第七章 多面体组合学

7.1 整数线性规划模型

一、整数线性规划的一般模型

首先，我们考虑“难”的组合优化问题的最一般的模型——整数线性规划模型：

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\text{s.t.}\quad Ax \le b \\ &\qquad\ \ x \ge 0 \\ &\qquad\ \ x\text{为整数向量} \end{aligned} \qquad \text{(ILP)}$$

其中 $A \in Z^{m\times n}, c \in Z^n, b \in Z^m$ 。

二、模型实例

通常情况下，整数线性规划不知道是否存在有效算法，这并不奇怪，因为事实上，所有的组合优化问题都可以用整数规划模型来描述。所以，可以说，整数规划是最具普遍性、也是最难的数学规划模型。下面就给出几个整数线性规划模型的实例。

1. 投资组合问题

背景：

证券投资：把一定的资金投入到合适的有价证券上以规避风险并获得最大的利润；

项目投资：财团或银行把资金投入到若干项目中以获得中长期的收益最大。

案例：

某财团有 B 万元的资金，经考察选中 n 个投资项目，每个项目只能投资一个。其中第 j 个项目需投资金额为 b_j 万元，预计 5 年后获利 c_j 万元 $j=1,2,\cdots,n$ ，问应如何选择项目使得 5 年后总收益最大？

模型：

变量——每个项目是否投资： $x_j = 0,1 (j=1,2,\cdots,n)$

约束——总金额不超过限制： $\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \le B$

目标——总收益最大： $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \le B \\ x_j = 1,0;\ j = 1,2\ldots,n \end{cases}$$

2. 旅游售货员问题

背景：

旅游线路安排：预定景点走且只走一次，路上时间最短；

配送线路——货郎担问题： 送货地到达一次，总路程最短

模型：

变量——是否从 i 第个城市到第 j 个城市 $x_{ij}=1,0;$

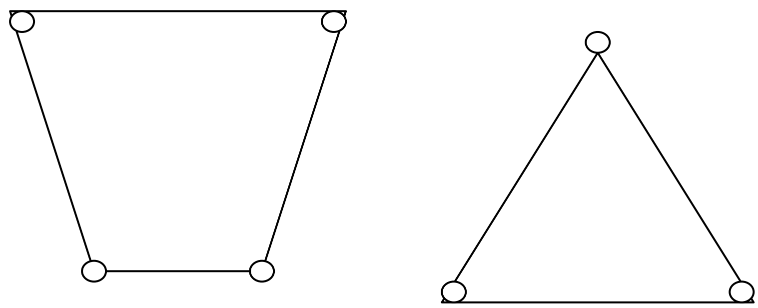
约束——每个城市只能到达一次、离开一次

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij}=1; i=1,2,\ldots n$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij}=1; j=1,2,\ldots n$$

目标——总费用最小 $\min\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij}$

然而，由于不相交的有向图也满足上述约束：



为了避免出现断裂，每个点给个位势，除了初始点外要求前点比后点大。

$$\min\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=0}^{n} x_{ij}=1; i=1,2,\ldots,n\\ \sum_{i=0}^{n} x_{ij}=1; j=1,2,\ldots,n\\ u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1; 1\le i\ne j\le n\\ x_{ij}=1,0, i=1,2,\ldots,n, j=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

3. 背包问题

背景：

邮递包裹：把形状可变的包裹用尽量少的车辆运走

旅行背包：容量一定的背包里装尽可能的多的物品

模型：

变量——

约束——

4. 排序问题

模型：

变量——

约束——

5. 非线性问题

x 限制为整数本质上是一个非线性约束，因为它不可能用线性约束来代替。而且，许多非线性约束都可以用整数限制来表示。所以，变量限制为整数似乎是一个基本的非线性约束。

例：

（1） 非线性费用函数：非线性费用函数的一个重要类型是，具有转换消耗的费用函数：

$$c(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{if } x>0 \\ 0, & \text{if } x=0 \end{cases}$$

可以引进整数变量 δ， $0\le\delta\le1$，构造 MILP，要求 $\delta=1\Leftrightarrow x>0$，为了达到这一目的，增加约束：

$$\delta\le x\le U\delta$$

其中 U 是 x 的上界（已知）。此时费用函数变为非线性函数：

$$c(x,\delta)=ax+b\delta$$

（2）二中择一

可行解必须满足两个约束之一，即

$$x\ge a \text{ 或者 } y\ge b \text{。}$$

可以引进整数变量 δ， $0\le\delta\le1$，把上述约束化为等价的约束：

$$x\ge\delta a$$

$$y\ge(1-\delta)b$$

上述方法推广到约束合取的析取合和多个约束的析取是可能的。特别是对于下述形式的约束，这一技巧非常有效：

$$\text{若 } x>a\text{，则 } y\ge b\Leftrightarrow x\le a \text{ 或者 } y\ge b$$

（3）离散变量：约束为 $x\in\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}\Leftrightarrow x=S_1\delta_1+S_2\delta_2+\cdots+S_m\delta_m\}$，其中 δ_j 满足：

$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_m=1$ 且 $\delta_j\ge0$ 为整数， $j=1,2,\cdots,m$

6. 适定性问题

适定性问题是数理逻辑中的一个中心问题，设计求解这一问题的算法一直具有重要的意义。

布尔变量 x：取值为“真”或“假”

逻辑运算：“或”、“与”、“非”

$$+ \qquad \bullet \qquad \bar{x}$$

布尔表示式：布尔变量和逻辑运算所组成的表示式，如：

$$\overline{x_3}\bullet(x_1+\overline{x_2}+x_3)$$

真值分配：给定一个变量 x 的一个值 $t(x)$，如令：

$t(x_1)$ ＝“真”，令 $t(x_2)$ ＝“真”，令 $t(x_3)$ ＝“假”，

布尔表示式的值：给定一个变量的真值分配，布尔表示式有一个取值。

可适定的布尔表示式：给定一个布尔表示式，如果存在一个真值分配，使得表示式的取值为“真”，则称这个布尔表示式是可适定的。

注：并不是所有的布尔表示式都是可适定的。如：

$$(x_1+x_2+x_3)\bullet(x_1+\overline{x_2})\bullet(x_2+\overline{x_3})\bullet(x_3+\overline{x_1})\bullet(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3})$$

