행렬과 행렬식

1. 행렬의 정의와 기본 연산
2. 특수한 정방행렬
3. 행렬식의 정의와 성질
4. 행렬식의 LAPLACE 전개
5. 역행렬의 정의와 성질
6. 역행렬의 계산법

9.1 행렬의 정의와 기본 연산

- ## 행렬의 정의

행렬이란 수 또는 함수들을 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 놓은 것이며, 행렬을 구성하는 수 또는 함수를 행렬의 요소(Element)라고 한다.

$$A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow 1\text{행} \\ \longleftarrow 2\text{행} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1\ \text{열} & 2\ \text{열}\end{array} & \end{array}$$

- 행렬의 크기 : 행의 개수와 열의 개수로 행렬의 크기를 표시하며, mxn의 형태로 표현한다.
- 정방행렬(Square Matrix) : 행과 열의 개수가 같은 정사각형 형태의 행렬

- $m \times n$ 행렬 A의 표현
  - $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ $\quad i=1,2, \ldots, m \quad j=1,2, \ldots, n$
  - $\boldsymbol{A} \in R^{m \times n} \triangleq$ 행렬의 요소가 실수 $\boldsymbol{R}$인 모든 $m \times n$ 행렬들의 집합
  - a_{ij} : 행렬 A의 (i, j) - 요소

- 행 벡터와 열 벡터

정의 9.1 행 벡터와 열 벡터

행 벡터 $\boldsymbol{a}$는 행이 하나인 특수한 $1 \times n$ 행렬로 정의하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{a}=(a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n) \quad \text{또는} \quad \boldsymbol{a}=(a_j) \quad j=1, 2, \cdots, n$$

열 벡터 $\boldsymbol{b}$는 열이 하나인 특수한 $n \times 1$ 행렬로 정의하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad \boldsymbol{b}=(b_j) \quad j=1, 2, \cdots, n$$

- 주대각요소(Main Diagonal)

  $m \times n$ 정방행렬 $\boldsymbol{A}$에서 대각선에 위치한 요소 $a_{ii}(i=1,2, \ldots , m)$를 주대각요소라고 정의한다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A}\text{의 주대각요소 -3, 4}$$

- $R^{m \times n}$은 $m \times n$ 행렬들을 모두 모아 놓은 집합이므로 $m \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$는 집합에서의 원소 개념으로 표시할 수 있다.

  - $\boldsymbol{A} \in R^{m \times n}$

- $\rightarrow R^{m \times n}$에서 $\boldsymbol{R}$은 행렬의 요소가 실수 $\boldsymbol{R}$로 구성되었다는 의미이다.

2) 행렬의 상등

동일한 크기를 가지는 두 행렬 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$와 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$가 모든 i와 j에 대하여 $a_{ij}=b_{ij}$가 성립하는 경우 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$는 상등이라고 정의한다.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

→행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$의 대응되는 요소가 서로 같은 경우 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$라고 정의한다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \Longleftrightarrow a_{11}=b_{11},\ a_{12}=b_{12},\ a_{21}=b_{21},\ a_{22}=b_{22}$$

행렬의 상등은 두 행렬의 크기가 같다는 것을 기본 전제로 하여
정의할 수 있는 개념이라는 사실에 유의하라.

예제 9.1

다음의 각 행렬이 상등이 되도록 x와 y 값을 결정하라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 3x-2 & -3 \end{pmatrix}$$

풀이

행렬의 상등 정의에 의해 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$의 각 요소가 같아야 하므로 다음의 관계가 성립해야 한다.

$$x=y-2, \quad y=3x-2$$

따라서 위의 연립방정식을 풀면 $x=2$, $y=4$이다.

3) 행렬의 기본 연산

벡터의 덧셈과 스칼라 곱과 유사하게 행렬의 덧셈과 행렬의 스칼라 곱을 정의할 수 있다.

① 행렬의 덧셈

크기가 같은 두 행렬 $\boldsymbol{A} \in R^{m \times n}$, $\boldsymbol{B} \in R^{m \times n}$에 대해 대응되는 요소들의 합으로 정의한다.

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}),\ \boldsymbol{B} = (b_{ij})$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \triangleq (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

② 행렬의 스칼라 곱

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$$

$$k\boldsymbol{A} \triangleq (ka_{ij}), \ k\text{는 스칼라}$$

$$3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3\times1 & 3\times2 \\ 3\times3 & 3\times4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2\times1 & -2\times1 \\ -2\times2 & -2\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- 행렬의 덧셈과 스칼라 곱을 정의하게 되면 행렬의 뺄셈 $A-B$는 자연스럽게 정의될 수 있다.

  - $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} \triangleq \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}), \ -\boldsymbol{B}=(-\boldsymbol{1})\boldsymbol{B}$

- 행렬의 덧셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립되고 덧셈과 스칼라 곱에 대한 배분법칙이 성립된다.

