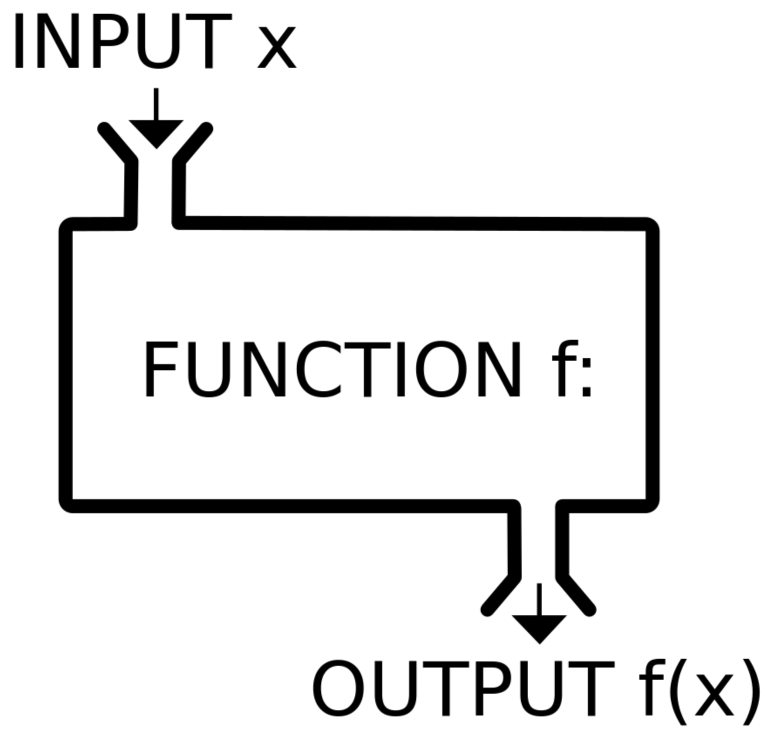


FUNCTIONS

Jin Hyun Kim

함수

1) 함수의 정의와 그래프
2) 함수의 사칙연산
3) 단사함수와 전사함수
4) 전단사함수와 일대일 대응
5) 합성함수
6) 역함수

2.1 함수의 정의와 그래프

1) 함수의 정의

- 함수는 관계(Relation)의 특별한 경우이다.

정의 2.1 함수의 규칙

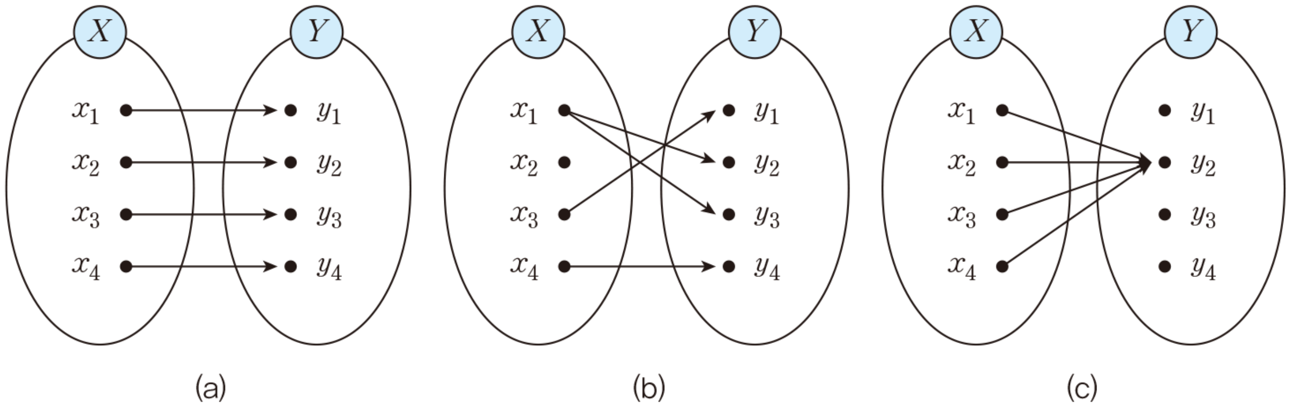
> 두 집합을 X와 Y라 할 때, X에 있는 임의의 한 원소 x에 대하여 오로지 Y의 한 원소 y만을 대응시키는 관계를, 특히 함수관계 또는 함수라고 정의한다.

- X에 있는 임의의 한 원소 x

  "임의의 한 원소" 라는 의미는 X에 있는 모든 원소가 해당될 수 있으므로 X에 있는 어떠한 원소도 빠져서는 안된다.

- 오로지 Y의 한 원소 y만을 대응

  X에 있는 임의의 한 원소가 Y의 한 원소에만 대응되어야 하며 2개 이상의 원소에 대응되면 안된다.



[그림 2.1] 여러 가지 대응

- 그림 2.1(a): X의 각 원소가 Y의 원소 하나에만 대응된다.

  → 함수(관계)이다.

  그림 2.1(b): X의 원소 x_1이 Y의 y_2와 y_3의 2개의 원소에 대응된다.

  X의 x_2에 대응되는 Y의 원소가 없다 .

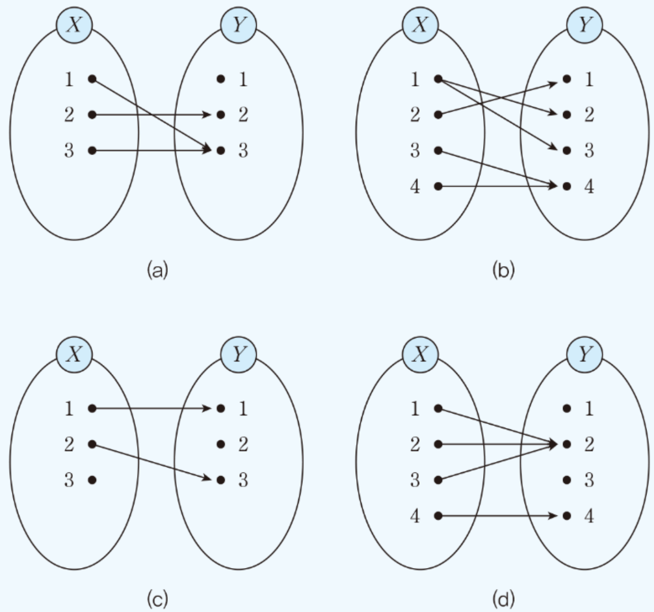
  → 함수(관계)가 아니다.

  그림 2.1(c): X의 원소 x_1이 Y의 원소 y_2 하나에만 대응된다. 나머지 원소 x_2, x_3, x_4도 Y의 원소 y_2 하나에만 대응된다.

  → 함수(관계)이다.

