第五章 组合优化问题的原始－对偶算法-3

5.3 最大流问题的原始－对偶算法

一、最大流问题的数学规划模型

网络 $N=(s,t,V,E,b)$，$|V|=n,|E|=m$。

设 $f(x,y)$ 表示弧 (x,y) 上的流，令

$$d_i=\begin{cases}-1, & i=s\\ +1, & i=t\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

最大流问题的数学规划模型为：

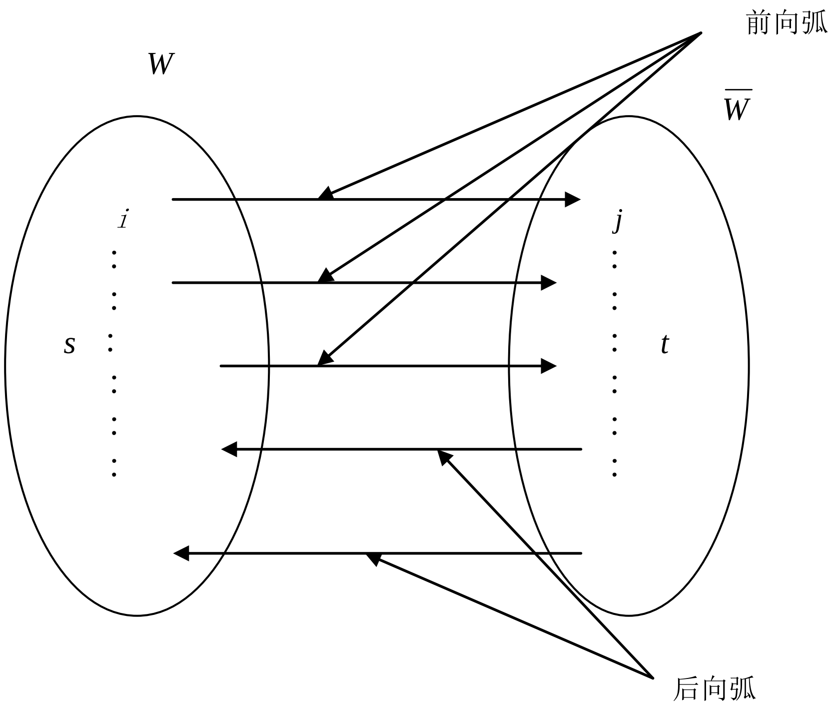
$$\begin{aligned}&\max v\\ &Af+dv=0\\ &\quad f\le b\\ &\ -f\le 0\end{aligned}$$

满足上述约束的流 $f(x,y)$ 称为一个 $s-t$ 流。给定一个 $s-t$ 流，称 $v=\sum_{(s,j)\in E}f(s,j)=\sum_{(i,t)\in E}f(i,t)$ 为 $s-t$ 流的值。

定义 5.1 网络 $N=(s,t,V,E,b)$ 的一个 $s-t$ 截(cut)是节点集合 V 的一个划分 $(W,\overline{W})$ 使得 $s\in W,t\in\overline{W}$。

一个 $s-t$ 截的容量定义为：

$$C(W,\overline{W})=\sum_{\substack{(i,j)\in E\\ i\in W,\ j\in\overline{W}}}b(i,j)$$。



前向弧：从W中的节点指向$\overline{W}$中的节点的弧。

即：一个$s-t$截的容量是它的“前向弧”的容量之和。

因为一切的$s-t$流都必须通过截的前向弧，所以：

任何一个$s-t$流的值不可能超过任一$s-t$截的容量

这一结果直接与截对应于最大流问题的可行解有密切关系。

二、最大流问题的原始规划模型

最大流问题的数学规划模型（直接视为某个规划的对偶规划）

$\max v$

$Af+dv=0$ (1) （m个节点上的流守恒约束）

$f\le b$（2） （n条弧上的容量限制约束）

$-f\le 0$

对节点$x\in V$，其流守恒约束对应的对偶变量记为$\pi(x)$，对弧$(x,y)\in E$，其容量限制约束对应的对偶变量记为$\gamma(x,y)$。那么，上述规划模型是下述原始问题的对偶：