정리 9.1 행렬의 덧셈과 스칼라 곱에 대한 기본 성질

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (덧셈의 교환법칙)

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ (덧셈의 결합법칙)

(3) $(k_1 k_2)\boldsymbol{A}=k_1(k_2\boldsymbol{A})$

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

(5) $k_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k_1\boldsymbol{A}+k_1\boldsymbol{B}$ (배분법칙)

(6) $(k_1+k_2)\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}$ (배분법칙)

③ 행렬의 곱셉 : A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같아야만 곱이 정의된다.

$$\boldsymbol{A}\in R^{m \times p},\ \boldsymbol{B}\in R^{p \times n}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB} \in R^{m \times n}$$

$$\begin{array}{cccc} & & j\text{번째 열} & (i,\ j)-\text{요소} \\ i\text{번째 행} & \underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} & \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} = & \underbrace{\begin{pmatrix} \\ c_{ij} \\ \\ \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \end{array}$$

$$c_{ij} \triangleq a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

- → 두 행렬의 곱 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$는 $\boldsymbol{A}$의 i번째 행과 $\boldsymbol{B}$의 j번째 열에 대응되는 요소들의
  곱을 합하여 행렬 $\boldsymbol{C}$의 (i, j)의 요소 c_{ij}를 결정한다.

- 행렬의 곱셈에 대해서는 일반적으로 교환법칙이 성립되지 않으며 심지어는 곱셈 자체가 정의되지 않을 수도 있다.

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot6 & 1\cdot5+2\cdot(-2)\\ 3\cdot(-1)+4\cdot6 & 3\cdot5+4\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 1\\ 21 & 7\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot1+5\cdot3 & (-1)\cdot2+5\cdot4\\ 6\cdot1+(-2)\cdot3 & 6\cdot2+(-2)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 18\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

- 행렬의 곱셈에 대해서는 결합법칙과 배분법칙이 성립한다.

$$A(BC)=(AB)C$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

- 행렬의 거듭제곱

$$A\in R^{n\times n}$$

$$A^n \triangleq \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n\text{개}} \qquad (n\text{은 양의 정수})$$

예제 9.2

행렬 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) $\boldsymbol{AB}$와 $\boldsymbol{BA}$를 계산하라.

(2) $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BB}$라 정의할 때 다음 행렬을 계산하라.

$$\boldsymbol{B}^2-5\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{I}$$

(3) 문제(2)의 결과를 이용하여 $\boldsymbol{B}^5$을 계산하라.

풀이

(1) $AB=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -14 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $B^2-5B+4I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$

(3) $B^2-5B+4I=O$ 에서 $B^2=5B-4I$ 이므로 이를 이용하여 B^4 를 계산해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B^4&=25B^2-40B+16I \\ &=25(5B-4I)-40B+16I \\ &=125B-100I-40B+16I=85B-84I \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} B^5&=B\cdot B^4=B(85B-84I)=85B^2-84BI \\ &=85(5B-4I)-84B=425B-340I-84B \end{aligned}$$

$\therefore\ B^5=341B-340I$

$$=341\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-340\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1023 & 1024 \end{pmatrix}$$

4) 단위행렬과 행렬다항식

단위행렬 : 주대각요소만이 1이고 나머지 요소의 값이 0인 정방행렬

$$I_n \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- 단위행렬은 실수의 집합에서 실수 1과 같은 역할을 한다고 이해하는 것이 좋다. 어떤 정방행렬 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$와 단위행렬 $\boldsymbol{I_n}$과의 곱은 언제나 $\boldsymbol{A}$와 같다.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

- 행렬다항식(Matrix Polynomial)

n차 다항식 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x^0$

x 대신에 정방행렬 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$를 대입하면

$$p(\boldsymbol{A}) \triangleq a_n\boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{A}^0 \qquad \boldsymbol{A}^0 \triangleq \boldsymbol{I}_n$$

$$\therefore\ p(\boldsymbol{A}) = a_n\boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}_n$$

예제 9.3

행렬 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$에 대해 행렬다항식 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$를 계산하라.

또한 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n$을 구하라.

풀이

$\boldsymbol{A}$의 거듭제곱에 대한 규칙을 발견하기 위하여 $\boldsymbol{A}^2$과 $\boldsymbol{A}^3$을 계산해보자.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^2 & 0\\0 & 3^2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^3 & 0\\0 & 3^3\end{pmatrix}$$

따라서 $\boldsymbol{A}$의 거듭제곱 $\boldsymbol{A}^n$은 일반적으로 다음과 같다.