예제 2.1

다음의 대응관계에서 함수를 찾고 그 이유를 설명하라.



풀이

(a) X의 각 원소에 Y의 한 원소를 대응시키는 규칙이므로 함수이다.

(b) X의 원소 1이 Y의 원소 2개, 즉 2와 3에 대응시키는 규칙이므로 함수가 아니다.

(c) X의 원소 3이 대응되지 않기 때문에 [정의 2.1]의 함수규칙을 만족하지 않는다. 따라서 함수가 아니다.

(d) X의 각 원소에 Y의 한 원소를 대응시키는 규칙이므로 함수이다.

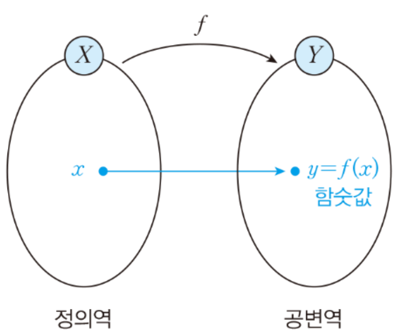
함수의 수학적인 정의

정의 2.2

집합 X의 임의의 한 원소 x에 대하여 오로지 집합 Y의 한 원소 y만을 대응시키는 대응관계 f를 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 정의하며 다음과 같이 나타낸다.

$$f:\ X \to Y$$

이 때 집합 X를 함수 f의 정의역(Domain), 집합 Y를 함수 f의 공변역(Codomain)이라 한다. 또한, 함수 f에 대하여 X의 한 원소 x에 대응되는 Y의 원소 y를 $y = f(x)$로 나타내며, x의 함숫값이라고 정의한다.

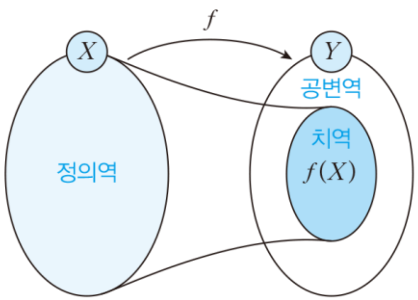


[그림 2.2] 함수와 함숫값

- $y = f(x)$는 f에 의한 x의 상(Image) 또는 x에서의 함숫값이라 부른다.

- **함수의 치역(Range)**: 집합 X의 모든 원소에 대한 함숫값을 구하여 집합으로 모아놓은 것

$$f(X) \triangleq \{y;\ y = f(x),\ \forall x \in X\}$$



[그림 2.3] 치역과 공변역, $f(X) \subseteq Y$

- 공학적으로 다루는 함수는 실수 R에서 실수 R로의 함수가 대부분이므로 함수를 다음과 같이 간결하게 표기한다.

$$\left.\begin{array}{l} f: R \to R \\ y = f(x) \end{array}\right\} \longrightarrow \quad y = f(x)$$

- ## 집합의 표현: 원소나열법과 조건제시법

원소나열법은 원소를 일일이 나열하여 집합기호로 표시, 원소의 개수가 많으면 불편하다.

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, B = \{x_1, x_2, x_3\}$$

조건제시법은 집합을 규정하는데 적절한 조건을 제시하여 표시한다.

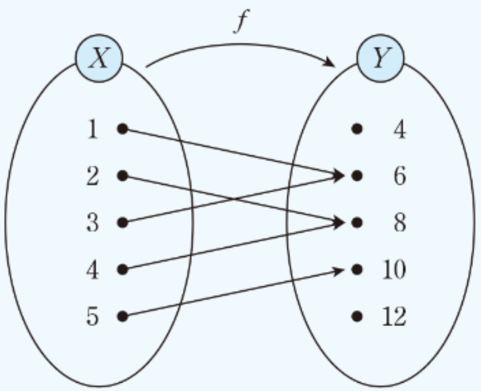
$$\{\underbrace{\text{변수}};\ \underbrace{\text{변수에 대한 조건 제시}}\}$$

변수에 대한 조건을 만족하는 변수들의 집합

$$A=\{x;\, 1 \le x \le 4,\, x\text{는 자연수}\}$$
$$B = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$$

예제 2.2

다음의 함수에 대하여 물음에 답하라.



(1) 함수 f의 정의역과 공변역을 구하라.

(2) 함숫값 $f(2)$, $f(3)$을 각각 구하라.

(3) 함수 f의 치역 $f(X)$를 구하라.

풀이

(1) 정의역 $X=\{1,2,3,4,5\}=\{x;1\le x\le 5,\ x\text{는 자연수}\}$

공변역 $Y=\{4,6,8,10,12\}=\{y;4\le y\le 12,\ y\text{는 짝수}\}$

(2) 원소 $x=2$는 8에 대응되므로 $f(2)=8$이며, 원소 $x=3$은 6에 대응되므로 $f(3)=6$ 이다.

(3) 치역 $f(X)$는 X의 모든 원소들에 대한 함숫값들의 집합이므로 $f(X)=\{6,8,10\}$이 된다.

2) 함수의 그래프

- 함수의 그래프는 정의역을 가로축, 공변역을 세로축으로 하여 대응관계를 좌표평면상의 순서쌍으로 표현하는 것이다.

$$G = \{\underbrace{(x,y)}_{①};\ \underbrace{y = f(x)}_{②},\ \underbrace{\forall x \in X}_{③}\}$$

① (x,y) : 순서쌍 (x,y)의 집합을 나타낸다.
x는 정의역 원소이고 y는 ②에 제시되어 있다.
② $y=f(x)$: y는 정의역 원소 x에 대한 함숫값 $f(x)$를 나타낸다.
③ $\forall x \in X$: $\forall$ 는 임의의 또는 모든을 나타내는 수학기호이므로 정의역의 모든 원소를 의미한다.

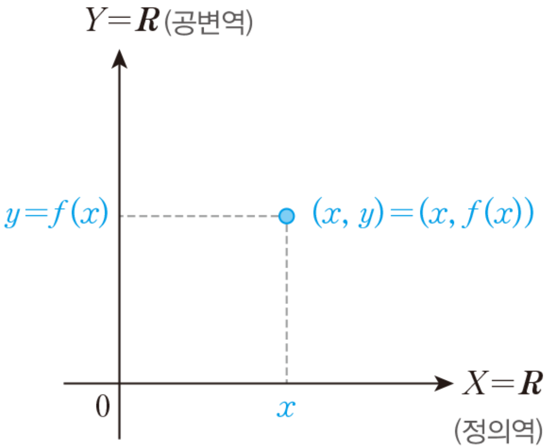
- ①~③을 종합하면, 함수의 그래프는 정의역에 있는 임의의 한 원소와 그 원소의 함숫값에 대한 순서쌍을 구하여 집합 G로 표시한 것이며, 이를 좌표평면에 도시한 것을 함수의 그래프라고 한다.

