北京邮电大学 2006——2007 学年第一学期
《矩阵分析与应用》期末考试试题

一、求 R^4 的子空间

$$V_1=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\middle|x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$
$$V_2=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\middle|x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$$

的交的标准正交基。

二、设 y 是欧式空间 V 中的单位向量，$x\in V$，证明变换 $Tx=x-2\left(y,x\right)y$ 是正交变换。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的 $\|g\|_1$，$\|g\|_2$，$\|g\|_\infty$，$\|g\|_{m1}$，$\|g\|_{m2}$ 范数。

四、设 $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T$，$A=\left(a_{ij}\right)$ 是 n 阶对称方阵，$b=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)^T$ 是 n 维向量，c 为常数，试求 $\|Ax-b\|_2^2+c$ 对于 x 的导数。

五、设 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$,求范数 e^A，e^B，e^{A+B}。

六，已知矩阵 $A_{m\times n}$，请用奇异值（SVD）分解求 A 的伪逆，并证明之。

七、设 $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$，$y=\left(h_1,h_2,...,h_n\right)$ 是 R^n 的任意两个向量，$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 正定，令 $\left(x,y\right)=xAy^T$，

(1) 证明在该定义下，R^n 形成了欧式空间；

(2) 求 R^n 对单位向量 $e_1=\left(1,0,...,0\right)$，$e_1=\left(0,1,...,0\right)$，$e_1=\left(0,0,...,1\right)$ 的度量矩阵。

八、已知矩阵 $A_{m\times n}\neq O$，且伪逆 A^+ 已知，记 $B=\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$ 求 B^+，并验证。

九、已知函数矩阵 $A\left(x\right)=\begin{bmatrix}1&x^2\\x&0\end{bmatrix}$，试计算

(1) $\frac{d}{dx}A\left(x\right)$，$\frac{d^2}{dx^2}A\left(x\right)$，$\frac{d^3}{dx^3}A\left(x\right)$； (2) $\frac{d}{dx}\left|A\left(x\right)\right|$；(3) $\frac{d}{dx}A^{-1}\left(x\right)$

十、设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in C^{n\times n}$，$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T\in C^n$，证明：

(1) 方阵的 m_∞—范数与向量的 1—范数相容；

(2) 方阵的 F —范数与向量的 2—范数相容。

矩阵分析与应用（2008 年 1 月 8 日）

一、已知 $R^{2\times 2}$ 的两组基：

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ F_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ F_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ F_{22}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}。$$

求由基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 到 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 的过渡矩阵，并求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&5\\4&2\end{bmatrix}$ 在基 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 下的坐标。

二、设 x_1，x_2 是线性空间 V^2 的基，T_1 与 T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1x_1=y_1$，$T_1x_2=y_2$，且 $T_2(x_1+x_2)=y_1+y_2$，$T_2(x_1-x_2)=y_1-y_2$，试证明 $T_1=T_2$。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 的 $\|\mathbf{g}\|_1$，$\|\mathbf{g}\|_2$，$\|\mathbf{g}\|_\infty$，$\|\mathbf{g}\|_{m1}$，$\|\mathbf{g}\|_{m2}$，$\|\mathbf{g}\|_{m\infty}$ 范数。

四、设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in C^{m\times n}$，$x=(x_1,\ldots,x_n)^T$，证明 $\|A\|=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$ 是矩阵范数，且与 $\|x\|_\infty$ 相容。

五、$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$f(z)=\sqrt{z}$，$g(z)=\dfrac{1}{z}$，求 $f(A)$，$g(A)$。

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}\\e^{2t}\\0\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，求微分方程组 $x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解。

七、试用 Schmidt 正交化方法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

八、设 $A\in C^{m\times n}$，且 $U\in C^{m\times n}$ 和 $V\in C^{m\times n}$ 均为酉矩阵，证明 $(UAV)^+=V^HA^+U^H$。

九、已知函数矩阵 $A(x)=\begin{bmatrix}1,&1-x,&0\\x,&x+1,&0\\0,&0,&x^2\end{bmatrix}$，试计算

(1) $\dfrac{d}{dx}A(x)$，$\dfrac{d^2}{dx^2}A(x)$，$\dfrac{d^3}{dx^3}A(x)$；(2) $\dfrac{d}{dx}|A(x)|$；(3) $\dfrac{d}{dx}A^{-1}(x)$

