적분법

1. 부정적분의 정의
2. 여러 가지 함수의 적분
3. 치환적분법
4. 부분적분법
5. 부분분수 적분법
6. 정적분의 정의
7. 정적분의 성질 및 계산

미적분의 역사

- 뉴턴이 미적분을 발명한 이유는
  - https://www.youtube.com/watch?v=2jm1eKMpJsA
- **영화속 미적분**
  - https://www.youtube.com/watch?v=nlrrS-U_jNc
- **미적분의 역사**
  - https://www.youtube.com/watch?v=cnwAO0w98gQ

적분법

1. 부정적분의 정의
2. 여러 가지 함수의 적분
3. 치환적분법
4. 부분적분법
5. 부분분수 적분법
6. 정적분의 정의
7. 정적분의 성질 및 계산

이 시간 풀어야 할 문제...

- **부정적분**

다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (x^2+3x+10)dx$

(2) $\int x(x-1)(x-2)dx$

다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (4\cos x - 3e^x + 2)dx$

(2) $\int (\sin 2x + 2\cos x)dx$

(3) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$

(4) $\int \sin^2 x\, dx$

6.1 부정적분의 정의

정의 6.1 원시함수

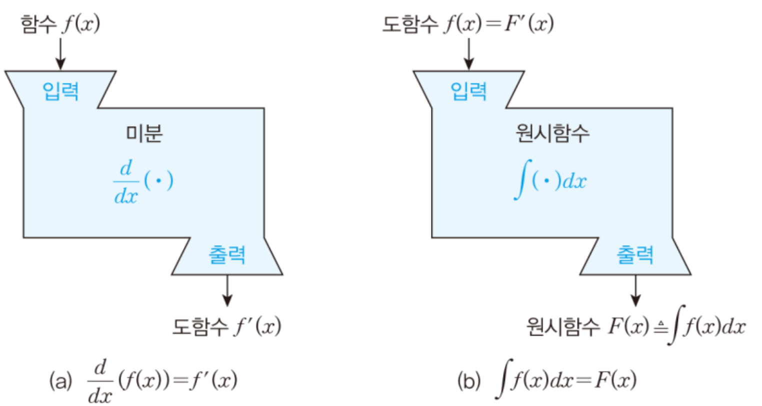
연속함수 $f(x)$의 정의역에 있는 모든 x에 대하여, 어떤 미지의 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

가 주어질 때, 미분하기 전의 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 원시함수(Primitive Function)라고 정의하며 다음과 같이 나타낸다.

$$F(x) = \int f(x)dx$$

- **도함수와 원시함수의 개념**



[그림 6.1] 도함수와 원시함수의 개념도

- 어떤 미지의 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$에 대한 정보가 주어질 때, 미분하기 전의 미지의 함수 $F(x)$를 찾는 것이 원시함수의 개념이다.
- 어떤 함수 $f(x)$의 원시함수는 무수히 많으며, 각각의 원시함수는 상수만 다르게 나타난다.

$\frac{dy}{dx} = F'(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + \boxed{C} \leftarrow f(x)\text{의 부정적분}$$

Indefinite Integral

$f(x)$: 피적분함수

$F(x)$: 원시함수

C: 적분상수, x: 적분변수

- 원시함수와 피적분함수의 관계

$$F(x) = \int f(x)dx \iff F'(x) = f(x)$$

- 부정적분은 미분의 역연산이다

$$\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = \boxed{f(x)}$$

$$\int (\frac{d}{dx} f(x))dx = f(x) \boxed{+ C}$$

- 부정적분(Indefinite Integral)의 의미는 임의의 상수 C로 인하여 원시함수 $F(x)$가 특정한 하나의 함수로 정해지지 않는다는 것이다.

$Indefinite$: '명확하지 않은', '분명히 규정되지 않은'

예제 6.1

다음 부정적분 또는 미분을 구하라.

(1) $\int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2 + \sin x) \right\} dx$

(2) $\frac{d}{dx} \left\{ \int x \ln x^2 dx \right\}$

풀이

(1) 식(5)로부터

$$\int \frac{d}{dx}(x^2 + \sin x)dx = x^2 + \sin x + C \quad \text{(단, } C\text{는 임의의 상수)}$$

(2) 식(4)로부터

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int x \ln x^2 dx \right\} = x \ln x^2$$

6.2 여러가지 함수의 적분

- **부정적분의 기본 공식 I**

정리 6.1 부정적분의 기본 공식 I

(1) $\int k\,dx = kx + C$ (단, k는 상수)

(2) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$ 인 정수)

(3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(4) $\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(5) $\int \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

- **부정적분의 선형성**

$$\int \{k_1 f(x) + k_2 g(x)\}dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

→ 적분연산은 미분연산과 마찬가지로 선형성($Linearity$)을 가지는 선형연산자이다.

