第六章 组合优化问题的有效算法

6.3 最优匹配的有效算法－2

四、非二部图的匹配算法

1. 二部图匹配算法推广到非二部图的基本思路

如何把求二部图的匹配问题的算法推广到非二部图的匹配问题上？

前面：把把求二部图的匹配问题归结为最大流问题；

那么：非二部图的匹配问题可以归结为扩充的最大流问题；

但是：解扩充的最大流问题并不必直接解匹配问题容易。

定理 6.5 的结论：G 的一个匹配 M 是最大匹配 $\Leftrightarrow$ G 中不存在关于 M 的增广路，对任何图 G 都成立。

所以，求二部图的匹配问题的增广的方法可以推广到非二部图的匹配问题上，不过，寻求增广路比二部图的情况要复杂的多。

首先，对一般的图，辅助有向图的构造。

对于二部图：

从 V 中节点出发的交错路，只有 V 中节点才可能成为外点，其外点不可能是 U 中的点，因此，辅助有向图的节点只含有 V 的节点。所以：

- **一条增广路对应于辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点（即 exposed[v]$\neq 0$ 的节点 v）的一条路；**
- **且辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点的一条路，必对应一条增广路**

对于一般图：

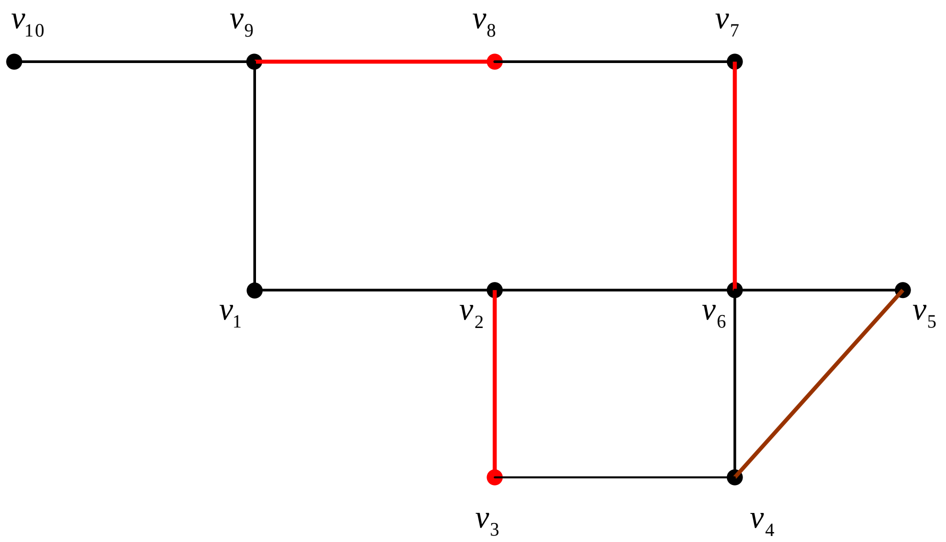
辅助有向图必含有所有的节点。但是，辅助有向图仍然表示相应的信息：

辅助有向图上的弧 (v,u) 意味着 u 是某一交错路上外点 v 的下一个外点。所以，与二部图一样，有

- **一条增广路对应于辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点（即 exposed[v]$\neq 0$ 的节点 v）的一条路。**

