北京邮电大学《矩阵分析与应用》

2006-2007学年期末考试试题

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分

一、求$\boldsymbol{R^4}$的子空间

$$V_1=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0\}$$

$$V_2=\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0\}$$

的交的标准正交基

二、设$\boldsymbol{y}$是欧式空间$\boldsymbol{V}$中的单位向量，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，证明变换$\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$是正交变换。

三、求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$的$\left\|\bullet\right\|_1,\left\|\bullet\right\|_2,\left\|\bullet\right\|_\infty,\left\|\bullet\right\|_{m_1},\left\|\bullet\right\|_{m_2}$ 范数

四、设$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T,\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$n$阶对称方阵，$\boldsymbol{b}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)^T$是$n$维向量，$c$为常数，试求$f(\boldsymbol{x})=\left\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\right\|_2^2+c$，对于$\boldsymbol{x}$的导数

五、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$，求$e^{\boldsymbol{A}},e^{\boldsymbol{B}},e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}$。

六、已知矩阵$\boldsymbol{A_{n\times m}}$请用奇异值$(SVD)$分解求$\boldsymbol{A}$的伪逆，并证明之

七、设$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n),\boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ 是$\boldsymbol{R^n}$的任意两个向量，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$正定，令$\boldsymbol{(x,y)=xAy^T}$

*(1)*证明在该定义下，$\boldsymbol{R^n}$形成了欧式空间；

*(2)*求$\boldsymbol{R^n}$对单位向量$\boldsymbol{e_1}=(1,0,,\ldots,0),\boldsymbol{e_1}=(0,1,,\ldots,0),\ldots,\boldsymbol{e_n}=(0,0,\ldots,1)$ 的度量矩阵

八、已知矩阵$\boldsymbol{A_{n\times m}}\neq\boldsymbol{O}$，且伪逆$\boldsymbol{A^+}$已知，记$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{B^+}$，并验证。

九、已知函数矩阵$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}1&x^2\\x&0\end{bmatrix}$，试计算：

(1)$\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{A}(x),\dfrac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{A}(x),\dfrac{d^3}{dx^3}\boldsymbol{A}(x)$

(2)$\dfrac{d}{dx}|\boldsymbol{A}(x)|$

(3)$\dfrac{d}{dx}\boldsymbol{A^{-1}}(x)$

十、设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\boldsymbol{C^{n\times n}},\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T\in\boldsymbol{C^n}$，证明：

*(1)*方阵的$m_\infty-$范数与向量的$1-$范数相容；

*(2)*方阵的$\boldsymbol{F}-$范数与向量的$2-$范数相容。

矩阵分析与应用（2008 年 1 月 8 日）

一、已知 $R^{2\times 2}$ 的两组基：

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}，E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}，E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}，E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}；$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}，F_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}，F_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}，F_{22}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}。$$

求由基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 到 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 的过渡矩阵，并求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&5\\4&2\end{bmatrix}$ 在基 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 下的坐标。

二、设 x_1，x_2 是线性空间 V^2 的基，T_1 与 T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1x_1=y_1$，$T_1x_2=y_2$，且 $T_2(x_1+x_2)=y_1+y_2$，$T_2(x_1-x_2)=y_1-y_2$，试证明 $T_1=T_2$。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的 $\|\mathbf{g}\|_1$，$\|\mathbf{g}\|_2$，$\|\mathbf{g}\|_\infty$，$\|\mathbf{g}\|_{m1}$，$\|\mathbf{g}\|_{m2}$，$\|\mathbf{g}\|_{m\infty}$ 范数。

四、设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，$x=(x_1,\dots,x_n)^T$，证明 $\|A\|=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_\infty$ 相容。

五、$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$f(z)=\sqrt{z}$，$g(z)=\dfrac{1}{z}$，求 $f(A)$，$g(A)$。

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，求微分方程组 $x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解。

七、试用 Schmidt 正交化方法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

八、设 $A\in C^{m\times n}$，且 $U\in C^{m\times n}$ 和 $V\in C^{m\times n}$ 均为酉矩阵，证明 $(UAV)^+=V^HA^+U^H$。