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{(x,y)\in E}\gamma(x,y)b(x,y) \\
&\pi(x)-\pi(y)+\gamma(x,y)\ge 0 \quad (x,y)\in E \\
&-\pi(s)+\pi(t)\ge 1 \\
&\pi(x)\text{无限制} \\
&\gamma(x,y)\ge 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

定理 5.4 每一个 $s-t$ 截 $(W,\overline{W})$ 确定(4.1)的一个可行解：

$$\gamma(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in E, x\in W, y\in \overline{W}\\ 0, \qquad\qquad\qquad \text{oterwise}\end{cases}$$

$$\pi(x)=\begin{cases}0, x\in W\\ 1, x\in \overline{W}\end{cases}$$

且其费用为 $C(W,\overline{W})$。

证明：只要验证满足不等式约束成立即可。

由于 $s\in W, t\in \overline{W}$，所以 $\pi(s)=0, \pi(t)=1$，从而 $-\pi(s)+\pi(t)=1\ge 1$，即(4.2)成立。任给 $(x,y)\in E$，根据 $\gamma(x,y)$ 的定义，显然(4.3)总是成立。只要验证对任给的 $(x,y)\in E$ (4.1)成立即可。由于 x 和 y 在 W 和 $\overline{W}$ 里只有如下四种可能：

（1） $x\in W, y\in \overline{W}$：根据定理，此时 $\gamma(x,y)=1, \pi(x)=0, \pi(y)=1$，所以 $\pi(x)-\pi(y)+\gamma(x,y)=0$，即(4.1)成立；

（2） $x\in \overline{W}, y\in W$：此时 $\gamma(x,y)=0, \pi(x)=1, \pi(y)=0$，所以 $\pi(x)-\pi(y)+\gamma(x,y)=1>0$，即(4.1)成立；

（3） $x\in W, y\in W$：此时 $\gamma(x,y)=0, \pi(x)=0, \pi(y)=0$，所以 $\pi(x)-\pi(y)+\gamma(x,y)=0$，即(4.1)成立；

（4） $x\in \overline{W}, y\in \overline{W}$：此时 $\gamma(x,y)=0, \pi(x)=1, \pi(y)=1$，所以 $\pi(x)-\pi(y)+\gamma(x,y)=0$，即(4.1)成立。

所以，可行性得证。而可行解得费用为：

$$\sum_{(x,y)\in E}\gamma(x,y)b(x,y)=\sum_{\substack{(x,y)\in E\\ x\in W,y\in\overline{W}}}b(x,y)=C(W,\overline{W})$$

由上述定理，我们得到如下主要结果。

定理 5.5 （最大流最小截定理）任意一个 $s-t$ 流的值不可能大于 $s-t$ 截的容量；进而，最大流的值等于最小截的容量，并且一个流 f 和一个截 $(W,\overline{W})$ 都是最优的充分必要条件是对一切 $(x,y)\in E$：

若 $x\in\overline{W}$ 且 $y\in W$，则有 $f(x,y)=0$（后向弧都是空弧）

若 $x\in W$ 且 $y\in\overline{W}$，则有 $f(x,y)=b(x,y)$（前向弧都是饱和弧）

证明：由前述定理知，流值 v 不大于任何一个截的容量，并且给定一个值为 v 的最大流，总能构造一个截，使其容量为 v。由最有解的互补松弛条件：

一个流 f 和一个截 $(W,\overline{W})$ 都是最优的充分必要条件是对一切 $(x,y)\in E$：

若 $x\in\overline{W}$ 且 $y\in W$，那么对偶不等式 $\pi(x)-\pi(y)+\gamma(x,y)=1-0+0=1>0$ 是严格的，因此对应的变量 $f(x,y)$ 必须等于 0；

若 $x\in W$ 且 $y\in\overline{W}$，则 $\gamma(x,y)=1$，因此对应的原始不等式 $f(x,y)\le b(x,y)$ 必须取等式 $f(x,y)=b(x,y)$。

