function

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

As you approach a along the x-axis

What is the y-value getting closer to?

Limits

J.H Kim

함수의 극한과 연속성

1. 극한의 정의: 좌극한과 우극한
2. 극한의 존재: 수렴과 발산
3. 극한의 성질과 계산 방법
4. 삼각함수의 극한
5. 지수 및 로그함수의 극한
6. 함수의 연속성과 중간값의 정리

More Valuable Lectures on Limits

- MIT
  - https://youtu.be/kAv5pahlevE
  - What does Limits means?
- 함수의 극한
  - 개념 https://www.youtube.com/watch?v=-j9WhCsSCEs
  - 극한의 계산 https:/www.youtube.com/watch?v=Mg8ooU08N8g
  - 함수의 수렴, 발산 https://www.youtube.com/watch?v=oPDP98871Uo

해결할 문제들

- **함수의 극한 – 수렴, 발산**

다음 함수의 극한값이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판별하라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$

- **극한값을 구하라**

다음 함수의 극한값을 구하라.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)$$

다음 분수식의 극한을 계산하라.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

다음 함수의 극한값을 계산하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-3\sin 2x}{x\cos x}$$

다음 함수의 극한을 계산하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

해결할 문제들

- **함수의 극한 성질 – 연속, 불연속**

다음 함수에서 불연속인 점을 구하라.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

4.1 극한의 정의

함수 f(x)에서 x가 한없이 a에 가까워질 때, f(x)의 값이 일정한 값 b에 한없이 가까워지면 "f(x)는 b 에 수렴한다."라고 한다. x가 a로 한없이 접근하는 것을 x → a로 표시하며, $x \neq a$ **이지만 x와 a의 간격이 좁아진다는 것을 의미한다.**

4.1 극한의 정의: 좌극한과 우극한

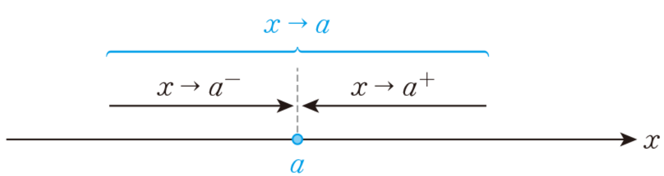
어떤 함수 $f(x)$의 정의역에 있는 원소 x가 a에 한없이 접근하여 가까워질 때 $f(x)$의 변화는 함수의 극한(Limit)에 의해 알 수 있다.

- **접근방법에 따른 수학적인 표기법**

〈표 4.1〉 접근 방법에 따른 수학적인 표기법

접근 방법	수학적인 표기
x가 a로 한없이 접근한다.	$x \to a$
x가 a의 좌측에서 한없이 접근한다.	$x \to a^-$
x가 a의 우측에서 한없이 접근한다.	$x \to a^+$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$



[그림 4.1] 접근 방법의 의미

• 좌극한과 우극한의 정의

정의 4.1 좌극한과 우극한

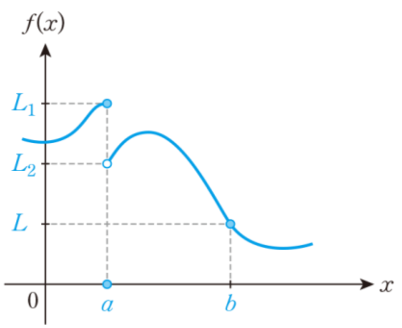
(1) $x \to a^-$ 일 때 함수 $f(x)$가 어떤 실수 L_1에 한없이 가까워지는 경우 L_1을 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라고 정의하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

(2) $x \to a^+$ 일 때 함수 $f(x)$가 어떤 실수 L_2에 한없이 가까워지는 경우 L_2를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라고 정의하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

• 좌극한과 우극한의 개념



[그림 4.2] 좌극한과 우극한의 개념

① $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{불연속}} \text{좌극한} \neq \text{우극한}$$

② $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to a^-} f(x) = L \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{연속}} \text{좌극한} = \text{우극한}$$

예제 4.1

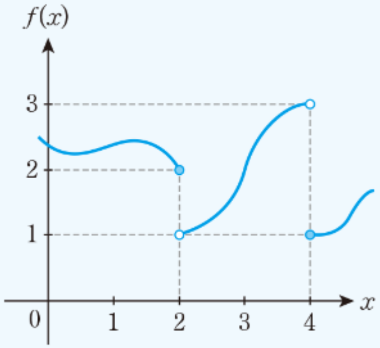
함수 $f(x)$의 그래프가 우측의 그림과 같은 경우 각각의 극한값을 구하라.

(1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(2) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(3) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

(4) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$



풀이

(1) $x\to 2^-$ 일 때 $f(x)$는 한없이 2에 접근하므로 좌극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$$

(2) $x\to 2^+$ 일 때 $f(x)$는 한없이 1에 접근하므로 우극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$$

(3) $x\to 4^-$ 일 때 $f(x)$는 한없이 3에 접근하므로 좌극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$$

(4) $x\to 4^+$ 일 때 $f(x)$는 한없이 1에 접근하므로 우극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 1$$

4.2 극한의 존재: 수렴과 발산

- $x \to a$일 때 함수 $f(x)$의 극한값은 x의 접근 방향에 따라 **좌극한과 우극한** 2개의 값이 존재한다. 좌극한과 우극한이 서로 같은 값을 가지는 경우 함수 $f(x)$는 $x \to a$일 때 극한값을 가지며, 그 극한값에 수렴한다고 정의한다.