예제 6.2

다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (x^2+3x+10)dx$

(2) $\int x(x-1)(x-2)dx$

풀이

(1) [정리 6.1]의 기본 공식으로부터

$$\int (x^2+3x+10)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x + C$$

(2) [정리 6.1]의 기본 공식으로부터

$$\begin{aligned}\int x(x-1)(x-2)dx &= \int (x^3-3x^2+2x)dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + C\end{aligned}$$

- **부정적분의 기본 공식 II**

정리 6.2 부정적분의 기본 공식 II

(1) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(3) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

(4) $\int e^x dx = e^x + C$

(5) $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

(6) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

(7) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

예제 6.3

다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (4\cos x - 3e^x + 2)dx$

(2) $\int (\sin 2x + 2\cos x)dx$

(3) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$

(4) $\int \sin^2 x\, dx$

풀이

(1) $\int (4\cos x - 3e^x + 2)dx = 4\sin x - 3e^x + 2x + C$

(2) $\int (\sin 2x + 2\cos x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2\sin x + C$

(3) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 이므로 피적분함수에 대입하면

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx &= \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx \\ &= \int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}dx \\ &= \int (1-\cos x)dx = x - \sin x + C\end{aligned}$$

(4) 반각공식을 이용하면

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

이므로 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

• $\int cos(ax+b)dx$의 계산

a와 b를 상수라고 하면

$$\frac{d}{dx}\sin(ax+b)=\cos(ax+b)\cdot(ax+b)'=a\cos(ax+b)$$

이므로 부정적분의 정의에 의해 다음의 공식을 얻을 수 있다.

$$\int a\cos(ax+b)dx=\sin(ax+b)+C^* \quad (\text{단}, C^*\text{는 상수})$$
$$\therefore \int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

여기서 C는 임의의 상수이다.

• $\int \sin(ax+b)$의 계산

$$\frac{d}{dx}\cos(ax+b)=-\sin(ax+b)\cdot(ax+b)'=-a\sin(ax+b)$$

이므로 부정적분의 정의에 의하여 다음의 공식을 얻을 수 있다.

$$\int -a\sin(ax+b)dx=\cos(ax+b)+C^* \quad (\text{단}, C^*\text{는 상수})$$
$$\therefore \int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$$

여기서 C는 임의의 상수이다.

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$의 계산

$$\frac{d}{dx}\ln\{f(x)\} = \frac{1}{f(x)}f'(x)$$

부정적분의 정의에 의하여

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

예를 들면,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+4}{x^2+2x-3} dx &= \int \frac{2(2x+2)}{x^2+2x-3} dx \\ &= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3} dx \\ &= 2\ln|x^2+2x-3| + C\end{aligned}$$

- 부정적분에 대한 기본 공식 Ⅰ, Ⅱ는 부정적분을 계산하는데 기초가 되는 매우 중요한 공식이므로 충분한 연습이 필요하다.

예제 6.4

다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int e^{x+2}dx$

(2) $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 dx$

(3) $\int (3^x + e^{x-2})\,dx$

풀이

(1) $\int e^{x+2}dx = \int e^x \cdot e^2 dx = e^2 \int e^x dx = e^2 e^x + C = e^{x+2} + C$

(2) 피적분함수를 전개하면

$$\begin{aligned}\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 dx &= \int \left\{x^3 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3\right\} dx \\ &= \int \left(x^3 - 3x + \frac{3}{x} - x^{-3}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3\ln|x| - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3\ln|x| + \frac{1}{2}x^{-2} + C\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int (3^x + e^{x-2})\,dx &= \int (3^x + e^x \cdot e^{-2})\,dx \\ &= \int 3^x dx + \frac{1}{e^2}\int e^x dx \\ &= \frac{1}{\ln 3}3^x + \frac{1}{e^2}e^x + C \\ &= \frac{1}{\ln 3}3^x + e^{x-2} + C\end{aligned}$$

6.3 치환적분법

- **치환적분법**은 복잡하고 어려운 부정적분을 피적분함수를 적절하게 치환함으로써 간단하고 쉽게 계산할 수 있는 적분 방법이다.