三、最大流问题的原始－对偶算法

1. 线性规划的原始－对偶算法

$$\begin{aligned}&\min z=c^T x\\ &\text{s.t.}\, Ax=b\geq 0 \quad \text{(LP)}\\ &\qquad x\geq 0\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}&\max \varpi=b^T y\\ &\text{s.t.}\quad A^T y\leq c \quad \text{(D)}\\ &\qquad y\text{无限制}\end{aligned}$$

y 是(D)的一个可行解

$$J=\{j: A_j^T y=c_j\}$$

$$\begin{aligned}&\min \xi=\sum_{i=1}^{m} x_i^a\\ &\text{s.t.}\ \sum_{j\in J} a_{ij}x_j+x_i^a=b_i, i=1,2,\cdots,m\\ &\qquad x_j\geq 0,\quad j\in J\\ &\qquad x_j=0,\quad j\notin J \qquad \text{(RP)}\\ &\qquad x_i^a\geq 0,\ i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}&\max \varpi=b^T y\\ &\text{s.t.}\ A_j^T y\leq 0,\quad j\in J\\ &\qquad y_i\leq 1,\ \ i=1,2,\cdots,m \qquad \text{(DRP)}\\ &\qquad y_i\text{无限制}\end{aligned}$$

用单纯形类方法求解(RP)， 若：

- (RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}}=0$，则得到(LP)和(D)的最优值，算法终止；
- (RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}}>0$，设 $\bar{y}$ 是(DRP)的最优解，若 $A_j^T\bar{y}\leq 0, j\notin J$，则(D)无上界，从而(LP)不可行，算法终止；
- 否则，取

$$\theta\leq\theta_1=\min_{\substack{A_j^T\bar{y}>0,\\ j\notin J}}\left\{\frac{c_j-A_j^T y}{A_j^T\bar{y}}\right\},\quad y:=y+\theta\bar{y}$$

2.最大流问题的原始－对偶算法

显然，$Af+dv\leq 0\Rightarrow Af+dv=0$，即若 $Af+dv\leq 0$，则必有 $Af+dv=0$，否则，若存在节点 i 使得 $a_i^T f+d_i v_i<0$，说明节点 i 出现了亏空。由于流的守恒，一个节点出现亏空，必存在另外的节点出现剩余，即存在节点 j 使得 $a_j^T f+d_j v_j>0$，与 $Af+dv\leq 0$ 矛盾。所以最大流问题的数学规划模型可以重写为：

$$
\begin{aligned}
&\max v \\
&Af + dv \le 0 \\
&\quad f \le b \\
&\; -f \le 0
\end{aligned}
\qquad \text{(D)}
$$

显然，上述规划问题是一个费用向量平凡的线性规划问题，它的输入数据（容量）出现在右端项。因此，可以组合化右端项，直接把最大流问题的数学规划模型视为为对偶规划，那么相应的子问题仍然应该是一个可达性问题。

$$
\begin{aligned}
&\max v \\
&Af + dv \le 0,\ \text{对一切行} \\
&\quad f \le 0,\ \text{对D中}f = b\text{的弧} \\
&\; -f \le 0,\ \text{对D中}f = 0\text{的弧} \\
&\quad f \le 1 \\
&\quad v \le 1
\end{aligned}
\qquad \text{(DRP)}
$$

原始－对偶算法的过程：

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{(x,y)\in E} \gamma(x,y) b(x,y) \\
&\pi(x) - \pi(y) + \gamma(x,y) \ge 0 \quad (x,y) \in E \\
&-\pi(s) + \pi(t) \ge 1 \\
&\pi(x)\text{无限制} \\
&\gamma(x,y) \ge 0
\end{aligned}
\qquad \text{(LP)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max v \\
&Af + dv \le 0 \\
&\quad f \le b \\
&\; -f \le 0
\end{aligned}
\qquad \text{(D)}
$$

f 是(D)的一个可行解

允许列集合 $J = \{$(1) $Af + dv = 0$ 的行，即所有行

（2） $f = b$ 的弧（3） $f = 0$ 的弧$\}$

(RP) $\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&\max v \\
&Af + dv \le 0,\ \text{对一切行} \\
&\quad f \le 0,\ \text{对D中}f = b\text{的弧} \\
&\; -f \le 0,\ \text{对D中}f = 0\text{的弧} \\
&\quad f \le 1 \\
&\quad v \le 1
\end{aligned}
\qquad \text{(DRP)}
$$

