Quantum Information & Computation
Summary note

문진혁

January 11, 2026

Contents

Overview

해당 문서는 Quantum Information & Computation 을 공부하기 위해서 만들어 졌으며, 기본적인 순서는 IBM Quantum Information & Computation Course 를 따라갈 것이다.

해당 코스는 `https://quantum.cloud.ibm.com/learning/en/courses` 이며 해당 노트도 코스에 맞춰서 작성할 예정이다.

추가적인 내용과 미흡한 개념 같은 경우에는 추가로 양자계산과 양자정보(Nielsen Michael , Chuang, Isaac L.) 라는 책의 내용을 인용할 것이다.

Course 1. Basic of Quantum Information

Classical information

probability vector

- All entries are non negative real numbers (모든 entry는 음수가 아니어야 한다)
- The sum of the entries is 1. (모든 entry의 합은 항상 1이다)

Dirac notation

Σ를 classical state set이라고 한다면, 각 원소들의 위치에 대해서 다음 처럼 대응 시킬 수 있다.

$|a\rangle$ 은 column vector 이며, Σ에서 a 와 상응되는 벡터이다.

예시를 들면 $\{0, 1\}$ 에서, $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 라고 표현할수 있다.

그리고 위에서 예시로 든 vector를 standard basis vector라고 한다. 그리고 모든 vector들은 이 standard basis vector의 Linear combination으로 나타낼 수 있다.

추후에도 나오겠지만 해당 Dirac notation은 inner product와 outer product에 대해서도 비교적 간단하게 나타낼 수 있고, 각각이 의미하는 바에 대해서는 나중에 설명하게 된다. 간단하게 정리하면 outer product 형태는 해당 quantum Information에서 Operator와 같은 의미를 가진다.

Measure

어떤 확률 상태에서 system X를 측정한다면 어떻게 될지를 알아본다. classical state 에서는 여러 상태중에 하나가 측정되게 될것이다.

간단하게 생각해보면 주사위의 각 면이 나올 확률은 모두 1/6이 된다.

$$\frac{1}{6}|1\rangle + \frac{1}{6}|2\rangle + \frac{1}{6}|3\rangle + \frac{1}{6}|4\rangle + \frac{1}{6}|5\rangle + \frac{1}{6}|6\rangle$$

다음은 이 주사위의 각 면이 나올 확률을 probability vector로 나타낸 것이다. 보면 알겠지만 각 vector의 entry는 해당 상태가 나올 확률임을 알 수 있다.

Probabilistic operations

Probabilistic operation은 classical operator로, 다음과 같은 성질을 띄게 된다.

- All entries are nonnegative real numbers
- The entries in every column sum to 1 (각각의 column에서의 entry의 합은 1이다)
- 다음과 같은 형태가 예시이다. $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

위에서 나온 operation은 stochastic matrix 라고도 불리며, 각 column의 row는 출력 확률을 나타낸다. 즉, 위의 예시는 다음 의미를 가진다. 현재 상태가 0인 경우에, 그대로이며, 만약 상태가 1이라면, 0.5의 확률로 bit flip이 일어난다는 뜻이다.

Composing operations

composing operation이란 여러개의 operations을 하나의 연산으로 묶는 것을 의미하며, 각 연산들은 matrix product로 이루어진다. 이때 먼저 한 연산이 나중 연산보다 오른쪽에 존재한다.

Classical Operation에서는 stochastic matrix 의 matrix product로 이루어지게 된다. 이때, product의 순서에 따라 결과값이 달라지게 되고, 이를 Not Commutative 하다고 한다.

Quantum information

지금까지 Classical Information을 알아봤다면 이제 Quantum State로 넘어가게 된다.

Quantum State도 Classical Information처럼 해당 System도 Column Vector 로 표현이 가능하고 다음과 같은 성질을 띄게 된다.

- The entries are complex numbers (각 Entry는 복소수이다)
- The sum of the absolute values squared of the entries must equal 1 (각 Entry의 절댓값의 제곱의 합은 항상 1이다)

고전 상태에서는 그냥 entry의 합이 1이였지만, 양자 상태에서는 절댓값의 제곱의 합이 1임이 다르기에 계산에 주의하여야 한다.

그리고 complex number로 구성된 vector의 Euclidean norm 표기 방법은 각 원소의 절댓값 제곱의 합에 루트를 씌운 형태이다. 이는 이후에 unit vector를 정의할때 꼭 필요하다.

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

dagger 고전 상태에서의 vector는 모두 real number entry이다. 하지만, 양자 상태에서의 vector는 complex number entry이므로, 만약 column vector를 row vector로 바꿀려면 transpose를 한 후에 켤레를 취해야한다. 이 일련의 과정을 †를 통해서 나타낸다.

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$$

Measuring quantum states

양자상태에서 측정을 하게 되면 고전 상태로 출력이 되게 된다. (양자역학에서 배우는 관측을 하면 값이 정해진다와 같은 맥락이다) 그리고 그 확률은 절댓값의 제곱과 같다.

이때 중요한 점은 복소수에서 절댓값의 제곱을 계산할때, 계산법을 혼동하면 안된다는 점이다. (이 점은 수학서적의 복소수 파트를 확인한다)

그리고 앞으로 이 요약노트에서는 $|0\rangle$을 측정하면 0이 나오고, $|1\rangle$을 측정하면 1이 나온다고 할것이다.

Unitary operations

이제부터 고전 상태와 양자상태의 큰 특징이 드러나는 operation들이 나오기 시작한다. 그중 가장 중요한 operation은 unitary operation 으로 다음과 같은 특징을 가진다.

- $U^\dagger U = \mathbf{I}, UU^\dagger$

하나 알수 있는건 unitary operation은 어떤 단위원 위에서 vector를 이동 시킨다. 이 말은 즉, $\|U\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ 임을 알 수 있다.

아까 위에서 나온 unitary의 특징을 보면 결국 U의 inverse matrix가 $U^\dagger$임을 알 수 있다. 즉 어떤 양자상태의 vector에 대해서 unitary operation을 취한 뒤에 다시 원래 상태로 즉 inverse matrix를 적용시킬 수 있다는 것을 알 수 있다.

Qubit unitary operations 이제 양자 상태에서 사용되는 기본적인 unitary operation을 설명한다.

- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 은 bit flip gate로 $|0\rangle \to |1\rangle$ 같이 bit를 뒤집는다. (NOT GATE와 동일)
- $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 은 bit를 뒤집지는 않지만 phase를 바꾸는 operation이다.
- $\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 은 phase flip gate로 $|1\rangle \to -|1\rangle$ 와 같이 1인 경우의 phase를 뒤집는다.
- $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 은 basis를 변환시키는 gate로 $|0\rangle \to \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$ 처럼 작동한다. 이는 0과 1이 나올 확률을 절반으로 바꾸거나, 그 반대에서 사용하기도 하며, 나중에 bell state를 만들 때에도 사용한다.
- $P_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ 는 phase operation으로, θ 만큼 phase를 rotate 시킨다. 이때, 파생적으로 S 는 $\theta = \pi/2$ 일때이고, T 는 $\theta = \pi/4$ 일때이다.