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}&=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3^4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3^2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7 & 0\\0 & 109\end{pmatrix}\end{aligned}$$

풀이

또한 A^n 으로부터 $A+A^2+\cdots+A^n$ 을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
A+A^2+A^3+\cdots+A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 3+3^2+3^3+\cdots+3^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{3(3^n-1)}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 등비급수의 합

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

$$rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

$$(1-r)S_n=a-ar^n$$

$$\therefore\ S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

예제 9.4

다음의 행렬 $\boldsymbol{A}$에 대하여 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$이 됨을 보여라. 단, $\boldsymbol{O}$는 영행렬이다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

풀이

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$$

이 된다.

9.4 이중적분의 정의와 기본 성질

- **전치행렬(Transpose Matrix)**

  주어진 행렬 $A \in R^{m \times n}$에서 행과 열을 바꾼 행렬로 A^T로 표기한다.

$$A = (a_{ij}) \in R^{m \times n} \quad i = 1, 2, \cdots, m, \ j = 1, 2, \cdots, n$$
$$A^T = (a_{ji}) \in R^{n \times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = (1 \ 2 \ 8), \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- 1 x 1 행렬은 행렬의 요소가 하나인 행렬이므로 A가 1 x 1 행렬인 경우 다음과 같이 표현한다.

$$A = (a_{11}) \quad 또는 \quad A = a_{11}$$

$$\longrightarrow \quad A^T = A$$

예제 9.5

$A,\ B \in R^{m\times n}$ 이고 k가 스칼라일 때 전치행렬에 대한 다음의 성질이 만족됨을 보여라.

(1) $(A^T)^T = A$ (전치의 전치)

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (합의 전치)

(3) $(AB)^T = B^T A^T$ (곱의 전치)

(4) $(kA)^T = kA^T$ (스칼라 곱의 전치)

풀이

(1) 전치행렬 A^T를 또다시 전치를 하면 원래의 행렬이 되는 것은 전치행렬의 정의로부터 명백하다.

(2) 행렬 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$라고 가정하면 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$가 되므로 $(A+B)^T$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(A+B)^T = (a_{ji}+b_{ji}) = A^T + B^T$$

결국, 두 행렬의 합의 전치는 각 행렬을 전치시킨 후 합한 것과 동일하다.

풀이

(3) $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times p}$, $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{p\times n}$ 이라 가정하면 $(\boldsymbol{AB})^T\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 이고 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 이 되므로 양변의 행렬의 크기는 같다. 이제 남은 일은 좌변 $(\boldsymbol{AB})^T$ 와 우변 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ 의 $(i,\ j)-$ 요소가 같다는 것을 보이는 것이다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \text{의 } (i,\ j)-\text{요소} &= \sum_{k=1}^{p}\{\boldsymbol{B}^T \text{의 } (i,\ k)-\text{요소}\}\{\boldsymbol{A}^T \text{의 } (k,\ j)-\text{요소}\}\\ &= \sum_{k=1}^{p} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki} = \boldsymbol{AB}\text{의 } (j,\ i)-\text{요소}\\ &= (\boldsymbol{AB})^T \text{의 } (i,\ j)-\text{요소}\end{aligned}$$

따라서 $(\boldsymbol{AB})^T$ 와 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ 의 크기가 같고, 두 행렬의 $(i,\ j)-$ 요소가 서로 같으므로 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ 가 성립한다.

(4) $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$ 이므로 $(k\boldsymbol{A})^T=(ka_{ji})=k\boldsymbol{A}^T$ 가 성립함이 명백하다.

예제 9.6

다음 행렬 $\boldsymbol{A}$에 대하여 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$를 각각 구하라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

풀이

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=(\,1\;\;2\;\;-3\,)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}=1+4+9=14$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}(\,1\;\;2\;\;-3\,)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

2) 대칭행렬과 교대행렬

① 대칭행렬(Symmetric Matrix)

n차 정방행렬 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$에 대하여 전치한 행렬 $\boldsymbol{A}^T$와 그 자신이 서로 같아지는 행렬을 대칭행렬이라 정의한다.

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \iff \underbrace{a_{ij} = a_{ji}}_{\text{주대각요소를 기준으로 설정}} \; (1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \boxed{3} \\ -2 & \boxed{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$

$a_{12} = -a_{21},\; a_{13} = -a_{31},\; a_{32} = -a_{23}$

② 교대행렬(Skew-Symmetric Matrix)

n차 정방행렬 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$에 대하여 전치한 행렬 $\boldsymbol{A}^T$와 $-\boldsymbol{A}$가 서로 같아지는 행렬을 대칭행렬이라 정의한다.