정의 4.2

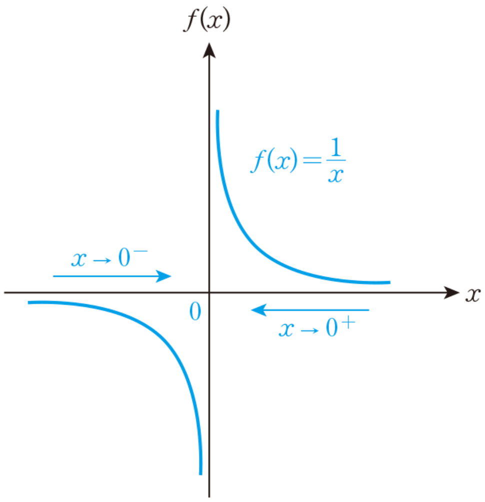
어떤 실수 L에 대하여

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

이면 함수 $f(x)$는 $x \to a$ 일 때 극한값 L을 가진다고 정의하며 다음과 같이 표현한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$인 경우 $f(x)$의 극한값은 존재하지 않는다고 정의한다.



[그림 4.3] 분수함수 $f(x)=\frac{1}{x}$ 의 그래프

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{(발산)}$$

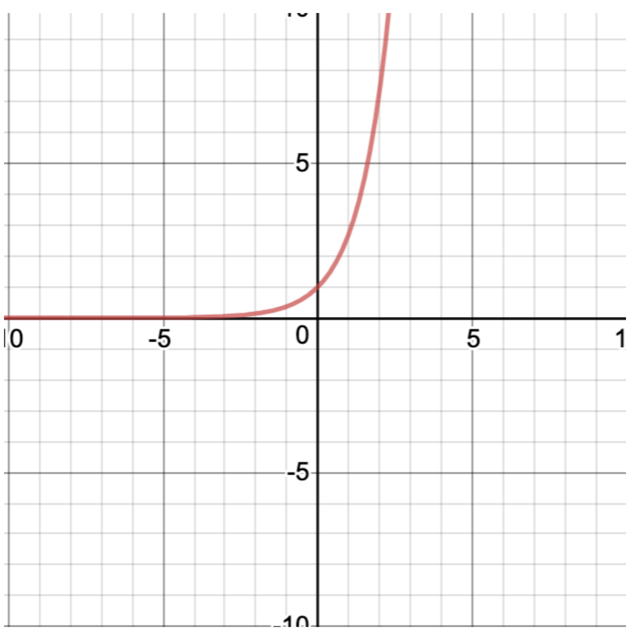
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{(발산)}$$

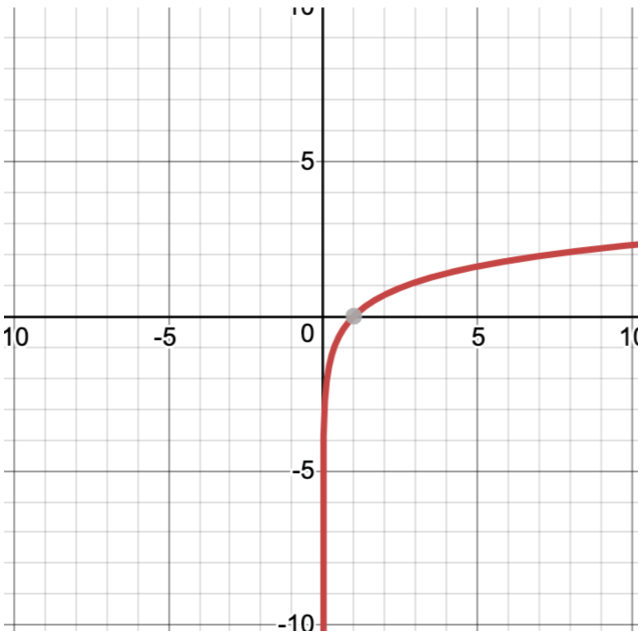
예제 4.2

다음 함수의 극한값이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판별하라.

(1) $\lim_{x \to \infty} e^x, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x$

(2) $\lim_{x \to \infty} \ln x, \quad \lim_{x \to 0} \ln x$





예제 4.2

다음 함수의 극한값이 수렴하는지 또는 발산하는지를 판별하라.

(1) $\lim_{x \to \infty} e^x$, $\lim_{x \to -\infty} e^x$

(2) $\lim_{x \to \infty} \ln x$, $\lim_{x \to 0} \ln x$

풀이

(1) $f(x) = e^x$ 의 그래프로부터 x가 커지면 e^x는 한없이 증가하므로 e^x는 무한대로 발산한다. 즉,

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

또한 x가 음수로 한없이 작아지면 e^x는 한없이 0에 접근하므로 e^x는 0에 수렴한다. 즉,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