称为句子

上述布尔表示式取真值，必须所有的句子取真值

上述布尔表示式是不可适定的。

适定性问题：给定包含布尔变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 个句子 $C_1,C_2,\cdots,C_m$，布尔表示式 $C_1\bullet C_2\bullet\cdots\bullet C_m$ 是可适定的吗？

求解适定性问题的方法：

（1）枚举法：不是一个有效方法，有 2^n 中可能；

（2）到目前为止，解适定性问题没有一个有效的算法。

可适定性问题转化为一个 ILP 的方法：

令“真”＝1，“假”＝0；“或”＝＋，$\bar{x}=1-x$，那么

$$\text{要求一个句子}C\text{取值为真}\Leftrightarrow\sum_{x\in C}x+\sum_{\bar{x}\in C}(1-x)\ge 1$$

如上述布尔表示式可以表示为下述不等式系统：

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$

$$x_1 + (1 - x_2) \ge 1$$

$$x_2 + (1 - x_3) \ge 1 \qquad\qquad \text{(IES)}$$

$$x_3 + (1 - x_1) \ge 1$$

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) + (1 - x_3) \ge 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ 为整数}$$

合取范式：如果一个布尔表示式是由“与“连接起来的一些句子构成，则称这个表示式为合取范式。

显然：一个合取范式是可适定$\Leftrightarrow$它对应的不等式系统有解。

不等式系统(IES)不是一个 ILP，没有目标函数，但是可以修正为如下的 ILP：

$$\max y$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge y$$

$$x_1 + (1 - x_2) \ge y$$

$$x_2 + (1 - x_3) \ge y \qquad\qquad \text{(ILP)}$$

$$x_3 + (1 - x_1) \ge y$$

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) + (1 - x_3) \ge y$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ 为整数}$$

则：表示式$(x_1 + x_2 + x_3) \bullet (x_1 + \overline{x_2}) \bullet (x_2 + \overline{x_3}) \bullet (x_3 + \overline{x_1}) \bullet (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$是可适定的

$\Leftrightarrow$ (ILP)存在最优解y^*且$y^* \ge 1$。

ILP 是一个非常一般的模型，许多不同种类的问题都可以归结为它。正是由于这个一般性，才给它带来重大弱点。虽然经过几十年的努力，但至今没有一个切实可行的算法求解它。为了刻画这样一类问题，将引出 NP－完备性的概念。

7.2 Convex Hulls

The Integer Hull of a Polyhedron

在最大流和赋权二部图匹配问题中，没有规定整数约束条件，但算法得到的线性规划的解总能保证是整数解，为什么？

Consider the line segment L joint two points u and v in R^n. For any given $w \in R^n$, the mathematical programming problem

$$\max w^T x$$
$$s.t.\ x \in L$$

is particularly easy to solve: Either u or v is an optimal solution.

Suppose $w^T u \ge w^T v$ and let $x \in L$. We have $x = \lambda u + (1-\lambda) v$ for some $\lambda \in [0,1]$.Thus, for any $x \in L$

$$w^T x = \lambda w^T u + (1-\lambda) w^T v \le \lambda w^T u + (1-\lambda) w^T u = w^T u$$

and so, u is an optimal solution.

上述结论可以扩展多个向量：如果

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k$$

其中 $v_i \in R^n, \lambda_i \in [0,1], i = 1,2,\cdots,k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$，则

$$w^T x = \lambda_1 w^T v_1 + \lambda_2 w^T v_2 + \cdots \lambda_k w^T v_k \le \max\{w^T v_i : i = 1,2,\cdots,k\}$$

$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k$ 是向量组 $v_i \in R^n, i = 1,2,\cdots,k$ 的凸组合。

The *convex hull* of a finite set S (denoted by $con.hull(S)$ is the set of all vectors that can be written as a convex combination of S.

$$con.hull(S) = \{x \in R^n : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, v_i \in S, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

Proposition 7.1 Let $S \subseteq R^n$ be a finite set and let $w \in R^n$. Then

$$\max\{w^T x : x \in S\} = \max\{w^T x : x \in con.hull(S)\}$$

粗看起来，这个结论似乎对我们用处不大，因为我们本来是在一个有限集合上求最大值，反而变成了在在一个无限集合上求最大值。但是，The *convex hull* of a finite set S 有非常好的集合性质。

$|\mathrm{S}| = 2$： $con.hull(S)$ 是线段

$|\mathrm{S}| = 3$： $con.hull(S)$ 是三角形

一般地， $con.hull(S)$ 是包含 S 的最小多面体（多面体的顶点全部属于 S ）。

给定一个集合 $\mathrm{S} = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \subset R^n$，对于一个给定的向量 $v \in R^n$，我们很容

易判断它是否包含在 $con.hull(S)$：我们只要判断是否存在 $\lambda_i \in R^1$，$i = 1,2,\cdots,k$，使得：

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i = v$$
$$\lambda_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,k$$

上述系统是一个线性系统，变量是 $\lambda_i, i = 1,2,\cdots,k$。判断是否包含在 $con.hull(S)$ 中就是判断上述系统是否有解。可以用 Farkas 引理。

Proposition 7.2 Let $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\} \subset R^n$ and let $v \in R^n \setminus con.hull(S)$.Then there exists an inequality $w^T x \leq t$ that separates v from $con.hull(S)$, that is, $w^T s \leq t$ for all $s \in con.hull(S)$ but $w^T v > t$.