$$f := f + \theta \overline{f}$$

求解(DRP)的解释：

由于 $v \le 1$，所以(DRP)最大值为 1，(DRP)的最优解就是寻找自 s 到 t 的值为 1 的流，即寻找自 s 到 t 的一条路，满足：

（1） 对 D 中 $f=b$ 的弧要求 $f\le 0$——即饱和弧（原来 $f=b$ 的弧）是后向弧（$f\le 0$）

（2） 对 D 中 $f=0$ 的弧要求 $f\ge 0$——即空弧（原来 $f=0$ 的弧）是前向弧（$f\ge 0$）

（3） 其它弧可以是任意方向的

——这是一个可达性问题。

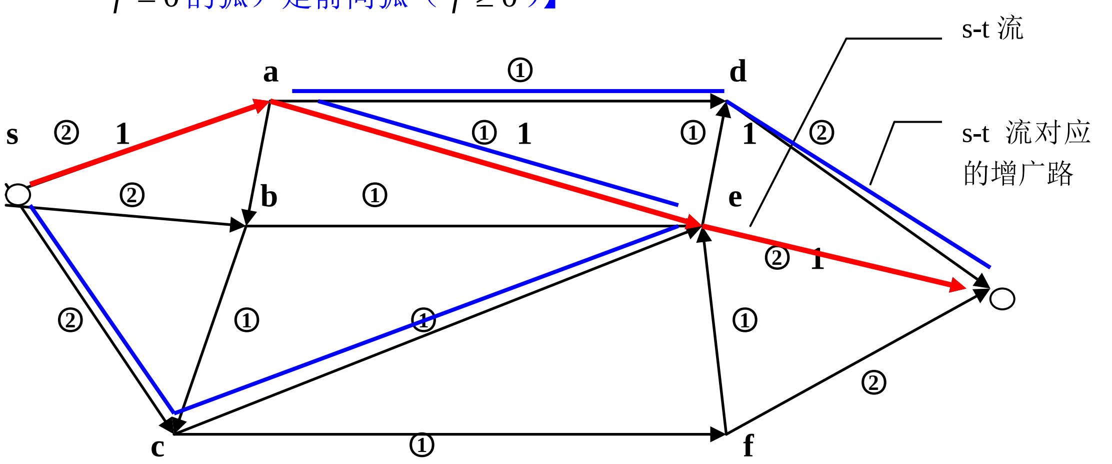
- 一旦这样的路找到（求得(DRP)的最优解），那么沿这条路尽可能地增加流的值，即增加到或者某一后向弧的流值为 0（$f=0$），或者某一前向弧为饱和弧（$f=b$）为止。
- 当这样的路不存在时，互补松弛条件就得到了满足，从而原始－对偶算法终止。

要搜索的路即为下述的增广路：

定义 5.2：给定一个流网络 $N=(s,t,V,E,b)$ 和一个 $s-t$ 流 f，一条增广路 P 是（不计 $G=(V,E)$ 中弧的方向的）无向图中自 s 到 t 的路，使得：

(a) P **中每一条前向弧** (i,j) **满足** $f(i,j)<b(i,j)$，即**前向弧是非饱和的**【饱和弧（原来 $f=b$ 的弧）是后向弧（$f\le 0$）】

(b) P **中每一条后向弧** (i,j) **满足** $f(i,j)>0$，即**后向弧是非空弧**【空弧（原来 $f=0$ 的弧）是前向弧（$f\ge 0$）】



所以：求(DRP)的最优解实际上就是寻找增广路。

设当前解对应的允许列集合为：

$$J=\{Af+dv=0\text{的行，即所有行，}\ f=b\text{的弧和}\ f=0\text{的弧}\}$$

$\overline{f}$ 是按上述搜索得到(DRP)的最优解，即得到一条增广路 P，则

$$\overline{f}(i,j)=\begin{cases}1,(i,j)\text{为}P\text{的前向弧}\\-1,(i,j)\text{为}P\text{的后向弧}\\0,\qquad\qquad\text{其它}\end{cases}$$