(2) $f(x) = \ln x$ 의 그래프로부터 x가 커지면 $\ln x$는 한없이 증가하므로 $\ln x$는 무한대로 발산한다. 즉,

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$$

또한, x가 0으로 접근하면 $\ln x$는 한없이 작아지므로 $\ln x$는 음의 무한대로 발산한다. 즉,

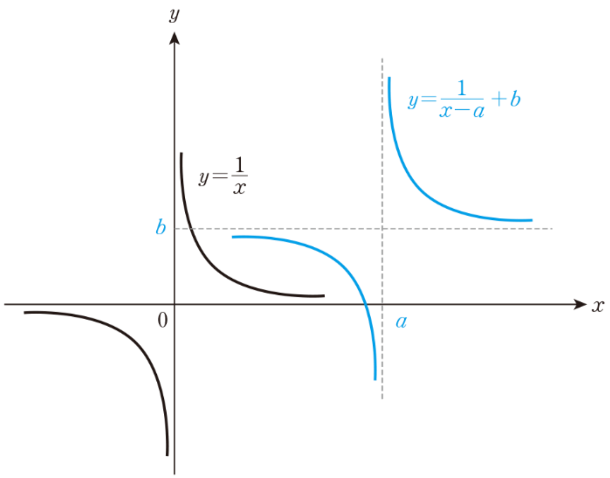
$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

예제 4.3

다음 함수의 극한값을 구하라.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x-5}{x-2} \right)$$

- **분수함수의 그래프**



$y=\frac{1}{x}$ → ① x축으로 a만큼 평행이동 → $y=\frac{1}{x-a}$ → $y-b=\frac{1}{x-a}$

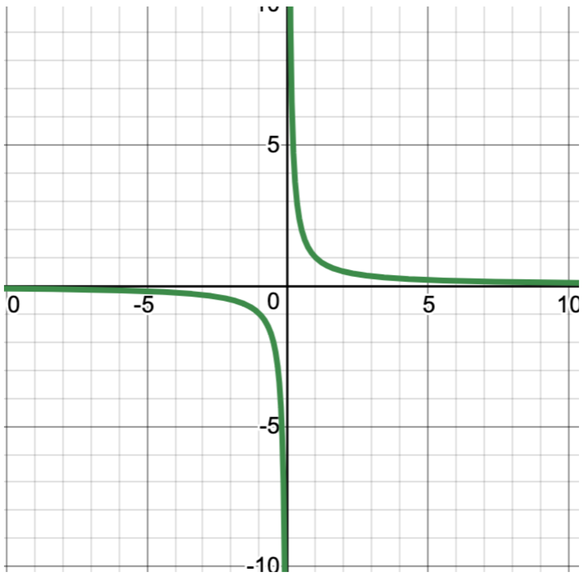
$y=\frac{1}{x}$ → ② y축으로 b만큼 평행이동 → $y-b=\frac{1}{x}$ → $y-b=\frac{1}{x-a}$

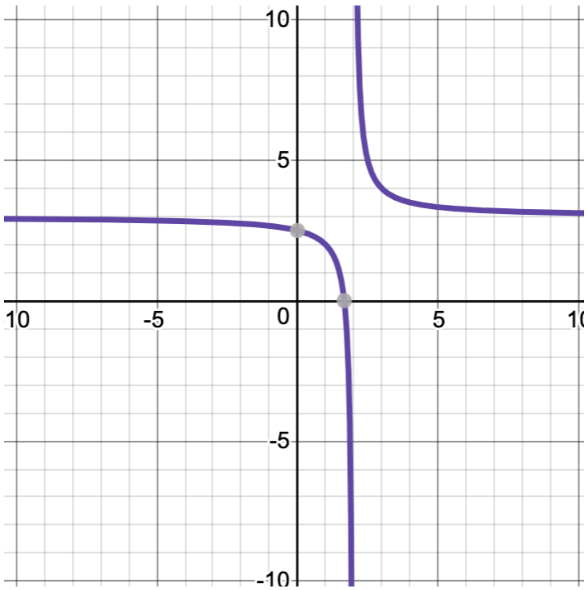
예제 4.3

다음 함수의 극한값을 구하라.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x-5}{x-2} \right)$$

$$\lim_{x \to 2} (3x-5)/(x-2) = \lim_{x \to 2} \left(3 + \frac{1}{x-2} \right)$$





예제 4.3

다음 함수의 극한값을 구하라.

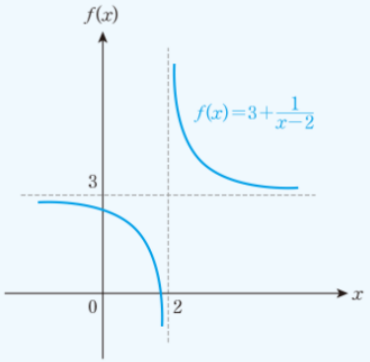
$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x-5}{x-2} \right)$$

풀이

주어진 함수를 변형하면

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$$

이므로 $f(x)$는 평행이동의 정의에 의하여 $\frac{1}{x}$의 그래프를 x축으로 2만큼, y축으로 3만큼 평행이동한 것이다.



$f(x)$의 그래프가 $x=2$에서 불연속이므로

$$\lim_{x \to 2^+} \left(3 + \frac{1}{x-2} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(3 + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty$$

가 되어 좌극한과 우극한의 값이 서로 다르므로 극한값이 존재하지 않는다.

4.3 극한의 성질과 계산 방법

- **극한의 성질**
  - 함수의 극한에 대한 여러가지 성질들을 이용하면 함수의 극한을 보다 쉽고 간편하게 구할 수 있다.

정리 4.1 극한의 사칙연산

$x \to a$ 일 때 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 극한값이 다음과 같이 존재한다고 가정한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} g(x) = B$$

이때 다음의 관계가 항상 성립한다.