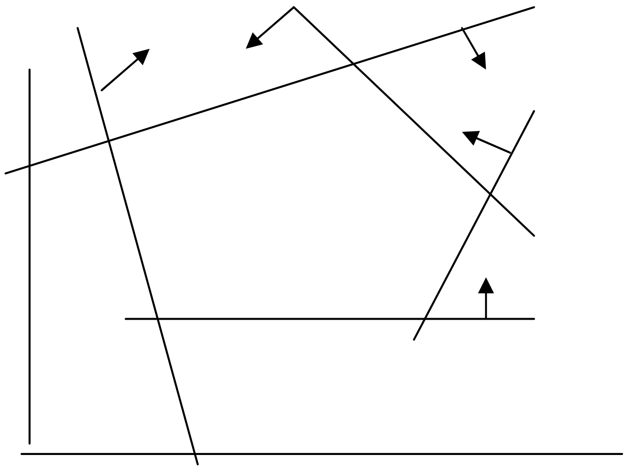
记 $C = \{x : Ax \geq 0\}$ 是一个多面锥（polyhedral cone）。

有界多面体

多面体（polyhedron）是一个线性不等式有限系统的解集。一个线性规划问题可以被描述成为在一个多面体上最优化一个线性函数的问题。

有界多面体（多胞形 polytope）：它不包含无限的射线，即多面体 $P \subseteq R^n$ 是一个有界多面体，如果存在 $l, u \in R^n$ 满足对所有 $x \in P$ 有 $l \leq x \leq u$。

有界多面体“本质上”可以被描述为有限个向量集合的凸包，反之，有限集合的凸包总是一个有界多面体。

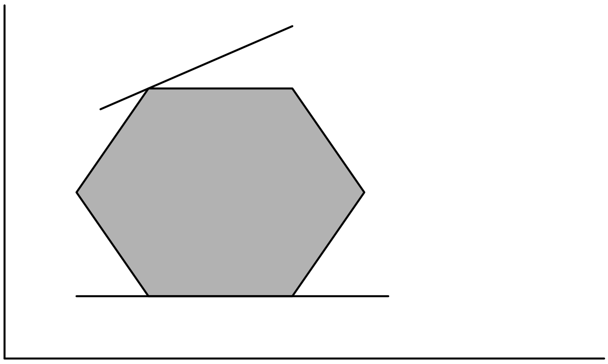


不等式 $w^T \le t$ 对多面体 P 是有效的(valid)，如果 $P \subseteq \{x : w^T x \le t\}$ 。

称方程 $w^T x = t$ 的解集为超平面。

称超平面 $w^T x = t$ 是关于多面体 P 的支撑超平面(supporting hyperplane)：如果 $w \ne 0$ ， $w^T x \le t$ 对多面体 P 是有效的且 $P \bigcap \{x : w^T x = t\} \ne \phi$ 。

称多面体 P 与它的一个支撑超平面 $w^T x = t$ 的交为多面体 P 的一个面。空集和多面体 P 本身是两个平凡面，其它面称为真面。



支撑超平面

命题：非空集合 $F \subseteq P = \{x : Ax \le b\}$ 是 P 的一个面的充分必要条件是对 $Ax \le b$ 的某个子系统 $A^0 x \le b^0$ ，我们有 $F = \{x \in P : A^0 x = b^0\}$ 。

证明：必要性。假设 $F \subseteq P = \{x : Ax \le b\}$ 是 P 的一个面，则存在一个有效不等式 $w^T x \le t$ 满足 $P \subseteq \{x : w^T x \le t\}$ 且 $F = \{x \in P : w^T x = t\}$ 。考虑线性规划问题

$$\begin{aligned} &\max w^T x \\ &s.t. \quad Ax \le b \end{aligned} \qquad \text{(LP)}$$

(LP)的最优解集合恰好是F。

(LP) 的对偶问题为

$$\begin{aligned} &\min b^T y \\ &s.t. \quad A^T y = w \\ &\qquad\quad y \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

令y^*是(D)的一个最优解，$I = \{i : y_i^* > 0\}$。根据互补松弛性定理，对(LP)的任何最优解$x \in F$，必有$a_i^T x = b_i$，$i \in I$，记为$A^0 x = b^0$。所以，$F = \{x : Ax \le b, A^0 x = b^0\}$。必要性成立。

充分性。如果存在$Ax \le b$的某个子系统$A^0 x \le b^0$，有$F = \{x \in P : A^0 x = b^0\}$，那么把这些不等式$A^0 x \le b^0$相加，得到一个不等式$w^T x \le t$。那么$\forall x \in F$，有$w^T x = t$，并且$\forall x \in P \setminus F$，有$w^T x < t$。充分性成立。

推论：一个多面体只有有限个不同的面，即线性规划问题最优解的集合只有有限多种可能。

多面体的极小（按包含关系）面具有特殊的结构。

命题：令$F \subseteq P = \{x : Ax \le b\}$是$P$的一个极小非空面，那么对$Ax \le b$的某个子系统$A^0 x \le b^0$，有$F = \{x : A^0 x = b^0\}$。此外，$rank(A^0) = rank(A)$。

多面体的顶点：如果向量$v \in P$，且$\{v\}$是P的一个面，则称向量$v \in P$为顶点。

如果一个多面体有顶点，则称之为是有点的。

多面体$P = \{x \in R^2 : x_1 \ge 0\}$是无点的。

显然：（1）对$Ax \le b$的某个子系统$A^0 x \le b^0$，顶点v是$A^0 x = b^0$的唯一解。

（2）对于极小面，由于$rank(A^0) = rank(A)$，所以P有一个顶点的充分必要条件是A列满秩的。

命题：如果多面体P是有点的，那么P的每个极小非空面都是顶点。

在组合优化中使用线性规划时，这个结论起到中心作用。例如，如果我们希望证明一个线性规划问题随着目标函数的变化总有一个整数最优解，那么只需要证明相应的多面体的所有顶点都是整的即可。

顶点的几何直观就是它是多面体的“角”。更确切地，我们有下列结果：

命题：令 $P=\{x:Ax\le b\}$ 且 $v\in P$，那么 v 是的 P 顶点的充分必要条件是 v 不能写成 $P\setminus\{v\}$ 中向量的凸组合。

证明：必要性。设 v 是的 P 顶点，且令 $Ax\le b$ 的某个子系统 $A^0x\le b^0$，顶点 v 是 $A^0x=b^0$ 的唯一解。假设存在 $u_i\in P(i=1,2,\cdots,k)$，$\lambda_i\ge 0,\sum_{i=1}^k\lambda_i=1$，使得 $v=\sum_{i=1}^k\lambda_i u_i$，则 $b^0=A^0v=\sum_{i=1}^k\lambda_i A^0u_i\le\sum_{i=1}^k\lambda_i b^0=b^0$，所以必有 $A^0u_i=b^0(i=1,2,\cdots,k)$。由于 v 是 $A^0x=b^0$ 的唯一解，所以 $u_i=v(i=1,2,\cdots k)$。必要性成立。

