미분법

1. 미분계수와 도함수
2. 미분법의 기본 법칙
3. 삼각함수와 지수함수의 미분법
4. 고차 도함수
5. 합성함수와 역함수의 미분법
6. 음함수와 매개변수함수의 미분법
7. 로피탈 정리

미분의 역사와 그 의미

- **역사**

  https://youtu.be/hFKm9ga9-yA

- **의미**

  https://youtu.be/ixGZ0tg_lqs

문제

EXAMPLE 3 Suppose that a ball is dropped from the upper observation deck of the CN Tower, 450 m above the ground.

(a) What is the velocity of the ball after 5 seconds?

(b) How fast is the ball traveling when it hits the ground?

낙하하는 물체가 매 초당 $4.9t^2$ (t 는 시간(초)) 씩 움직인다고 할 때, 중력 가속도를 계산하는 방법은?

평균변화율과 미분계수의 차이는?

다음 함수의 미분값은?

$y = 3x^2 + 4x + 1$

$y = \sin x$

$y = e^x$

$y = (3x^2 + 2x + 1)^{100}$

함수 $y = 3x^3 + x - 1$에 대하여 역함수의 도함수 $\frac{dx}{dy}$를 구하라.

$y = \ln 2$

다음 음함수에서 $\frac{dy}{dx}$와 $\frac{dx}{dy}$를 각각 구하라.

$$x^4 - 2y^3 + y = 0$$

5.1 미분계수와 도함수

- **평균변화율과 미분계수**

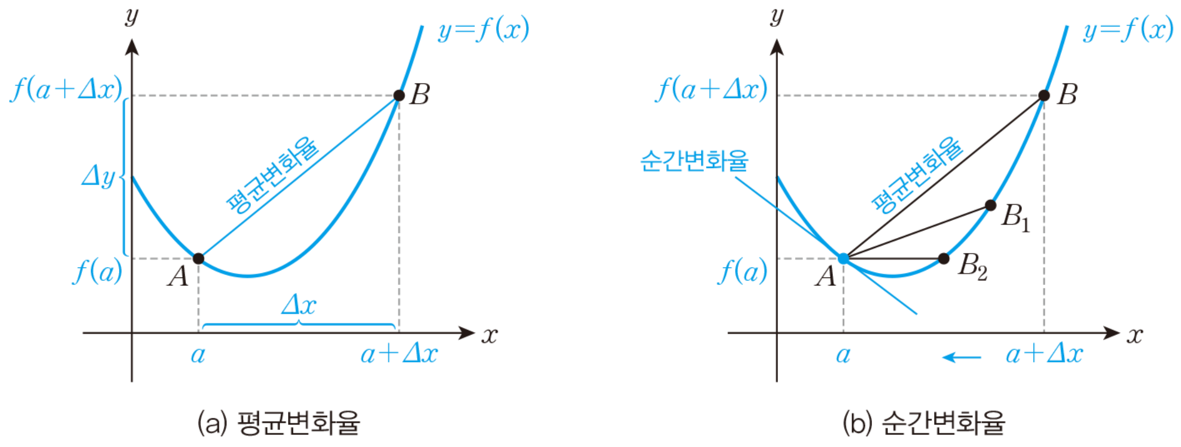
평균변화율 : $y = f(x)$에서 x가 Δx만큼 변화하였을 때 y의 변화량 Δy의 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \longleftarrow$$

순간변화율 : x의 변화량 Δx가 한없이 작아질 때($\Delta x \to 0$) 평균변화율의 극한값

→ 점 A에서의 접선의 기울기를 의미하며 미분계수라고도 한다.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \triangleq f'(a)$$



[그림 5.1] 함수의 변화율

- $x = a$ 에서 $f(x)$의 접선의 방정식

한 점 $A(a, f(a))$를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선의 방정식이 $x = a$ 에서 $f(x)$의 접선이다.

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$
$$\therefore \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

함수 $f(x)$가 $x = a$ 에서 미분계수가 존재하는 경우 $f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 정의하며, 개구간 I의 모든 점에서 $f(x)$가 미분가능하면 간단히 $f(x)$는 구간 I 에서 미분가능(Differentiable)하다고 한다.