(1) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$

(2) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = AB$

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} f(x)} = \dfrac{B}{A}$ (단, $f(x) \neq 0$, $A \neq 0$)

(5) k가 실수일 때 $\lim_{x \to a} kf(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = kA$

예제 4.4

두 함수 $f(x)=x^2+x+4$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 다음의 극한을 계산하라.

(1) $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$

(2) $\lim_{x\to 1}[f(x)-g(x)]$

(3) $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)$

(4) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$

풀이

(1) [정리 4.1]의 극한의 사칙연산에 의하여

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+x+4)=6$$

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}(x^3+2)=3$$

이므로 $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=6+3=9$가 된다.

(2) $\lim_{x\to 1}[f(x)-g(x)]=6-3=3$

(3) $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=6\times 3=18$

(4) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{6}{3}=2$

예제 4.5

다음의 관계를 만족시키는 상수 a와 b의 값을 각각 구하라.

(1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+6}{2x^2+ax+1}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{bx^2+3x+1}=\frac{1}{4}$

풀이

(1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+6}{2x^2+ax+1}=\frac{3}{19+3a}=\frac{1}{3}$

$$19+3a=9 \quad \therefore\ a=-\frac{10}{3}$$

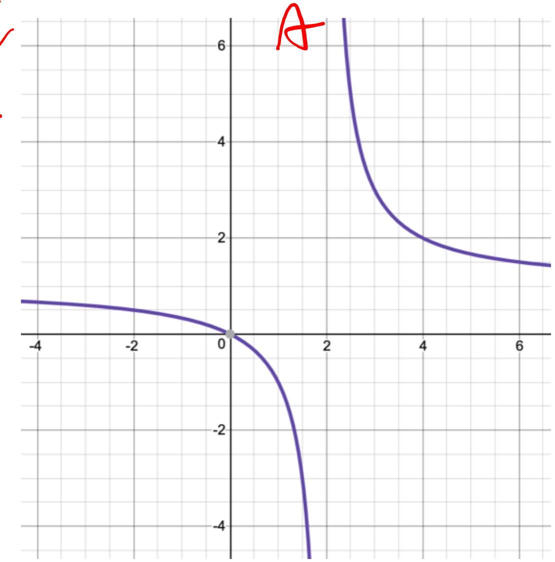
(2) 주어진 함수의 분모와 분자를 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{bx^2+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x^2}}{b+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{b}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ b=8$$

4.3 극한의 계산 방법

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} f(x)} = \frac{B}{A}.$$



- **확정형 – x 대신 정해진 값을 대입한 결과가 유한한 값을 가짐, 즉 극한 값은 대입한 결과 값임**
  - 예

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{2x}{x+2}} = \frac{2}{3}$$

- **불능형 – x 대신 정해진 값을 대입한 결과가 불능이 됨**
  - 예

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2} = \cancel{\frac{4}{0}}$$

4.3 극한의 계산 방법

3) 부정형

- 0/0 꼴 – 인수분해 혹은 유리화함
- $\sqrt{\infty} - \infty$ 혹은 $\sqrt{0/0}$ 꼴 – 유리화 함
- $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 – 분모의 최고차항으로 나눔
- $0 \times \infty$ 꼴 - $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 혹은 0/0 꼴로 고침

2) 부정형 $\frac{0}{0}$의 극한값 계산

- 함수의 $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$ 일 때, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$에 대한 극한값은 인수분해나 유리화를 통하여 공통인수를 찾아 약분함으로써 극한값을 계산할 수 있다.

① 인수분해를 이용한 극한값 계산

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

② 유리화를 통한 극한값의 계산

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9}\frac{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}{\cancel{x-9}} = 6$$

3 - 3

$$= \lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$

$$\frac{0}{0}$$

예제 4.6

다음 분수식의 극한을 계산하라.

(1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{1}{3}$$

풀이

(1) 인수분해공식 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하면

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 4+4+4=12$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}} = 4+4+4=12$$

가 된다.

(2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{3}$

(3) 주어진 식의 분모와 분자에 $\sqrt{x+8}+3$을 각각 곱하여 유리화한다.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

9

(4) 주어진 식의 분모와 분자에 $\sqrt{x+9}+3$을 각각 곱하여 유리화한다.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+9}+3) = \sqrt{9}+3=6$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} -$$

3) 부정형 $\frac{\infty}{\infty}$의 극한값 계산

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$에 대한 극한값은 $f(x)$와 $g(x)$ 의 차에 따라 극한값이 달라진다.

① $f(x)$의 차수 < $g(x)$의 차수

$x \to \infty$일 때 $f(x)$와 $g(x)$의 극한은 최고차항에 의해서 주로 영향을 받는다. $g(x)$의 차수가 $f(x)$의 차수보다 큰 경우는 분자가 분모보다 더 빠르게 증가하므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$의 극한값은 $+\infty$ 또는 $-\infty$로 발산한다.

∞

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \frac{x^3+4x^2+1}{3x^2+4} \qquad \frac{3}{2} = \infty$$

→ $x \to \infty$일 때 분모는 $3x^2$에 의해 영향을 받고 분자는 x^3에 의해 영향을 받으므로 분자가 분모보다 더 빠르게 증가한다.

→ 결과적으로 $+\infty$로 발산한다.