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = -\boldsymbol{A} \iff a_{ji} = -a_{ij} \ (1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$$

- $a_{ji} = -a_{ij}$에서 $i = j$이면 $a_{ii} = -a_{ii}$가 성립해야 하므로 a_{ii}=0 이다. $i \neq j$이면 주대각요소를 기준으로 양쪽이 음의 부호만 차이가 난다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \boxed{3} \\ -2 & \boxed{-3} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{12} = -a_{21}, \ a_{13} = -a_{31}, \ a_{32} = -a_{23} \end{array}$$

예제 9.7

다음 두 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 대칭행렬일 때 상수 a, b, c를 각각 구하라.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & 5 & b \\ c & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2a \\ b & c & -3 \\ a-1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

풀이

(1) $\boldsymbol{A}$를 전치하면

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 & c \\ a & 5 & 1 \\ 2 & b & 3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & 5 & b \\ c & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore\ a=4,\ b=1,\ c=2$

(2) $\boldsymbol{B}$를 전치하면

$$\boldsymbol{B}^T=\begin{pmatrix} 7 & b & a-1 \\ -4 & c & -3 \\ 2a & -3 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2a \\ b & c & -3 \\ a-1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$2a=a-1 \quad \therefore\ a=-1,\ b=-4$

$c=c$이므로 c는 임의의 실수이다.

예제 9.8

$\boldsymbol{A}$가 n차 정방행렬이라고 할 때 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$와 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$는 대칭행렬임을 증명하라.

풀이

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^T = (\boldsymbol{A}^T)^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$$

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$$

가 되므로 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$와 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$는 각각 대칭행렬이다.

③ 행렬의 분해

임의의 행렬 $A \in R^{n \times n}$에 대하여 다음과 같이 대칭행렬과 교대행렬의 합으로 임의의 행렬을 분해할 수 있다.

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\triangleq S_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\triangleq S_2}$$

$$S_1^T = \left\{\frac{1}{2}(A + A^T)\right\}^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T$$

$$= \frac{1}{2}(A^T + A) = S_1 \longrightarrow \text{대칭행렬}$$

$$S_2^T = \left\{\frac{1}{2}(A - A^T)\right\}^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A)$$

$$= -\frac{1}{2}(A - A^T) = -S_2 \longrightarrow \text{교대행렬}$$

예제 9.9

다음의 3차 정방행렬 $\boldsymbol{A}$를 대칭행렬 $\boldsymbol{S}_1$과 교대행렬 $\boldsymbol{S}_2$의 합으로 분해할 때 $\boldsymbol{S}_1$과 $\boldsymbol{S}_2$를 각각 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

풀이

식(28)로부터 $\boldsymbol{S}_1$과 $\boldsymbol{S}_2$는 다음과 같이 계산된다.

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & -1 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

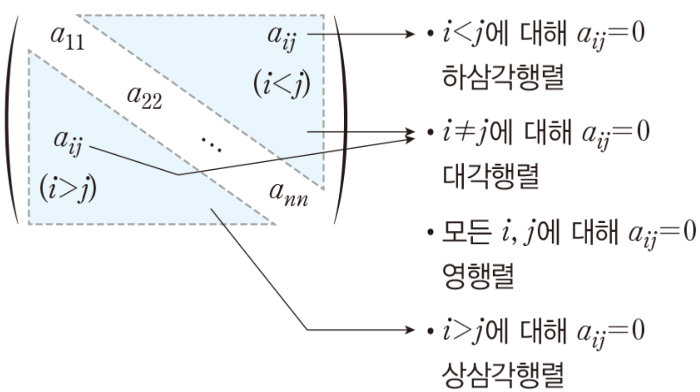
$$\boldsymbol{S}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3) 삼각행렬

- 주대각선 아래의 모든 요소가 0이거나 주대각선 위의 모든 원소가 0이 되는 정방행렬을 삼각행렬(Triangular Matrix)이라 한다.
  - 상삼각행렬 : 주대각선 아래에 있는 요소가 모두 0인 행렬
  - 하삼각행렬 : 주대각선 위에 있는 모든 요소가 0인 행렬

- 주대각선 요소를 제외한 나머지 요소가 모두 0인 행렬을 대각행렬(Diagonal Matrix)이라 하며, 주대각선 요소까지도 모두 0인 행렬을 영행렬(Zero Matrix)이라 한다.



[그림 9.1] 삼각행렬의 분류

예를 들어, 다음에서 행렬 $\boldsymbol{A}$는 상삼각행렬, 행렬 $\boldsymbol{B}$는 하삼각행렬, 행렬 $\boldsymbol{C}$는 대각행렬, 행렬 $\boldsymbol{D}$는 영행렬이다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 대각행렬에서 대각합(Trace)

정방행렬 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$에 대하여 주대각선 요소들을 모두 합한 것을 $\boldsymbol{A}$의 대각합(Trace)이라고 정의하며 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$로 표기한다. 즉,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \triangleq a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

$\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 $n\times n$ 정방행렬일 때 다음의 관계가 성립한다.

① $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^T)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

② $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

③ $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\pm\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

④ $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

예제 9.10

상삼각행렬 $\boldsymbol{A}$가 다음과 같을 때 $\boldsymbol{A}^T$는 하삼각행렬이 됨을 보여라.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

풀이

$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$이므로 $\boldsymbol{A}^T$는 주대각선 위에 있는 요소들이 모두 0이므로 정의에 의해 하삼각행렬이다.