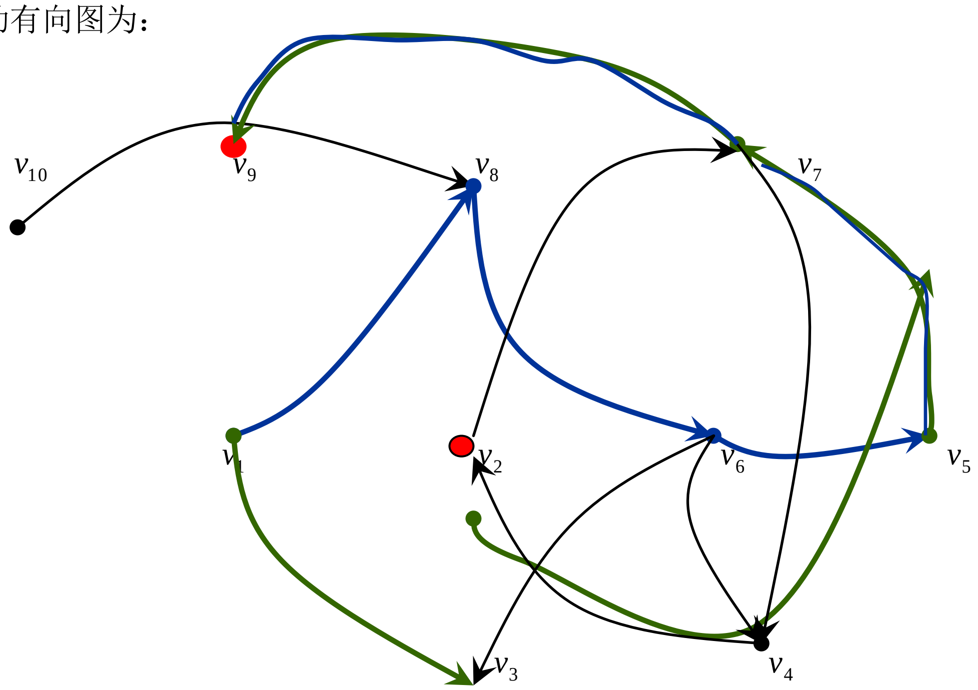
但是，反之不一定成立，即

- **辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点的一条路，未必对应一条增广路！**



$M=\{[v_2,v_3],[v_6,v_7],[v_8,v_9]\}$是图$G$的一个匹配，但不是最大匹配。

关于匹配M的一条增广路为：$P=[v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}]$，对应的辅助有向图为：

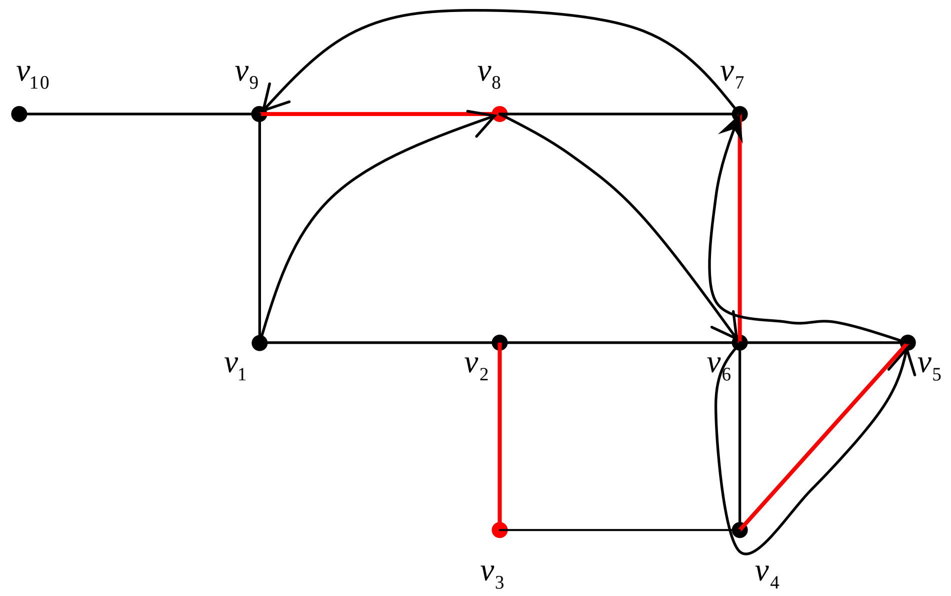


辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点的一条路： $p'=[v_1,v_3,v_5,v_7,v_9]$，

对应一条增广路 P。但是：

辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点的一条路：$q'=[v_1,v_8,v_6,v_5,v_7,v_9]$，不对应一条增广路！

即，G 中不存在以 q' 中节点为外点的增广路。



如果让 $(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 与 $(u_1,\mathrm{mate}[u_2],u_2,\mathrm{mate}[u_3],\cdots,u_k,\mathrm{exposed}[u_k])$ 相对应，那么就得到了一条迹：

$q=[v_1,v_9,v_8,v_7,v_6,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}]$

q 显然不是增广路，甚至它根本就不是一条路，有重复的节点。

所以，$M\oplus q$ 也就不是一个匹配。

思考：

对于二部图：

一条增广路对应于辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点（即 exposed$[v]\neq 0$ 的节点 v）的一条路；且辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点的一条路，必对应一条增广路

对于一般图：

一条增广路对应于辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点（即 exposed$[v]\neq 0$ 的节点 v）的一条路。