九、已知函数矩阵 $A(x)=\begin{bmatrix}1,&1-x,&0\\x,&x+1,&0\\0,&0,&x^2\end{bmatrix}$，试计算

(1) $\dfrac{d}{dx}A(x)$，$\dfrac{d^2}{dx^2}A(x)$，$\dfrac{d^3}{dx^3}A(x)$；(2) $\dfrac{d}{dx}|A(x)|$；(3) $\dfrac{d}{dx}A^{-1}(x)$

十、(a)设 P 是投影矩阵，证明 P 的特征值为 1 或 0；

(b)设 P 是正交投影矩阵，证明 P 是半正定矩阵。

北京邮电大学

《矩阵分析与应用》期末考试试题（A 卷）

2008/2009 学年第一学期（2009 年 1 月 6 日）

一、已知 $R^{2\times 2}$ 的两组基：

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}，\ E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}，\ E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}，\ E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}；$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}，\ F_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}，\ F_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}，\ F_{22}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}。$$

求由基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 到 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 的过渡矩阵，并求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&5\\4&2\end{bmatrix}$ 在

基 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 下的坐标。

二、设 T，S 为线性变换，若 $TS-ST=T_e$，证明 $TS^k-ST^k=kT^{k-1},k>1$。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}-j&2&3\\1&0&j\end{bmatrix}$ 的 $\|g\|_1$，$\|g\|_2$，$\|g\|_\infty$。

四、设矩阵 A 非奇异，l 是它任意一个特征值，证明 $|l|\geq\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$。

五、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，求 e^A，$e^{tA}(t\in R)$，$\sin A$。

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，求微分方程组 $x(t)=Ax(t)+b(t)$

满足初始条件 $x(0)$ 的解。

七、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

八、设矩阵 $F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$，证明 $rank(FG)=r$。

九、设 $A\in C^{m\times n}$，且 $U\in C^{m\times n}$ 和 $V\in C^{m\times n}$ 均为酉矩阵，证明 $(UAV)^+=V^HA^+U^H$

十、(a)设 P 是投影矩阵，证明 P 的特征值为 1 或 0；

(b)设 P 是正交投影矩阵，证明 P 是半正定矩阵。

北京邮电大学《矩阵分析与应用》

2010-2011学年期末考试试题

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分

一、讨论$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$的矩阵组：

$$\boldsymbol{A_1}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{A_2}=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{A_3}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{A_4}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix};$$

的线性相关性；并在线性相关时，求其最大线性无关组。

二、设$\boldsymbol{R^{2\times 2}}$的两个子空间为

$$\boldsymbol{V_1}=\left\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$\boldsymbol{V_2=L(B_1,B_2)},\boldsymbol{B_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\boldsymbol{B_2}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*(1)*将$\boldsymbol{V_1+V_2}$表示成生成子空间，并求$\boldsymbol{V_1+V_2}$的基和维数；

*(2)*求$\boldsymbol{V_1\cap V_2}$的基和维数。

三、设$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha$和$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$是$\boldsymbol{C^n}$上的两种范数，又$k_1,k_2$是正常数，证明下列函数是$\boldsymbol{C^n}$上的范数

(1) $\max(\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha,\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta)$;　　(2)$k_1\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha+k_2,\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$

四、设$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C^{m\times n}}$，且对$\boldsymbol{C^{m\times n}}$的矩阵范数$\left\|\bullet\right\|$，满足$\left\|\boldsymbol{A}\right\|<1$，

证明：矩阵$\boldsymbol{I-A}$非奇异，且有$\left\|(\boldsymbol{I-A})^{-1}\right\|\le\dfrac{\left\|\boldsymbol{I}\right\|}{1-\left\|\boldsymbol{A}\right\|}$

五、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求$e^{\boldsymbol{A}},e^{t\boldsymbol{A}}(t\in\boldsymbol{R}),\cos\boldsymbol{A}$。