充分性。假设 v 不能写成 $P\setminus\{v\}$ 中向量的凸组合，令 $I=\{i:a_i^Tv=b_i\}$，$A^0=\{a_i^T:i\in I\},(b^0)^T=(b_i,i\in I)$，则 $A^0v=b^0$，令 $F=\{x:A^0x=b^0\}$。显然 $v\in F$，下面证明 F 只包含唯一元素。反证，假设存在 $u\in F,u\ne v$，令 $L=\{v+\lambda(u-v):\lambda\in R\}$，是通过 u 和 v 的直线，显然 $L\subseteq F$。由于 $a_i^Tv<b_i,i\notin I$，所以对充分小的 $\varepsilon>0$ 有 $v+\varepsilon(u-v)\in P,v-\varepsilon(u-v)\in P$，而 $v=\frac{1}{2}(v+\varepsilon(u-v))+\frac{1}{2}(v-\varepsilon(u-v))$，矛盾。充分性成立。

对这个结论稍作变形，得到有界多面体的下属结论：

定理：有界多面体等于它的顶点的凸包。

证明：令 P 为一个（非空）有界多面体。由于 P 有界，所以 P 一定有点（为什么？）。令 $v_i\in P(i=1,2,\cdots,k)$ 是 P 的顶点。显然 $conv.hull(\{v_1,\cdots,v_k\})\subseteq P$，因此如果假设存在

$$u\in P\setminus conv.hull(\{v_1,\cdots,v_k\})$$

由分离定理，存在不等式 $w^Tx\le t$ 分离 u 与 $conv.hull(\{v_1,\cdots,v_k\})$。令 $t^*=\max\{w^Tx:x\in P\}$，并考虑 $F=\{x\in P:w^Tx=t^*\}$。由于 $u\in P$，所以 $t^*>t$，因此 F 不包含 P 的顶点，矛盾。

定理：集合 P 为有界多面体的充分必要条件是存在一个有限集 V 使得 P 是 V 的凸包。

证明：必要性由上述定理直接得到：有界多面体等于它的顶点的凸包。

充分性。令 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}\subset R^n$ 为一个有限集合，$P=conv.hull(\{v_1,\cdots,v_k\})$。

我们要证明 P 是某个线性不等式系统的解集。

证明思路：定义一个由所有对 P 有效的不等式的系数和右边项组成的有界多面体，然后应用上述定理选择这些有效不等式的一个有限子集。

在组合优化问题的 算法性方法中，一个重要的成分是用来证明解的最优性的最小最大关系，借助上述定理，我们给出一个获得这样最小最大关系的一般方法：

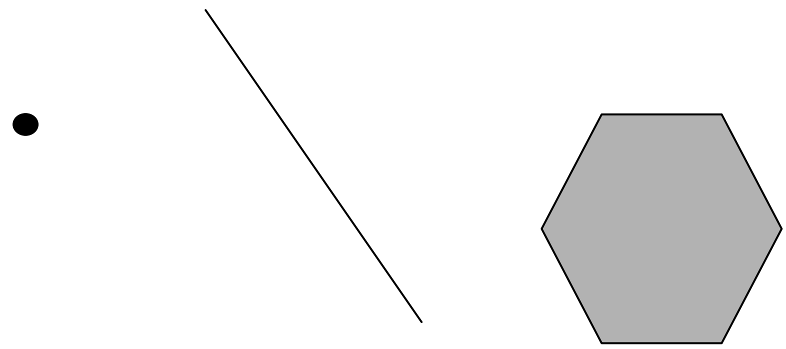
（1）把该组合优化问题表示为一个有限集合 S 上的优化问题，例如通过考虑特征向量；

（2）找到 $con.hull(S)$ 的一个线性描述；

（3）应用线性规划的对偶得到该组合优化问题的一个最小最大关系。

侧面

考虑下面三个有界多面体



直观地，第一个有界多面体维数为 0，第二个维数为 1，第三个维数为 2。

有限向量集合 X 是仿射独立的（affinely independent）：如果存在实数 $\lambda_x, x \in X$，使得 $\sum_{x\in X} x\lambda_x = 0, \sum_{x\in X} \lambda_x = 0$，那么必有 $\lambda_x = 0, x \in X$。仿射独立集 X 的元素个数称为其基数。

集合 $K \subseteq R^n$ 的维数比一个仿射独立集最大基数少 1。集合 $K \subseteq R^n$ 的维数记为 $\dim(K)$。

集合的维数是平移不变的，即如果集合 $K \subseteq R^n$ 的维数 $\dim(K) = k$，那么任给 $w \in R^n$，$K_w = \{x - w : x \in K\}$ 的维数 $\dim(K_w) = k$。

命题： 如果集合 $K \subseteq R^n$ 是仿射独立的，那么任给 $w \in R^n$，集合

$K_w=\{x-w: x\in K\}$也是仿射独立的。

证明：假设$K\subseteq R^n$是仿射独立的，任给$w\in R^n$，设$\sum_{x\in X}(x-w)\lambda_x=0,\sum_{x\in X}\lambda_x=0$。而$0=\sum_{x\in X}(x-w)\lambda_x=\sum_{x\in X}x\lambda_x+w\sum_{x\in X}\lambda_x=\sum_{x\in X}x\lambda_x$，由于集合$K\subseteq R^n$是仿射独立的，所以$\lambda_x=0, x\in X$，即集合$K_w=\{x-w: x\in K\}$也是仿射独立的。

注意：对于线性独立，结论不成立。如向量（0,1）和（1,2）线性独立，但是（0,1）-（-1,0）=（1，1）和（1,2）-（-1,0）=（2,2）线性相关。

维数为n的多面体$P\subseteq R^n$称为满秩的。

我们称系统$Ax\le b$中的不等式$a_i^T x\le b_i$为蕴含等式，如果对$Ax\le b$的所有解都有$a_i^T x=b_i$成立。

命题：令$P=\{x\in R^n: Ax\le b\}$，且令$\overline{A}x=\overline{b}$为$Ax\le b$中的蕴含等式组，则$\dim(P)=n-rank(\overline{A})$。

