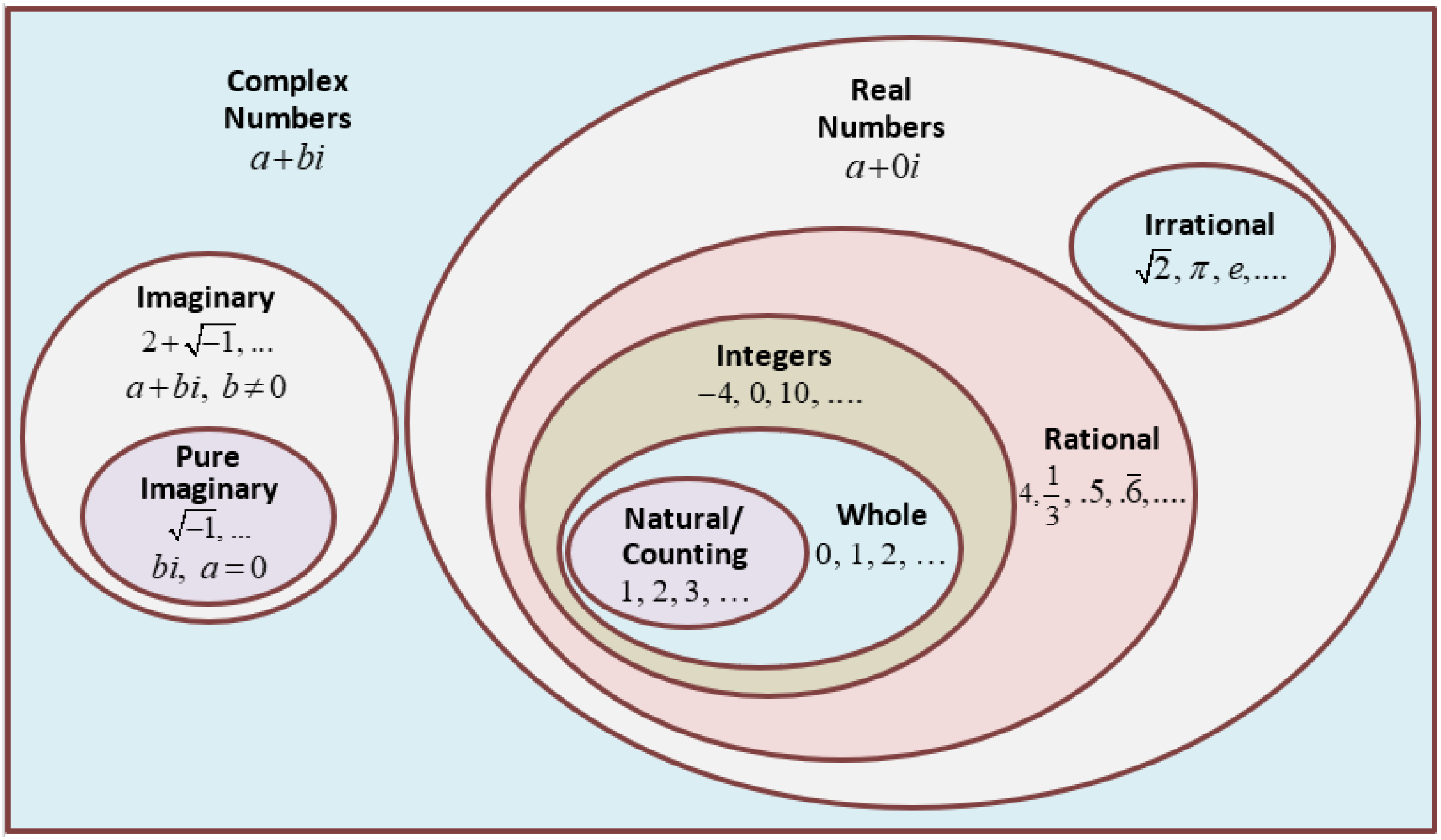


REAL, COMPLEX NUMBERS

Jin Hyun Kim

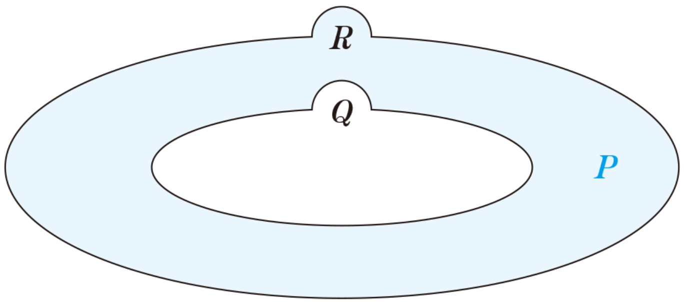
2020

내용

1) 실수의 체계와 표현
2) 실수의 대소관계와 절댓값
3) 실수의 지수법칙과 n 제곱근
4) 복소수와 복소평면
5) 복소수의 기본 사칙연산
6) 복소수의 극좌표 형식과 Euler 공식
7) 복소수의 거듭제곱과 De moivre 정리

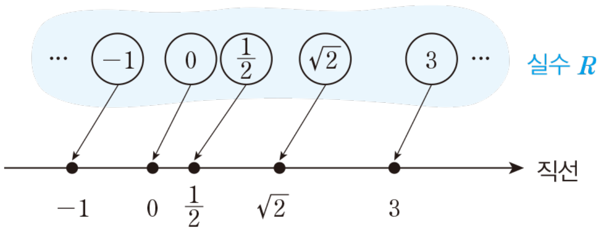
1.1 실수의 체계와 표현

$$\text{실수}(R)=\text{유리수}(Q)\cup\text{무리수}(P)$$
$$Q^c = P$$



[그림 1.1] 실수, 유리수, 무리수의 포함관계

• 실수는 연속이므로 임의의 실수를 직선 위의 한 점과 대응시킬 수 있다.