辅助有向图中从一个未盖点到一个目的点的一条路，未必对应一条增广路！

不能象二部图一样，使用**辅助有向图的技巧。**

原因：**一般图与二部图的区别**

——一般图与二部图的区别是：二部图不含有奇圈！

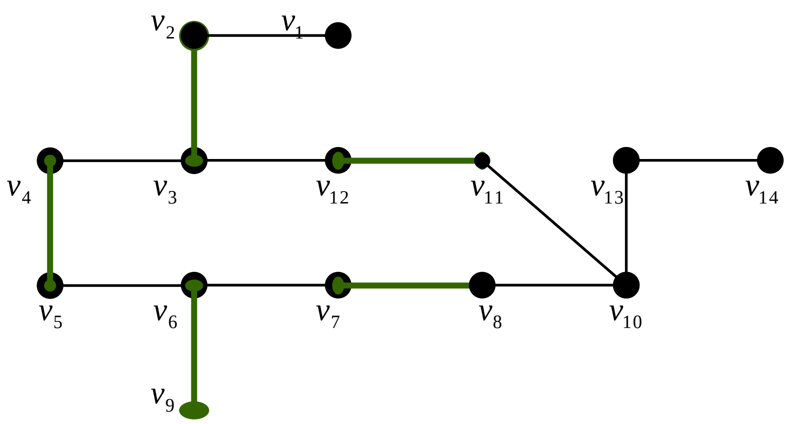
猜测：奇圈应该是出现上述问题的根源。

这个猜测是正确的，q 在遇到奇圈 $C=[v_6,v_4,v_5,v_6]$ 之前的一端是完全合理的交错路。仅当 q 通过奇圈 $C=[v_6,v_4,v_5,v_6]$ 而转折到自身时，才出现了上述问题。

