们想办法在原约束条件的基础下引入一个新的约束条件，以保证一个或几个变量取值为整数。为此，在表 4-2 中任选一个取值非整数的变量，如 x_2，写出用基变量表示基变量的表达式：

$$x_2 - 2/3x_3 + 1/3x_4 = 8/3, \tag{9}$$

将上式的所有变量的系数及右端常数均改写成一个整数与一个非负真分数之和的形式。据此，(9)式可以改写成

$$(1+0)x_2 + (-1+1/3)x_3 + (0+1/3)x_4 = 2 + 2/3,$$

若将带有整数系数的变量整数项留在方程的左边，其余移到方程的右边，则有

$$x_2 - x_3 - 2 = 2/3 - 1/3x_3 - 1/3x_4 \quad , \tag{10}$$

由于要求变量取值为正整数，方程(10)的左边必为整数。当然，方程的右边也应为整数。又由于 $x_3, x_4 \ge 0,$ 于是，有

$$2/3 - 1/3x_3 - 1/3x_4 \le 0, \tag{11}$$

整理后得

$$x_3 + x_4 \geq 2.$$

(11)式就是所求的新约束条件，即为了求得整数解所引入的割平面方程。从上面的推导过程可以看出，凡是原所求的整数规划(8)式的可行整数解必然满足(11)式，而(8)式的松弛问题的可行解却有一部分不满足(11)式。这就意味着条件(11)式起到了这样的作用：对整数规划(8)式所对应的线性规划的可行域，保留了其中的所有整数可行解，但割掉了一部分非整数解。为了直观地在图形上描述，可将(8)式的两个约束方程代入(11)式，则(11)式成为

$$x_1 + x_2 \leq 4\ ,$$

这就是割平面的方程。即图 4-5 所示的 AE 直线的下半部分。显然它割去了除 AE 直线上所有点以外的△ABE 部分，其中包括原所求得的非整数最优解点 B(5/3,8/3)。

建立割平面以后，便可以把割平面方程作为新的约束条件加到原整数规划问题(8)式中，在仍然不考虑整数条件的情况下，利用单纯形法或对偶单纯形法继续求解。为简代运算，也可在(11)式中引入松弛变量代成下式：

$$-1/3x_3 - 1/3x_4 + x_5 = -2/3,$$

将其作为新的约束条件，加入到表 4-2，便形成新的线性规划问题，其可行域为图 4-5 的凸集 OAEC。用对偶单纯形法求解，具体运算过程见表 4-3。

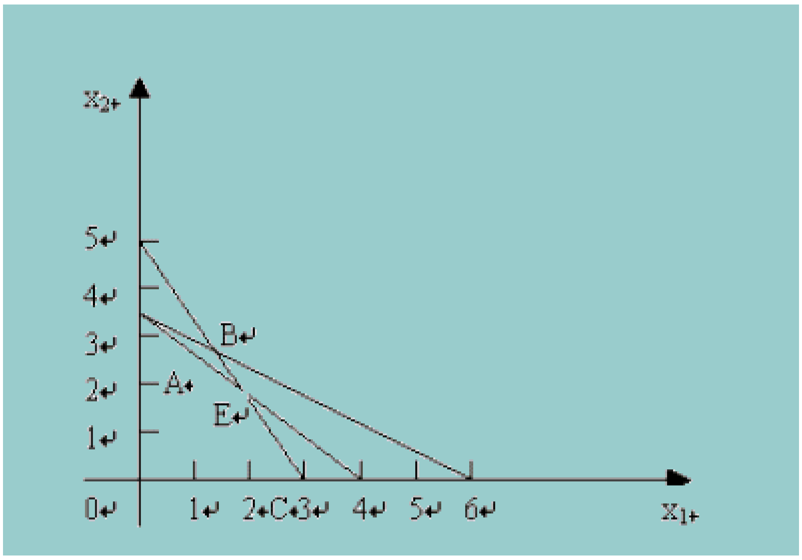

图 4-5

表 3

c_j			1	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_1	5/3	1	0	5/6	-1/6	0
1	x_2	8/3	0	1	-2/3	1/3	0
0	x_5	-2/3	0	0	-1/3	-1/3*	1
σ_j		-13/4	0	-1/6	-1/6	0	0
1	x_1	2	1	0	1	0	-1/2
1	x_2	2	0	1	-1	0	1
0	x_4	2	0	0	1	1	-3
σ_j		-4	0	0	0	0	1/6

由表 4-3 得最优解为

$$x_1 = 2, x_2 = 2, x_4 = 2, x_3 = x_5 = x_6 = 0$$

对应的目标函数值等于 4。

因为上述的线性规划的最优解已是整数解，所以得整数规划问题 4.7 的最优解：x_1=2，x_2=2。此最优解位于图 4-5 的 E 点。

在上述示例分析的基础上，我们再来讨论割平面方程的一般表达式。假设表 4-4 是不考虑整数条件所对应的松弛问题的最优单纯形表。为方便起见，以 x_i (i=1,2,···,m) 表示基变量，以 x_j（ j=m+1,m+2,···,n ）表示非基变量。

表 4

c_j			c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	…	c_n
C_B	X_B	b'	x_1	x_2	…	x_r	……	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	…	x_n
c_1	x_1	b_1'	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	…	$a_{1,n}$
c_2	x_2	b_1'	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	…	$a_{2,n}$
⋮	⋮	⋮			…							
c_r	x_r	b_1'	0	0	…	1	…	0	$a_{r,m+1}$	$a_{r,m+2}$	…	$a_{r,n}$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\cdots$				$\cdots$				
c_m	x_m	$b_1^{'}$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	$\dots$	$a_{m,n}$
z		$-z^{(0)}$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	σ_{m+1}	σ_{m+2}	$\dots$	σ_n

如果 x_r 为表 4-4 所示的最优解中具有分数值的一个基变量，则由表 4-4 可以得到

$$b_r^{'} = x_r + \sum_{j=m+1}^{n} a_{rj} x_j \quad , \qquad (4.12)$$

这时 $b_r^{'}$ 表示 x_r 的取值。

将(12)式中的变量系数及常数都分解成整数 N 和非负真分数 f 两部分之和，即

$$b_r^{'} = N_r + f_r \quad ; \qquad (4.13)$$

$$a_{rj} = N_{rj} + f_{rj} \quad ; \qquad (4.14)$$

其中：$Nr = \left[b_r^{'}\right]$表示 $b_r^{'}$ 的整数部分； f_r 表示 $b_r^{'}$ 的非负真分数部分；

且有

$$0 < f_{ir} < 1;$$

$$0 \le f_{ir} < 1.$$

于是(12)式可改写成

$$Nr + fr = xr + \sum_{j=m+1}^{n} N_{rj} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j .$$

移项得

$$fr - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j = xr + \sum_{j=m+1}^{n} N_{rj} x_j - N_r .$$

为了使所有的变量都是整数，(15)式右边必须是整数，当然左边也必然为整数。由于 $f_{rj} \ge 0$,且 x_j 为非负整数，所以有 $\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j \ge 0$,

又由于 f_r 为非负真分数，则可得出

$$fr - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j \le f_r < 1 ,$$

既然(15)的左边必须为整数，显然上式不能为正，于是便可得到

$$f_r - \sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j \le 0 ,$$

即

$$-\sum_{j=m+1}^{n} f_{rj} x_j \le -f_r . \qquad (16)$$

这就是新增加的约束条件。再增加一个松弛变量将其化为等式，就可将其加到表 4-4 中去继续用对偶单纯形法求解。