多面体的一个极大真面称为一个侧面(facet)。在平面上，侧面是多边形的边。

命题：令F为多面体P的一个非空真面，那么F是侧面的充分必要条件是$\dim(F)=\dim(P)-1$。

设F为多面体P的一个侧面，如果$F=\{x\in P: w^T x=t\}$，则称不等式$w^T x\le t$导出P的一个侧面。

我们将证明：在多面体的一个极小定义系统中，每个不同的不等式都导出一个不同的侧面，且多面体的每个不同的侧面都对应于一个不同的不等式。

一个不等式和等式系统是极小的，如果没有不等式可以变为等式而不减小解集的规模，且没有不等式或等式可以去掉而不增大解集的规模。

定理：令$P=\{x\in R^n: A'x=b', A''x\le b''\}$为一个非空多面体，那么此定义系统是极小的充分必要条件是A'的行是线性独立的，且对A''的每一行i，不等式$(a_i'')^T x\le b_i''$导出P的一个不同的侧面。

整有界多面体

下面我们仅考虑有理多面体(rational polyhedra)，可以被有理线性系统定义的多面体。在组合优化中，这个限制并不十分苛刻，因为我们几乎都是在处理整的对象。

一个有理多面体称为整的（integral），如果每个非空面都包含一个整向量。

显然，我们只需要考虑极小面，因此一个有点有理多面体是整的充分必要条件是当它的所有顶点都是整的。

多面体方法在组合优化中的适用性，常常相当于我们证明多面体是整的能

力，一个重要工具是 Hoffman1974 年的一个结果，它可以仅仅考虑有界多面体上的线性规划的最优目标函数值，而不是其实际解。

定理： 有理多面体 P 是整的充分必要条件是对所有的整向量 w，$\max\{w^T x : x \in P\}$ 的最优值是一个整数。

证明：必要性。因为多面体 P 是整的，那么对任给的整向量 w，$\max\{w^T x : x \in P\}$ 有一个整的最优解。

充分性。假设对所有的整向量 w，$\max\{w^T x : x \in P\}$ 的最优值是一个整数。设 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^T \in R^n$ 为 P 的一个顶点（由于 P 为有界多面体，所以 P 有顶点），并令 w 为一个整向量，满足 v 是 $\max\{w^T x : x \in P\}$ 的唯一最优解（可以构造出此优化问题）。设 P 的其它所有顶点为 $u^1, u^2, \cdots, u^{k-1}$，由于 v 是 $\max\{w^T x : x \in P\}$ 的唯一最优解，所以 $w^T v - w^T u^i > 0$。取 ε 满足：

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{w^T v - w^T u^i}{u_1^i - v_1} : u_1^i - v_1 > 0, i = 1,2,\cdots,k-1 \right\}, \exists i, u_1^i - v_1 > 0 \\ 1, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{otehwise} \end{cases},$$

则 $(w^T v - w^T u^i) - \varepsilon(u_1^i - v_1) > 0 (i = 1,2,\cdots,k-1)$，令整数 $M = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，$w := Mw$

则 $(w^T v - w^T u^i) - (u_1^i - v_1) > 0 (i = 1,2,\cdots,k-1)$，即

$$w^T v + v_1 > w^T u^i + u_1^i (i = 1,2,\cdots,k-1)$$

令 $\overline{w} = (w_1 + 1, w_2, \cdots, w_n)^T$，则

$$\overline{w}^T v = w^T v + v_1 > w^T u^i + u_1^i = \overline{w}^T u^i (i = 1,2,\cdots,k-1)$$

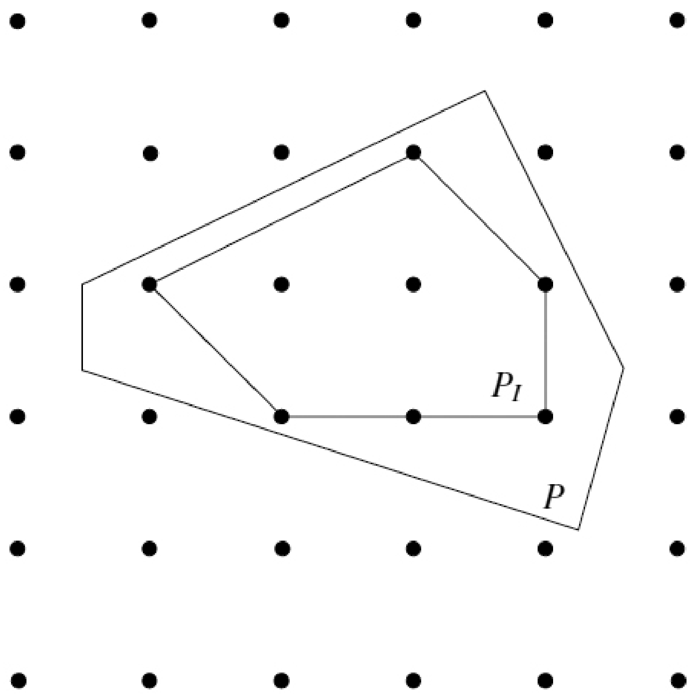
所以，v 是 $\max\{\overline{w}^T x : x \in P\}$ 的唯一最优解，因此 $w^T v, \overline{w}^T v$ 都是整数，从而 v_1 是整数。对 v 的每个分量，重复这一过程，可以得到 v 的每个分量都是整数，即 P 是整的。

注意：

（1）这一结果可以直接推广到无界有点多面体；

（2）这一结果可以直接推广到所有多面体。(Edmonds and Giles, 1977).