② $f(x)$의 차수 = $g(x)$의 차수

$x \to \infty$일 때 분모와 분자가 동일한 스케일로 증가하므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$의 극한값은 최고차항의 계수에 의해서만 극한값이 결정된다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+8x^2+10}{2x^3+4x^2+1} \cong \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

또는 분모와 분자를 x^3으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+8x^2+10}{2x^3+4x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+\frac{8}{x}+\frac{10}{x^3}}{2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

③ $f(x)$의 차수 > $g(x)$의 차수

$x \to \infty$일 때 분모가 분자에 비해 더 빠르게 증가하므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$의 극한값은 0으로 수렴한다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+10}{x^3+x+1} \cong \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} = 0$$

〈표 4.2〉 부정형 $\frac{\infty}{\infty}$ 형태의 극한값

	$f(x)$의 차수 $<$ $g(x)$의 차수	$f(x)$의 차수 $=$ $g(x)$의 차수	$f(x)$의 차수 $>$ $g(x)$의 차수
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$	발산한다	수렴한다	수렴한다
극한값	$+\infty$ 또는 $-\infty$	$\frac{g(x)\text{의 최고차항 계수}}{f(x)\text{의 최고차항 계수}}$	0

예제 4.7

다음 함수의 극한값을 계산하라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+9}{x-3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x+1}{2x^2+5x+10}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+1}{3x^3+4x^2+x-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x+1}{3x^2-2x+1}$

풀이

(1) 분자의 차수가 분모보다 더 크기 때문에 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+9}{x-3}=\infty$$

(2) 분모와 분자의 차수가 같으므로 분모와 분자를 x^2 으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+6x+1}{2x^2+5x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

이 된다.

(3) 분모와 분자의 차수가 같으므로 분모와 분자를 x^3 으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+1}{3x^3+4x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x^3}}{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{5}{3}$$

가 된다.

(4) 분모의 차수가 분자의 차수보다 더 크기 때문에 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+1}{3x^2-2x+1}=0$$

예제 4.8

다음 함수의 극한값을 계산하라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x+1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}-4}$

풀이

(1) 분모와 분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$$

이 된다.

(2) 분모와 분자를 x로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\frac{4}{x}}=3$$

이 된다.

예제 4.9

다음의 두 관계식을 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 구하라.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$$

풀이

첫 번째 조건으로부터 $x\to\infty$인 경우 극한값이 1이므로 분모와 분자의 차수가 같아야 한다. 즉,

$$f(x)-2x^3=ax^2+bx+c$$

$$\therefore\ f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2}=a=1 \qquad \therefore\ a=1$$

두 번째 조건으로부터

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+bx+c}{x}=3$$

극한값이 3이므로 극한값이 존재하기 위해서는 $c=0$이어야 한다.

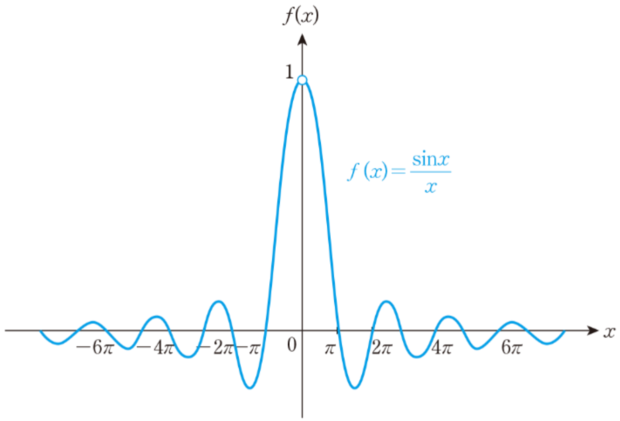
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2+bx}{x}=\lim_{x\to 0}(2x^2+x+b)=b=3 \qquad \therefore\ b=3$$

이상의 결과로부터 $f(x)=2x^3+x^2+3x$를 얻을 수 있다.

4.4 삼각함수의 극한

- $f(x) = \frac{\sin x}{x}$의 극한

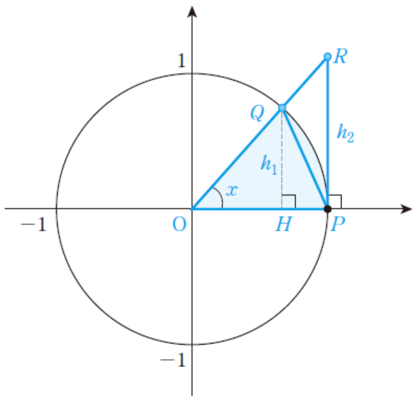
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



[그림 4.4] $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 의 그래프

- 삼각함수의 극한을 계산하기 위해서는 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$의 관계를 활용하는 경우가 많으므로 반드시 기억해두어야 한다.

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$의 수학적인 증명



$0 < x < \frac{\pi}{2}$

삼각형 POQ의 면적$=\frac{1}{2}\times$밑변$\times$높이$=\frac{1}{2}\times 1\times h_1 = \frac{1}{2}\sin x$

부채꼴 POQ의 면적$=\frac{1}{2}\times$ 반지름$\times$ 호의 길이$=\frac{1}{2}\times 1\times x = \frac{1}{2}x$

직각삼각형 POR의 면적$=\frac{1}{2}\times$ 밑변 $\times$ 높이 $=\frac{1}{2}\times 1\times h_2 = \frac{1}{2}\tan x$

삼각형 POQ < 부채꼴 POQ < 직각삼각형 POR

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\therefore\ \sin x < x < \tan x$$

$\rightarrow$ $0 < x < \frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x > 0$이므로 $\sin x$로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x < \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0^+} 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$$

→ $-\frac{\pi}{2} < x < 0$인 경우 $x \to 0^-$일 때의 좌극한을 구해보면,

$x \triangleq -\theta$로 가정

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

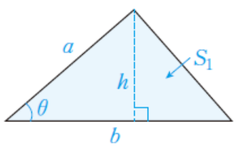
→ $x \to 0$에서 좌극한과 우극한이 동일하므로 다음의 관계가 성립된다.