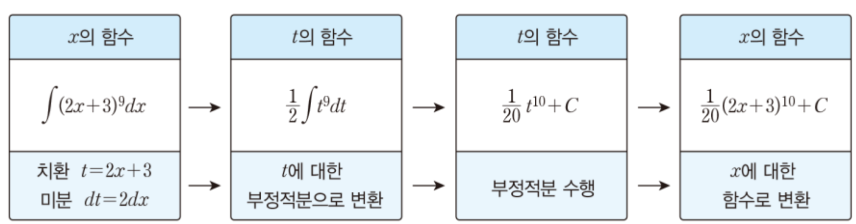
$$\int (2x+3)^9 dx$$

① $t \triangleq 2x+3$으로 치환하여 양변을 x로 미분한다.

$$\frac{dt}{dx} = 2 \ \rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

② x에 대한 적분을 t에 대한 적분으로 변환한다.

$$\int (2x+3)^9 dx = \int t^9 (\tfrac{1}{2}dt) = \frac{1}{2}\int t^9 dt = \frac{1}{20}t^{10} + C = \frac{1}{20}(2x+3)^{10} + C$$



[그림 6.2] 치환적분법의 계산과정

예제 6.5

다음 부정적분을 치환적분법에 의하여 계산하라.

(1) $\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$

(2) $\int xe^{x^2}\,dx$

(3) $\int 3(x^3+1)^4 x^2\,dx$

(4) $\int (e^x+1)^4 e^x\,dx$

풀이

(1) $t \triangleq x^2-1$로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx}=2x \longrightarrow 2xdx=dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx=\int \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2\sqrt{t}}+C$$

$t=x^2-1$을 대입하면 다음과 같다.

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}+C$$

(2) $t \triangleq x^2$으로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx}=2x \longrightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int xe^{x^2}dx=\int e^t\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C$$

$t=x^2$을 대입하면 다음과 같다.

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

(3) $t \triangleq x^3+1$로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx}=3x^2 \longrightarrow 3x^2dx=dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int 3(x^3+1)^4x^2dx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$$

$t=x^3+1$을 대입하면 다음과 같다.

$$\int 3(x^3+1)^4x^2dx=\frac{1}{5}(x^3+1)^5+C$$

(4) $t \triangleq e^x+1$로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx}=e^x \longrightarrow e^xdx=dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int (e^x+1)^4e^xdx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$$

$t=e^x+1$을 대입하면 다음과 같다.

$$\int (e^x+1)^4e^xdx=\frac{1}{5}(e^x+1)^5+C$$

예제 6.6

다음 부정적분을 치환적분법에 의하여 계산하라.

(1) $\displaystyle\int \frac{2e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \cos x \cdot \sin^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$

풀이

(1) $t \triangleq \tan x$로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int \frac{2e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = \int 2e^t\,dt = 2e^t + C$$

$t = \tan x$를 대입하면 다음과 같다.

$$\int \frac{2e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx = 2e^{\tan x} + C$$

(2) $t \triangleq \sin x$로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \longrightarrow \cos x\,dx = dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int \cos x \cdot \sin^2 x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C$$

$t = \sin x$를 대입하면 다음과 같다.

$$\int \cos x \cdot \sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(3) $t \triangleq x^2$으로 치환하고 양변을 x로 미분하면

$$\frac{dt}{dx} = 2x \longrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}dt = -\frac{1}{2}\cos t + C$$

$t = x^2$을 대입하면 다음과 같다.

$$\int x\sin(x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

예제 6.7

다음 부정적분을 $x = \tan\theta$ 로 치환하여 계산하라.

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx$$

풀이

x 는 $\tan\theta$ 로 치환하고 양변을 θ 로 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta \longrightarrow dx = \sec^2\theta d\theta$$

가 얻어지므로 주어진 부정적분을 θ 에 대한 부정적분으로 변환한다.

$$\int \frac{1}{\tan^2\theta+1} \sec^2\theta \, d\theta = \int \frac{1}{\sec^2\theta} \sec^2\theta \, d\theta = \theta + C$$

가 얻어지므로 $x = \tan\theta$ 에서 $\theta = \tan^{-1}x$ 이므로 대입하면 다음과 같다.

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1}x + C$$

- **유용한 삼각함수 공식**

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} = \operatorname{cosec}^2\theta$$

6.4 부분적분법

부분적분법은 피적분함수가 곱의 형태로 주어진 경우 사용할 수 있는 유용한 적분방법이다.