9.3 행렬식의 정의와 성질

- **행렬식의 정의**

  행렬식은 정방행렬에 대해서만 정의할 수 있으며, 행렬 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$에 대한 행렬식(Determinant)은 det($\boldsymbol{A}$) 또는 $|\boldsymbol{A}|$로 표기한다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

① 1차 행렬식

$$\boldsymbol{A} = (a) \in R^{1 \times 1} \longrightarrow \det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = a$$

$$\boldsymbol{A} = (-3) \in R^{1 \times 1} \longrightarrow \det(\boldsymbol{A}) = |-3| = -3$$

1차 행렬식에서 |·| 기호는 실수에서 절댓값의 의미와는 전혀 다르다는 것에 주의하라.

② 2차 행렬식

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2\times 2}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

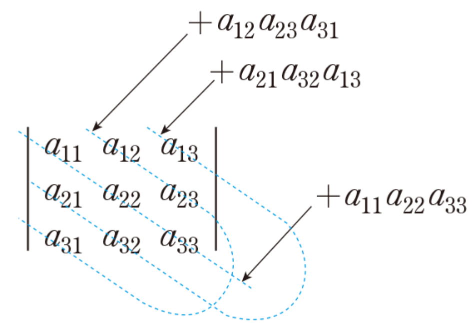
③ 3차 행렬식

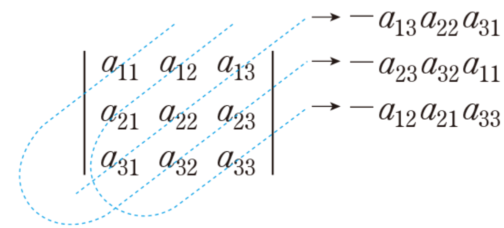
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3\times 3}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$





3차 행렬식의 값은 대각선 요소들의 곱의 합의 형태로 표현되므로 기억하기가 쉽다.

예제 9.11

다음 행렬식을 계산하라.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

풀이

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)-4\times3=-14$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+3+0-0-(-2)-0=8$

예제 9.12

다음 행렬식의 값이 1이 되도록 상수 a의 값을 구하라.

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1$$

풀이

먼저 행렬식을 계산하면

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)a+1-(a-1)=a^2-2a+2$$

이므로 주어진 조건으로부터 다음 관계가 얻어진다.

$$a^2-2a+2=1$$
$$a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$$
$$\therefore\ a=1$$

2) 행렬식의 성질

행렬식에 대한 여러 가지 성질을 적절히 활용하면 쉽게 행렬식의 값을 계산할 수 있다.

정리 9.3 행렬식의 성질 ①

$n \times n$ 정방행렬 $\boldsymbol{A}$에서 임의의 두 행(또는 열)이 같으면

$$\det(\boldsymbol{A})=0$$

이 된다.

$$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=12-4+9-9+4-12=0$$

정리 9.4 행렬식의 성질 ②

$n \times n$ 정방행렬 $\boldsymbol{A}$에서 임의의 두 행(또는 열)을 서로 바꾸면, 행렬식 값은 같고 부호만 반대이다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A})=-3+4-2=-1$$

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{A}})=-4+2+3=1$$

정리 9.5 행렬식의 성질 ③

$n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$와 전치행렬 $\boldsymbol{A}^T$의 행렬식 값은 서로 같다.

$$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}^T)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A})=-3+4-2=-1$$

$$\det(\boldsymbol{A}^T)=-3+4-2=-1$$

정리 9.6 행렬식의 성질 ④

$A,\ B \in R^{n\times n}$ 이면 다음의 관계가 성립한다.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = 6+2 = 8$$

$$\det(A) = 2-6 = -4, \quad \det(B) = -2$$

정리 9.7 행렬식의 성질 ⑤

행렬식의 한 행(또는 열)에 0이 아닌 스칼라 k를 곱하면, 행렬식 값은 원래 행렬식 값의 k 배가 된다.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4\times 2 & 3\times 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 8+3 = 11$$

$$\det(\widetilde{A}) = 16+6 = 22$$

정리 9.8 행렬식의 성질 ⑥

$n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 한 행(또는 열)에 있는 모든 요소가 0이면 $\det(\boldsymbol{A})=0$ 이다.

$$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

정리 9.9 행렬식의 성질 ⑦

$n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$가 삼각행렬이면 $\boldsymbol{A}$의 행렬식 $\det(\boldsymbol{A})$는 다음과 같이 주대각요소들의 곱이 된다.

$$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \det(\boldsymbol{A})=8 = 1 \text{ x } 4 \text{ x } 2$$

정리 9.10 행렬식의 성질 ⑧

행렬식의 한 행(또는 열)에 0이 아닌 스칼라 k를 곱하여 다른 행(또는 열)에 더하여도 행렬식의 값은 변하지 않는다.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{행} \times 3+2\text{ 행}} \widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=3-2-12-4=-15$$

$$\det(\widetilde{A})=-14+24+3-28=-15$$

정리 9.10의 행렬식의 성질은 행렬식의 값을 계산하는 데 매우 유용한 성질이므로 반드시 기억해야 한다.