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

- 삼각형과 부채꼴의 면적

① 삼각형의 면적

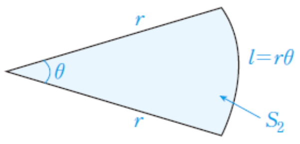
$$S_1 = \frac{1}{2}\times 밑변 \times 높이 = \frac{1}{2}bh$$
$$= \frac{1}{2}b(a\sin\theta)$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin\theta$$



② 부채꼴의 면적

반지름이 r이고 중심각이 θrad 인 부채꼴의 면적 S_2는 비례관계를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\pi r^2 : S_2 = 2\pi : \theta$$
$$2\pi S_2 = \pi r^2\theta$$
$$\therefore S_2 = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$$



예제 4.10

다음 삼각함수의 극한값을 계산하라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sin 2x}$

풀이

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{5}=1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot 2=1\times 1\times 2=2$

(4) (2)의 결과를 이용하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{4x}\,\frac{2x}{\sin 2x}\cdot 2=1\times 1\times 2=2$$

예제 4.11

다음 함수의 극한값을 계산하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-3\sin 2x}{x\cos x}$$

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-3\sin 2x}{x\cos x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}-\frac{3\sin 2x}{x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}-\frac{3\sin 2x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}-\frac{6\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\}\\&=1\times 1-6\times 1=-5\end{aligned}$$

예제 4.12

다음 함수의 극한값을 계산하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2m+1)x+\sin(2m-1)x}{\sin mx}$$

풀이

삼각함수의 합을 곱으로 변형하는 공식을 이용하면

$$\sin(2m+1)x+\sin(2m-1)x = 2\sin\frac{4mx}{2}\cos\frac{2x}{2} = 2\sin 2mx\cdot\cos x$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2m+1)x+\sin(2m-1)x}{\sin mx} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2mx\cos x}{\sin mx}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin mx\cos mx}{\sin mx}\cdot\cos x\\ &= \lim_{x\to 0}4\cos mx\cdot\cos x = 4\times 1\times 1 = 4\end{aligned}$$

가 얻어진다.

예제 4.13

다음 함수의 극한을 계산하라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{2}$

풀이

(1) 분모와 분자에 $1+\cos x$를 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이 된다.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\,\frac{\sin x}{x}$

한편 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$에서 $z=\sin x$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $z\to 0$이므로 다음의 관계가 얻어진다.

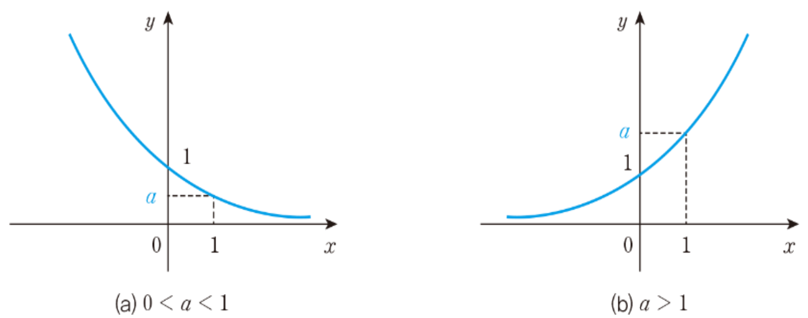
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$$

따라서

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\,\frac{\sin x}{x} = 1\times 1 = 1$$

4.5 지수 및 로그함수의 극한

- **지수함수의 극한**



[그림 4.6] 지수함수 $y = a^x$ 의 그래프

① $0 < a < 1$인 경우

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$$

② $a > 1$인 경우

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

예제 4.14

다음 함수의 극한을 계산하라.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{3^x-4^x}$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x-3e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$

풀이

(1) 분모와 분자를 4^x로 나누면 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{3^x-4^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1} = -1$$

(2) 분모와 분자를 e^x로 나누면 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x-3e^{-x}}{e^x+2e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-3e^{-2x}}{1+2e^{-2x}} = 2$$

예제 4.15

다음 지수함수의 극한을 무리수 e의 정의를 이용하여 계산하라.

$$e \triangleq \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(1) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{4x}}$

(2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{x}}$

(4) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

풀이

(1) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to 0}(1+(-3x))^{\frac{1}{-3x}\left(-\frac{3}{4}\right)} = e^{-\frac{3}{4}}$

(2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot 2} = e^2$

(3) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = e^{-\frac{3}{2}}$

(4) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+(-x))^{\frac{1}{(-x)}(-1)} = e^{-1}$