进一步思考：

所有的奇圈都会出现上述问题吗？

回答：不一定。



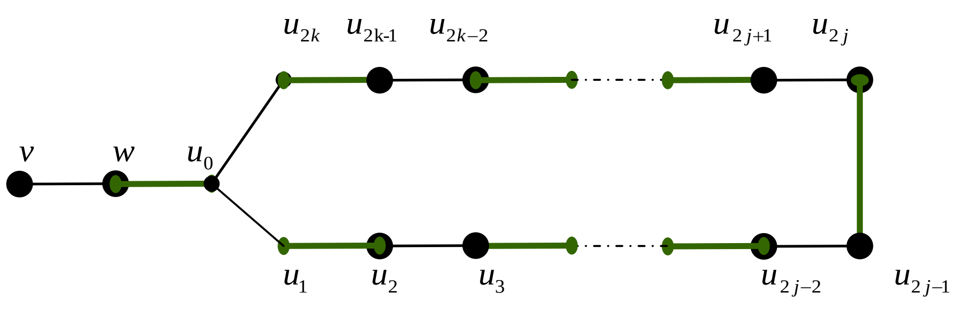
有 9 个节点的奇圈，它对辅助有向图的技巧没有不良影响。

原因：

因为，这个奇圈里的匹配边“太稀疏”，

所以，增广路不可能通过它而且再返回。

由此可以得出：对算法引起不良行为的奇圈仅是匹配边最稠密的奇圈，即 $2k+1$ 个节点含有 k 条边的奇圈。如下图：



花： $2k+1$ 个节点含有 k 条边的奇圈称为花（blossom）

注：花是对应于某一个匹配的花。

所以：

（1） 若一个圈关于匹配 M 没有花时，本质上与二部图一样，搜索增广路的方法与二部图的情形一样。

（2） 当有花出现时，必须修改算法使得：

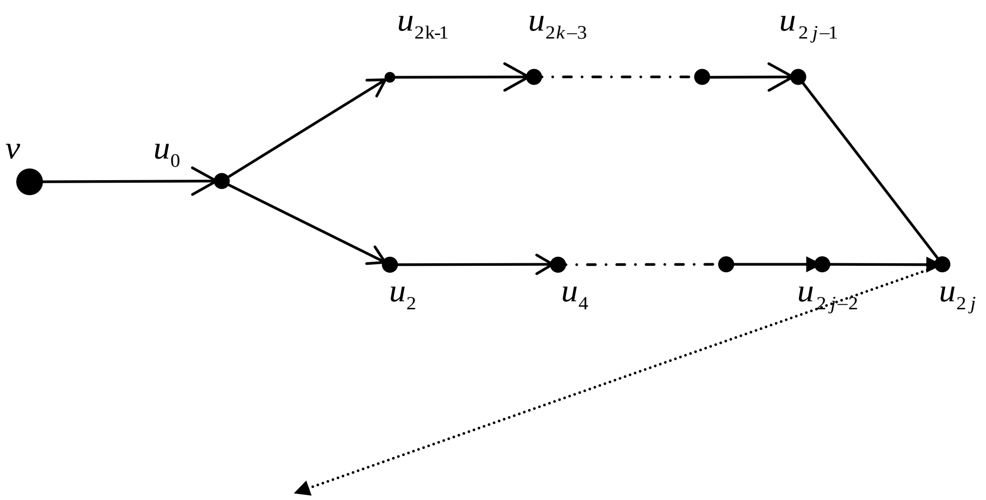
- ✓ 算法能探测出花的存在性；
- ✓ 花出现时，能够找出合理的增广路

为了简单，每次从**一个未盖点**出发搜索增广路，而不是像二部图那样，同时从**所有的未盖点**出发搜索增广路。

2. 花的探测

一朵花，当它第一次被发现时，即当它的所有节点成为外点或外点的配偶时，它才对算法产生影响。

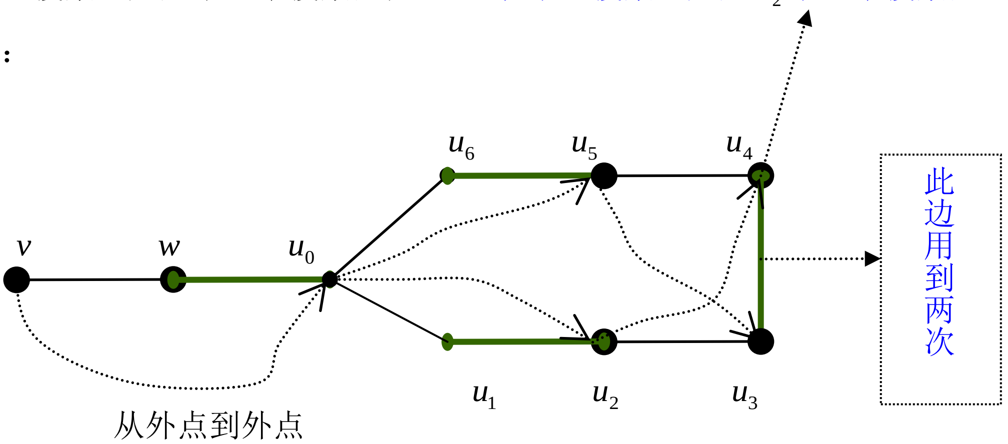
如下图表示的情形：



从上边搜索，是u_{2j-1}的配偶；　　　　从上边搜索，是u_3的配偶

从下边搜索，又是下一个搜索点；　　　　从下边搜索，又是u_2下一个搜索点

例如：



此时有一个反常的现象：下一个要搜索的节点u_{2j}，它同时又是外点u_{2j-1}的配偶。这就意味着，匹配边$[u_{2j-1},u_{2j}]$在搜索中运用了两次，从而确定了花的存在性。