예제 9.13

행렬 $\boldsymbol{A}$의 행렬식 값이 다음과 같다고 가정한다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

이를 이용하여 다음 행렬식을 계산하라.

(1) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix}$

풀이

(1) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\right) = 5$

(2) [정리 9.10]으로부터 1행에 스칼라 (−1)을 곱하여 3행에 더하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix}$$

또한, 위의 행렬식에서 1행에 스칼라 2를 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix} = 2\times5=10$$

9.4* 행렬식의 LAPLACE 전개

행렬식을 계산할 때 3 x 3 행렬의 행렬식은 공식이 있어서 대입하여 행렬식을 계산할 수 있으나 4차 이상의 행렬식에는 적용할 수가 없다.

→ 여인수(Cofactor) 전개에 의한 행렬식을 계산하는 방법을 학습한다.

- **소행렬식과 여인수**

① 소행렬식 M_{ij}

주어진 행렬식에서 i번째 행과 j번째 열을 제외한 나머지 요소들로 구성된 한 차수가 낮은 행렬식을 의미한다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

② 여인수 C_{ij}

소행렬식 M_{ij}에 i와 j의 합에 따라 부호를 붙인 행렬식을 의미한다.

$$C_{ij} \triangleq (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\begin{aligned} &C_{11} = M_{11},\ C_{12} = -M_{12},\ C_{13} = M_{13} \\ &C_{21} = -M_{21},\ C_{22} = M_{22},\ C_{23} = -M_{23} \\ &C_{31} = M_{31},\ C_{32} = -M_{32},\ C_{33} = M_{33} \end{aligned}$$

2) 행렬식의 Laplace 전개

행렬 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$의 행렬식 det($\boldsymbol{A}$)는 임의의 한 행을 선택하여 여인수 전개를 통해 행렬식을 계산할 수 있다.

- i번째 행의 선택

$$\begin{aligned} &\det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \\ &\text{단, } C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \end{aligned}$$

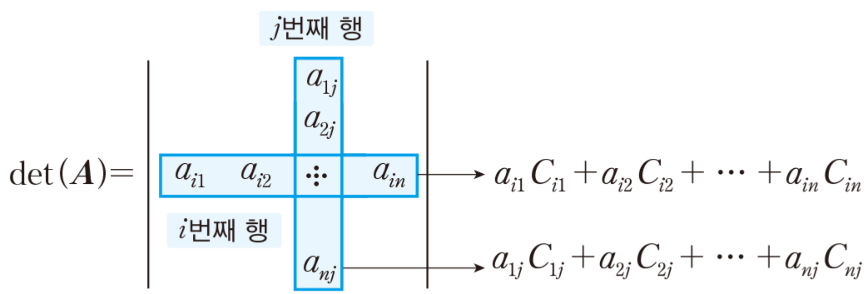
→ i번째 행이 아닌 다른 행을 선택하여도 행렬식의 값은 동일하다는 사실에 주목하자.

- *j*번째 열의 선택

  Laplace 전개를 할 때 임의의 한 행 대신에 임의의 한 열을 선택하여 여인수로 전개하여도 결과는 동일하다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

$$\text{단, } C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$



[그림 9.2] 행렬식의 Laplace 전개

- Laplace 전개에 의하여 행렬식을 계산할 때는 요소 중에 0이 많은 행이나 열을 선택하면 0에 해당되는 여인수는 계산할 필요가 없으므로 계산량이 많이 줄어든다.

예제 9.14

다음 행렬식의 값을 계산하라.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

풀이

행렬식을 살펴보면 2행과 3열이 0을 2개 포함하고 있으므로 2행이나 3열 중 아무것이나 선택해서 여인수로 전개하면 된다. 여기서는 2행에 대해 여인수 전개를 한다.

$a_{21}=1$과 $a_{24}=1$에 대한 여인수만 계산하면

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

이 되므로 다음과 같다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = (1) \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{23} + (1) C_{24} = -8$$

예제 9.15

다음 3차 행렬식의 값을 Laplace 전개를 이용하여 구하라.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

풀이

1행에 대하여 Laplace 전개를 적용한다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = C_{11} + 2C_{12}$$

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-13) = 13$$

$$\therefore\ \det(\boldsymbol{A}) = C_{11} + 2C_{12} = -3 + 2 \times 13 = 23$$

예제 9.16

다음의 5차 행렬식의 값을 구하라.

$$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

풀이

행렬식에서 5번째 행에 가장 많은 0이 포함되어 있기 때문에 5번째 행을 선택하여 여인수 전개를 하고 순차적으로 여인수 전개를 반복하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A})&=2C_{55}\\ &=2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2\left\{4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right\}\\ &=2\cdot4\cdot2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=48\end{aligned}$$

$\therefore\ \det(\boldsymbol{A})=48$

예제 9.17

다음 3차 행렬식의 값을 1열에 대하여 Laplace 전개를 적용하여 구하라.