예제 4.16

다음 함수의 극한을 계산하라.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

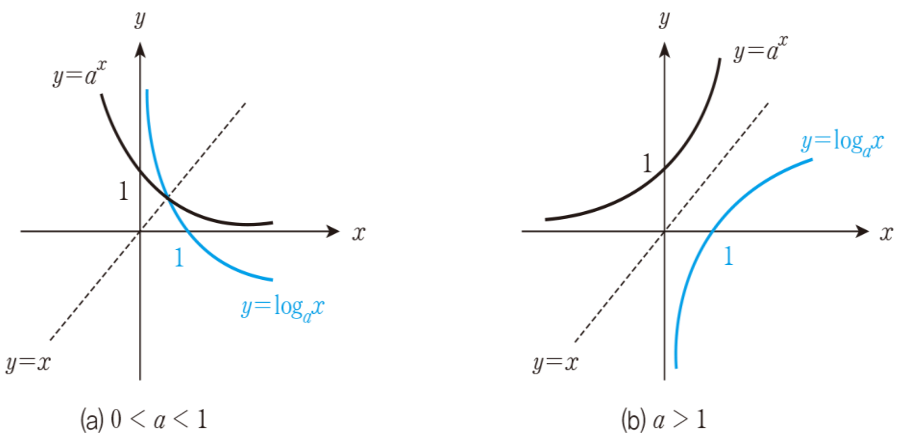
풀이

$e^x - 1 \triangleq z$ 라고 놓으면 $e^x = 1 + z \qquad \therefore x = \ln(1+z)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\ln(1+z)}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

2) 로그함수의 극한



[그림 4.7] 로그함수 $y = \log_a x$ 의 그래프

① $0 < a < 1$인 경우

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$$

② $a > 1$인 경우

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$$

예제 4.17

다음 함수의 극한을 계산하라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log(2+3x)-\log x\}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\ln\frac{3x^2+4}{x^2}$

(3) $\lim_{x\to 1}\{\log|x^3-1|-\log|x^2-1|\}$

풀이

(1) 로그의 성질을 이용하면

$$\lim_{x\to\infty}\{\log(2+3x)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2+3x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2}{x}+3\right)=\log 3$$

이 얻어진다.

(2) $\lim_{x\to\infty}\ln\frac{3x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(3+\frac{4}{x^2}\right)=\ln 3$

(3) 로그의 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\{\log|x^3-1|-\log|x^2-1|\}\\&=\lim_{x\to 1}\log\frac{|x^3-1|}{|x^2-1|}=\lim_{x\to 1}\log\left|\frac{x^3-1}{x^2-1}\right|\\&=\lim_{x\to 1}\log\frac{|(x-1)(x^2+x+1)|}{|(x-1)(x+1)|}=\log\left|\frac{(1+1+1)}{(1+1)}\right|=\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이 얻어진다.

예제 4.18

다음 함수의 극한을 계산하라.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$$

풀이

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$$

예제 4.19

다음 함수의 극한을 계산하라.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 2x}$

풀이

(1) $z \triangleq x-1$로 치환하면 $x\to 1$일 때 $z\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\log(1+z)$$
$$=\lim_{z\to 0}\log(1+z)^{\frac{1}{z}}=\log e$$

가 얻어진다.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{2x}{\sin 2x}$

$e^{2x}-1\triangleq z$ 라고 놓으면 $e^{2x}=1+z$ $\therefore\ 2x=\ln(1+z)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(1+z)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\ln(1+z)}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}}=\frac{1}{\ln e}=1$$

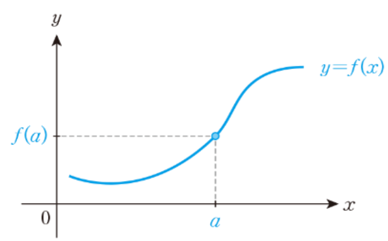
이 되므로 주어진 함수의 극한은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{2x}{\sin 2x}=1\cdot 1=1$$

4.6 함수의 연속성과 중간값의 정리

- **연속의 개념**

  $x = a$에서 함수 $f(x)$가 연속이라는 것은 $y = f(x)$의 그래프가 $x = a$에서 끊어지지 않고 연결되어 있다는 의미이다.



[그림 4.8] $x=a$에서 연속인 함수

- **연속의 수학적인 정의**

정의 4.3 연속의 정의

함수 $f(x)$가 다음의 세 조건을 모두 만족하는 경우 $f(x)$는 $x=a$에서 연속(Continuity)이라고 한다.

(1) $\lim_{x \to a} f(x)$의 극한값이 존재한다.

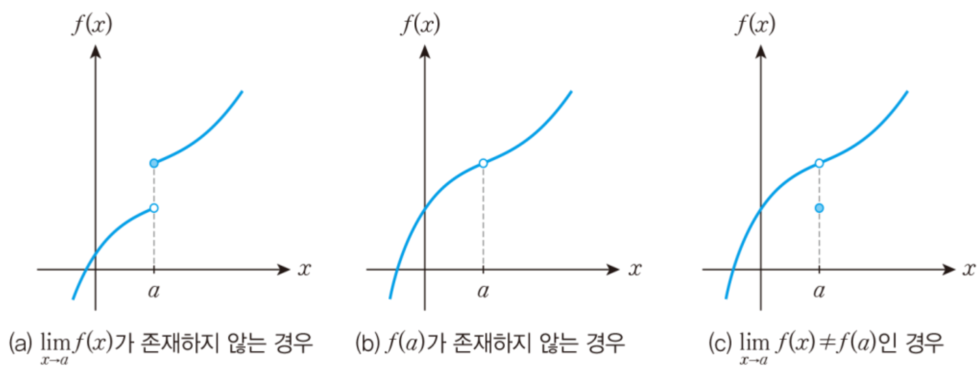
(2) $x=a$에서의 함숫값 $f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$가 성립한다.