2) 도함수

순간변화율(미분계수)에서 특정한 점 를 구간 I의 임의의 점으로 대체하면

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow{a\text{를 } x\text{로 대체}} f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \;;\; f(x)\text{의 도함수}$$

- 여러 가지 도함수의 표현

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}(f(x))$$

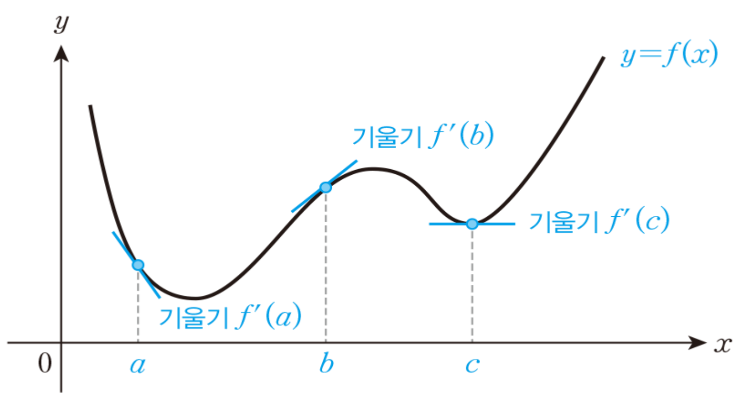
- 도함수의 여러가지 정의

도함수의 정의에서 x의 변화량 Δx 대신에 적절한 다른 변수를 이용하여도 관계없다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

도함수의 기하학적인 의미

$y = f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 미분한다고 하며, 도함수를 구하는 방법을 미분법이라고 한다.



[그림 5.2] 함수 $f(x)$에 대한 도함수의 기하학적인 의미

예제 5.1

함수 $f(x)=x^2+3$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(1) 도함수의 정의에 따라 $f'(x)$를 구하라.

(2) $x=2$에서의 미분계수와 접선의 방정식을 구하라.

(3) $x=2$에서의 접선과 수직한 법선의 방정식을 구하라.

풀이

(1) $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+3-(x^2+3)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

(2) $x=2$에서의 미분계수는 $f'(2)=2\times 2=4$이므로 접선의 기울기는 4이고 점 $(2, f(2))=(2, 7)$을 지나므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-7=f'(2)(x-2)$$

$$\therefore\ y=4(x-2)+7=4x-1$$

(3) 접선의 기울기가 4이므로 수직한 법선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$이고 점 $(2, f(2))=(2, 7)$을 지나므로 법선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-7=-\frac{1}{4}(x-2)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{15}{2}$$

예제 5.2

다음 함수의 도함수와 $x=1$ 에서의 미분계수를 구하라.

$$f(x)=\sqrt{x}$$

풀이

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

이므로 분자를 유리화하기 위하여 분모와 분자에 $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ 를 곱하여 정리한다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$ 이 된다.

SOLUTION 1

EXAMPLE 3 Suppose that a ball is dropped from the upper observation deck of the CN Tower, 450 m above the ground.
(a) What is the velocity of the ball after 5 seconds?
(b) How fast is the ball traveling when it hits the ground?

SOLUTION We will need to find the velocity both when $t = 5$ and when the ball hits the ground, so it's efficient to start by finding the velocity at a general time t. Using the equation of motion $s = f(t) = 4.9t^2$, we have

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(2th + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4.9h(2t + h)}{h} = \lim_{h\to 0} 4.9(2t + h) = 9.8t \end{aligned}$$

(a) The velocity after 5 seconds is $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Since the observation deck is 450 m above the ground, the ball will hit the ground at the time t when $s(t) = 450$, that is,

$$4.9t^2 = 450$$

This gives

$$t^2 = \frac{450}{4.9} \quad \text{and} \quad t = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

The velocity of the ball as it hits the ground is therefore

$$v\left(\sqrt{\frac{450}{4.9}}\right) = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$

■

5.2 미분법의 기본법칙

미분이 가능한 두 함수의 사칙연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)에 대한 도함수는 도함수의 정의에 따라 구하지 않고 다음의 미분법에 대한 기본법칙을 이용하여 구할 수 있다.

미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음의 법칙이 성립된다.