集合 $P = \{x \in R^n : Ax \le b \ \ x \ge 0\}$ 是一个 polyhedron，整数线性规划可行解集合 $\{x \in Z^n : Ax \le b \ \ x \ge 0\}$，记 P_I 是 integer hull of polyhedron P。



整数线性规划可能不可行，也可能无界。对一个 polyhedron P，确定P_I是否为空集是比较困难的。但是，如果一个整数线性规划是可行的，我们可以通过简单的考虑其松弛问题对应的线性规划问题确定它是否有界。

引理 7.1 令$P=\{x: Ax\le b\}$是一个有理的 polyhedron，其对应的 integer hull 是非空的，对于给定的费用向量c，$\min\{c^T x: x\in P\}$有界的充分必要条件是$\min\{c^T x: x\in P_I\}$有界的。

定义 7.1 假设A是一个整数矩阵。对于A的一个子方阵B（A的任意一些行和列组成），称$\det B$是A的一个 sub-determinant。记：

$$\mathrm{E}(A)=\{\max|\det B|: B\text{是}A\text{的sub-determinant}\}$$

引理 7.2 每一个有理多面体锥（rational polyhedral cone）C都由有限个整数向量组成的集合$\{a^1,a^2,\cdots,a^t\}$而生成，使得C中的每一个整数向量都是$a^1,a^2,\cdots,a^t$的非负整数组合（这样的基称为C的 Hilbert 基）。

整数规划中的一个重要而基本的结论是：最优的整数解和有理解之间相隔不太远。

定理 7.2 (Cook et al. 1986)设$A\in Z^{m\times n}$，$b\in R^m, c\in R^n$，$P=\{x: Ax\le b\}$，并且$P_I\ne\phi$。

（1） 设 y 是 $\max\{c^T x : x \in P\}$ 的一个最优解，则存在 $\max\{c^T x : x \in P_I\}$ 的最优解 z，使得 $\| z - y \|_\infty \le n\mathrm{E}(A)$。

（2） 设 y 是 $\max\{c^T x : x \in P_I\}$ 的一个可行解，但不是最优解，则存在 $\max\{c^T x : x \in P_I\}$ 的可行解 z 使得 $c^T z > c^T y$ 且 $\| z - y \|_\infty \le n\mathrm{E}(A)$。

定理 7.3 (Wolsey 1981, Cook et al. 1986，Lasserre 2004)设 $A \in Z^{m\times n}$，则存在整数矩阵 M，其元素的绝对值至多为 $n^{2n}\mathrm{E}(A)^n$，使得对任给的 $b \in R^m$，存在一个向量 d 使得

$$\{x : Ax \le b\}_I = \{x : Mx \le d\}$$

四、Totally Unimodular(TUD)——全单位模性质

定义 7.2 一个 polyhedron P，如果 $P = P_I$，则称 P 是整数 polyhedron。

证明多面体是整的往往非常困难，这导致了整性的各种充分条件的提出，即如果 A 和 b 满足某些性质，那么我们知道多面体 $P = \{x \in R^n : Ax \le b\}$ 是整的。

最成功的是 Hoffman 和 Kruskal1956 年提出的关于全单位模的充分条件。

命题：令 $A \in R^{m\times m}$ 是一个整的非奇异矩阵，那么对每个整向量 $b \in R^m$，$A^{-1}b$ 是整的充分必要条件是 $\det(A) = 1$ 或 -1。

定义：单位模矩阵（Unimodular）：设 $A \in R^{m\times n}$ 是一个整的行满秩矩阵，如果 A 的每组基都具有行列式±1，则称 A 是**单位模矩阵。**

定理：设 $A \in R^{m\times n}$ 是一个整的行满秩矩阵，那么对每个向量 $b \in R^m$，多面体 $P = \{x \in R^n : Ax = b, x \ge 0\}$ 是整的充分必要条件为 A 是单位模矩阵。

证明：

定义 7.3 一个矩阵 A 被称为是**全单位模的（TUD）**如果 A 的所有子式都是 0，＋1 和－1。

定理 7.3（Hoffman-Kruskal 定理） 一个整数矩阵 A 是全单位模的 $\Leftrightarrow$ polyhedron $\{x : Ax \le b, x \ge 0\}$ 对于任何整数向量 b 都是整数 polyhedron。

证明：

定理：设 $A \in R^{m\times n}$ 是一个全单位模矩阵， $b \in R^m$ 是一个整向量，那么多面体 $P = \{x \in R^n : Ax \le b\}$ 是整的。

证明：令 F 为 $P = \{x \in R^n : Ax \le b\}$ 的一个极小面，那么，对 $Ax \le b$ 的某个子系统 $A^0 x \le b^0$，有 $F = \{x \in R^n : A^0 x = b^0\}$，且 A^0 是行满秩的，通过对列进行必要的重排，我们可以把 A^0 写成 $[B, N]$，其中 B 是 A^0 的一组基。于是

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}N \\ 0 \end{pmatrix}$$

是 F 中的一个整向量。

这个定理经常被应用于多面体组合学中。当我们试图建立多面体的整性时，它是非常重要的。

如何探测一个矩阵是全单位模矩阵？

1960 年代和 1970 年代若干刻画被提出，但是一般问题仍然是公开的。

1980 年，Seymour 证明了一个给出多项式时间测试的深刻定理。它的定理表明，每个全单位模矩阵都可以通过一种特殊的方式，由某些“网络矩阵”和下述两个 5×5 的矩阵来构造（Seymour，1986）。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

我们将集中讨论网络矩阵，因为通过 Seymour 的工作我们知道，网络矩阵是形成全单位模矩阵的骨干，并因为大部分我们熟悉的全单位模矩阵情形都可以由此类直接推出。

我们以 Poincare(1900)描述的一下例子开始。

定理：令 A 是一个 0,±1 值得矩阵，其中每列至多有一个 $+1$，且至多有一个 -1，那么 A 是全单位模矩阵。

证明：令 N 为 A 的一个 $k\times k$ 子矩阵，如果 $k=1$，那么 $\det(N)$ 或者为 0，或者为 ±1。假设 $k\ge2$，并对 k 用归纳法证明。