곱의 형태로 된 함수 $u(x)v(x)$를 미분하면

$$\frac{d}{dx}(uv)=\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}$$

가 되므로 윗 식의 양변을 적분하면 다음과 같다.

$$\int\frac{d}{dx}(uv)dx=\int\frac{du}{dx}\cdot v\,dx+\int u\cdot\frac{dv}{dx}dx$$

$$uv=\int u'v\,dx+\int uv'dx$$

$$\therefore\ \int u'vdx=uv-\int uv'dx$$

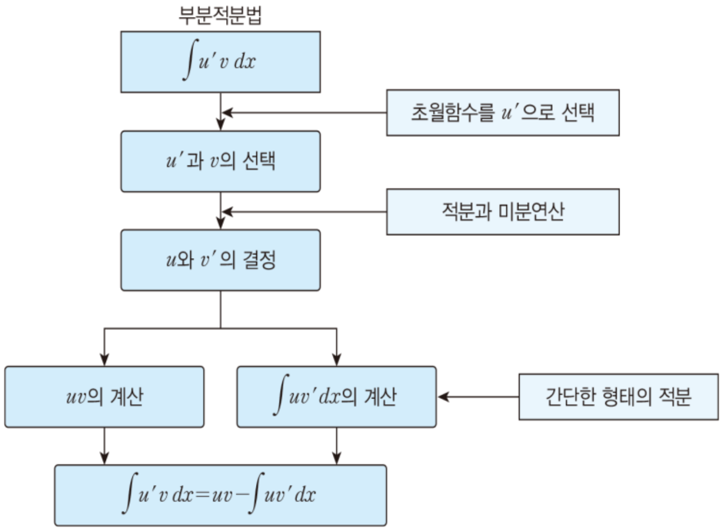
- 부분적분법의 핵심은 우변의 적분이 가능한한 간단한 형태의 적분이 되도록 u'과 v를 적절히 선택하는 것이다.

- 경험적으로 다항함수와 초월함수(지수함수, 삼각함수)가 곱의 형태로 되어있는 경우

  → v = 다항함수, u' = 초월함수

- 부분적분법의 계산과정

  → 부분적분법이 성공적으로 수행되기 위해서는 피적분함수에서 u'와 v의 선택이 매우 중요하다. u'와 v를 선택하여 더 복잡한 적분을 계산하게 되었다면 u'와 v의 선택을 서로 바꾸어서 시도하면 된다.



[그림 6.3] 부분적분법의 계산과정

예제 6.8

부분적분법을 이용하여 다음 부정적분을 계산하라.

(1) $\int x\cos x\,dx$　　(2) $\int xe^{3x}\,dx$

풀이

(1) $u'=\cos x$, $v=x$라 하면 $u=\sin x$, $v'=1$이므로 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x-\int \sin x\cdot 1dx\\ &= x\sin x+\cos x+C\end{aligned}$$

가 된다.

(2) $u'=e^{3x}$, $v=x$라 하면 $u=\frac{1}{3}e^{3x}$, $v'=1$이므로 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int xe^{3x}dx &= \frac{1}{3}xe^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 1dx\\ &= \frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C\end{aligned}$$

가 된다.

예제 6.9

부분적분법을 이용하여 다음 부정적분을 구하라. 단, $x>-1$이다.

$$\int \ln(x+1)\,dx$$

풀이

$u'=1$, $v=\ln(x+1)$이라 하면 $u=x$, $v'=\frac{1}{x+1}$이므로 부분적분법에 의하여 다음과 같다.

$$\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1)-\int x\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$ 로부터

$$\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x-\ln(x+1)+C^*$$

가 되므로 구하려는 부정적분은 다음과 같다.

$$\int \ln(x+1)dx=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C$$

단, C^*와 C는 임의의 상수이다.

예제 6.10

부분적분법을 이용하여 다음 부정적분을 구하라.

$$\int x^2 e^x \, dx$$

풀이

$u' = e^x$, $v = x^2$ 이라 하면 $u = e^x$, $v' = 2x$ 이므로 부분적분법에 의하여 다음과 같다.

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx$$

우변의 적분을 계산하기 위하여 부분적분을 한번 더 적용하면 $u' = e^x$, $v = 2x$ 로부터 $u = e^x$, $v' = 2$ 가 되므로

$$\int e^x \cdot 2x \, dx = 2x \cdot e^x - \int e^x \cdot 2 \, dx = 2xe^x - 2e^x + C^*$$

가 얻어진다. 따라서 주어진 부정적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C \end{aligned}$$

단, C^* 와 C는 임의의 상수이다.