(1) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(2) $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

(3) k가 상수일 때 $(kf(x))' = kf'(x)$

(4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{[f(x)]^2}$ (단, $f(x)\neq 0$)

예제 5.3

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $f(x)+g(x)+h(x)$

(2) $f(x)g(x)h(x)$

풀이

(1) [정리 5.1(1)]로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned}([f(x)+g(x)]+h(x))' &= ([f(x)+g(x)])'+h'(x)\\ &= f'(x)+g'(x)+h'(x)\end{aligned}$$

(2) [정리 5.1(4)]로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= ([f(x)g(x)]h(x))'\\ &= ([f(x)g(x)])'h(x)+([f(x)g(x)])h'(x)\\ &= \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

다항함수 x^n의 도함수

정리 5.2 다항함수 x^n의 도함수

상수 k와 자연수 n에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

(1) $\dfrac{d}{dx}(k) = 0$

(2) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

다항함수 x^n에서 n이 음수인 경우의 도함수 계산

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{(1)'x^n - 1\cdot(x^n)'}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

n이 정수인 일반적인 다항함수 x^n의 도함수

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad (n\text{은 정수})$$

예제 5.4

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $f(x)=3x^3+4x+1$

(2) $f(x)=(3x+4)(x^2+2x+3)$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(4) $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$

풀이

(1) $f'(x)=(3x^3+4x+1)'=9x^2+4$

(2)
$$\begin{aligned} f'(x)&=[(3x+4)(x^2+2x+3)]' \\ &=(3x+4)'(x^2+2x+3)+(3x+4)(x^2+2x+3)' \\ &=3(x^2+2x+3)+(3x+4)(2x+2) \\ &=9x^2+20x+17 \end{aligned}$$

(3) $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{(1)'x-(1)(x)'}{x^2}=\dfrac{0-1}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$

(4)
$$\begin{aligned} f'(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)'&=\frac{(2x-1)'(2x+1)-(2x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &=\frac{2\cdot(2x+1)-(2x-1)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{4}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

예제 5.5

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{x^4}$

(2) $f(x)=10x^{-15}$

풀이

(1) 식(14)로부터

$$f(x)=\frac{3}{x^4}=3x^{-4}$$

$$f'(x)=3(-4)x^{-4-1}=-12x^{-5}=-\frac{12}{x^5}$$

(2) 식(14)로부터

$$f'(x)=10(-15)x^{-15-1}=-150x^{-16}=-\frac{150}{x^{16}}$$

5.3 삼각함수와 지수함수의 미분법

- **삼각함수의 미분법**

정리 5.3 미분법의 기본법칙

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \sec^2 x$

기본적인 삼각함수의 미분법에 대하여는 이미 고등학교 과정에서 학습하였으나 충분히 복습하여야만 신속하게 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

기본 삼각함수의 역수로 정의되는 $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\cot x$의 도함수는 분수함수의 미분법을 활용하여 계산하면 된다.

예제 5.6

[정리 5.3]에서 다음의 관계를 증명하라.

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

풀이

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

삼각함수의 차를 곱으로 변환하는 공식으로부터

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\dfrac{(x+h)-x}{2} \cdot \cos\dfrac{(x+h)+x}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\dfrac{h}{2}}{h} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\left(\dfrac{h}{2}\right)} \cdot \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x
\end{aligned}$$

를 얻을 수 있다.

예제 5.7

[정리 5.3]에서 다음의 관계를 증명하라.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

풀이

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 이므로 [정리 5.1(5)]로부터

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

를 얻을 수 있다.

예제 5.8

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $f(x) = \operatorname{cosec} x$

(2) $f(x) = \cot x$

(3) $f(x) = \sec x$

풀이

(1) $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ 이므로 [정리 5.1(5)]에 의하여

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) \\
&= \frac{(1)'\sin x - (1)(\sin x)'}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} \\
&= -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x
\end{aligned}$$

풀이

(2) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ 이므로 [정리 5.1(5)]에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)\\ &= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}\\ &= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x\end{aligned}$$

(3) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 이므로 [정리 5.1(5)]에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= \frac{(1)'\cos x - (1)(\cos x)'}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x\end{aligned}$$

예제 5.9

다음 함수들의 도함수를 구하라.