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

풀이

1열에 대하여 Laplace 전개를 적용한다.

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} = 3C_{11} + 2C_{31}$$

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$C_{31} = (-1)^4 M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 11$$

$$\therefore \det(\boldsymbol{A}) = 3C_{11} + 2C_{31} = 3 \times 11 + 2 \times 11 = 55$$

9.5 역행렬의 정의와 성질

- **역행렬의 정의**

  n차 정방행렬 $A \in R^{n \times n}$에 대해서도 실수의 집합 R에서도 마찬가지로 행렬의 곱셈에 대한 역원(역행렬)을 정의할 수 있다.

정의 9.3 행렬의 곱셈에 대한 역행렬

n차 정방행렬 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$에 대하여 다음의 관계를 만족하는 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$를 $\boldsymbol{A}$의 역행렬(Inverse Matrix)이라 정의하고, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$로 표기한다.

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$$

여기서 $\boldsymbol{I}$는 $n \times n$ 단위행렬이다.

- 정칙행렬과 특이행렬(비정칙행렬)

  역행렬이 존재하는 행렬을 정칙 행렬(Nonsingular Matrix)이라고 하며, 역행렬이 존재하지 않는 행렬은 특이 행렬(Singular Matrix) 또는 비정칙행렬이라 한다.

- 행렬 $\boldsymbol{A}$에 대한 역행렬이 존재하면 그것은 오직 하나뿐이다(유일성 정리).
  - i) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{I},\ \ \boldsymbol{X}:\boldsymbol{A}$의 역행렬
  - ii) $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{I}$를 만족하는 또 다른 역행렬 $\boldsymbol{Y}$가 존재한다고 가정한다.
  - $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{YI}=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{YA})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{IX}=\boldsymbol{X}$
  - $\therefore\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$

예제 9.18

다음 2차 정방행렬 $\boldsymbol{A}$에 대한 역행렬을 정의에 의하여 구하라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

풀이

$\boldsymbol{A}$의 역행렬을 다음과 같이 가정한다.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

역행렬의 정의에 의하여

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+3z=1 \\ 3x+4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y+3w=0 \\ 3y+4w=1 \end{cases}$$

위의 방정식을 풀면 $x=-4$, $y=3$, $z=3$, $w=-2$이므로 구하는 역행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- 2차 정방행렬의 역행렬

정리 9.11 2차 정방행렬의 역행렬

2차 정방행렬 $\boldsymbol{A}$가 다음과 같을 때

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$의 역행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

단, $ad-bc \neq 0$ 이다.

2차 정방행렬의 역행렬을 구하는 공식은 자주 사용되므로 반드시 기억해야 한다.

예제 9.19

2차 정방행렬 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{2\times 2}$에 대하여 $\boldsymbol{A}$의 역행렬이 존재할 조건을 제시하고, 그 조건에서 $\boldsymbol{A}$의 역행렬을 구하라.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

풀이

$\boldsymbol{A}$의 역행렬을 다음과 같이 가정한다.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

역행렬의 정의에 의해

풀이

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax_1+bx_3 & ax_2+bx_4 \\ cx_1+dx_3 & cx_2+dx_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_1+bx_3=1 \\ cx_1+dx_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax_2+bx_4=0 \\ cx_2+dx_4=1 \end{cases}$$

$$\therefore\ x_1=\frac{d}{ad-bc} \qquad x_2=\frac{-b}{ad-bc}$$

$$x_3=\frac{-c}{ad-bc} \qquad x_4=\frac{a}{ad-bc}$$

가 얻어지므로 A^{-1}는 다음과 같다.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A^{-1}는 $ad-bc\neq0$ 인 조건하에 유효하며 $ad-bc=0$ 이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.

2) 역행렬의 성질

정리 9.12 역행렬의 성질

$n \times n$ 정칙행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

(3) $(\boldsymbol{A}^{T})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{T}$

증명

(1) 먼저 (1)의 성질은 $\boldsymbol{A}^{-1}$의 역행렬이 $\boldsymbol{A}$라는 의미이므로 $\boldsymbol{A}^{-1}$의 역행렬을 $\boldsymbol{X}$라 하면 다음 관계를 만족하는 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$임이 명확하다.

$$(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{I}$$

증명

(2) 다음으로 (2)의 성질은 다음과 같이 증명할 수 있다. 먼저 AB의 역행렬을 Y라고 가정하면 다음의 관계가 성립된다.

$$(AB)Y = Y(AB) = I \implies (AB)Y = I,\ Y(AB) = I$$

만일 $Y \triangleq B^{-1}A^{-1}$로 정의하여 윗 식에 각각 대입하면

$$(AB)Y = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I$$
$$Y(AB) = B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I$$

가 성립하므로 $Y = B^{-1}A^{-1}$는 AB의 역행렬임을 알 수 있다.