[그림 1.2] 실수와 직선 간의 대응관계

정의

1) **유리수 -** 두 정수의 비에 의해 나타낼 수 있는 수

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

1) **무리수 -** 두 정수의 비의 형태로 나타낼 수 없는 실수

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

무리수

1) 무리수가 존재한다는 사실을 증명하라. (귀류법(배리법, 반증법)으로 증명)

- $\log_2 \mathbf{3}$ 를 유리수라 가정하자. 그러면 어떤 m, n에 대해서, $\log_2 \mathbf{3} = \boldsymbol{m/n}$을 만족한다.
- 따라서 $\mathbf{2}^{\boldsymbol{m/n}} = 3$이 되고, 이를 변형하면 $\mathbf{2}^{\boldsymbol{m}} = \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}$이 된다.
- $\mathbf{2}^{\boldsymbol{m}}$은 짝수가 되고, $\mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}$은 홀수가 되므로, $\log_2 \mathbf{3}$ 를 유리수라 가정은 모순이다.
- 따라서 $\log_2 \mathbf{3}$ 를 유리수가 일 수 없다.

1.2 실수의 대소관계와 절댓값

1) 실수의 대소관계

- 임의의 두 실수 x, y의 대소관계

$$\boldsymbol{x < y,\ \ x = y,\ \ x > y}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow\ x - y < 0,\ \ x - y = 0,\ \ x - y > 0}$$

- 임의의 두 실수 x, y의 대소관계는 $x - y$와 0과의 대소관계로부터 판별가능하다.
- **제곱근**이 포함된 두 실수의 대소관계는 제곱한 다음, 차를 계산하여 대소관계를 판별한다.

예제 1.1

$x > 0$, $y > 0$ 일 때 다음 두 실수 A와 B의 대소관계를 결정하라.

$$A = \frac{x+y}{2}, \quad B = \frac{2xy}{x+y}$$

풀이

두 실수의 대소관계를 결정하기 위해서는 식(3)으로부터 두 실수의 차를 구해본다.

$$A - B = \frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{2(x+y)}$$

$(x-y)^2 \geq 0$ 이고 $x > 0$, $y > 0$ 이므로 다음의 관계가 얻어진다.

$$A - B \geq 0 \qquad \therefore A \geq B$$

등호는 $x = y$ 인 경우에만 성립한다.

예제 1.2

양의 실수 $x<y<z$에 대하여 다음 두 실수 A와 B의 대소관계를 결정하라.

$$A=\frac{x}{z},\qquad B=\frac{x+y}{y+z}$$

풀이

두 실수 A와 B의 차 $A-B$를 구하면

$$A-B=\frac{x}{z}-\frac{x+y}{y+z}=\frac{x(y+z)-z(x+y)}{z(y+z)}=\frac{xy-yz}{z(y+z)}=\frac{y(x-z)}{z(y+z)}$$

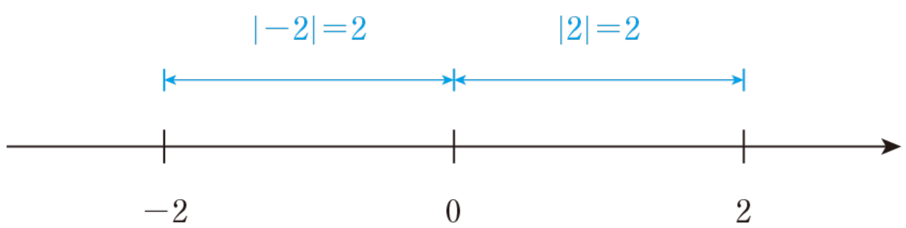
$x<z$의 조건으로부터

$$A-B=\frac{y(x-z)}{z(y+z)}<0$$

이므로 $A-B<0$, 즉 $A<B$의 관계가 얻어진다.

2) 실수의 절댓값

- 실수 x의 절댓값 $|x|$ ≙ 실수 x를 직선상에 대응시켰을 때 직선상의 대응점과 원점 사이의 거리



[그림 1.3] 실수 2와 −2의 절댓값

- $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

→ 실수 x가 양수일 때는 $|x| = x$이지만, 실수 x가 음수일 때는 $|x| = -x$가 된다.

정리 1.1 절댓값의 성질

(1) $|x|=0 \iff x=0$

(2) $|x|+|y|=0 \iff x=0,\ y=0$

(3) $|xy|=|x||y|$

(4) $\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{|y|}{|x|}$

(5) $|x+y| \le |x|+|y|$ (삼각부등식)

예제 1.3

x와 y가 실수일 때 다음의 삼각부등식을 증명하라.