- 독립변수: 정의역에 속하는 원소 x

- 종속변수: 공변역에 속하는 원소 y

x는 수많은 값을 독립적으로 가질 수 있다

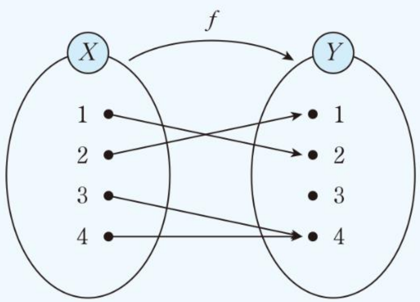
y는 x에 따라 종속적으로만 함숫값을 가질 수 있다.



[그림 2.4] 함수 f의 그래프 G

예제 2.3

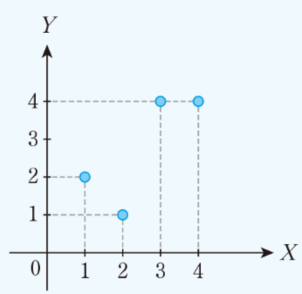
다음 함수의 그래프 G를 순서쌍으로 표시하고, 좌표평면에 도시하라.



풀이

그래프의 정의에 따라 f의 그래프 G를 순서쌍으로 표현하여 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.

$$G = \{(1,2),\ (2,1),\ (3,4),\ (4,4)\}$$



예제 2.4

$\boldsymbol{R}$에서 $\boldsymbol{R}$로의 함수 f가 다음과 같을 때 f의 그래프 G를 좌표평면에 나타내어라.

$$f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$$
$$y=f(x)=-x+1$$

풀이

함수 f의 그래프 G를 순서쌍으로 표현하면 다음과 같다.

$$G=\{(x,y);\ y=-x+1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}\}$$

정의역에 있는 몇 개의 x값에 대하여 순서쌍을 구하면 다음과 같다.

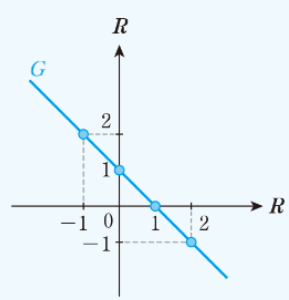
$x=-1$일 때 $y=f(-1)=-(-1)+1=2$ $\quad\therefore\ (-1,2)$

$x=0$일 때 $y=f(0)=-0+1=1$ $\quad\therefore\ (0,1)$

$x=1$일 때 $y=f(1)=-1+1=0$ $\quad\therefore\ (1,0)$

$x=2$일 때 $y=f(2)=-2+1=-1$ $\quad\therefore\ (2,-1)$

정의역이 실수 $\boldsymbol{R}$이므로 위의 순서쌍들이 포함되도록 하는 직선을 그리면 f의 그래프 G가 된다.



함수

1) 함수의 정의와 그래프
2) 함수의 사칙연산
3) 단사함수와 전사함수
4) 전단사함수와 일대일 대응
5) 합성함수
6) 역함수

2.2 함수의 사칙연산

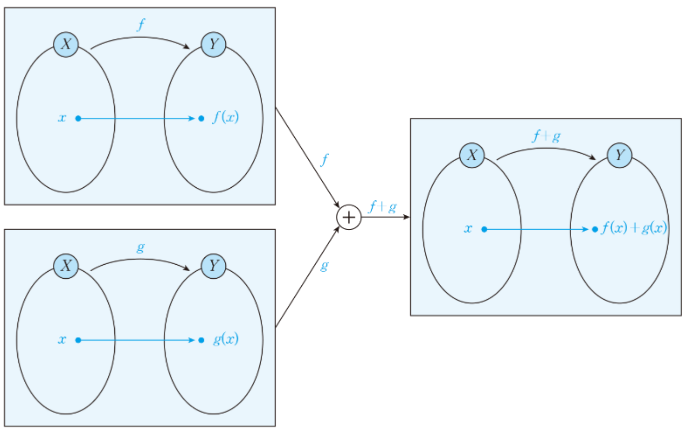
1) 함수의 덧셈

$$f:\ X \to Y \quad\quad g:\ X \to Y$$
$$\quad y = f(x), \quad\quad y = g(x)$$

- 함수 f와 g의 합은 $f+g$로 표시하며, 정의역과 공변역은 함수 f와 g의 정의역 및 공변역과 동일하다.

  새로운 함수 $f+g$는 X의 원소 x를 Y의 $f(x)+g(x)$에 대응시킨다.

$$f+g:\ X \to Y$$
$$(f+g)(x) \triangleq f(x)+g(x)$$



[그림 2.5] 두 함수 f와 g의 합$(f+g)$

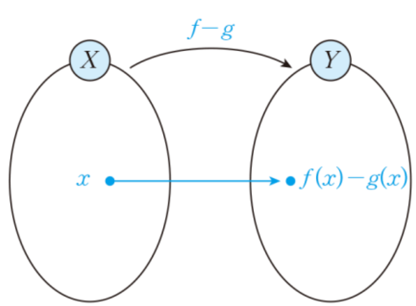
2) 함수의 뺄셈

$$f:\ X \to Y \qquad\qquad g:\ X \to Y$$
$$\quad y = f(x)\ , \qquad\qquad y = g(x)$$

- 함수 f와 g의 차는 $f-g$로 표시하며, 정의역과 공변역은 함수 f와 g의 정의역 및 공변역과 동일하다. 새로운 함수 $f-g$는 X의 원소 x를 Y의 $f(x)-g(x)$에 대응시킨다.

$$f-g:\ X \to Y$$
$$(f-g)(x) \triangleq f(x)-g(x)$$

- 정의역이 다른 두 함수 f와 g의 차 $f-g$는 $f-q$의 정의역을 함수 f와 q의 정의역간 교집합으로 제한함으로써 정의할 수 있다.



[그림 2.6] 두 함수 f와 g의 차$(f-g)$

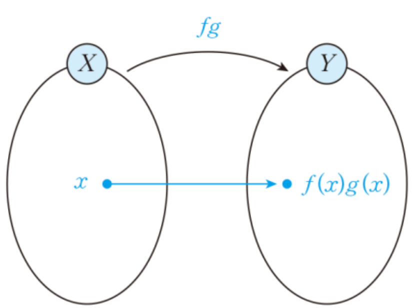
3) 함수의 곱셈

$$f: X \to Y \quad , \quad g: X \to Y$$
$$\quad y = f(x) \qquad\quad y = g(x)$$

- 함수 f와 g의 곱은 fg로 표시하며, 정의역과 공변역은 함수 f와 g의 정의역 및 공변역과 동일하다. 새로운 함수 fg는 X의 원소 x를 Y의 $f(x)g(x)$에 대응시킨다.

$$fg: X \to Y$$
$$(fg)(x) \triangleq f(x)g(x)$$

- 정의역이 다른 두 함수 f와 g의 곱 fg는 fg의 정의역을 함수 f와 g의 정의역 간 교집합으로 제한함으로써 정의할 수 있다.