(3) 마지막으로 (3)의 성질은 다음과 같이 증명할 수 있다. 먼저 A^T의 역행렬을 Z라고 가정하면 다음의 관계가 성립된다.

$$(A^T)Z = Z(A^T) = I \implies (A^T)Z = I,\ Z(A^T) = I$$

만일 $Z \triangleq (A^{-1})^T$로 가정하여 윗 식에 각각 대입하면

$$(A^T)Z = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$
$$Z(A^T) = (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

가 성립하므로 $Z = (A^{-1})^T$는 A^T의 역행렬임을 알 수 있다.

예제 9.20

다음 2차 정방행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{A}^{-1}$가 다음과 같을 때 상수 a의 값을 구하라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

풀이

먼저, $\boldsymbol{A}$의 역행렬을 〈예제 9.17〉의 결과를 이용하여 구한다.

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ a & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2(a+1)-2a}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{a}{2} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{a}{2}=-2,\ \frac{a+1}{2}=\frac{5}{2} \qquad \therefore\ a=4$$

예제 9.21

다음의 두 정칙행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$에 대하여 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$의 관계가 성립한다는 것을 보여라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

풀이

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\frac{1}{26-27}\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{8-9}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{AB})^{-1}$$

9.6 역행렬의 계산법

- **여인수행렬과 수반행렬**

정의 9.5 여인수행렬과 수반행렬

여인수행렬은 여인수 C_{ij} 들을 행렬의 요소로 하는 행렬이며, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 에 대한 여인수행렬 C_{ij} 는 다음과 같이 정의한다.

$$\operatorname{cof}(\boldsymbol{A}) \triangleq \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

또한 행렬 $\boldsymbol{A}$의 수반행렬 $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$는 여인수행렬을 전치시킨 행렬로 정의한다.

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) \triangleq [\operatorname{cof}(\boldsymbol{A})]^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

예제 9.22

행렬 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{2\times 2}$에 대하여 여인수행렬 $\mathrm{cof}(\boldsymbol{A})$와 수반행렬 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$를 각각 구하라.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

풀이

행렬 $\boldsymbol{A}$에 대한 여인수들을 계산하면

$$C_{11} = 4,\ C_{12} = -3,\ C_{21} = -2,\ C_{22} = 1$$

이므로 여인수행렬과 수반행렬은 다음과 같다.

$$\mathrm{cof}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathrm{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2) 수반행렬을 이용한 역행렬의 계산

정리 9.13 역행렬 공식

$n \times n$ 정칙행렬 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 의 역행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}$$

- $\boldsymbol{A}^{-1}$의 분모가 $\det(\boldsymbol{A})$이므로 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$이라는 조건을 만족해야 역행렬이 존재함을 알 수 있다.

- 정칙행렬의 다른 정의

정의 9.6 정칙행렬

$n \times n$ 정칙행렬 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 에 대하여 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 인 행렬을 정칙행렬이라고 정의한다. $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ 인 행렬을 특이행렬 또는 비정칙행렬이라고 정의한다.

예제 9.23

다음의 2차 정방행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$를 역행렬 공식을 이용하여 구하라. 단, $\det(\boldsymbol{A})=ad-bc\neq 0$이라고 가정한다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

풀이

먼저 $\boldsymbol{A}$의 수반행렬 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$를 구하기 위하여 여인수들을 계산한다.

$$\begin{aligned} &C_{11}=M_{11}=d, &&C_{12}=-M_{12}=-c \\ &C_{21}=-M_{21}=-b, &&C_{22}=M_{22}=a \end{aligned}$$

$$\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

역행렬의 공식에 의하여

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

를 얻는다.

예제 9.24

다음 3차 정방행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬을 역행렬 공식을 이용하여 구하라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

풀이

$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}$이므로 먼저 [정리 9.10]의 성질을 이용하여 $\det(\boldsymbol{A})$를 계산하면 다음과 같다.

$$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=10$$

풀이

다음으로, 행렬 $\boldsymbol{A}$의 여인수들을 구하면

$$C_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-7,\quad C_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-13,\quad C_{13}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=8$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2,\quad C_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-2,\quad C_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3,\quad C_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7,\quad C_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2$$

가 되므로 수반행렬 $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$는 다음과 같다.

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 역행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$는 다음과 같이 결정된다.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -13 & -2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$