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

풀이 임의의 실수 x에 대하여 $|x|^2=x^2$ 이 성립하므로 부등식의 양변을 제곱하여 차를 구해본다.

$$|x+y|^2-(|x|+|y|)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+y)^2 - (|x|+|y|)^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 - |x|^2 - 2|x||y| - |y|^2 \\
&= 2(xy - |x||y|) \le 0
\end{aligned}
$$

따라서 $|x+y|^2 \le (|x|+|y|)^2$ 이 얻어지므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\therefore\ |x+y| \le |x| + |y|$$

단, 등호는 $x = y$인 경우에만 성립한다.

예제 1.4

실수 x가 $2 < x < 4$ 일 때 다음을 계산하라.

$$p(x) = |x-4| - 2|x-1| + 4|x-2|$$

풀이

$2 < x < 4$ 이므로 다음의 관계가 각각 성립한다.

$$x-4 < 0, \qquad 1 < x-1 < 3, \qquad 0 < x-2 < 2$$

$$
\begin{aligned}
p(x) &= |x-4| - 2|x-1| + 4|x-2| \\
&= -(x-4) - 2(x-1) + 4(x-2) \\
&= x-2
\end{aligned}
$$

- **제곱근 또는 절댓값이 포함된 대소관계**

대소관계를 판별하기 위한 두 실수를 각각 제곱하여 차를 계산한 다음, 실수 0과 의 대소를 비교하여 간접적으로 판별한다.

$$A=\sqrt{ab},\ \ B=\frac{2ab}{a+b} \qquad \text{단, } a>0, b>0$$

$$A^2-B^2=(\sqrt{ab})^2-\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab(a+b)^2-4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab(a^2+2ab+b^2)-4a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}\geq 0$$

따라서 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)\geq 0$ 은 $A>0,\ B>0$ 이므로 $A\geq B$ 가 됨을 알 수 있다.

$$\therefore\ \sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$$

1.3 실수의 지수법칙과 n제곱근

1) 실수의 지수법칙

- 실수 a의 n거듭제곱

$$a^n \triangleq \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{번}} \qquad a^0 \triangleq 1,\ a^{-n} \triangleq \frac{1}{a^n}$$

- m, n이 자연수일 때 지수법칙

정리 1.2 지수법칙(자연수 m, n)

임의의 실수 a와 b, 자연수 m과 n에 대하여 다음의 관계가 성립한다.

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ (단, $a \neq 0$)

(4) $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & m > n \\ 1, & m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & m < n \end{cases}$

예제 1.5

다음을 음의 지수를 이용하여 표현하라.

(1) $\dfrac{d^2}{ab^3c^4}$ (2) $\dfrac{1}{xyz^2}$

풀이

(1) $\dfrac{d^2}{ab^3c^4} = a^{-1}b^{-3}c^{-4}d^2 = a^{-1}b^{-3}c^{-4}(d^{-1})^{-2}$

(2) $\dfrac{1}{xyz^2} = x^{-1}y^{-1}z^{-2}$

2) 실수의 n제곱근

- n제곱근

$a^n = b \ \Leftrightarrow a \triangleq \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$; a를 b의 n제곱근으로 정의

- 제곱근($n = 2$인 경우)

$a = \sqrt[2]{b} = \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$; a를 b의 제곱근으로 정의

- 유리수 p, q에 대한 지수법칙

정리 1.3 지수법칙(유리수 p, q)

임의의 양의 실수 a와 b, 유리수 p와 q에 대하여 다음의 관계가 항상 성립한다.

(1) $a^p a^q = a^{p+q}$

(2) $(a^p)^q = a^{pq}$

(3) $(ab)^p = a^p b^p$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} = a^p b^{-p}$

(5) $a^p \div a^q = a^{p-q}$

예제 1.6

다음을 간단히 하라.

(1) $\sqrt{\sqrt[4]{64}}$

(2) $\sqrt{(729)^{\frac{1}{3}}}$

풀이

(1) $64 = 8 \times 8 = 2^6$ 이므로

$$\sqrt{\sqrt[4]{64}} = (\sqrt[4]{64})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[4]{2^6})^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{6}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

(2) $729 = 3^6$ 이므로

$$\sqrt{(729)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{(3^6)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3^2} = 3$$

1.4 복소수와 복소평면

1) 복소수의 정의

- 허수(Imaginary Number)의 도입

$i^2 = -1$ 또는 $i = \sqrt{-1}$

- 복소수 z의 정의

$z = x + iy, \quad x \in \boldsymbol{R}, \quad y \in \boldsymbol{R}$

$x = Re(z)$; z 의 실수부

$y = Im(z)$; z 의 허수부

- **복소수의 상등**

정의 1.1 복소수의 상등

두 복소수 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 에서 다음의 관계가 만족될 때, 두 복소수 z_1과 z_2는 서로 상등이라고 정의하고 $z_1 = z_2$ 라고 표기한다.

$$\begin{aligned} Re(z_1) &= Re(z_2) \\ Im(z_1) &= Im(z_2) \end{aligned} \quad \text{또는} \quad \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

예제 1.7

다음 두 복소수 z_1과 z_2가 서로 상등이 되도록 실수 a와 b의 값을 각각 구하라.

$$z_1 = (3a+2b) - i3$$
$$z_2 = 13 + i(a-3b)$$

풀이

복소수의 상등에 대한 [정의 1.1]에 의하여

$$3a+2b = 13$$
$$a-3b = -3$$

을 얻을 수 있다. 앞의 연립방정식의 첫 번째 방정식에 $a=3b-3$의 관계를 대입하면

$$3(3b-3)+2b = 13 \quad \therefore\ b = 2$$

$b=2$를 연립방정식에 대입하면 $a=3$이 된다.