[그림 2.7] 두 함수 f와 g의 곱(fg)

4) 함수의 나눗셈

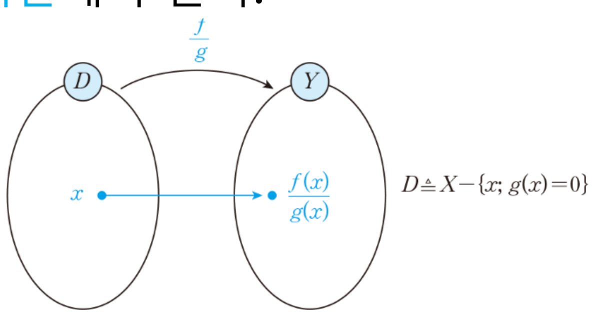
$$f: X \to Y, \quad y = f(x) \qquad g: X \to Y, \quad y = g(x)$$

- 함수 f와 g의 나누기는 $\frac{f}{g}$로 표시하며, 정의역 D는 $X - \{x;\ g(x) = 0\}$이다. 새로운 함수 $\frac{f}{g}$는 D의 원소 x를 Y의 $\frac{f(x)}{g(x)}$에 대응시킨다.

$$\frac{f}{g}: D \to Y$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \triangleq \frac{f(x)}{g(x)}$$

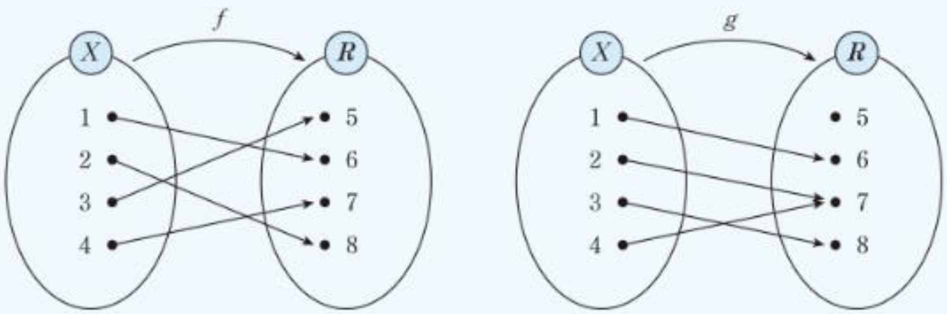
- $g(x) = 0$이 되는 경우는 함숫값이 존재하지 않기 때문에 정의역 D를 $X - \{x;\ g(x) = 0\}$으로 제한해야 한다.



[그림 2.8] 두 함수 f와 g의 나누기$\left(\frac{f}{g}\right)$

예제 2.5

두 함수 f와 g가 다음과 같이 주어질 때 $f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$의 치역을 각각 구하라.



풀이

(1) $(f+g)(1)=f(1)+g(1)=6+6=12$

$(f+g)(2)=f(2)+g(2)=8+7=15$

$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=5+8=13$

$(f+g)(4)=f(4)+g(4)=7+7=14$

따라서 $f+g$의 치역은 $\{12, 13, 14, 15\}$이다.

(2) $(f-g)(1)=f(1)-g(1)=6-6=0$

$(f-g)(2)=f(2)-g(2)=8-7=1$

$(f-g)(3)=f(3)-g(3)=5-8=-3$

$(f-g)(4)=f(4)-g(4)=7-7=0$

따라서 $f-g$의 치역은 $\{-3, 0, 1\}$이다.

(3) $(fg)(1)=f(1)g(1)=6\cdot6=36$

$(fg)(2)=f(2)g(2)=8\cdot7=56$

$(fg)(3)=f(3)g(3)=5\cdot8=40$

$(fg)(4)=f(4)g(4)=7\cdot7=49$

따라서 fg의 치역은 $\{36, 40, 49, 56\}$이다.

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)=\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{6}{6}=1$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)=\dfrac{f(2)}{g(2)}=\dfrac{8}{7}$

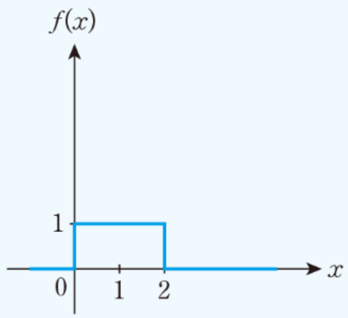
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)=\dfrac{f(3)}{g(3)}=\dfrac{5}{8}$

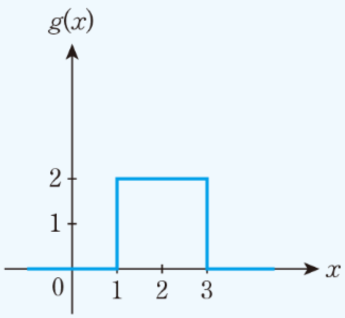
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)=\dfrac{f(4)}{g(4)}=\dfrac{7}{7}=1$

따라서 $\dfrac{f}{g}$의 치역은 $\left\{\dfrac{5}{8}, 1, \dfrac{8}{7}\right\}$이다.

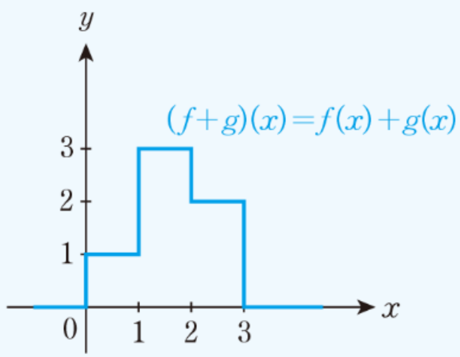
예제 2.6

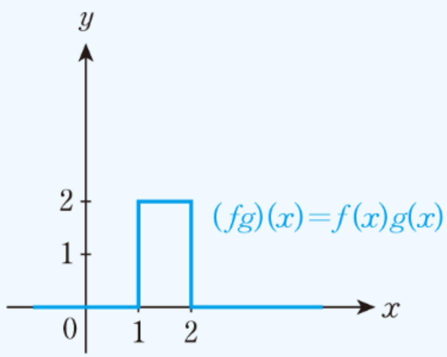
정의역과 공변역이 실수 $\boldsymbol{R}$인 두 함수 f와 g에 대하여 $(f+g)(x)$와 $(fg)(x)$를 각각 그래프로 나타내어라.