3. 花的寻找

探测出花的存在以后，只要从u_{2j}和u_{2j-1}各自返回追踪，就能找出自未盖点v

到u_{2j}和u_{2j-1}的两条路，然后找出这两条路的最后一个公共外点（可能有多个公共外点），这个外点成为花蒂，如u_0。

花蒂：花中唯一不与花中其它节点匹配的点成为花蒂。

花：由自u_0到u_{2j}和u_{2j-1}路上的所有外点及其配偶组成，但不包含u_0的配偶（如w）。

4. 花的收缩

对已经发现的花，如何处理，才能保证继续有效地搜索增广路——将花收缩为一点，即用一个节点来代替花。

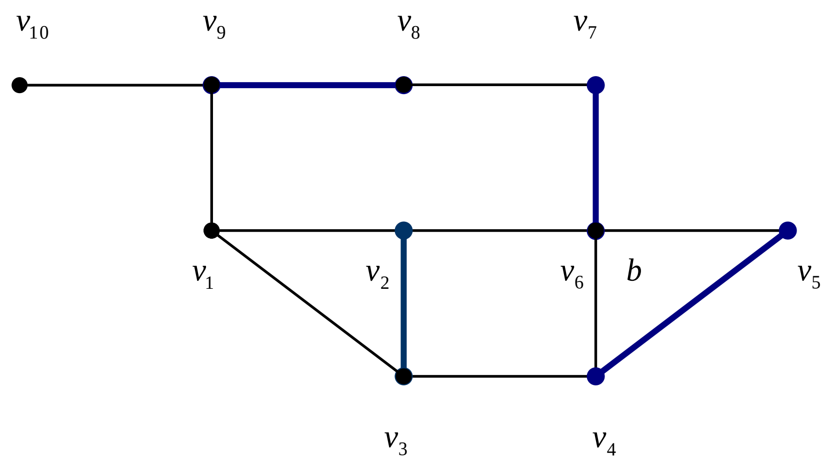
若b是图G中关于匹配M地一朵花，则在G中收缩b而得到一个新图：

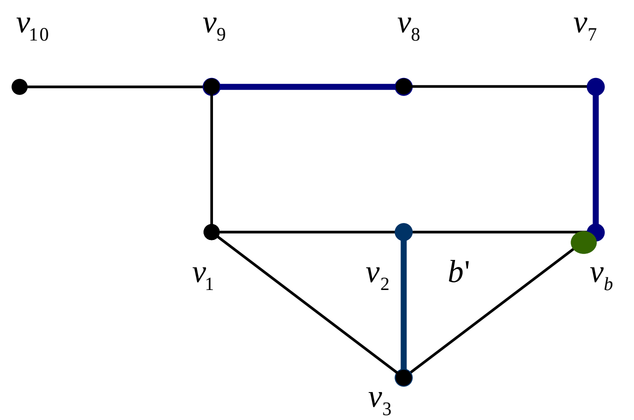
$$G/b=(V/b,E/b)$$

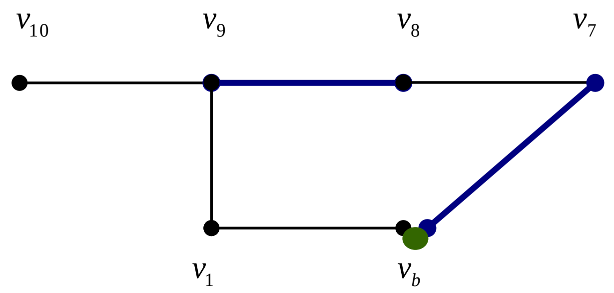
其中：

V/b：从V中去掉b的所有节点，并用一个新的节点v_B代替b；

E/b：从E去掉两个端点都在b里的所有边，并且对一切$u\in b$而$v\notin b$的边$[v,u]$，用边$[v,v_b]$代替。







收缩是搜索增广路算法中的一种运算，必须证明：收缩一朵花后，图中的增广路不会增加也不会减少。

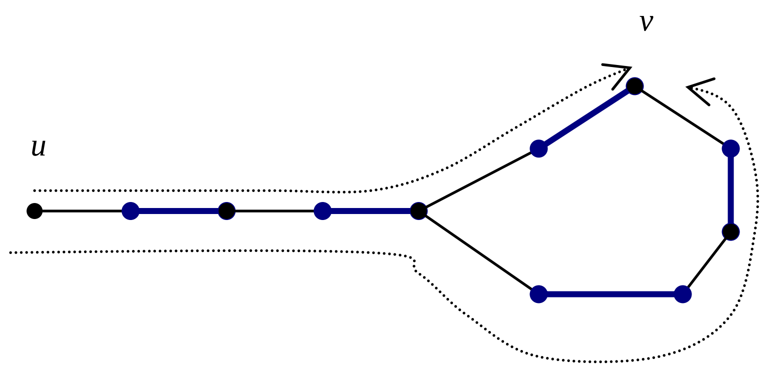
定理 6.8 假设从图 G 中的未盖点 u 出发，搜索关于匹配 M 的增广路时，我们发现了一朵花 b，那么对 b 中任意一点，G 中存在自 u 出发到该点的交错路，使得这条交错路最后一条边为匹配边。

证明：因为：b 是由 u 点出发发现的花

所以：自 u 到 b 的花蒂有交错路

因为：对 b 中任何一个节点 v，从 u 出发都有两条交错路到达 v

所以：这两条交错路中必有一条，其最后为匹配边



证毕

假设 M 是图 G 的一个匹配边，b 是 G 关于 M 的花，则 M/b 是一个匹配，其中 M/b 表示从 M 中去掉 b 里的匹配边，并且对于 $u \in b$ 而 $v \notin b$ 的匹配边 $[v,u]$，用边 $[v,v_b]$ 代替。