예제 1.8

다음 관계를 만족하는 실수 a와 b를 각각 구하라.

(1) $(a+3)+i(2b-4)=0$

(2) $(a+1)+i(2b-1)=(4-a)+i(b+4)$

풀이

(1) 복소수 상등의 정의에 의하여 $0=0+i0$ 이므로

$$a+3=0,\ \ 2b-4=0$$

$$\therefore\ a=-3,\ \ b=2$$

(2) 복소수 상등의 정의에 의하여

$$\begin{cases} a+1=4-a \\ 2b-1=b+4 \end{cases}$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2},\ \ b=5$$

- 공액(켤레) 복소수의 정의

정의 1.2 공액(켤레) 복소수

복소수 $z=x+iy$ 에서 허수부의 부호를 바꾼 것을 공액(켤레) 복소수라고 정의하며 $\overline{z}$ 로 표현한다.

$$z=x+iy,\ \overline{z} \triangleq x-iy$$

- 공액 복소수는 복소수의 기본 연산에 있어 복소수를 실수로 변환하는 방법을 제공한다.
- 공액 복소수는 허수부의 부호만이 다른 복소수 쌍이므로 신발 1켤레(쌍)에서와 같이 짝을 이룬다는 의미로 켤레 복소수라고도 한다.

예제 1.9

다음 두 복소수에서 $z_1 = \overline{z_2}$가 되도록 실수 a와 b의 값을 구하라.

$$z_1 = (a+1) + i2b$$
$$z_2 = b - i(a-1)$$

풀이

$\overline{z_2} = b + i(a-1)$이므로 주어진 조건과 복소수 상등의 정의로부터

$$(a+1) + i(2b) = b + i(a-1)$$
$$a+1 = b,\ \ 2b = a-1$$

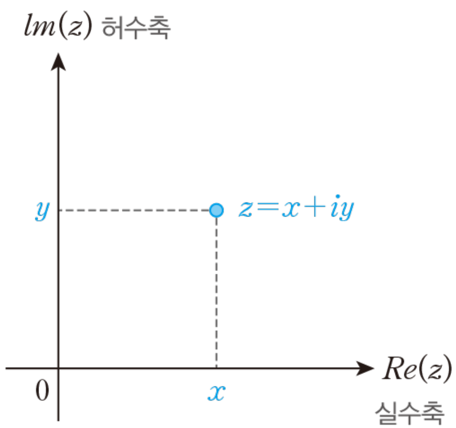
의 관계식을 얻을 수 있다. 위의 연립방정식을 풀면

$$2(a+1) = a-1 \qquad \therefore\ a = -3$$

$a = -3$을 연립방정식에 대입하면 $b = -2$가 얻어진다.

2) 복소평면

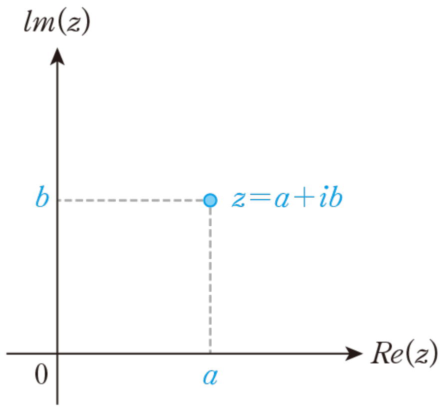
- 복소평면 : 실수부와 허부수를 표시하는 2개의 직선을 수직으로 교차하여 얻어지는 평면



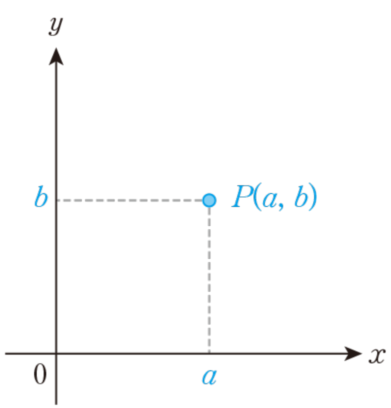
[그림 1.4] 복소평면상에 복소수의 표현

- 복소평면은 z-평면이라고도 하며, 복소평면 위의 한 점과 대응되는 복소수는 유일하게 결정된다.