十、(a)设 P 是投影矩阵，证明 P 的特征值为 1 或 0；

(b)设 P 是正交投影矩阵，证明 P 是半正定矩阵。

北京邮电大学

《矩阵分析与应用》期末考试试题（A 卷）

2008/2009 学年第一学期（2009 年 1 月 6 日）

一、已知 $R^{2\times 2}$ 的两组基：

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$

$$F_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ F_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ F_{21}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ F_{22}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}。$$

求由基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 到 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 的过渡矩阵，并求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&5\\4&2\end{bmatrix}$ 在

基 F_{11}，F_{12}，F_{21}，F_{22} 下的坐标。

二、设 T，S 为线性变换，若 $TS-ST=T_e$，证明 $TS^k-ST^k=kT^{k-1},k>1$。

三、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}-j&2&3\\1&0&j\end{bmatrix}$ 的 $\|g\|_1$，$\|g\|_2$，$\|g\|_\infty$。

四、设矩阵 A 非奇异，l 是它任意一个特征值，证明 $|l|\geq\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$。

五、设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，求 e^A，$e^{tA}(t\in R)$，$\sin A$。

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}1\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，求微分方程组 $x(t)=Ax(t)+b(t)$

满足初始条件 $x(0)$ 的解。

七、求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 的奇异值分解。

八、设矩阵 $F\in C_r^{m\times r}$，$G\in C_r^{r\times n}$，证明 $rank(FG)=r$。

九、设 $A\in C^{m\times n}$，且 $U\in C^{m\times n}$ 和 $V\in C^{m\times n}$ 均为酉矩阵，证明 $(UAV)^+=V^HA^+U^H$

十、(a)设 P 是投影矩阵，证明 P 的特征值为 1 或 0；

(b)设 P 是正交投影矩阵，证明 P 是半正定矩阵。

《矩阵分析与应用》期末考试试卷（A 卷）

2010/2011 学年第一学期（2011 年 1 月 12 日）

一、讨论 $R^{2\times2}$ 的矩阵组：

$$A_1=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix};$$

的线性相关性；并在线性相关时，求其最大线性无关组。

二、设 $R^{2\times2}$ 的两个子空间为

$$V_1=\left\{A\middle|A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$$

$$V_2=L\left(B_1,B_2\right),B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求：1.将 V_1+V_2 表示成生成子空间，并求 V_1+V_2 的基和维数；2.求 $V_1 \mathbf{I} V_2$ 的基和维数。

三、设 $\|x\|_a$ 与 $\|x\|_b$ 是 C^n 上的两种范数，又 k_1， k_2 是正常数，证明下列函数是 C^n 上的范数。

1. $\max\left(\|x\|_a,\|x\|_b\right)$　　　　2. $k_1\|x\|_a+k_2\|x\|_b$

四、设 $A\in C^{n\times n}$，且对 $C^{n\times n}$ 的矩阵范数 $\|\mathbf{g}\|$，满足 $\|A\|<1$

证明：矩阵 $I-A$ 非奇异，且有 $\left\|\left(I-A\right)^{-1}\right\|\le\dfrac{\|I\|}{I-\|A\|}$ 。

五、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,求 e^A， $e^{tA}\left(t\in R\right)$， $\cos A$ 。

六、设 $f\left(z\right)=\ln z$，求 $f\left(A\right)$，这里 A 为：

1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$； 2. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

七、设 X 为 $n\times m$ 矩阵，若 A， B 依次是 $n\times n$ 和 $m\times n$ 的常数矩阵，则

1. $\dfrac{d}{dx}\left(tr\left(BX\right)\right)=\dfrac{d}{dx}\left(tr\left(X^TB^T\right)\right)=B^T$； 2. $\dfrac{d}{dx}\left(tr\left(X^TAX\right)\right)=\left(A+A^T\right)X$ 。

八、 $X=\left[1\ 2\ 2\right]^T$,分别用 G —矩阵和 H —矩阵方法求 T 。使得 $Tx=\left|x\right|e_1$ 。

九、证明 $\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}^+=\left[A^+\mathrm{M}O\right]$

十、证明 $rankA=rank\left(AA^T\right)=rank\left(A^TA\right)$,这里 $A\in R_r^{n\times n}$