풀이





중간정리

- **함수정의**
  - $f : X \rightarrow Y,\ \ y = f(x)$
- **함수의 사칙 연산**
  - 함수값간의 사칙연산
  - 정의역이 다를 때에는 정의역 집합의 교집합
  - 주의! 나누셈은 나누는 젯수 함수값을 0으로 만드는 정의역 집합의 원소도 제외

IN NEXT ...

- **Lab with python**

함수

1) 함수의 정의와 그래프
2) 함수의 사칙연산
3) 단사함수와 전사함수
4) 전단사함수와 일대일 대응
5) 합성함수
6) 역함수

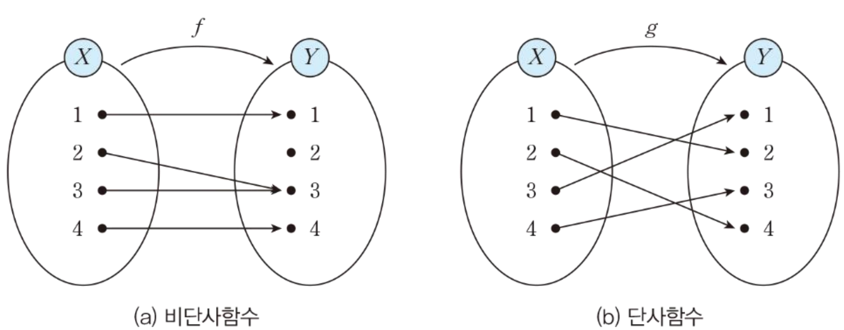
2.3 단사함수와 전사함수

1) 단사함수

- 단사함수(일대일 함수): 정의역의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 대응되는 두 함숫값도 **서로 다른** 함수이다.

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- 결과적으로 단사함수란 정의역의 원소가 다르면 대응되는 함숫값도 다른 함수를 의미한다.



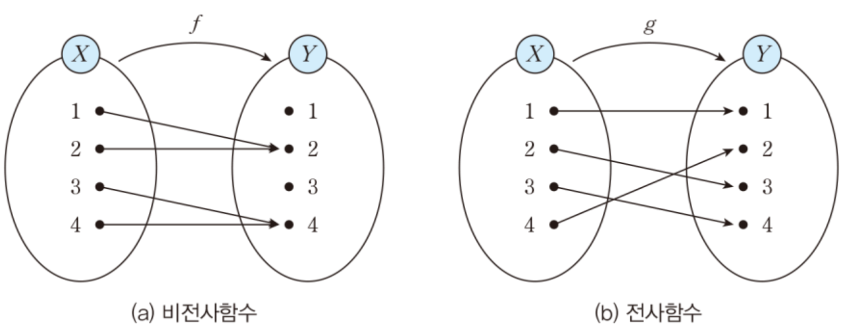
[그림 2.9] 단사와 비단사함수

2) 전사함수

- **전사함수(Onto 함수)**: 일반적으로 치역과 공변역 사이에는 $f(X) \subseteq Y$가 성립되지만, **치역과 공변역이 같**아지는 특별한 함수이다.

$$f(X) = Y$$

→ Y의 임의의 원소 $y \in Y$에 대하여 $y = f(x)$를 만족하는 원소 x가 정의역 X에 존재한다.



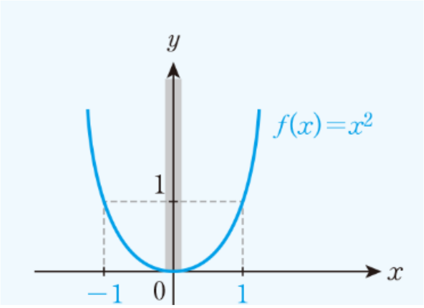
[그림 2.10] 전사함수와 비전사함수

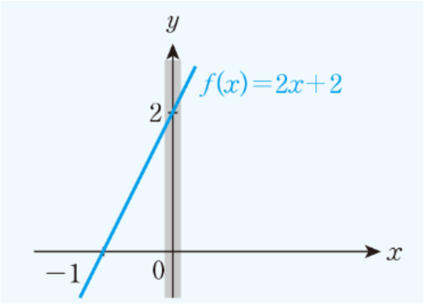
예제 2.7

함수 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$가 다음의 대응규칙을 가질 때 단사함수인지 전사함수인지를 판별하라.

(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = 2x+2$

풀이



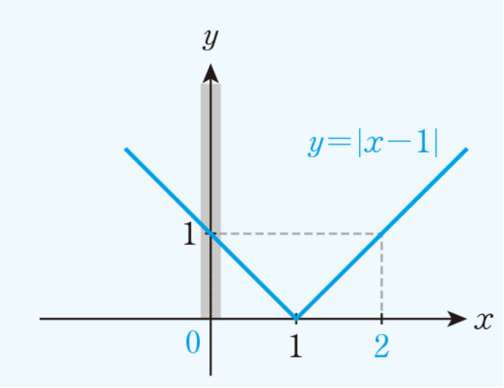


예제 2.8

다음 함수 f에 대하여 단사함수인지 전사함수인지를 판별하라.

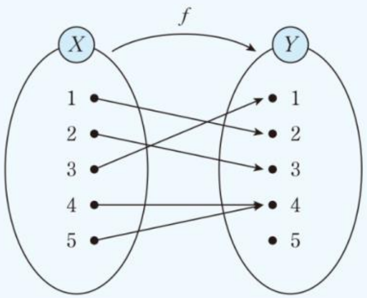
$$f:\ \boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$$
$$y=f(x)=|x-1|$$

풀이



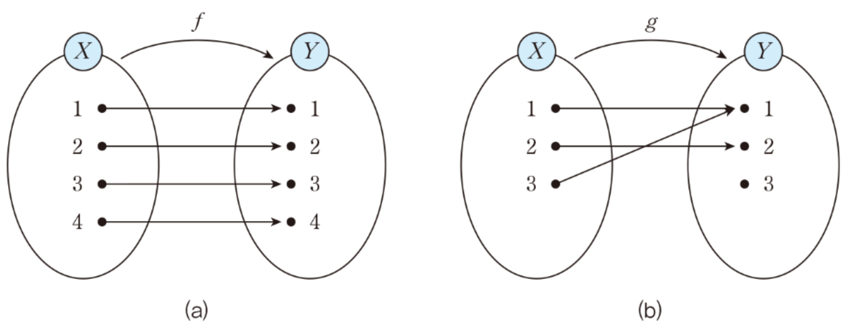
예제 2.9

다음과 같은 함수 $f:\ X\rightarrow Y$가 단사함수인지 전사함수인지를 판별하라.