- 어떤 폐구간 $[a, b]$의 모든 점에서 함수 $f(x)$가 연속인 경우, 함수 $f(x)$를 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 부른다.

- $x = a$에서 불연속인 함수

  → 연속이기 위한 3가지 조건 중에서 어느 한 조건이라도 만족되지 않는 경우, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이 아니다(불연속)라고 판정한다.



[그림 4.9] $x = a$ 에서 불연속인 함수

예제 4.20

다음 함수에서 불연속인 점을 구하라.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

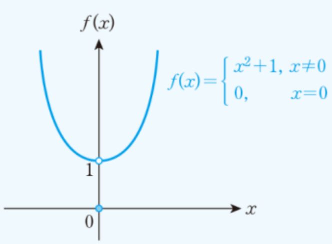
풀이

(1) $f(x)$는 분수함수이므로 $x=1$에서 정의되지 않기 때문에 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(2) $f(x)$의 그래프를 그려보면 $f(0)=0$으로 정의되고 $x\to 0$일 때 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$로서 존재하지만

$$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$$

이 되므로 $x=0$에서 불연속이다.



예제 4.21

다음 가우스(Gauss) 함수 $f(x)$의 불연속점을 구하라.

$$f(x)=[x]$$

단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.

풀이

$-1\leq x<0$일 때 $f(x)=-1$

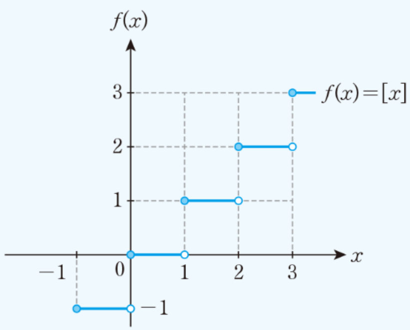
$0\leq x<1$일 때 $f(x)=0$

$1\leq x<2$일 때 $f(x)=1$

$2\leq x<3$일 때 $f(x)=2$

이므로 $f(x)=[x]$의 그래프는 오른쪽과 같다.

따라서 $x=\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$의 모든 정수에서 $f(x)=[x]$는 불연속이다.



- **연속함수의 성질**

정리 4.2 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, 다음 함수들도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $f(x)\pm g(x)$ (2) $f(x)g(x)$

(3) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$) (4) $kf(x)$ (단, k는 상수)

- **다항함수는 모든 실수에서 연속이고, 분수(유리)함수는 분모가 0이 아닌 모든 실수에서 연속이다.**

예제 4.22

다음 함수에서 연속인 점들의 집합을 구하라.

(1) $f(x)=3x+4$ (2) $f(x)=\dfrac{4x^4+x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

풀이

(1) $f(x)$는 1차 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

(2) $f(x)$는 분수함수이므로 분모가 0이 되는 x에 대해서는 정의되지 않는다. 즉,

$$(x-1)(x+1)(x+3)=0 \qquad \therefore\ x=1,-1,-3$$

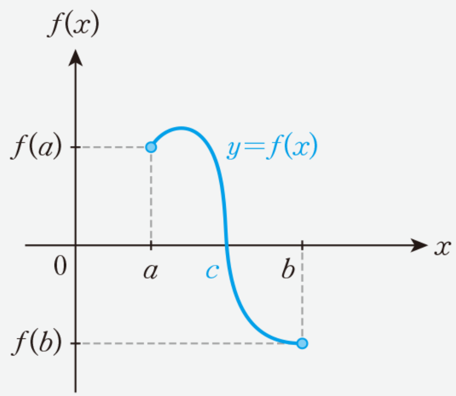
따라서 $f(x)$는 $\{-3,\ -1,\ 1\}$을 제외한 모든 점에서 연속이다.

2) 중간값의 정리

- 중간값의 정리는 어떤 구간에서 방정식의 해가 존재한다는 것을 증명할 때 많이 사용된다.

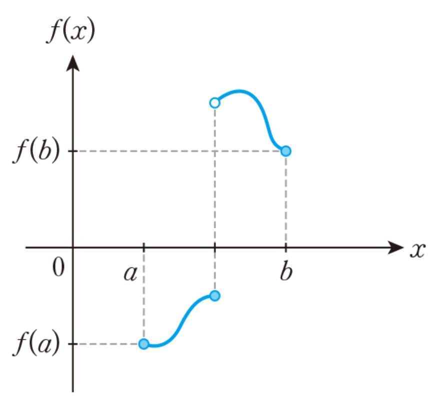
정리 4.3 중간값의 정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$을 만족하는 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.



- 중간값의 정리는 함수 $f(x)$가 특정한 폐구간에서 연속이고 폐구간의 양 끝점에서 함숫값들이 부호가 다르면 방정식 $f(x) = 0$의 해가 개구간 안에 적어도 하나 이상 존재한다는 것이다.
- $f(x)$가 불연속일 때의 중간값 정리

→ $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 불연속인 경우 $f(c) = 0$이 되는 c가 존재하지 않을 수 있다.



[그림 4.10] $f(x)$가 불연속일 때의 중간값 정리