(1) $y = x^2 \cos x$

(2) $y = \sin x - 2\cos x + \tan x$

(3) $y = x \sin x$

풀이

(1) $y' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)'$

$= 2x \cdot \cos x + x^2(-\sin x)$

$= 2x \cos x - x^2 \sin x$

(2) $y' = (\sin x)' - (2\cos x)' + (\tan x)'$

$= \cos x + 2\sin x + \sec^2 x$

(3) $y' = (x)' \sin x + x(\sin x)'$

$= \sin x + x \cos x$

2) 지수함수의 미분법

- 지수함수의 도함수 계산에 필요한 함수의 극한

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \longrightarrow z \triangleq a^x - 1\text{로 치환}$$

$$a^x = z + 1 \qquad \therefore\ x = \log_a(z+1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\log_a(z+1)}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{\log_a(z+1)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

- $f(x) = a^x$의 도함수 계산

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$= a^x\ln a$$

$a = e$인 경우 $f(x) = e^x$의 도함수 계산

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \ln e = e^x$$

- 지수함수의 도함수

정리 5.4 지수함수의 도함수

$a \neq 1$인 양수 a에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

(1) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

(2) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

예제 5.10

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = 5a^x$

(2) $y = x \cdot 2^x$

(3) $y = \frac{1}{x}e^x$

(4) $y = e^x \sin x$

풀이

(1) $y' = 5a^x \ln a$

(2) [정리 5.1(4)]로부터

$$
\begin{aligned}
y' &= (x \cdot 2^x)' = (x)'2^x + x(2^x)' \\
&= 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \ln 2 = 2^x(1 + x\ln 2)
\end{aligned}
$$

(3) $y = \dfrac{1}{x}e^x = \dfrac{e^x}{x}$ 이므로 [정리 5.1(5)]에 의하여

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \\
&= \frac{e^x(x-1)}{x^2}
\end{aligned}
$$

(4) $y' = (e^x \sin x)' = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)'$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \sin x + e^x \cos x \\
&= e^x(\sin x + \cos x)
\end{aligned}
$$

예제 5.11

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = a^x \sin x$

(2) $y = x^3 e^x$

풀이

(1) $$\begin{aligned} y' = (a^x \sin x)' &= (a^x)' \sin x + a^x (\sin x)' \\ &= (a^x \ln a) \sin x + a^x \cos x \\ &= a^x (\ln a \cdot \sin x + \cos x) \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} y' = (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' &= 3x^2 e^x + x^3 e^x \\ &= x^2 e^x (3 + x) = x^2 e^x (x + 3) \end{aligned}$$

5.4 고차도함수

- **삼각함수의 미분법**

  $y = f(x)$를 연속해서 두 번 반복하여 미분한 함수를 2차 도함수라고 정의한다.

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

$y = f(x)$를 연속하여 n번 미분한 함수를 n차 도함수라고 정의한다.

n 차 도함수는 n-1차 도함수가 미분가능할 때 정의될 수 있음에 주의하라.

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

예제 5.12

다음 다항함수의 n차 도함수를 구하라.

$$y = x^n$$

풀이

$$y' = nx^{n-1},\ \ y'' = n(n-1)x^{n-2},\ \ y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3},\ \ \cdots$$

이므로 n차 도함수를 유추하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= n(n-1)(n-2)\ \cdots\ 2\cdot 1x^{n-n} \\ &= n(n-1)(n-2)\ \cdots\ 2\cdot 1 = n! \end{aligned}$$

[참고] $n!$의 계산(n은 양의 정수)

$n!$은 1부터 양의 정수 n까지를 연속하여 모두 곱한 것으로 정의한다.

$$n! = n(n-1)(n-2)\ \cdots\ 3\cdot 2\cdot 1$$

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

예제 5.13

다음 함수의 n차 도함수를 구하라.

(1) $y = e^x$

(2) $y = \dfrac{1}{x}$

풀이

(1) $y' = e^x,\ \ y'' = e^x,\ \ y''' = e^x,\ \ \cdots$

$$\therefore\ y^{(n)} = e^x$$

(2) $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ 이므로

$$y' = (-1)x^{-1-1} = (-1)x^{-2}$$

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2x^{-3}$$

$$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3\ \cdots\ (n-1)n\, x^{-(n+1)} \\ &= (-1)^n\, n!\, x^{-n-1} \end{aligned}$$

5.5 합성함수와 역함수의 미분법

- **합성함수의 미분법**

두 함수 $y = f(u)$와 $u = g(x)$가 미분가능하면, 다음의 합성함수 $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$도 미분가능하며 다음과 같이 미분할 수 있다.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