2.4 전단사함수와 일대일 대응

- **전단사함수(일대일 대응 함수)**: 어떤 함수가 단사함수이면서 전사함수인 조건을 동시에 만족하는 함수이다.



[그림 2.11] 전단사함수와 비전단사함수

- 함수 $f: X \rightarrow Y$가 전단사함수이고 정의역과 공변역이 유한집합이면 두 집합 X와 Y의 원소의 개수는 동일하다.
- 두 집합 X와 Y사이에 전단사함수가 정의되어 있다는 것은 X에 속하는 원소와 Y의 원소 사이에 일대일 대응관계가 성립한다.

  → $x \in X$에 대하여 대응되는 $y \in Y$가 유일하게 하나로 결정된다.

예제 2.10

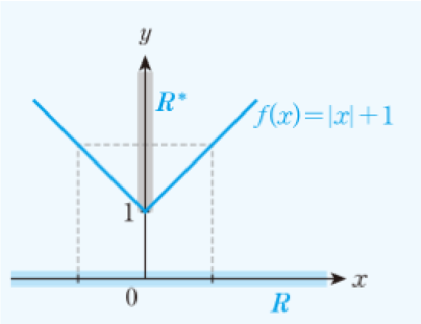
다음과 같이 정의되는 함수 f에 대하여 단사, 전사, 전단사함수인지를 판별하라. 단, $\boldsymbol{R}^*$는 1 이상의 실수 전체 집합을 나타내고, $\boldsymbol{R}^+$는 음이 아닌 실수 전체의 집합을 나타낸다.

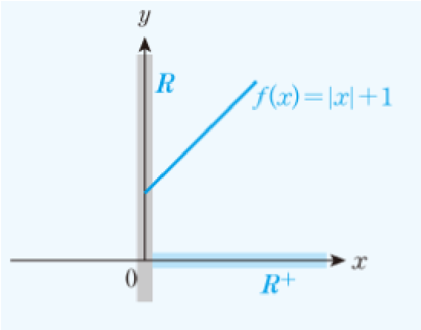
(1) $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^*, \quad y = f(x) = |x| + 1$

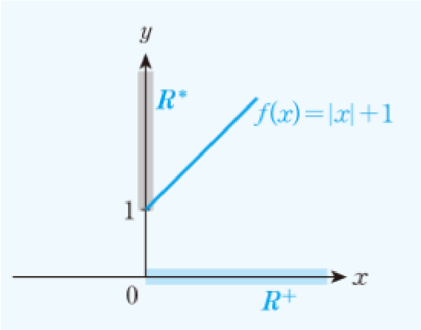
(2) $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}, \quad y = f(x) = |x| + 1$

(3) $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^*, \quad y = f(x) = |x| + 1$

풀이







함수

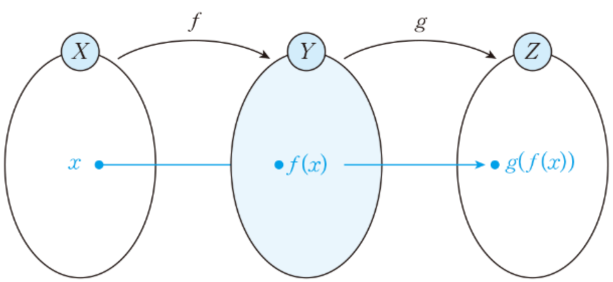
1) 함수의 정의와 그래프
2) 함수의 사칙연산
3) 단사함수와 전사함수
4) 전단사함수와 일대일 대응
5) 합성함수
6) 역함수

함수

1) 함수의 정의와 그래프
2) 함수의 사칙연산
3) 단사함수와 전사함수
4) 전단사함수와 일대일 대응
5) 합성함수
6) 역함수

2.5 합성함수

$$f: X \to Y, g: Y \to Z$$

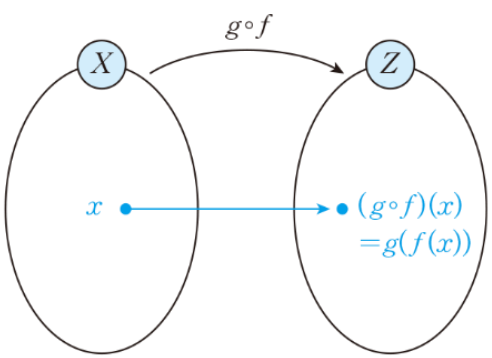


[그림 2.12] 합성함수의 정의

- 정의역 X의 원소 x에 대한 함숫값 $f(x)$가 결정된 다음, 함수 g에 대한 함숫값 $g(f(x))$가 순차적으로 결정된다.

$$g \circ f: \ X \to Z$$

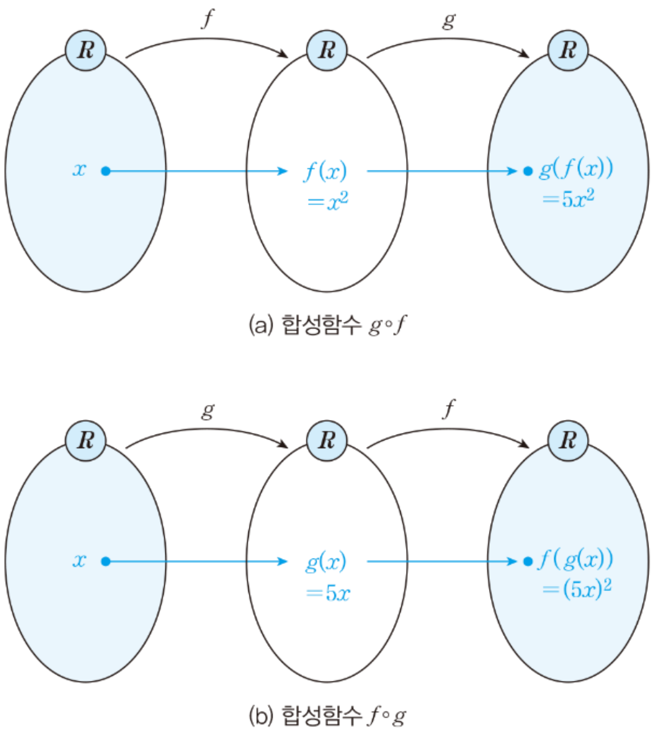
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



[그림 2.13] 합성함수 $g \circ f$

- $f \circ g$와 $g \circ f$의 비교

f는 독립변수를 제곱하는 함수이며 g는 독립변수를 5배하는 함수라고 가정한다.