예제 6.11

다음 부정적분을 계산하라. 단, w는 상수이다.

$$\int e^{-x} \cos wx \, dx$$

풀이

$u' = e^{-x}$, $v = \cos wx$ 라 하면 $u = -e^{-x}$, $v' = -w \sin wx$ 이므로 부분적분법에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cos wx \, dx &= -e^{-x} \cos wx - \int e^{-x} w \sin wx \, dx \\ &= -e^{-x} \cos wx - w \int e^{-x} \sin wx \, dx\end{aligned}$$

우변의 두 번째 항의 부정적분을 계산하기 위하여 부분적분법을 한번 더 적용한다. $u' = e^{-x}$, $v = \sin wx$ 라 하면 $u = -e^{-x}$, $v' = w \cos wx$ 이므로 우변의 적분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int e^{-x} \sin wx \, dx = -e^{-x} \sin wx + w \int e^{-x} \cos wx \, dx$$

따라서

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cos wx \, dx &= -e^{-x} \cos wx - w \int e^{-x} \sin wx \, dx \\ &= -e^{-x} \cos wx - w \left\{ -e^{-x} \sin wx + w \int e^{-x} \cos wx \, dx \right\}\end{aligned}$$

우변의 적분을 이항하여 정리하면

$$(1 + w^2) \int e^{-x} \cos wx \, dx = e^{-x} (w \sin wx - \cos wx)$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos wx \, dx = \frac{e^{-x}(w \sin wx - \cos wx)}{1 + w^2}$$

6.5 부분분수 적분법

- **피적분함수가 분수함수인 경우 분모가 1차식의 곱으로 인수분해가 되면, 부분분수로 전개하여 부정적분을 계산할 수 있다.**
- 부분분수 전개

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

① 상수 A를 구하기: 양변에 $x+1$을 곱한다.

$$\frac{1}{x+2} = A + \frac{(x+1)B}{x+2}$$

$$\therefore\ A = \left.\frac{1}{x+2}\right|_{x=-1} = 1$$

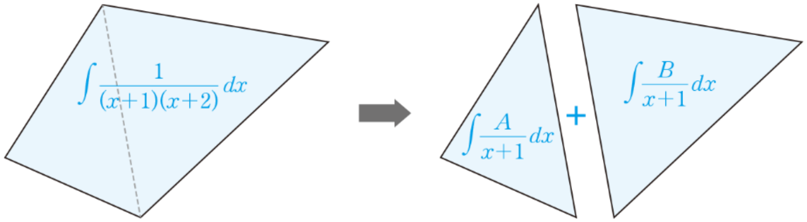
② 상수 B를 구하기: 양변에 $x+2$를 곱한다.

$$\frac{1}{x+1} = \frac{A(x+2)}{x+1} + B$$

$$\therefore\ B = \left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=-2} = -1$$

- 부분분수 적분법의 예

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x+1| - \ln|x+2| + C$$



[그림 6.4] 부분분수 적분법의 계산 과정

- 부분분수 적분법에서 부분분수를 전개할 때 분자의 차수가 분모의 차수보다 하나 작다는 것에 유의해야 한다.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \underbrace{\frac{Bx+c}{x^2+1}}$$

분모가 2차이므로 분자를 1차항으로 가정한다.

예제 6.12

부분분수 적분법을 이용하여 다음 부정적분을 계산하라.

(1) $\int \frac{x+1}{x^2-7x+10}dx$

(2) $\int \frac{1}{x^3+x}dx$

풀이

(1) $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$ 이므로 부분분수로 전개하면

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}$$

$$A=\left.\frac{x+1}{x-5}\right|_{x=2}=\frac{2+1}{2-5}=-1$$

$$B=\left.\frac{x+1}{x-2}\right|_{x=5}=\frac{5+1}{5-2}=2$$

이므로 주어진 적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-7x+10}dx&=\int \frac{x+1}{(x-2)(x-5)}dx\\&=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x-5}\right)dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{2}{x-5}dx\\&=-\ln|x-2|+2\ln|x-5|+C\end{aligned}$$

(2) 피적분함수를 부분분수로 전개하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}&=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\\&=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}\\&=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}\end{aligned}$$

$$\therefore A+B=0,\ C=0,\ A=1\rightarrow B=-1$$

따라서 주어진 부정적분은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3+x}dx&=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx\\&=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx\\&=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C\\&=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C\end{aligned}$$

단, C는 임의의 상수이다.

예제 6.13

부분분수 적분법을 이용하여 다음 부정적분을 계산하라.

$$\int \frac{3x+2}{x^2-1}dx$$

풀이

피적분함수를 부분분수로 전개하면

$$\frac{3x+2}{x^2-1}=\frac{3x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$$A=\frac{3x+2}{x-1}\bigg|_{x=-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{3x+2}{x+1}\bigg|_{x=1}=\frac{5}{2}$$

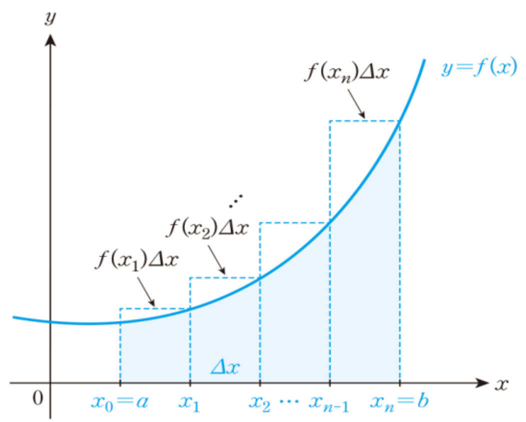
따라서 주어진 부정적분은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2-1}dx&=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{5}{2}\frac{1}{x-1}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{2}\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

단, C는 임의의 상수이다.