- 복소평면과 좌표평면의 비교



(a) 복소평면; z–평면



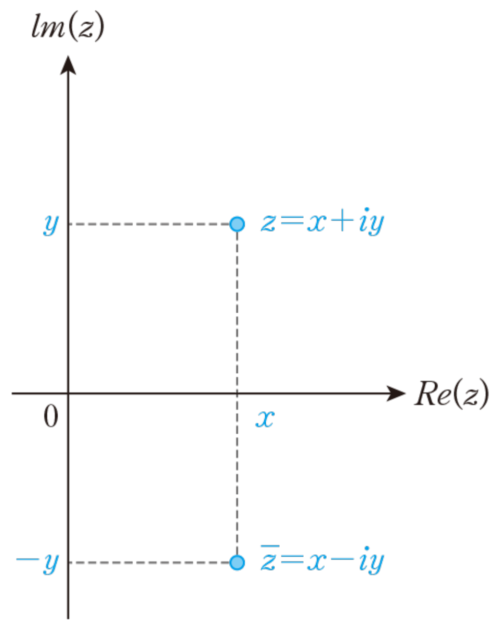
(b) 좌표평면; xy–평면

- 2차원 평면상에 놓인 한 점은 복소수를 나타낼 수도 있고, 또 한 한 점을 나타낼 수도 있다.

  → 복소수와 점에 대한 기하학적인 표현은 각 축의 의미만이 다른 것이지 수학적인 표현방식은 동일하다.

- 공액 복소수의 기하학적인 표현

  복소평면에서 실수축을 기준으로 하여 서로 대칭인 위치에 존재하는 복소수 쌍이다.



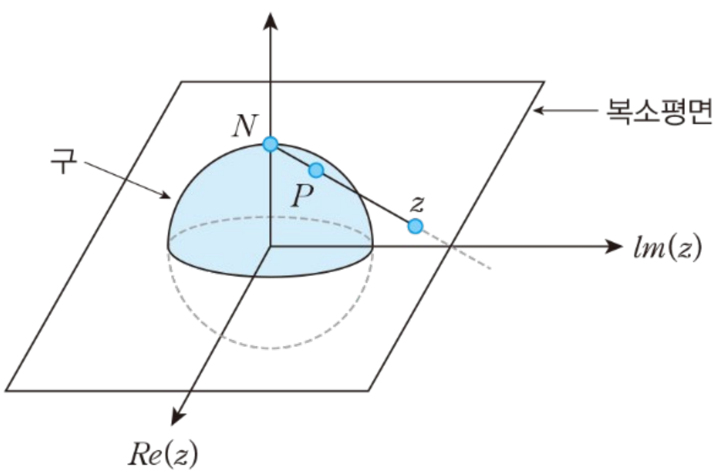
[그림 1.5] 복소수 z와 $\bar{z}$ 의 기하학적인 표현

- **실수의 무한대**

  실수의 집합은 직선으로 표현할 수 있으므로 실수의 무한대는 $-\infty$ 또는 $+\infty$의 두 가지다.

- **복소수의 무한대**

  복소수의 무한대는 상반구의 극점 N에 대응되는 복소평면 위의 복소수이므로 복소수의 무한대는 무수히 많이 존재한다.



1.5 복소수와 사칙연산

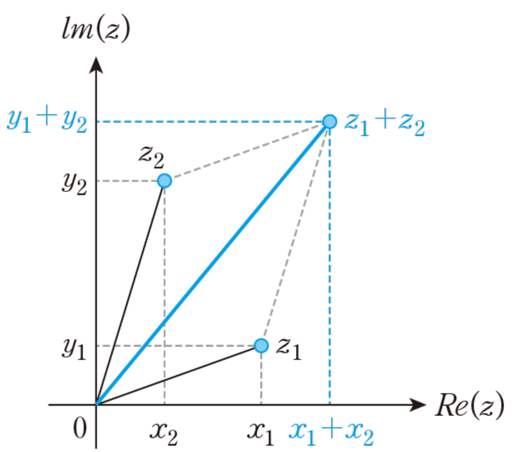
- $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$의 사칙연산

① 덧셈

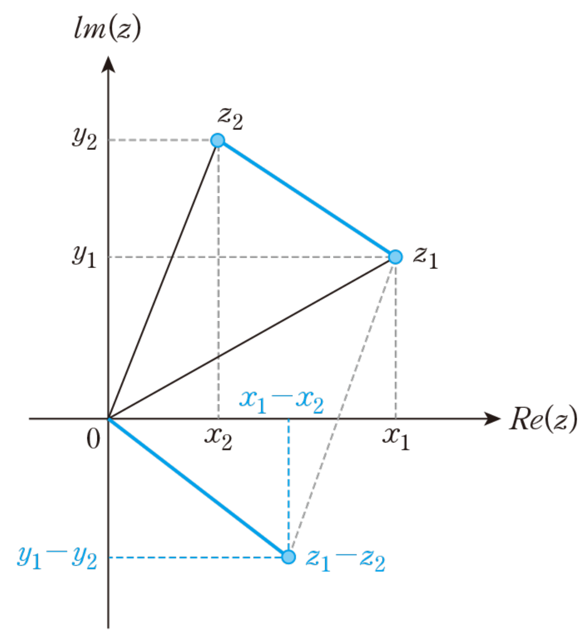
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

② 뺄셈

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$



[그림 1.6] 복소수의 덧셈과 기하학적 표현



[그림 1.7] 복소수의 뺄셈과 기하학적 표현

③ 곱셈

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

④ 나눗셈

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 - i^2 y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

- 공액 복소수의 활용

공액 복소수는 복소수의 사칙연산에 있어 복소수를 실수로 변환하는 방법을 제공하므로 매우 유용하다.