六、设$f(z)=\ln z$，求$f(\boldsymbol{A})$，这里$\boldsymbol{A}$为：

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

七、设$\boldsymbol{X}$为$n\times m$矩阵，若$\boldsymbol{A,B}$依次是$n\times n$和$m\times n$的常数矩阵，则：

(1)$\dfrac{d}{d\boldsymbol{X}}(tr(\boldsymbol{BX}))=\dfrac{d}{d\boldsymbol{X}}(tr(\boldsymbol{X^TB^T}))=\boldsymbol{B^T}$

(2)$\dfrac{d}{d\boldsymbol{X}}(tr(\boldsymbol{X^TAX}))=\boldsymbol{(A+A^T)X}$

八、$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$，分别用$\boldsymbol{G}-$矩阵和$\boldsymbol{H}-$矩阵方法求$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{Tx=}\left|\boldsymbol{x}\right|\boldsymbol{e_1}$

九、$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \cdots \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^+ & \vdots & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

十、证明$rank\boldsymbol{A}=rank(\boldsymbol{A^TA})=rank(\boldsymbol{AA^T})$，这里$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R_r^{m\times n}}$。

北京邮电大学《矩阵分析与应用》

2011-2012学年期末考试试题

注意：每题十分，按中间过程给分，只有最终结果无过程的不给分

一、给定$\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2\times 2}}=\{\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{2\times 2}|a_{ij}\in \boldsymbol{R}\}$(数域$\boldsymbol{R}$上的2阶实方阵按通常矩阵的加法与数乘矩阵构成的线性空间)的子集

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}|a_{ij}\in \boldsymbol{R}\text{且}a_{11}+a_{22}=0\}$$

*(1)*证明$\boldsymbol{V}$是$\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2\times 2}}$的子空间；

*(2)*求$\boldsymbol{V}$的维数和一个基。

二、设$\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2\times 2}}$的两个子空间为

$$\boldsymbol{V_1}=\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix},x_1-x_2+x_3-x_4=0\}$$

$$\boldsymbol{V_2}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2}),\boldsymbol{B_1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix},\boldsymbol{B_2}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

*(1)*将$\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$表示成生成子空间；

*(2)*求$\boldsymbol{V_1}+\boldsymbol{V_2}$的基和维数；

*(3)*求$\boldsymbol{V_1}\cap\boldsymbol{V_2}$的基和维数。

三、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I}$。

四、在$\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2\times 2}}$中定义线性变换

$$\boldsymbol{T_1X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\boldsymbol{X},\boldsymbol{T_2X}=\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix},\boldsymbol{T_3X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}\end{bmatrix}$$

求$\boldsymbol{T_1},\boldsymbol{T_2},\boldsymbol{T_3}$在基$\boldsymbol{E_{11}},\boldsymbol{E_{12}},\boldsymbol{E_{21}},\boldsymbol{E_{22}}$下的矩阵。

五、已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$的全体初等因子。

六、设$\boldsymbol{y}$是欧式空间$\boldsymbol{V}$中的单位向量，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}$，有$\boldsymbol{Tx}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$，证明$\boldsymbol{T}$是正交变换。常称这种正交变换为镜面反射。

七、设$\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$是$\boldsymbol{C^n}$上的两种范数，又$k_1,k_2$，是正常数，证明下列函数

(1) $\max(\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha,\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta)$

(2)$k_1\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\alpha+k_2,\left\|\boldsymbol{x}\right\|_\beta$

是$\boldsymbol{C^n}$上的范数

八、设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$，求$x'(t)=\boldsymbol{A}\cdot x(t)$的通解。

九、证明$rank\boldsymbol{A}=rank(\boldsymbol{A^TA})=rank(\boldsymbol{AA^T})$这里$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R_r^{m\times r}}$

十、设$\boldsymbol{D}=diag(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，证明$\boldsymbol{D^+}=diag(d_1^+,d_1^+,\ldots,d_n^+)$