（1）如果 N 中存在至多有一个非零元的列，那么按此列展开行列式，由归纳假设有 $\det(N)$ 或者为 0，或者为 ±1。

（2）如果 N 中每一列都有一个 $+1$ 和一个 -1，那么 N 的所有行和为 0，因此 $\det(N)=0$。

推论：令 $D=(V,E)$ 为一个有向图，且 A 为它的点-弧关联矩阵，则 A 是全单位模矩阵。

为了扩展这个定理，令 $T=(V,E')$ 为一颗生成树，它具有与 $D=(V,E)$ 相同的顶点集合。现在考虑具有由 E' 标记的行和 E 标记的列的矩阵 M，其中对 $e=(u,v)\in E$ 和 $e'\in E'$，有

$$M_{e',e}=\begin{cases}+1,\text{如果}T\text{中的}(u,v)\text{-路以正方向使用}e'\\-1,\text{如果}T\text{中的}(u,v)\text{-路以反方向使用}e'\\0,\qquad \text{如果}T\text{中的}(u,v)\text{-路不使用}e'\end{cases}$$

那么 M 是一个网络矩阵(network matrix)。

定理(Tutte,1965)网络矩阵都是全单位模矩阵。

例 1：如果一个 $(0,1)$ -矩阵 M 的每一列中的 1 都是连续出现的，那么 M 是一个网络矩阵。

定理 7.4 任意一个标准形式或者规范形式的线性规划问题，如果它的约束矩阵 A 满足：

（1） A 是一个有向图的点－弧关联矩阵，或者

（2） A 是一个无向二部图的点－边关联矩阵

则 A 是网络矩阵，从而是全单位模的。

全对偶整性

多面体组合学的基本主题是线性规划对偶等式

$$\max\{w^T x : Ax\le b\}=\min\{b^T y : A^T y=w, y\ge 0\}$$

在组合问题中的应用。这意味着证明 $Ax\le b$ 定义了一个整多面体，其顶点对应某些组合对象，最后得到一个最小最大定理。

这样一个最小最大结果常常可以通过对上式中的 y 值强加一些限制来加强，这些限制中最自然地一个是要求 y 的整性。这样整的最小最大定理具有实际意义。例如，对偶解可能对应具有特殊意义的组合对象，如“割”或者“覆盖”。或者通过整性可能允许我们设计出一个更有效的原始对偶算法。

定义：对于有理系统 $Ax\le b$，如果对使得 $\max\{w^T x : Ax\le b\}$ 最优值存在的每个整的向量 w，最小化问题 $\min\{b^T y : A^T y=w, y\ge 0\}$ 都存在整的最优解 y^*，则称有理系统 $Ax\le b$ 是全对偶整的。

定理：令 $Ax\le b$ 是全对偶整系统，满足 $P=\{x\in R^n : Ax\le b\}$ 是有理有界多面

体且b是整的，则P是整有界多面体。

证明：由于b是整的，对偶等式蕴含着对所有整向量w，$\max\{w^T x : x \in P\}$都是整数，所以P是整有界多面体。

割平面

到目前为止，我们一直在讨论有助于我们对一个给定的组合问题就目标函数的全体做出结论的技术（对一般情形进行讨论）。然而，在很多情形下，我们只需解决具有单一的、固定的目标函数的问题。因此，尽管一个恰当的凸包描述可能是难找的，但是我们仍然可以对一些实际的组合优化问题应用线性规划的技术求解。其中的一种重要的技术就是“割平面”技术。

首先要把组合优化问题转化成一个整数规划问题：

$$\max\{w^T x : Ax \le b, x\text{为整数}\}$$

那么，建立一个解的最优性（或者至少提供这个最优值的一个上界）的问题等价于证明$w^T x \le t$对$Ax \le b$的所有整数解都成立，其中t是上述整数规划问题的最优值（或者是一个要求的上界）。

假设系统有m个不等式组成：

$$a_i^T x \le b_i (i = 1,2,\cdots,m)$$

令$y_1, y_2, \cdots, y_m$为非负实数，并置

$$c = y_1 a_1 + \cdots + y_m a_m \in R^n，\quad d = y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m \in R。$$

显然，若$a_i^T x \le b_i (i = 1,2,\cdots,m)$，则

$$c^T x = y_1 a_1^T x + \cdots + y_m a_m^T x \le y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m = d$$

此外，如果c是整的，那么$a_i^T x \le b_i (i = 1,2,\cdots,m)$的所有整数解也满足更强的不等式：

$$c^T x \le \lfloor d \rfloor,$$

其中$\lfloor d \rfloor$表示对d下取整。我们称$c^T x \le \lfloor d \rfloor$为 Gomory-Chvatal 割平面（Gomory-Chvatal cutting plane）。

Gomory-Chvatal 割平面也可以用$a_i^T x \le b_i (i = 1,2,\cdots,m)$定义的多面体$P$来直接定义：只要取$P$的一个满足$c$是整向量的有效不等式$c^T x \le d$，并向下取整得到割平面$c^T x \le \lfloor d \rfloor$。这些非负实数$y_1, y_2, \cdots, y_m$的作用是由$a_i^T x \le b_i (i = 1,2,\cdots,m)$导出割平面$c^T x \le \lfloor d \rfloor$。

一旦导出一个割平面，我们就可以把它添加到系统$a_i^T x \le b_i (i=1,2,\cdots,m)$中，并利用它导出进一步的不等式。我们称一系列这样的导出为一个**割平面序列**。也就是说，从系统$a_i^T x \le b_i (i=1,2,\cdots,m)$到不等式$w^T x \le t$的一个割平面序列是一系列不等式

$$a_{m+k}^T x \le b_{m+k} (k=1,2,\cdots,M)$$

以及非负实数

$$y_{kj} (1 \le k \le M, 1 \le j \le m+k-1)$$

使得对每一个$k=1,2,\cdots,M$，不等式$a_{m+k}^T x \le b_{m+k}$由系统

$$a_i^T x \le b_i (i=1,2,\cdots,m+k-1)$$

使用系数$y_{kj} (j=1,2,\cdots,m+k-1)$，并使得此序列的最后一个不等式是$w^T x \le t$。

定理：令$P=\{x \in R^n : Ax \le b\}$为一个有理有界多面体，且设$w^T x \le t$是$w$为整的不等式，对$P$中所有整向量都成立。则对某个$t' \le t$，存在从$Ax \le b$到不等式$w^T x \le t'$的一个割平面序列。