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \in \boldsymbol{R}$$

$$\frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}(x+iy+x-iy) = x = Re(z) \in \boldsymbol{R}$$

$$\frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}(x+iy-x+iy) = y = lm(z) \in \boldsymbol{R}$$

- 공액 복소수의 성질

정리 1.4 공액 복소수의 성질

임의의 복소수 z_1과 z_2에 대하여 다음의 관계가 항상 성립한다.

(1) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(4) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(5) $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$ (단, $z_1 \neq 0$)

- 짚신도 짝이 있다는 속담과 같이 복소수도 짝이 있다.
- 복소수 $z = x + iy$에서 $y = 0$인 경우, 즉 z가 실수이면 z의 공액 복소수는 자신과 같다.

$$\bar{z} = z \iff z\text{는 실수}$$

예제 1.10

$z_1 = 1+i,\ z_2 = 1-i$ 일 때 다음을 계산하라.

(1) $\overline{z_1+z_2}$

(2) $\dfrac{z_2}{z_1}$

(3) $z_1 z_2$

(4) $Re(z_1 - z_2)$

풀이

(1) 먼저 z_1+z_2 를 계산하면

$$z_1+z_2=(1+i)+(1-i)=2$$

이므로 z_1+z_2 의 공액 복소수는 다음과 같다.

$$\therefore\ \overline{z_1+z_2}=2$$

(2) $\dfrac{z_2}{z_1}$ 를 계산하기 위하여 분모와 분자에 $\overline{z_1}$ 를 각각 곱한다.

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

(3) $z_1 z_2=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=2$

(4) 먼저 z_1-z_2 를 계산하면

$$z_1-z_2=(1+i)-(1-i)=2i$$

이므로 $Re(z_1-z_2)=0$ 이다.

예제 1.11

복소수 $z=a+ib$일 때 다음을 계산하라.

$$lm\left(\frac{1}{z}\right)+Re\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$$

풀이

먼저 $\frac{1}{z}$를 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

다음으로 $\frac{z}{\bar{z}}$를 계산하기 위하여 분모와 분자에 z를 곱하면

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{zz}{\bar{z}z}=\frac{(a+ib)^2}{(a-ib)(a+ib)}=\frac{a^2-b^2+i2ab}{a^2+b^2}$$

이므로 주어진 식은 다음과 같다.

$$lm\left(\frac{1}{z}\right)+Re\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=-\frac{b}{a^2+b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2-b}{a^2+b^2}$$

예제 1.12

다음 복소수의 거듭제곱을 계산하라.

$$(1+i)^{10}$$

풀이

먼저 $(1+i)^2$ 을 계산해 보면 다음과 같다.

$$(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$$
$$(1+i)^{10} = \{(1+i)^2\}^5 = (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32(i^2)^2 i = 32i$$

- i^n의 계산

$n=1 \quad i^1 = i$

$n=2 \quad i^2 = -1$

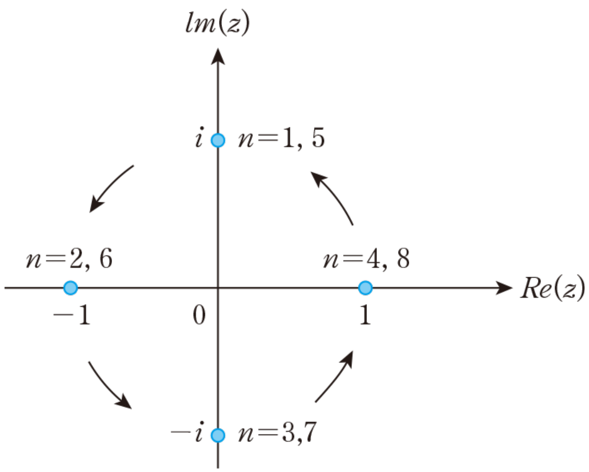
$n=3 \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$n=4 \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$n=5 \quad i^5 = i^4 \cdot i = (1)i = i$

$n=6 \quad i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

- $i^n (1 \leq n \leq 8)$의 복소평면 표시

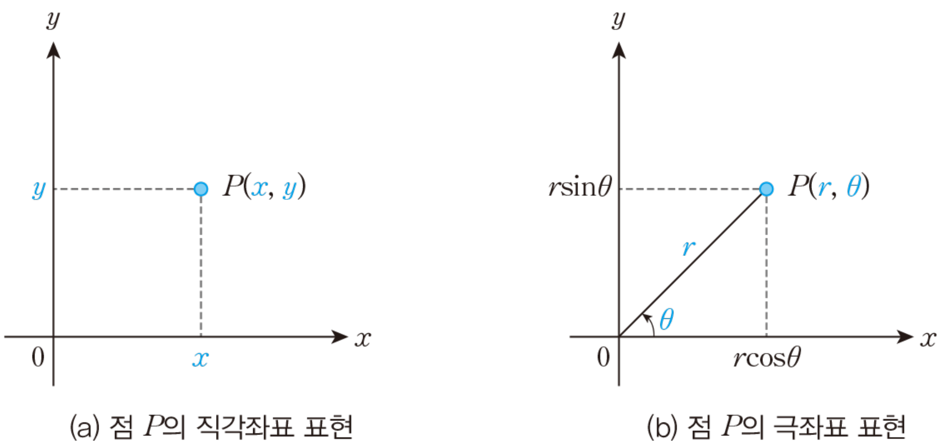


- i^n은 실제 공학문제에서 많이 나타나므로 충분한 숙지가 필요하다.