예를 들어, 앞에서 언급한 두 함수 $y=u^{10}$, $u = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$의 합성함수 $y = (x^3 + 2x^2 + 3x + 1)^{10}$의 도함수를 구해보자.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 10u^9 \cdot (3x^2 + 4x + 3) \\ &= 10(x^3 + 2x^2 + 3x + 1)^9 (3x^2 + 4x + 3) \end{aligned}$$

$$\rightarrow y' = 10(x^3+2x^2 + 3x+1)^9 (x^3+2x^2 + 3x+1)'$$

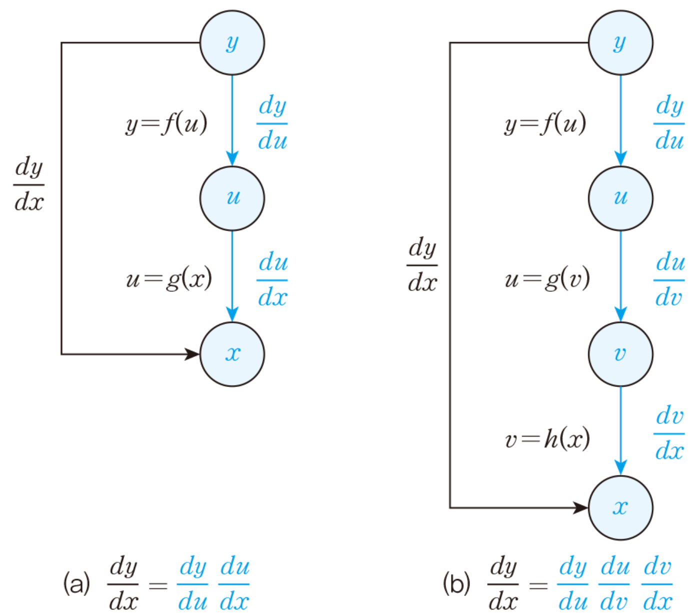
$$= 10(x^3+2x^2 + 3x+1)^9 (3x^2 + 4x + 3)$$

일반적으로 합성함수의 도함수는 세 개 이상의 미분가능한 함수 $f(u)$, $g(v)$, $h(x)$가 합성된 경우로 확장될 수 있다. 즉,

$$y = f(u),\ \ u = g(v),\ \ v = h(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

- 합성함수에 대한 미분 관계도



[그림 5.3] 합성함수에 대한 미분 관계도

예제 5.14

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y=(3x^2+2x+1)^{100}$

(2) $y=4\sin(5x^2+3x+1)$

(3) $y=e^{4x+2}$

(4) $y=\dfrac{1}{ax+b}$ (단, a와 b는 상수)

풀이

(1) $y=u^{100},\ u=3x^2+2x+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=100u^{99}\cdot(6x+2)$$

$$\therefore\ y'=100(3x^2+2x+1)^{99}\cdot(6x+2)$$

(2) $y=4\sin u,\ u=5x^2+3x+1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(4\cos u)\cdot(10x+3)$$

$$\therefore\ y'=\{4\cos(5x^2+3x+1)\}(10x+3)$$

(3) $y=e^u,\ u=4x+2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot 4$$

$$\therefore\ y'=e^{4x+2}\cdot 4=4e^{4x+2}$$

(4) $y=\dfrac{1}{u},\ u=ax+b$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(-\frac{1}{u^2}\right)\cdot a=-\frac{a}{(ax+b)^2}$$

예제 5.15

$f(x)$가 미분가능한 함수라고 가정하고 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = f(ax+b)$ (단, a와 b는 상수)

(2) $y = \{f(x)\}^n$

(3) $y = \sqrt{f(x)}$

풀이

(1) 합성함수의 미분법에 의하여

$$y=f(u),\quad u=ax+b$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot a=af'(ax+b)$$

(2) 합성함수의 미분법에 의하여

$$y=u^n,\quad u=f(x)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\cdot f'(x)$$

$$\therefore\ y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

(3) 주어진 함수를 지수로 표현하면 $y=\sqrt{f(x)}=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$ 이 된다.

