上机题 1.1 五点差分

黄金

2019 年 9 月 20 日

1 问题描述

用差分法求解边值问题

$$-\Delta u = cos3xsin\pi y, \qquad (x,y) \in G = (0,\pi) \times (0,1) \tag{1}$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi \tag{2}$$

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, \qquad 0 \le y \le 1 \tag{3}$$

其中精确解为:

$$u = (9+\pi^2)^{-1} cos3xsin\pi y \tag{4}$$

(1) 依次取 N = 4,8,16,32, 取 6 位小数计算, 以步长 $h1 = \dfrac{\pi}{N}$ 和 $h2 = \dfrac{1}{N}$ 作矩形剖分, 就 $(x_i, y_i) = (\dfrac{i\pi}{4}, \dfrac{j}{4}), i,j = 1,2,3$ 处列出差分解与精确解

(2) 计算出差分法的误差阶

2 计算方法及其格式的构造

2.1 五点差分法

2.1.1 网格剖分

取步长 $h_1 = \dfrac{\pi}{N}$,$h_2 = \dfrac{1}{N}$

分别对变量 x 所属的区间 $[0,\pi]$ 和变量 y 所属的区间 $[0,1]$ 做如下均匀剖分:

$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi$, $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = 1$

其中 $x_i = ih_1$,$y_j = jh_2$ 以下记 $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$

用两族平行直线 $x = x_i(0, 1, \cdots, N)$ 和 $y = y_j(j = 0, 1, \cdots, N)$ 将矩形区域 $\bar{G}$ 分割成矩形网格，网格节点集合为

$$\bar{G}_h = G_h \cup \Gamma = (x_i, y_j) : 0 \leq i \leq N; 0 \leq j \leq N \tag{5}$$

其中

$$G_h = (x_i, y_j) : 0 < i < N; 0 < j < N \tag{6}$$

为网格内节点集合.

$$\Gamma_h = \{(x_i, y_j) : i = 0, N; j = 0, \cdots, N\} \cup \{(x_i, y_j) : j = 0, N; i = 1, \cdots, N-1\} \tag{7}$$

2.1.2 导数的差分离散

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \tag{9}$$

代入 (1) 中得 $(x_i, y_j) \in G_h$ 处的差分格式：

$$(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2})u_{i,j} - \frac{1}{h_1^2}u_{i+1,j} - \frac{1}{h_1^2}u_{i-1,j} - \frac{1}{h_2^2}u_{i,j+1} - \frac{1}{h_2^2}u_{i,j-1} = cos3x_i sin\pi y_j \tag{10}$$

3 边界条件的处理

由（2）可知：$u_{i,0} = u_{i,N} = 0, 0 \leq i \leq N$

对 $u_x(x_0, y) = 0$ 利用向前差分格式得，$u_{0,j} = u_{1,j}, j = 1, 2, \cdots, N-1$

同理，得到：$u_{N,j} = u_{N-1,j}, j = 1, 2, \cdots, N-1$

将条件代入 $(N-1)^2$ 个内点满足的方程组中，得到一个 $(N-1)^2$ 阶方程组.

4 系数矩阵

定义向量 u_j:

$$u_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \cdots, u_{N-1,j}), 0 \le j \le N \tag{11}$$

整理得:

$$Au_{j-1} + Bu_j + Au_{j+1} = f_j, 1 \le j \le N \tag{12}$$

其中,

$$\text{A}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2^2} & & & \\ & -\frac{1}{h_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h_2^2} \end{pmatrix} \text{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} & -\frac{1}{h_1^2} & & & \\ -\frac{1}{h_1^2} & 2(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}) & -\frac{1}{h_1^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{h_1^2} & 2(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}) & -\frac{1}{h_1^2} \\ & & & -\frac{1}{h_1^2} & \frac{1}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2} \end{pmatrix}$$

$$f_j = \begin{pmatrix} f(x_1, y_j) \\ f(x_2, y_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}, y_j) \end{pmatrix}$$

从而得到:

$$\begin{pmatrix} B & A & & & \\ A & B & A & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A & B & A \\ & & & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

5 计算结果

差分解：

N=4：

(i,j)	j=1	j=2	j=3
i=1	-0.045481	-0.064319	-0.045481
i=2	-0.000000	-0.000000	-0.000000
i=3	0.045481	0.045481	0.045481

N=8：

(i,j)	j=1	j=2	j=3
i=1	-0.031658	-0.044771	-0.031658
i=2	-0.000000	-0.000000	-0.000000
i=3	0.031658	0.044771	0.031658

N=16：

(i,j)	j=1	j=2	j=3
i=1	-0.028146	-0.039805	-0.028146
i=2	-0.000000	-0.000000	-0.000000
i=3	0.028146	0.039805	0.028146

N=32：

(i,j)	j=1	j=2	j=3
i=1	-0.027121	-0.038356	-0.027121
i=2	-0.000000	-0.000000	-0.000000
i=3	0.027121	0.038356	0.027121

精确解：

(i,j)	j=1	j=2	j=3
i=1	-0.026498	-0.037473	-0.026498
i=2	-0.000000	-0.000000	-0.000000
i=3	0.026498	0.037473	0.026498

6 误差阶

N	4	8	16	32
误差阶	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}