1.6 복소수의 극좌표 형식과 EULER 공식

1) 복소수의 극좌표 형식

- 한 점에 대한 직각좌표와 극좌표의 비교



[그림 1.8] 직각좌표와 극좌표의 비교

- 직각좌표와 극좌표 간의 관계

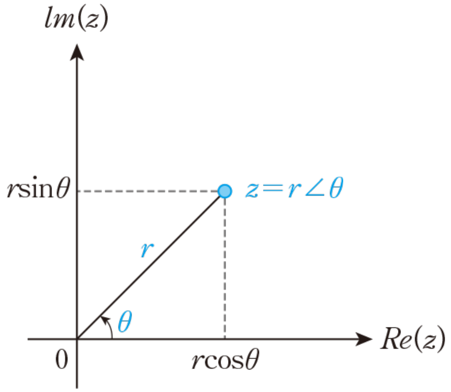
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

- 복소수 z의 극형식(극좌표 형식)

  복소평면상의 복소수를 극좌표를 이용하여 표현

  $z = r\angle\theta$, r : 절댓값, θ : 편각



[그림 1.9] 복소수 z의 극형식 $z=r\angle\theta$

- $z = r\angle\theta$

$$\begin{cases} r \triangleq |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \triangleq arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

; θ는 복소평면의 실수축을 기준으로 하여 반시계 방향으로 회전한 각을 양(+)의 값으로 정의한다.
만일 시계 방향으로 회전한 각은 음(-)의 값으로 정의한다.

• 복소수의 편각의 범위를 $-\pi < \theta < \pi$로 제한하여 편각을 표현한 것을 주편각이라고 부르며 $Arg(z)$로 표기한다.

예제 1.13

다음의 복소수를 극좌표 형식(극형식)으로 표현하라.

(1) $z_1 = 1 + i$

(2) $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$

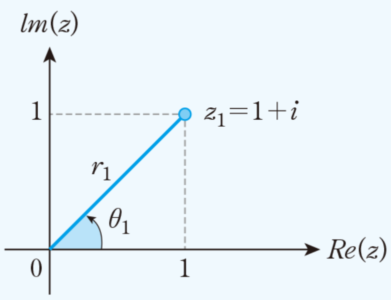
풀이

(1) z_1 의 절댓값; $r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

z_1 의 편각; $\tan\theta_1 = 1 \quad \therefore\ \theta_1 = \frac{\pi}{4}$

따라서 z_1 의 극형식은 다음과 같다.

$$z_1 = \sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$$

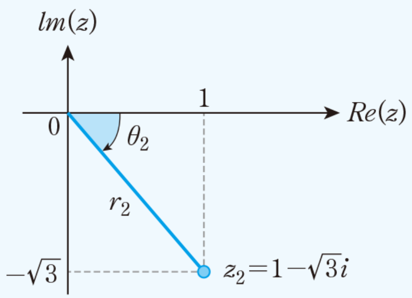


(2) z_2 의 절댓값; $r_2 = \sqrt{1+3} = 2$

z_2 의 편각; $\tan\theta_2 = -\sqrt{3} \quad \therefore\ \theta_2 = -\frac{\pi}{3}$

따라서 z_2 의 극형식은 다음과 같다.

$$z_2 = 2\angle -\frac{\pi}{3}$$



예제 1.14

극좌표 형식으로 표현된 다음의 복소수를 직각좌표 표현으로 변환하라.

(1) $z_1 = 2\angle\frac{\pi}{6}$ (2) $z_2 = 1\angle\pi$

풀이

(1) $r = 2,\ \theta = \frac{\pi}{6}\text{rad}$ 이므로 z_1 의 실수부와 허수부를 [그림 1.9]로부터 구하면 다음과 같다.

$$Re(z_1) = r_1\cos\theta_1 = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$lm(z_1) = r_1\sin\theta_1 = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{1}{2} = 1$$

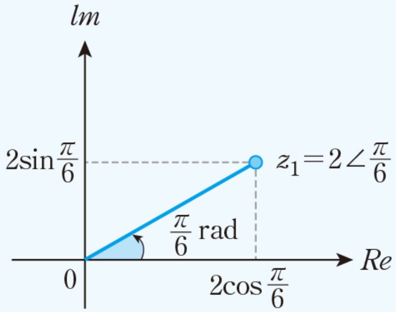
$$\therefore\ z_1 = Re(z_1) + ilm(z_1) = \sqrt{3} + i$$