6.6 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, 이 구간에서 $f(x) \geq 0$일 때 곡선 $y = f(x)$와 직선 $x = a, x = b$ 그리고 x축으로 둘러싸인 부분의 면적 S를 구해보자.



[그림 6.5] 정적분의 정의

- 직사각형들의 면적 합

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1)}\Delta x + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_{k)}\Delta x$$

6.6 정적분의 정의

$n \to \infty$로 하면,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x \triangleq \int_a^b f(x)dx \longleftarrow$$

구간 $[a,b]$에서
$f(x)$의 정적분

a: 적분하한, b: 적분하한, $[a,b]$: 적분구간

- 정적분은 적분구간에 따라 정적분의 결과가 달라진다.

  적분의 상한과 하한이 같은 경우

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- 정적분에서 적분의 상한과 하한을 바꾸면 정적분 값은 바꾸기 전의 정적분 값에 -1을 곱한 것과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

6.6 정적분의 정의

- 정적분의 정의를 이용하여 정적분을 구하려면 결국 무한급수의 극한을 구해야 하므로 계산이 매우 어렵거나 불가능할 수도 있다.

→ 정적분의 기본정리 이용하면 정적분의 계산을 매우 쉽게 수행할 수 있다.

정리 6.3 정적분의 기본정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $F(x)$가 $f(x)$의 원시함수이면 다음의 관계가 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

예제 6.14

다음 정적분의 값을 계산하라.

(1) $\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

(3) $\int_{-1}^1 (e^x - x^3)\,dx$

풀이

(1) $\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0$

$= -\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} = 1$

(3) $\int_{-1}^1 (e^x - x^3)\,dx = \left[e^x - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{4} - \left(e^{-1} - \frac{1}{4}\right) = e - e^{-1}$

예제 6.15

다음 정적분을 계산하라.

(1) $\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(2) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)dx$

풀이

(1) $\int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^3$

$= \frac{1}{2}\{\ln 10 - \ln 2\} = \frac{1}{2}\ln\frac{10}{2} = \frac{1}{2}\ln 5$

(2) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)dx = \left[\ln x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]_1^2$

$= \ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \left(\ln 1 + \frac{1}{2}\right)$

$= \ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 2)$

예제 6.16

다음 정적분의 값을 계산하라.

$$\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx$$

풀이

먼저 부분적분법을 이용하여 부정적분을 구해본다.

$u' = \cos 2x,\ v = x$ 라 하면, $u = \frac{1}{2}\sin 2x,\ v' = 1$ 이므로 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 정적분의 기본정리에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx &= \left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\pi\sin 2\pi + \frac{1}{4}\cos 2\pi - \frac{1}{4}\cos 0 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\end{aligned}$$

이 된다.

- 정적분의 기본정리를 이용하여 정적분을 계산할 때 적분상수 C는 고려하지 않아도 무방하다.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \left[F(x) + C\right]_a^b \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

6.7 정적분의 성질 및 계산

- **정적분의 기본 성질**

정리 6.4 정적분의 기본 성질

폐구간 $[a, b]$에서 적분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음의 관계가 성립된다.

(1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

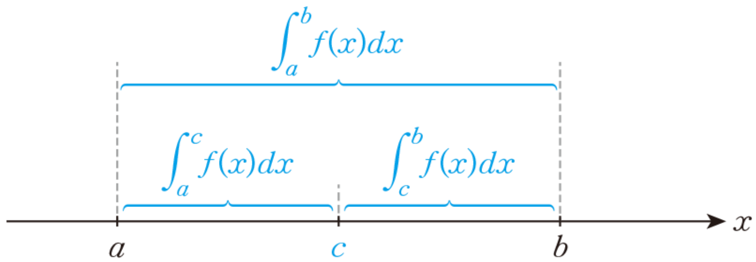
(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

(4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (단, $a<c<b$)

- 정적분은 부정적분과 마찬가지로 선형성을 가진다.

$$\int_a^b \{k_1 f(x) + k_2 g(x)\}dx = k_1\int_a^b f(x)dx + k_2\int_a^b g(x)dx$$

- 폐구간을 두 개의 소구간으로 분할한 경우, 전체 폐구간에 대한 정적분은 두 소구간에 대한 정적분들의 합과 같다.