합성함수의 미분법에 의하여 $y=u^{\frac{1}{2}},\ u=f(x)$이므로

$$\begin{aligned}y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\&=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot f'(x)=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}f'(x)\\&=\frac{1}{2}\{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}f'(x)\\&=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\end{aligned}$$

예제 5.16

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$

(3) $f(x)=\ln(x^4+3x^3)$

(4) $f(x)=e^{h(x)}$ (단, $h(x)=\sin 2x$)

풀이

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+x}=(x^2+x)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+x)'=\frac{1}{2}(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+3}=(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2+2x+3)'=\frac{1}{3}(x^2+2x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+2)$$

$$=\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}}$$

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{x^4+3x^3}(x^4+3x^3)'=\dfrac{4x^3+9x^2}{x^4+3x^3}$

(4) $f(x)=e^{h(x)}=e^{\sin 2x}$ 이므로 합성함수 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{\sin 2x}(\sin 2x)' \\ &=e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2x)' \\ &=e^{\sin 2x}(\cos 2x)\cdot 2=2e^{\sin 2x}\cos 2x \end{aligned}$$

2) 역함수의 미분법

- $y = f^{-1}(x) = a^x$의 도함수 계산

x y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

- 역함수의 미분법

미분가능한 함수 $y = f(x)$의 역함수 $x = f^{-1}(y)$가 존재하고 $f'(x) \neq 0$이면, 역함수는 미분가능하며 다음 관계가 성립한다.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{f'(x)}$$

예제 5.17

함수 $y = 3x^3 + x - 1$에 대하여 역함수의 도함수 $\dfrac{dx}{dy}$를 구하라.

풀이

주어진 함수는 x에 대한 3차식이므로 x에 대하여 식을 정리하기는 어렵다. [정리 5.5]의 관계를 이용하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{9x^2 + 1}$$

이 된다.

예제 5.18

다음 함수에 대한 역함수의 도함수 $\frac{dx}{dy}$ 를 구하라.

(1) $y=\frac{x}{x^2+1}$

(2) $y=a^x$ (단, $a\neq1$, $a>0$)

풀이

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{(x^2+1)^2}{-x^2+1}$$

(2) $\frac{dy}{dx}=a^x\ln a$ 이므로

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{a^{-x}}{\ln a}$$

3) 로그함수의 도함수

- $y = \log_a x$ 의 도함수 계산

역함수의 미분법을 적용하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x}\log_a e$$

- 로그함수의 도함수

$a \neq 1$ 인 양수 a에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

(1) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x}\log_a e$

(2) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

예제 5.19

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = \log_3(5x+2)$

(2) $y = \ln(\ln x)$

(3) $y = (\ln x)^3$

풀이

(1) $y' = \dfrac{1}{(5x+2)\ln 3}(5x+2)' = \dfrac{5}{(5x+2)\ln 3}$

(2) [정리 5.6(2)]와 합성함수의 미분법에 의하여

$$y' = \frac{1}{\ln x}(\ln x)' = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$$

(3) $y' = 3(\ln x)^2(\ln x)' = 3(\ln x)^2\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x}(\ln x)^2$

예제 5.20

다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = e^x \ln(\sin x)$

(2) $y = \ln(x \sin x)$

풀이

(1)
$$\begin{aligned} y' &= (e^x)' \cdot \ln(\sin x) + e^x(\ln(\sin x))' \\ &= e^x \cdot \ln(\sin x) + e^x\left(\frac{1}{\sin x}(\sin x)'\right) \\ &= e^x \ln(\sin x) + e^x \cot x \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x \sin x}(x \sin x)' \\ &= \frac{1}{x \sin x}\{(x)' \sin x + x(\sin x)'\} \\ &= \frac{1}{x \sin x}(\sin x - x \cos x) \end{aligned}$$

5.6* 음함수와 매개변수함수의 미분법

- **음함수의 미분법**

양함수 표현 : 함수를 표현할 때 $y = f(x)$와 같은 형식으로 표현하는 방식

음함수 표현 : 두 변수 x와 y를 포함하는 관계식 $f(x, y) = 0$과 같은 형식으로 표현하는 방식

- 음함수의 미분

→ 음함수를 미분할 때는 미분하는 변수가 무엇인지를 확인하는 것이 중요하다.

① 음함수를 x 로 미분하는 경우 y 와 관련된 항을 미분할 때는 합성함수의 미분법을 사용하여 미분한다.

② 음함수를 y 로 미분하는 경우 x 와 관련된 항을 미분할 때는 마찬가지로 합성함수의 미분법을 사용한다.