[그림 2.14] 합성함수 $g \circ f$ 와 $f \circ g$ 의 비교

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 5x^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x) = (5x)^2 = 25x^2$$

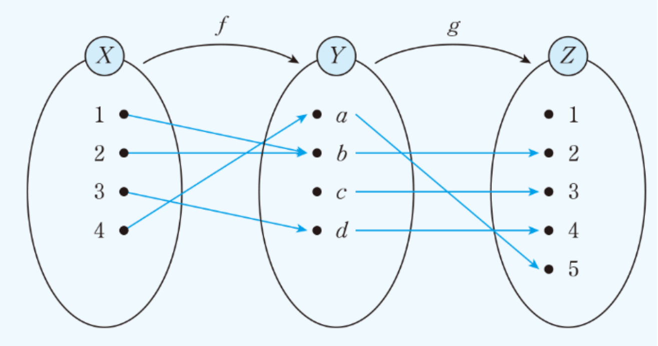
$\rightarrow g \circ f \neq f \circ g$ (함수의 합성연산은 교환법칙이 성립하지 않는다)

- 함수의 합성연산에는 결합법칙이 성립한다.

$$[f\circ(g\circ h)](x) = f((g\circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$
$$[(f\circ g)\circ h](x) = (f\circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

예제 2.11

다음과 같은 두 함수 $f: X\to Y$와 $g: Y\to Z$에 대하여 $(g\circ f)(x)$를 구하고 $g\circ f$의 치역 $(g\circ f)(X)$를 구하라.



풀이 합성함수 $g\circ f$의 함숫값을 구하면

$$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(b) = 2$$
$$(g\circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2$$
$$(g\circ f)(3) = g(f(3)) = g(d) = 4$$
$$(g\circ f)(4) = g(f(4)) = g(a) = 5$$

이므로 $g\circ f$의 치역 $(g\circ f)(X)$는 다음과 같다.

$$(g\circ f)(X) = \{2, 4, 5\}$$

예제 2.12

세 함수의 함숫값이 각각 다음과 같을 때 물음에 답하라.

$$f(x)=2x+1, \quad g(x)=3x^2, \quad h(x)=\sin x$$

(1) $(f\circ g)(x)$와 $(g\circ f)(x)$를 구하라.

(2) $(f\circ g\circ h)(x)$를 구하라.

풀이

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x^2)=2(3x^2)+1=6x^2+1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=3(2x+1)^2$

(2) 결합법칙이 성립하므로

$$\begin{aligned}(f\circ g\circ h)(x)&=[(f\circ g)\circ h](x)\\&=(f\circ g)(h(x))\\&=(f\circ g)(\sin x)=6(\sin x)^2+1=6\sin^2 x+1\end{aligned}$$

이 얻어진다.

예제 2.13

$f(x)=ax+2, \ g(x)=-2x-a$ 일 때

$f\circ g=g\circ f$ 를 만족하는 양의 상수 a를 구하라.

풀이

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-2x-a)=a(-2x-a)+2=-2ax-a^2+2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+2)=-2(ax+2)-a=-2ax-4-a$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$의 조건으로부터 양의 상수 a는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}-2ax-a^2+2&=-2ax-4-a\\a^2-a-6&=0\\(a-3)(a+2)&=0\\\therefore\ a&=3\end{aligned}$$

예제 2.14

$f(x)=x+1,\ \ h(x)=x^2+3$ 일 때 $(f\circ g)(x)=h(x)$를 만족하는 $g(x)$를 구하라.

풀이

$(f\circ g)(x)=h(x)$ 의 조건으로부터

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=h(x)$$

$$g(x)+1=x^2+3$$

$$\therefore\ \ g(x)=x^2+2$$

여기서 잠깐! 항등함수

함수 $f:\ X\to X$ 라고 가정하자.

이 때 함수 f의 대응규칙이 정의역 X의 원소 x를 공변역 X의 원소 x에 대응시킬 때, 즉 $f(x)=x$ 일 때 함수 f를 항등함수라고 정의한다.

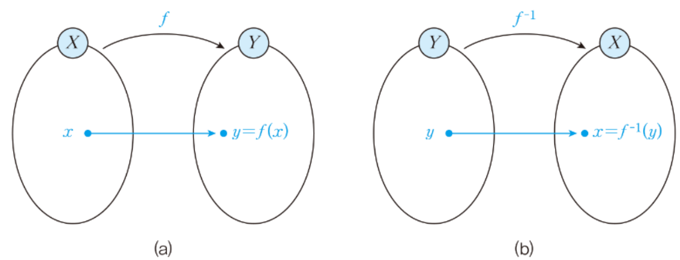
$$f:\ X\to X,\qquad f(x)=x$$

2.6 역함수

- 역함수: 주어진 함수 f의 대응관계를 반대로 뒤집어 놓은 새로운 함수 g를 f의 역함수라고 부르며 f^{-1}로 표기한다.

$$f:\ X \to Y,\ \ y = f(x)$$

$$f^{-1}:\ Y \to X,\ \ x = f^{-1}(y)$$



[그림 2.16] f와 f^{-1} 의 대응관계

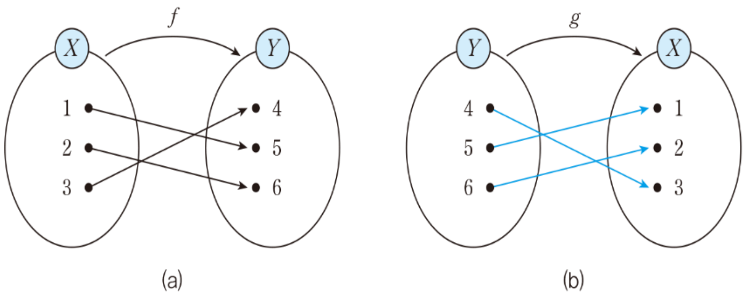
- 함수 f와 f^{-1}은 정의역과 공변역이 서로 반대이며 다음의 관계가 성립한다.

$$y = f(x) = f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y)$$

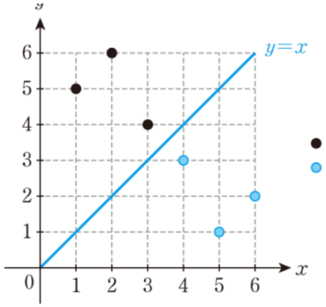
$$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)$$

$\rightarrow$ $f \circ f^{-1}$과 $f^{-1} \circ f$는 항등함수이다.

- 역함수의 대칭성

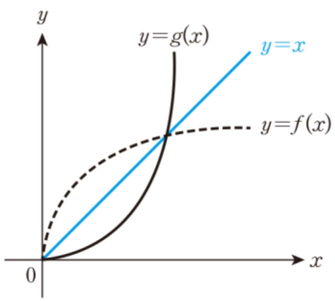


[그림 2.15] 함수와 역함수



[그림 2.17] f와 g의 그래프 비교

- 일반적으로 함수 f와 역함수 f^{-1}은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.