[그림 6.6] 적분경로의 분할과 정적분

- 정적분의 값은 적분변수와는 무관하다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$$

예제 6.17

$\int_a^b \sin x\, dx = p$, $\int_b^c \sin x\, dx = q$, $\int_a^c \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx = r$ 로 주어질 때, 다음 정적분의 값을 구하라. 단, $a<b<c$이다.

(1) $\int_a^a \sin x\, dx$

(2) $\int_b^a \sin x\, dx$

(3) $\int_a^c \left\{\sin x + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\} dx$

(4) $\int_a^c \cos x\, dx$

풀이

(1) 적분구간의 하한과 상한이 같기 때문에

$$\int_a^a \sin x\, dx = 0$$

(2) $\int_b^a \sin x\, dx = -\int_a^b \sin x\, dx = -p$

(3)
$$\begin{aligned}\int_a^c \left\{\sin x + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\} dx &= \int_a^c \sin x\, dx + \int_a^c \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= \left\{\int_a^b \sin x\, dx + \int_b^c \sin x\, dx\right\} + \int_a^c \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= p+q+r\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} r = \int_a^c \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) dx &= \int_a^c \left\{\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\int_a^c \sin x\, dx + \int_a^c \cos x\, dx\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_a^c \cos x\, dx &= \sqrt{2}\, r - \int_a^c \sin x\, dx \\ &= \sqrt{2}\, r - \left\{\int_a^b \sin x\, dx + \int_b^c \sin x\, dx\right\} \\ &= \sqrt{2}\, r - (p+q) = \sqrt{2}\, r - p - q\end{aligned}$$

예제 6.18

다음 정적분의 값을 계산하라.

(1) $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt$

(2) $\int_0^1 (e^{2x}-\sin x)\,dx-\int_1^0 (e^{2x}+\sin x)\,dx$

풀이

(1) $\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt=\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx=\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

(2) $\int_0^1 (e^{2x}-\sin x)\,dx-\int_1^0 (e^{2x}+\sin x)\,dx$

$$=\int_0^1 (e^{2x}-\sin x)\,dx+\int_0^1 (e^{2x}+\sin x)\,dx=\int_0^1 2e^{2x}\,dx=2\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^0\right)=e^2-1$$

2) 우함수와 기함수의 정적분

- 대칭 구간에서 우함수와 기함수에 대한 정적분의 계산과정은 단순화될 수 있다.

① $f(x)$가 우함수인 경우

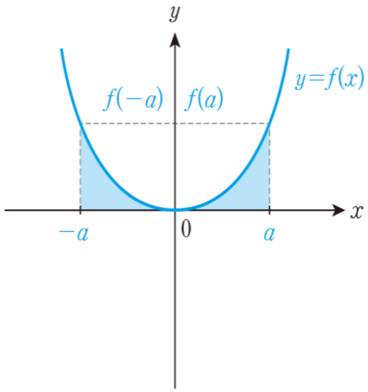
→ $f(x)$가 y축 대칭이기 때문에 구간 $[-a, a]$에 대하여 정적분한 결과는 구간 $[0, a]$에 대하여 정적분한 결과를 2배 한 것과 동일하다.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

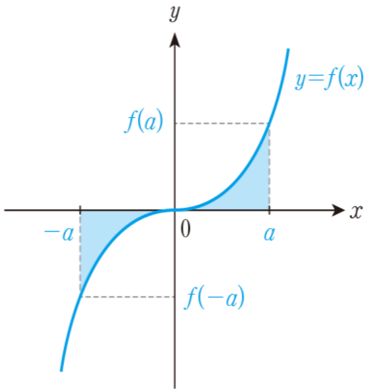
② $f(x)$가 기함수인 경우

→ $f(x)$가 원점대칭이기 때문에 구간 $[-a, a]$에 대하여 정적분한 결과는 0이 된다.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$



(a) $f(x)$가 우함수인 경우



(b) $f(x)$가 기함수인 경우

[그림 6.7] 우함수와 기함수의 정적분

예제 6.19

다음 정적분의 값을 계산하라.

(1) $\int_{-1}^{1} (x^5 + x^3 + x)\, dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

풀이

(1) 피적분함수 $f(x) = x^5 + x^3 + x$ 에서

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + (-x) = -(x^5 + x^3 + x) = -f(x)$$

이므로 기함수이다. 따라서 식(34)로부터

$$\int_{-1}^{1} (x^5 + x^3 + x)\, dx = 0$$

이 된다.