当P不包含整向量时，得到上述定理的特殊情形：

定理：令$P=\{x \in R^n : Ax \le b\}$为一个不包含整向量的有理有界多面体，则存在从$Ax \le b$到不等式$0^T x \le -1$的一个割平面序列。

Chvatal 秩

Gomory-Chvatal 割平面与寻找组合凸包的线性描述的一般问题有一个有趣的联系。割平面序列不是顺序的一次出现一个割，而是一次出现一组割，这一组一组出现的割，一次地对P_I提供更紧的近似，其中P_I是P中所有整向量的凸包。

在第一组中，我们选取P的所有可能的 Gomory-Chvatal 割，尽管好像有无限多个这样的割平面，但是实际上一个有限集合将蕴含其余的。描述这个思路的一个漂亮方式是定义P'表示P中所有满足P的每个 Gomory-Chvatal 割的向量集合。

定理（Shrijver,1980）如果P是一个有理多面体，那么P'也是一个有理多面体。

证明：令$P=\{x \in R^n : Ax \le b\}$满足$A$和$b$都是整的，则存在某个向量$y$使得

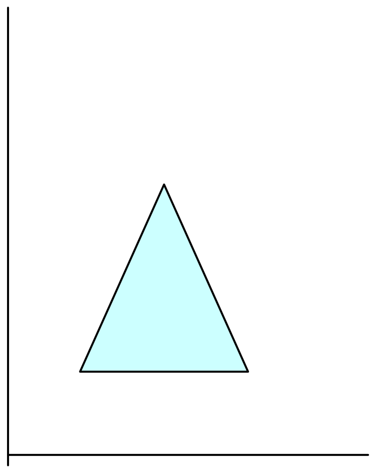
$$P'=\{x \in R^n : Ax \le b, y^T Ax \le \lfloor b^T y \rfloor\}$$

其中 y 满足 $0 \le y \le 1$ 且 $A^T y$ 是整的。

为了验证这一点，我们将证明每个 Gomory-Chvatal 割可以写成 $y^T Ax \le \lfloor b^T y \rfloor$ 中一个不等式与 $Ax \le b$ 中不等式的一个线性组合之和，即所有不在有限集合 $y^T Ax \le \lfloor b^T y \rfloor$ 中的割在 P' 的定义中都是冗余的。

令 $\bar{y}' = \bar{y} - \lfloor \bar{y} \rfloor$ 为 $\bar{y}$ 的分数部分，那么 $w' = A^T \bar{y}' = w - A^T \lfloor \bar{y} \rfloor$ 是一个整向量，且 $t' = b^T \bar{y}' = t - b^T \lfloor \bar{y} \rfloor$ 与 t 相差一个整数量。因此用 $\bar{y}'$ 导出的割 $(w')^T x \le \lfloor t' \rfloor$ 与有效不等式 $(\lfloor \bar{y}' \rfloor^T A)x \le b^T \lfloor \bar{y} \rfloor$ 相加，便得到割 $w^T x \le t$，而有效不等式 $(\lfloor \bar{y}' \rfloor^T A)x \le b^T \lfloor \bar{y} \rfloor$ 是 $Ax \le b$ 的一个非负组合。

我们可以取第二组割为 P' 的所有可能的 Gomory-Chvatal 割，第三组为 P'' 的所有可能的 Gomory-Chvatal 割，依次下去。因此，令 $P^{(0)} = P$， $P^{(i)} = P^{(i-1)'}$，我们有一个有割的组所生成的多面体序列，如下图：



根据上述定理，我们可以得到：

定理：令 $P = \{x \in R^n : Ax \le b\}$ 为一个有理有界多面体，那么对某个整数 k，有 $P^{(k)} = P_I$。

Chvatal 秩：使得 $P^{(k)} = P_I$ 的最小的整数 k 称为 Chvatal 秩。

Chvatal 秩的概念为寻找 P 的整数凸包提供了一个构架。

割平面算法（Cutting-plane algorithm）

算法的基本思路：

（1）对某个多面体 P，我们有此问题的一个整数规划形式 $\max\{w^T x : x \in P, x 是整的\}$，以及我们已知对所有整数解都是有效的某些不等式

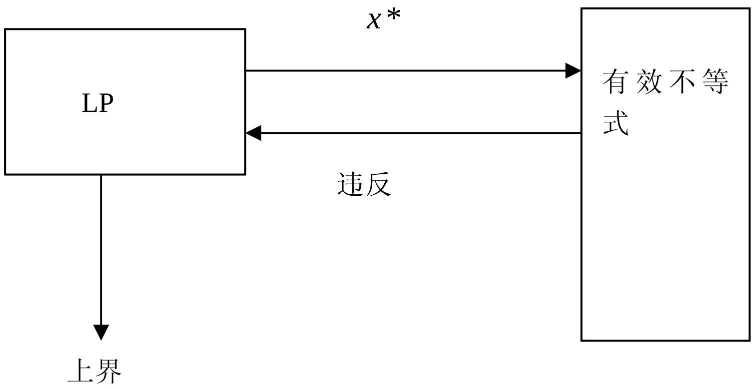
组类。

（2）利用一种线性归还算法，我们找到线性规划松弛形式 $\max\{w^T x : x \in P\}$ 的一个最优解 x^*。

（3）如果 x^* 是整的，那么它就是我们的组合问题的一个最优解。否则，我们搜索这些有效不等式类，找到 x^* 被违反的某些类，即 $w^T x^* > d$（而对所有的整数解，有 $w^T x^* \le d$）。

（4）把这些被违反的不等式添加到我们的线性规划松弛形式中，并找到一个新的最优解 x^{**}。

（5）如果 x^{**} 是整的，那么它就是我们的组合问题的一个最优解。否则，我们搜索这些有效不等式类，找到 x^{**} 被违反的某些类，把这些被违反的不等式添加到我们的线性规划松弛形式中，依次下去。



割平面算法

在任何情形下，每个线性规划的松弛的最优解都为此组合优化问题的最优值提供了比原来更好的一个上界。

为了使得上面的算法取得成功，割平面程序必须快速地达到组合问题的一个紧的上界，这依赖于有效不等式的选取。我们可以利用导出一个侧面的性质去指导我们搜索好的有效不等式类。