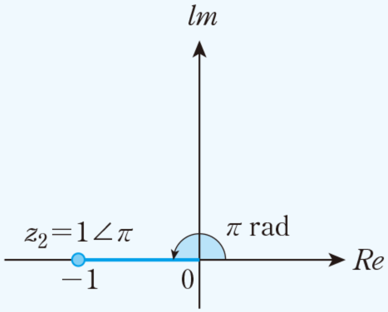
풀이

(2) $r_2 = 1,\ \theta_2 = \pi$ rad 이므로

$$Re(z_2) = r_2 \cos\theta_2 = 1\cos\pi = -1$$
$$Im(z_2) = r_2 \sin\theta_2 = 1\sin\pi = 0$$

$$\therefore\ z_2 = Re(z_2) + iIm(z_2) = -1$$





2) Euler 공식

- 복소수 $z = r\angle\theta$를 직각좌표로 변환

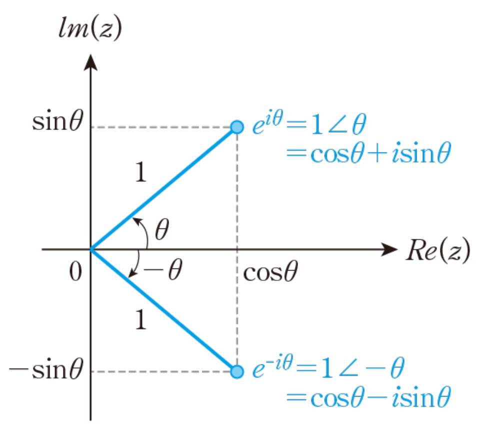
$$z = r\angle\theta = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\, r\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} \triangleq \cos\theta + i\sin\theta$$ ← Euler 공식

- $e^{i\theta}$와 $e^{-i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$



3) 극 형식에서의 곱셈과 나눗셈

- 곱셈 z_1, z_2

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \end{aligned}$$

- z_1, z_2의 절댓값과 편각 : 두 복소수의 곱셈은 두 복소수의 절댓값은 곱하고 편각은 더한다.

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

- 나눗셈 $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned}$$

- $\frac{z_1}{z_2}$의 절댓값과 편각 : 두 복소수의 나눗셈은 두 복소수의 절댓값은 나누고 편각은 뺀다.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

- 복소수의 극형식은 복소수의 덧셈이나 뺄셈을 계산할 때는 극형식을 직각좌표로 변환해야 하기 때문에 불편하다.

- 복소수의 극형식은 복소수의 곱셈이나 나눗셈에서 강력한 위력을 발휘하며 곱셈과 나눗셈을 간편하게 수행할 수 있다.

예제 1.15

다음 복소수 z_1과 z_2에 대하여 주어진 연산을 수행하라.

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(1) $(z_1 z_2)^2$

(2) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$

풀이

(1) $z_1 z_2 = \left(3e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(5e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 15e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 15e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$$(z_1 z_2)^2 = (z_1 z_2)(z_1 z_2) = \left(15e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)\left(15e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) = 225e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3e^{i\frac{\pi}{4}}}{5e^{i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{3}{5}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \left(\frac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)\left(\frac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)\left(\frac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \frac{27}{125}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1.7 복소수의 거듭제곱과 DE MOIVRE 정리

- $z = re^{i\theta}$의 거듭제곱

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{개}} = (re^{i\theta})(re^{i\theta})\cdots(re^{i\theta}) = r^n e^{in\theta}$$

$$\therefore \ z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

- De Moivre 정리

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \longrightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\text{를 대입}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

- De Moivre 정리는 복소수 이론에서 매우 중요한 결과이며, 일반적으로 n이 양의 정수가 아니라 유리수인 경우도 성립한다.

예제 1.16

De Moivre 정리를 이용하여 $n=2$ 인 경우를 전개하여 $\sin 2\theta$ 와 $\cos 2\theta$ 에 대한 공식을 유도하라.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

풀이

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ 을 전개하여 De Moivre 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta + i^2\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i(2\sin\theta\cos\theta) \\ &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta\end{aligned}$$

이므로 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

예제 1.17

다음을 De Moivre 정리를 이용하여 간단히 하라.

(1) $(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

(2) $\dfrac{\cos 6\theta + i\sin 6\theta}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}$

풀이

(1) De Moivre 정리에 의하여

$$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$$
$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

이므로 주어진 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^4(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^6\\ &= \cos 6\theta + i\sin 6\theta\end{aligned}$$

(2) De Moivre 정리에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\cos 6\theta + i\sin 6\theta}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta} &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^6}{(\cos\theta + i\sin\theta)^3} = (\cos\theta + i\sin\theta)^3\\ &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta\end{aligned}$$

예제 1.18

다음 복소수의 거듭제곱을 계산하라.

(1) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ (2) $(3+i4)^{10}$

풀이

(1) 분자와 분모를 극좌표 형식으로 변환하면

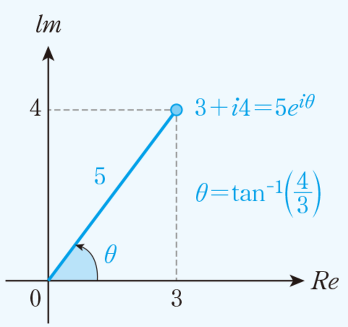
$$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

이므로 주어진 식은 다음과 같다.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4=e^{i2\pi}=1$$

(2) 먼저 $3+i4$를 극좌표 형식으로 변환하면

$$3+i4=\sqrt{3^2+4^2}\,e^{i\theta}=5e^{i\theta}$$
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$



이므로 주어진 식은 다음과 같다.

$$(3+i4)^{10}=(5e^{i\theta})^{10}=5^{10}e^{i10\theta}$$