- 음함수 $x^2+y^2-1=0$에서 $\frac{dy}{dx}$의 계산

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(1)=0$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

- 음함수 $x^2+y^2-1=0$에서 $\frac{dx}{dy}$의 계산

$$\frac{d}{dy}(x^2)+\frac{d}{dy}(y^2)-\frac{d}{dy}(1)=0$$

$$2x\frac{dx}{dy}+2y=0$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2y}{2x}=-\frac{y}{x}$$

예제 5.21

다음 음함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{dx}{dy}$를 각각 구하라.

$$x^4 - 2y^3 + y = 0$$

풀이

주어진 음함수를 먼저 x로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(2y^3) + \frac{d}{dx}(y) = 0$$

$$4x^3 - 6y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 6y^2) = -4x^3$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3}{1-6y^2} = \frac{4x^3}{6y^2-1}$$

한편, 주어진 음함수를 y로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dy}(x^4) - \frac{d}{dy}(2y^3) + \frac{d}{dy}(y) = 0$$

$$4x^3\frac{dx}{dy} - 6y^2 + 1 = 0$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy} = \frac{6y^2-1}{4x^3}$$

예제 5.22

다음 함수에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

(1) $x = \sin y$

(2) $\sin x + \sin y = 1$

(3) $x = \cos y$

풀이

(1) 양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$1=\cos y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\sec y$$

(2) 양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\{\sin x+\sin y\}=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\cos x+\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\cos y}$$

(3) 양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(\cos y)$$

$$1=-\sin y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\operatorname{cosec} y$$

예제 5.23

다음 음함수에서 $\dfrac{dy}{dx}$ 와 $\dfrac{dx}{dy}$ 를 각각 구하라.

$$x^2 + 3x^2 y - 4 = 0$$

풀이

양변을 x로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(3x^2y)-\frac{d}{dx}(4)=0$$

$$2x+\left\{\frac{d}{dx}(3x^2)\right\}\cdot y+(3x^2)\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$2x+6xy+3x^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+6xy}{3x^2}$$

한편, 양변을 y로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dy}(x^2)+\frac{d}{dy}(3x^2y)-\frac{d}{dy}(4)=0$$

$$2x\frac{dx}{dy}+\left\{\frac{d}{dy}(3x^2)\right\}y+3x^2\frac{d}{dy}(y)=0$$

$$2x\frac{dx}{dy}+6x\frac{dx}{dy}\cdot y+3x^2=0$$

$$(2x+6xy)\frac{dx}{dy}=-3x^2$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy}=-\frac{3x^2}{2x+6xy}$$

2) 매개변수함수의 미분법

양함수 또는 음함수 x y

직접적으로 표현 x y 매개변수

(Parameter) 간접적으로 표현

- 매개변수함수

매개변수함수

x와 y가 매개변수 t에 의하여

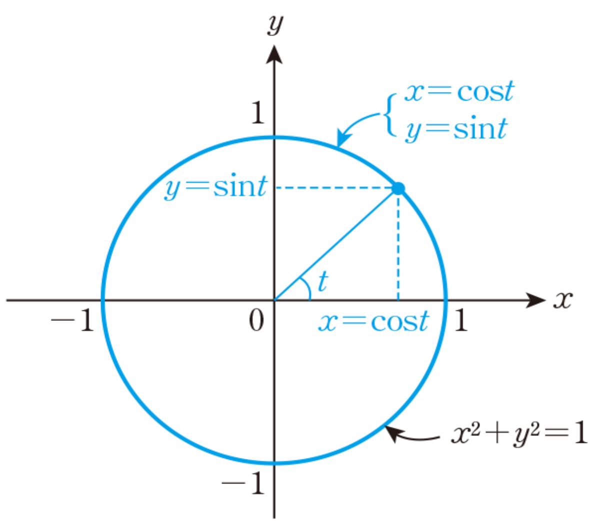
$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

의 형태로 표현될 때, 이 함수를 매개변수함수(Parameteric Function)라고 정의한다.

- 매개변수함수의 예(원의 방정식)

① $x = \cos t,\ \ y = \sin t$

② $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$



[그림 5.4] 원에 대한 두 가지 가능한 수학적인 표현

• 매개변수함수의 도함수

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하면

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)}=\frac{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

가 성립된다. 여기서 x가 t에 대하여 미분가능하다는 조건으로부터 $\Delta t\to 0$일 때 $\Delta x\to 0$이 된다는 것에 주의하라.