(2) 피적분함수가 $\cos x$ 이므로 $\cos(-x) = \cos x$ 로부터 우함수이다. 식(33)으로부터

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

가 된다.

예제 6.20

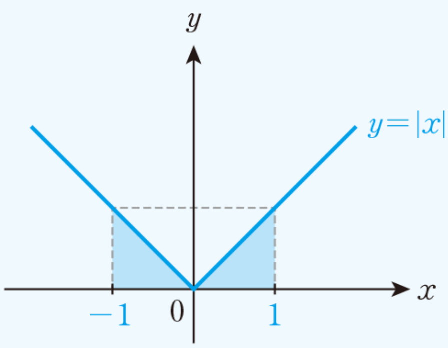
다음 정적분을 계산하라.

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx$$

풀이

$f(x) = |x|$일 때 $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$이므로 우함수이다. 따라서 식(33)으로부터

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_{0}^{1} |x|\, dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} x\, dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$



이 된다.

3) 정적분의 치환적분법

치환적분법을 이용하여 정적분을 계산하는 경우 적분구간의 변화에 대하여 주의해야 한다.

$$\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

① $t \triangleq x^2 + 1$로 치환하여 양변을 x로 미분한다.

$$\frac{dt}{dx} = 2x \rightarrow 2xdx = dt$$

② 적분구간의 변환

$x = 1$일 때, $t = x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$x = 2$일 때, $t = x^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

③ x에 대한 적분을 t에 대한 적분으로 변환한다.

$$\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+1} dx = \int_{2}^{5} \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[\ln t\right]_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln \frac{5}{2}$$

예제 6.21

다음 정적분을 치환적분법으로 계산하라.

(1) $\int_2^4 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$

(2) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

풀이

(1) $t \triangleq x^2-1$로 치환하고 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$dt=2xdx$$

다음으로 t에 대한 적분구간을 구한다.

$x=2$일 때 $t=3$이고, $x=4$일 때 $t=15$이므로 주어진 적분은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned}\int_2^4 2x\sqrt{x^2-1}\,dx &= \int_3^{15}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]_3^{15}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{15}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{30}(\sqrt{15}-5\sqrt{3})\end{aligned}$$

(2) $t \triangleq x^2$으로 치환하고 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$dt=2xdx \longrightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$$

다음으로 t에 대한 적분구간을 구한다.

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=1$일 때 $t=1$이므로 주어진 적분은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{x^2}dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt\\ &= \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\end{aligned}$$

예제 6.22

다음 정적분을 치환적분법으로 계산하라.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$$

풀이

$t \triangleq x^2$ 으로 치환하고 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$dt = 2x\,dx \longrightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$$

다음으로 t에 대한 적분구간을 구한다.

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=\sqrt{\pi}$ 일 때 $t=\pi$ 이므로 주어진 적분은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) \\ &= \frac{1}{2}(1+1) = 1\end{aligned}$$

4) 정적분의 부분적분법

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

양변을 적분구간 $[a,\ b]$에 대하여 적분하면

$$\int_a^b \{u(x)v(x)\}'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$\therefore \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b \{u(x)v(x)\}'\,dx - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$= \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

예제 6.23

부분적분법을 이용하여 다음 정적분을 계산하라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^{3x}\,dx$

풀이

(1) $u' = \cos x,\ v = x$라 하면, $u = \sin x,\ v' = 1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

(2) $u' = e^{3x},\ v = x$라 하면, $u = \frac{1}{3}e^{3x},\ v' = 1$이므로

$$\int_0^1 xe^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1)$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$

예제 6.24

부분적분법을 이용하여 다음 정적분을 계산하라.

(1) $\int_0^{\pi} x(\sin x + \cos x)\,dx$

(2) $\int_0^{1} (x-1)e^x\,dx$

풀이

(1) $u' = \sin x + \cos x$, $v = x$ 라 하면 $u = -\cos x + \sin x$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x(\sin x + \cos x)\,dx &= \Big[(-\cos x + \sin x)\,x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x + \sin x)\,dx \\ &= (-\cos\pi + \sin\pi)\pi - \Big[-\sin x - \cos x\Big]_0^{\pi} \\ &= \pi - (1+1) = \pi - 2\end{aligned}$$

(2) $u' = e^x$, $v = x-1$ 이라 하면, $u = e^x$, $v' = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{1} (x-1)e^x\,dx &= \Big[e^x(x-1)\Big]_0^{1} - \int_0^{1} e^x\,dx \\ &= 1 - \Big[e^x\Big]_0^{1} = 1 - (e-1) = 2 - e\end{aligned}$$