定理 6.9 假设在图 G 中从一个未盖点 u 出发搜索关于匹配 M 的增广路时，发现了一朵花，则

图 G 中存在自 u 出发关于匹配 M 的增广路 $\Leftrightarrow$

图 G/b 中存在自 u 出发关于匹配 M/b 的增广路（如果 u 是 b 的花蒂，则是从 v_b 出发的增广路）。

证明：（略）

5. 非二部图的匹配的一个有效算法

（1）算法的基本思想

- 从空集匹配开始，选取未盖点，搜索关于当前匹配M的增广路，并反复重复这以过程；
- 每次只选取一个未盖点，从此点出发寻找增广路；
- 搜索方法：应用辅助有向图的方法。

若某一个阶段不存在自未盖点u出发的增广路，则不仅对此阶段而言选取u是无益的，而且对以后各个阶段的搜索，选取这个节点u作为出发点也是不利的。即下述定理成立：

定理 6.10 假设在图G中不存在自未盖点u出发关于匹配M的增广路。令P是一条关于匹配M的增广路，其两端未盖点为v和w，则G中也不存在自u出发关于匹配$M \oplus P$的增广路。

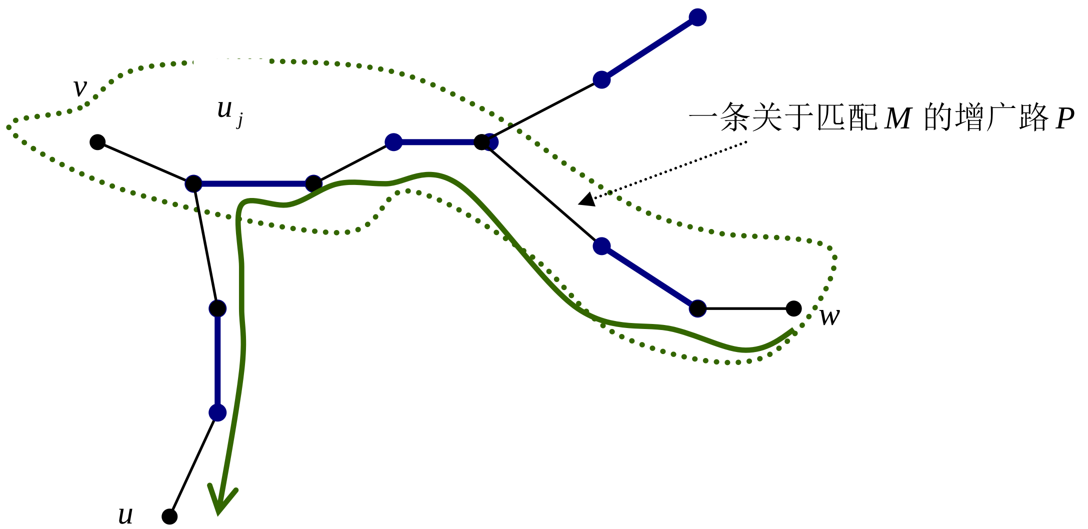
证明：用反证法。假设G中存在自u出发关于匹配$M \oplus P$的增广路q。

（i）　若q与P无公共节点，则q也是关于匹配M的增广路，矛盾。

（ii）　若q与P有公共节点。设

$$q = [u \equiv u_1, u_2, \cdots, u_j, \cdots, u_k = u']$$

令u_j是q与P的第一个公共节点，则u_j将P分为两段，其中必有一段，它以M中的边终止于u_j，这一段加上q中自u到u_j的一段就构成了一条关于M的增广路。矛盾。



推论：如果在某一个阶段图中不存在自u出发的增广路，则在以后各个阶段也不存在自u出发的增广路。

证明：对阶段数k用归纳法。

（2）算法描述

根据上述推论，一旦u出发没有搜索到增广路，那么以后就不再从u出发去搜索增广路了。

为了保证做到这一点，在算法中保存一个表 considered，开始置为 0。若一个节点u已经用做搜索的出发点，则置 $\text{considered}[u]=1$，它表示以后不再考虑它了。

与二部图一样，利用辅助有向图(V,A)进行搜索，不过要有一个花子程序来检测和收缩一朵花。

具体算法见参考书【2】.

定理 6.11 上述求非二部图$G=(V,E)$的匹配算法是正确的，且其计算复杂度为$O(|V|^4)$。