• 매개변수함수의 미분법

매개변수함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 각각 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 다음의 관계가 성립된다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

예제 5.24

다음의 매개변수함수에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$ 를 구하라.

(1) $x = t^2 + 2t + 3,\ \ y = t^3 + 3t + 1$

(2) $x = \theta + \sin\theta,\ \ y = \theta + \cos\theta$

풀이

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2t + 2,\ \dfrac{dy}{dt} = 3t^2 + 3$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)} = \frac{3t^2+3}{2t+2}$$

을 얻을 수 있다.

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} = 1 + \cos\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta} = 1 - \sin\theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

를 얻을 수 있다.

예제 5.25

θ를 매개변수로 하는 다음의 매개변수함수에 대하여 물음에 답하라.

$$x = 2\cos^3\theta,\ \ y = a\sin^3\theta\ \ (\text{단, } a\text{는 양의 상수})$$

(1) $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

(2) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \tan^2\theta$가 되도록 양의 상수 a의 값을 구하라.

풀이

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = 2\cdot 3\cos^2\theta \cdot (\cos\theta)' = -6\sin\theta \cdot \cos^2\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta(\sin\theta)' = 3a\cos\theta \cdot \sin^2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{3a\cos\theta \cdot \sin^2\theta}{-6\sin\theta \cdot \cos^2\theta}$$

$$= -\frac{a}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{a}{2}\tan\theta$$

(2) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \left(-\dfrac{a}{2}\tan\theta\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}\tan^2\theta = \tan^2\theta$이므로

$$\frac{a^2}{4} = 1 \qquad \therefore\ a^2 = 4,\ \ a = \pm 2$$

a는 양의 상수이므로 $a = 2$가 된다.

5.7 로피탈 정리

로피탈(L'Hopital) 정리는 미분과 연계하여 함수의 극한을 구할 때 매우 유용한 정리이며, 어떤 함수의 극한을 보다 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다.

$x \to a$ 일 때 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$로 구성되는 분수함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 극한이 부정형, 즉 $\dfrac{0}{0}$ 또는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 형태인 경우 다음의 관계가 성립한다.

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \quad (\text{단, } f'(x) \neq 0)$$

- 로피탈 정리의 적용 예

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x\cos x}{1-e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{(2x\cos x)'}{(1-e^x)'}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x + 2x(-\sin x)}{-e^x} = -2$$

→ 로피탈 정리를 이용하지 않고 함수의 극한을 계산하려면 많은 노력이 필요하다.

예제 5.26

다음 함수의 극한을 로피탈 정리를 이용하여 구하라.

(1) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)}$

풀이

(1) 로피탈 정리를 이용하면

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{\cos(x-a)} = \frac{\cos a}{1} = \cos a$$

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{(\sin 2x)\cdot 2}$

다시 한번 로피탈 정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{4\cos 2x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 4x}{\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 4x \cdot 4}{\cos x} = 8\end{aligned}$$

예제 5.27

다음 지수함수들의 극한값을 로피탈 정리를 이용하여 구하라.

(1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ (단, a는 상수)

(2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^{2h} - 1}{2h}$

풀이

(1) $\lim_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{a^h \ln a}{1} = \ln a$

(2) $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^{2h} - 1}{2h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2e^{2h}}{2} = 1$

예제 5.28

도함수의 정의로부터 다음 함수의 도함수를 구하고자 한다. 도함수를 구하는 과정에서 로피탈 정리를 적용하지 않는 경우와 적용하는 경우 각각에 대하여 도함수를 구하라.

(1) $f(x) = \ln x$

(2) $f(x) = \log_a x$

풀이

(1) 도함수의 정의로부터

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

여기에서 e의 정의에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \triangleq e$$

가 되므로 $f'(x)$는 다음과 같다.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}$$

풀이

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

한편, 도함수의 정의에서 로피탈 정리를 적용해본다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

로피탈 정리를 적용하여 분모와 분자를 h로 미분하면 $f'(x)$는 다음과 같다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h}}{1} = \frac{1}{x}$$

풀이

(2) 도함수의 정의로부터

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x}\log_a e
\end{aligned}
$$

한편, 도함수의 정의에서 로피탈 정리를 적용해본다.

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}
$$

로피탈 정리를 적용하여 분모와 분자를 h로 미분하면 $f'(x)$는 다음과 같다.

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)\ln a}}{1} = \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{x}\log_a e
$$