根据原始－对偶算法中 θ_1 的计算公式得：

$$\theta\le\theta_1=\min\begin{Bmatrix}\min\limits_{\substack{f(i,j)>b(i,j)\\(i,j)\in P\text{为前向弧}}}\{b(i,j)-f(i,j)\},\\ \min\limits_{\substack{f(i,j)>0\\(i,j)\in P\text{为后向弧}}}\left\{\dfrac{0-f(i,j)}{-1}\right\}\end{Bmatrix}$$

$$=\min_{(i,j)\in P}\begin{cases}b(i,j)-f(i,j),(i,j)\text{为}P\text{的前向弧}\\f(i,j),\qquad\qquad (i,j)\text{为}P\text{的前向弧}\end{cases}$$

新的可行解 $f:=f+\theta\overline{f}$ 为：

$$f(i,j):=\begin{cases}f(i,j)+\theta_1,(i,j)\text{为}P\text{的前向弧}\\f(i,j)-\theta_1,(i,j)\text{为}P\text{的后向弧}\\f(i,j),\qquad\qquad (i,j)\notin P\end{cases}$$

求解(DRP)（寻找增广路）的标号算法(Ford-Fulkerson 标号算法)：

这个方法是从 s 起逐步向外扩张标号，直到 t 得到标号（找到(DRP)的最优解且最优值等于 1）或者标号不能再扩张（找到(DRP)的最优解且最优值等于 0）为止：

第 1 步：首先给 s 标号 $(0,\varepsilon(s))$，第一个数字是使得这个点得到表号的前一个节点的代号，因为 s 为发点，故记为 0。$\varepsilon(s)$ 表示从上一个已标号点到这个标号点的流量的最大允许调整值。s 为发点，不限制允许调整量，故 $\varepsilon(s)=\infty$。

第 2 步：列出与已标号点相邻的所有未标号的点：

（1） 考虑**前向弧**，即从已标号节点i出发的所有弧(i,j)：

(i) 如果是饱和弧，即 $f(i,j)=b(i,j)$，不给点 j 标号；

(ii) 如果是非饱和弧，即 $f(i,j)<b(i,j)$，给点 j 标号$(i,\varepsilon(j))$，其中 i 表示 j 点的标号是从 i 点延伸过来的，$\varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i),b(i,j)-f(i,j)\}$；——**前向弧是非饱和**

（2） 考虑后向弧，即所有指向已标号节点i的弧(h,i)：

(i) 如果是空弧，即 $f(h,i)=0$，对h点不标号；

(ii) 如果是非空弧，即 $f(h,i)>0$，则对h点标号$(i,\varepsilon(h))$，其中 $\varepsilon(h)=\min\{\varepsilon(i),f(h,i)\}$；——**后向弧是非空弧**

（3） 如果某未标号点k有两个及以上相邻的标号点，为了减少迭代次数，可按（1）、（2）中所述的规则分别计算出现$\varepsilon(k)$的值，并取其中最大的一个标记。

第 3 步：重复第 2 步，可能出现两种结局：

（1） 标号过程中断，t得不到标号，说明(DRP)最大值为 0，该网络中不存在增广路，给定的流为最大流。记已标号得节点集合为W，未标号的节点集合为$\overline{W}$，$(W,\overline{W})$为网络得最小割；

（2） t得到标号，得到(DRP)最大值为 1 的最优解，用反向追踪法在网络中找出一条从$s\to t$的由标号点及相应的弧连接而成的增广路。

第 4 步：修改流量，设原来(D)的可行解为 f，令

$$f:=\begin{cases} f+\varepsilon(t), & \text{对增广路上的所有前向弧} \\ f-\varepsilon(t), & \text{对增广路上的所有后向弧} \\ f, & \text{对所有非增广路上的弧} \end{cases}$$

