행렬은 (행과 열이다)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2x2 행렬이다. 영어로는 투바이투

행렬의 차원은 중요하다 데이터과학때 차원을 잘못맞추어서 실수를한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 25 \end{bmatrix}$$

4x2 2x1 1x2 1x1

행렬의 스칼라곱

숫자 × 행렬 ×

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 4 \times 2$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 15 & 12 \\ 9 & 9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

실수배를 곱해준다라고 생각하면 편하다.

행렬의 덧셈과 뺄셈

차원 같아야

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2×1 2×1

2×1 1×2

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2B =$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B =$$

$$3A + B =$$

$$-A - B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

행렬의 곱

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$$

그렇다면 BA는?

행렬의 곱

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$AB =$

$BA =$

행렬의 차원 확인

$m * n$ 행렬과 n $* k$ 행렬의 곱은 $m * k$ 차원의 행렬이 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

1×2 2×2

1×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 * 1 + 2 * 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

행렬의 차원 확인

행렬의 곱 결과 차원, 혹은 계산될 수 없는 케이스

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

첨가 행렬 (Augmented matrix)

Pivot ➡ $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -8 \\ -4 \cdot 3 & 7 \cdot 3 & 14 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -8 \\ \underline{-4 \cdot 3 + 3} \cdot 4 & \underline{7 \cdot 3 - 4} \cdot 4 & 14 \cdot 3 - 8 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

첨가 행렬 (Augmented matrix)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -8 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Echelon form

$$3x_1 - 4x_2 = -8$$
$$5x_2 = 10$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$

차원(Rank)과 영공간 (Nullity)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Echelon form 변경

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2+2 & 0 & 6-6 \end{bmatrix}$$

rank(A)=1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

기저 (Basis) → 수, Rank(A)

영공간 (Nullity)

차원(Rank)과 영공간 (Nullity)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

기저 (Basis) → 수, Rank(A), 차원 (Dimension)

영공간 (Nullity)

$$\underset{1}{Rank(A)} + \underset{1}{Null(A)} = \underset{2}{Row(A)}$$

예제: Rank, Nullity, Basis

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis

$[8\ 0\ 4]$

$[0\ 2\ 0]$

$rank(A) = 2$

$nullity(A) = 2$

$row(A) = 4$

예제: 역행렬 구하기

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$D = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6$

$= 0$

A^{-1} X 존재 x

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$D = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot (-1)$

$= 6 - 5 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

예시

$A = [1 \quad 2]$

$B = [1 \quad 3]$

$A \cdot B^T = 1 + 6 = 7$

$1+2\cdot 3=7$

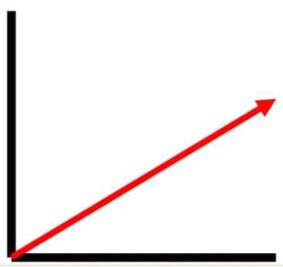
노움 (Norm, 크기)

$\vec{A} = [a \quad b]$

$\vec{B} = [3 \quad 1]$

$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$



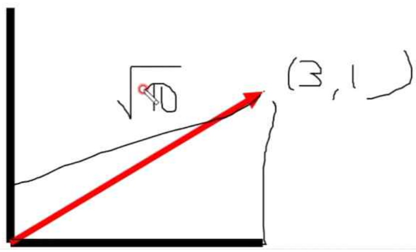
노움 (Norm, 크기)

$\vec{A} = [a \quad b]$

$\vec{B} = [3 \quad 1]$

$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$



예시 2

$A = [1 \quad -1]$

$B = [1 \quad 3]$

$A \cdot B^T = 1 \cdot 1 + 3(-1)$
$= 1 - 3 = -2$

$cos\theta = \frac{A \cdot B^T}{|A||B|} = \frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{10}}$
$= \frac{-2}{\sqrt{20}}$
$= \frac{-2}{2\sqrt{5}}$
$= -\frac{\sqrt{5}}{5}$

예제

$$-3X_1 + X_2 = \lambda X_1$$
$$2X_1 - 4X_2 = \lambda X_2$$

$$(-3-\lambda)X_1 + X_2 = 0$$
$$2X_1 + (-4-\lambda)X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

예제

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = (-3-\lambda)\,(-4-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4\lambda + 12 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$$\therefore \lambda = -2 \; or \; -5$$

예제

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

1) $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$-3X_1 + X_2 = -2X_1$$
$$2X_1 - 4X_2 = -2X_2$$

예제

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. 고윳값 계산

$$\boldsymbol{det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = 1 \ or \ 5$$

예제

2. 고유벡터 계산

$\boldsymbol{\lambda} = 1$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$
$$X_1 + 2X_2 = 0$$
$$X_1 = -2X_2$$
$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\lambda} = 5$

$$(\boldsymbol{A} - \mathbf{5}\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_1} \\ \boldsymbol{X_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$
$$X_1 - 2X_2 = 0$$
$$X_1 = 2X_2$$
$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

예제

3. 대각화 행렬 계산

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1}AP = \Lambda$$

$$P^{-1}AP = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

SVD 예시

$$A = U\Sigma V^T$$

특이값 Σ 구성

$$\lambda_1 = 24$$
$$\lambda_2 = 4$$

$$\text{특이값} = \sqrt{\text{고윳값}}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\lambda_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{24}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\mathbf{4}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

SVD 예시

$$A = U\Sigma V^T$$

$\boldsymbol{AA^T}$**의 고윳값** 구한 후, 정규화된 **고유벡터** $\boldsymbol{U}$ 도출

$$\lambda_1 = 28$$
$$\lambda_2 = 10$$
$$\lambda_3 = 2$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -0.743 \\ -0.607 \\ -0.283 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -0.283 \\ -0.770 \\ -0.570 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0.607 \\ -0.196 \\ -0.770 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.743 & -0.283 & 0.607 \\ -0.607 & -0.770 & -0.196 \\ -0.283 & -0.570 & -0.770 \end{pmatrix}$$

SVD의 기하학적 의미

$m \times n$ **행렬** A를 **3개**의 **행렬 곱**으로 분해하는 방법

$$A = U\Sigma V^T$$

V^T는 원래 데이터를 **직교 변환**하여 **새로운 좌표계** 만들기
Σ는 새로운 좌표계에서 데이터 **스케일링** (중요도)
U는 스케일링 데이터를 **최종적으로 회전**, **결과 데이터** 얻음