[그림 2.18] 역함수의 대칭성

- 역함수 구하기

① $y = f(x)$에서 x에 대하여 식을 정리한다. 즉,

$$x = f^{-1}(y)$$

② x에 대하여 정리한 식에서 역함수는 정의역과 공변역이 서로 바뀐 함수이므로

$x = f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾼다.

$$x \leftrightarrow y \Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

③ 함수 f의 정의역과 치역을 서로 바꾼다.

- $y = 2x - 1$의 역함수 구하기

① $y = 2x - 1$에서 x에 대하여 정리한다. $2x = y + 1$ $\therefore x = \frac{1}{2}(y + 1)$

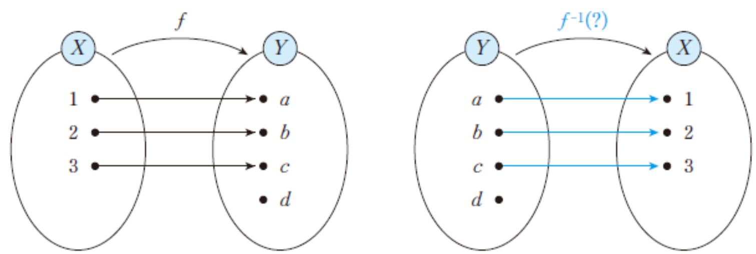
② x와 y를 서로 바꾼다. $x = \frac{1}{2}(y+1) \to y = \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

③ $y = 2x - 1$의 역함수는 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

- 역함수를 구할 때 주의할 점은 ①의 과정에서 반드시 x에 대하여 식을 정리한 다음에 역함수를 구하기 위하여 x와 y를 바꾸어 주어야 한다.

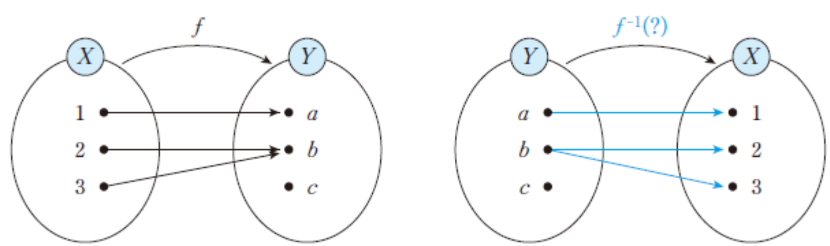
- 역함수의 존재성

① 역함수는 원함수의 정의역과 공변역을 반대로 뒤집어서 정의하기 때문에 만일 원함수가 전사함수가 아니라면 함수의 구성 요건이 충족되지 않기 때문에 역함수가 정의되지 않는다.



(a) 비전사함수에 대한 역함수 존재성

② 원함수가 단사함수가 아니라면 역함수는 함수의 구성요건이 충족되지 않아 역함수가 정의되지 않는다.



③ 결과적으로 원함수가 전단사함수이어야만 역함수가 존재한다.

예제 2.15

다음 함수들의 역함수를 구하라.

(1) $y = x^3$

(2) $y = 4x+3$

풀이

(1) $y = x^3$ 에서 x에 대하여 정리한 다음, x와 y를 서로 바꾸면 다음과 같다.

$$x^3 = y \qquad \therefore x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\longrightarrow y = x^{\frac{1}{3}}$$

따라서 $y = x^3$ 의 역함수는 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 이 된다.

(2) $y = 4x+3$ 에서 x에 대하여 정리한 다음, x와 y를 서로 바꾸면 다음과 같다.

$$4x = y-3 \qquad \therefore x = \frac{1}{4}(y-3)$$

$$\longrightarrow y = \frac{1}{4}(x-3)$$

따라서 $y = 4x+3$ 의 역함수는 $y = \frac{1}{4}(x-3)$ 이 된다.

예제 2.16

함수 f와 g의 합성함수 $f \circ g$ 의 역함수가 다음과 같다는 것을 증명하라.

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

풀이

원 함수 f와 f의 역함수 f^{-1}에 대한 합성함수는 항등함수이므로 다음과 같이 증명한다.

$$(f \circ g) \circ (f \circ g)^{-1} = \text{항등함수}$$

① $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \text{항등함수}$

② $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ g = \text{항등함수}$

위의 ①과 ②로부터 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$가 성립한다.

예제 2.17

$f(x)=3x+4$, $g(x)=4x+1$ 일 때 다음을 구하라.

(1) $f^{-1}(1)$

(2) $(f^{-1})^{-1}(1)$

(3) $(g\circ f)^{-1}(1)$

(4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$

풀이

(1) $f(-1)=3\times(-1)+4=1$ 이므로 역함수의 정의에 의하여 $f^{-1}(1)=-1$ 이다.

(2) 역함수를 다시 역함수를 취하면 원래의 함수가 되므로

$(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=3\times 1+4=7$ 이다.

(3) 먼저 $(g\circ f)(x)$를 계산하면 다음과 같다.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=4(3x+4)+1=12x+17$

$(g\circ f)(x)=1$ 이 되는 x를 계산하면

$$(g\circ f)(x)=12x+17=1 \qquad \therefore\ x=-\frac{4}{3}$$

이므로 $(g\circ f)\left(-\frac{4}{3}\right)=1$ 이 된다.

따라서 역함수의 정의에 따라 $(g\circ f)^{-1}(1)=-\frac{4}{3}$ 이다.

(4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=(g\circ f)^{-1}(1)=-\frac{4}{3}$

함수

1) 함수의 정의와 그래프
2) 함수의 사칙연산
3) 단사함수와 전사함수
4) 전단사함수와 일대일 대응
5) 합성함수
6) 역함수

LAB

- 합성함수 Lab

예제 2.12

세 함수의 함숫값이 각각 다음과 같을 때 물음에 답하라.

$$f(x) = 2x+1, \qquad g(x) = 3x^2, \qquad h(x) = \sin x$$

(2) 결합법칙이 성립하므로

$$\begin{aligned}(f\circ g\circ h)(x) &= [(f\circ g)\circ h](x) \\ &= (f\circ g)(h(x)) \\ &= (f\circ g)(\sin x) = 6(\sin x)^2 + 1 = 6\sin^2 x + 1\end{aligned}$$

이 얻어진다.

CHALLENGE PROBLEM

- 주어진 함수가 역함수가 존재(전단사함수가)하는지 확인하는 Python 프로그램을 만들어 보라.
- 중간 고사 +10점
- Deadline: 중간고사 까지…