得到(D)的可行解为，即网络上的一个新的可行流 f。

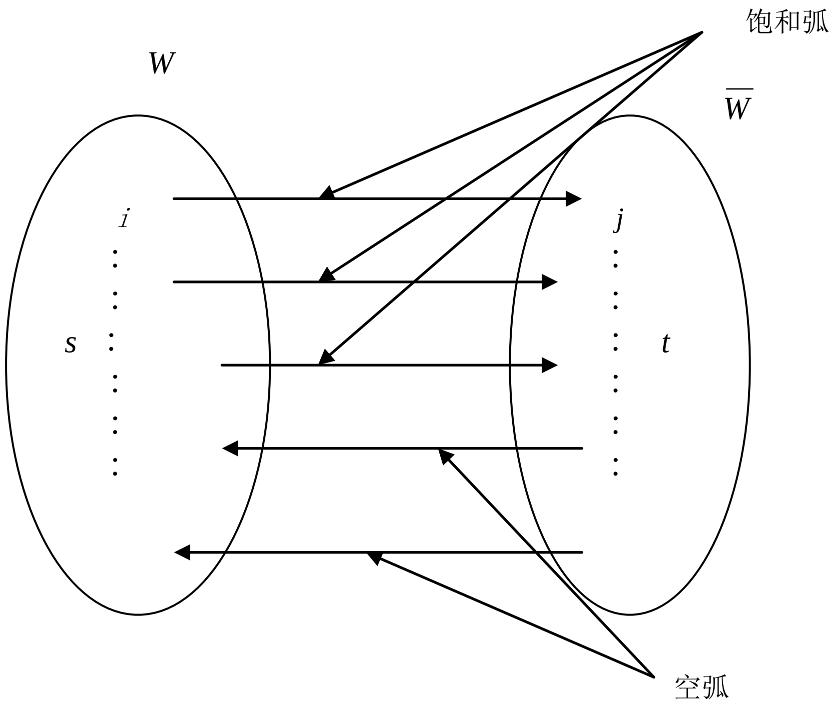
第 5 步：抹掉图上的所有标号，重复第 1 到第 4 步，直至图中找不到任何增广路，

即出现第 3 步的结局(1)——(DRP)最大值为 0 为止，这时(D)的可行解 f 即为最大流。

定理 5.6 当 Ford-Fulkerson 标号算法终止时，必得到最大流。

证明方法 1：由于 Ford-Fulkerson 标号算法是原始－对偶算法的一种具体应用，Ford-Fulkerson 标号算法终止时，(DRP)的最有解为 0，从而必得到(D)的最有解，即必得到最大流。

证明方法 2：当 Ford-Fulkerson 标号算法终止时，某些点已经标号，而其余点未标号。记已标号节点的集合为W，未标号节点的集合为$\overline{W}$。则从W到$\overline{W}$的所有弧(i, j)一定被饱和（否则在检查i时，j可由i得到标号），同样地，从$\overline{W}$到W的所有弧(j,i)一定为空弧（否则在检查j时，i可由j得到标号）。因此，根据**定理 5.7** $(W,\overline{W})$是一个最小截，从而这个流是最大流。



四、标号算法的有限性问题

问题：Ford-Fulkerson 标号算法在有限步内结束吗？

1. Ford-Fulkerson 标号算法可能永远不停止：

(1) 当 b 是整数时，算法在有限步终止。因为每一次增广，流地值至少增加一个单位。最大流一定存在，设其值为 $v*$，则最多增广 $v*$ 次。

(2) 当 b 是有理数时，算法在有限步终止。

(3) 当 b 是无理数时，算法可能在有限步内不终止。Ford-Fulkerson 给出一个例子，具有下述性质：

(i) 标号算法在有限步内永远不终止；

(ii) 在增广过程中，流的值收敛，但流的极限值 < 最大流的值

2. Edmonds 和 Karp 给出了一个修正的标号算法，算法的迭代步数至多为 $\frac{n^3-n}{4}$，且迭代步数与容量无关。

思考题：Ford-Fulkerson 标号算法是原始－对偶算法在最大流问题中的应用，但原始－对偶算法在有限步内终止，而 Ford-Fulkerson 标号算法却不能，矛盾吗？为什么？