제3장 - 다양한 함수

1. 1차 및 2차 다항함수
2. 삼각함수
3. 덧셈정리와 삼각함수의 합성
4. 지수함수와 로그함수
5. 함수의 특성: 주기성과 대칭성

3.1 1차 및 2차 다항함수

1) 1차 다항함수

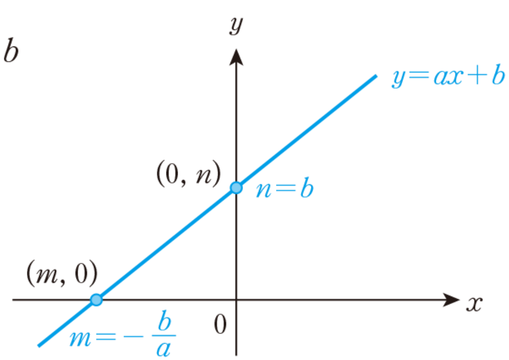
$$y = ax + b \ (a \neq 0, b\text{는 상수})$$

① x축 절편 m: 1차함수의 그래프와 x축과의 교점이므로 점$(m, 0)$를 1차함수에 대입하여 구한다.

$$0 = am + b \qquad \therefore \ m = -\frac{b}{a}$$

② y축 절편 n: 1차함수의 그래프와 y축과의 교점이므로 점$(0, n)$을 1차함수에 대입하여 구한다.

$$n = a \cdot 0 + b \qquad \therefore \ n = b$$



[그림 3.1] 1차함수의 그래프와 절편

(1, 2) (3, 4)

- 두 점을 지나는 1차함수

$y-4=\frac{4-2}{3-1}(x-3)$

정리 3.1 두 점을 지나는 1차함수

두 점 $P(x_1, y_1)$와 $Q(x_2, y_2)$를 지나는 1차함수의 식은 다음과 같이 결정된다.

→ $y=x+1$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$

증명

$y-2=x-1$, $\boxed{y=x+1}$

두 점 P와 Q를 지나는 1차함수의 식을 다음과 같다고 가정한다.

$$y=ax+b$$

식(2)가 두 점 $P(x_1, y_1)$와 $Q(x_2, y_2)$를 지나기 때문에 두 점의 좌표를 대입하면

$$y_1=ax_1+b$$
$$y_2=ax_2+b$$

$y_2-y_1=ax_2-ax_1$

$a=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$

가 얻어지는데, 식(3)과 식(4)를 연립하여 a와 b에 대하여 정리하면 다음과 같다.

증명

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

식(5)를 식(2)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1\right)$$

$$\therefore y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- 두 점 $P(x_1, y_1)$과 $Q(x_2, y_2)$를 지나는 1차함수

기울기 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

y축 절편 $b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$

예제 3.1

한 점 $P(1, 2)$를 지나고 기울기가 3인 1차함수에서 x축과 y축 절편을 각각 구하라.

풀이

점 $P(1, 2)$를 지나고 기울기가 3인 1차함수의 식을 다음과 같이 가정한다.

$$y = 3x + b$$

위의 1차함수 식에 점 $P(1, 2)$를 대입하면

$$2 = 3 \times 1 + b \qquad \therefore b = -1$$

이 되므로 구하려는 1차함수는 $y = 3x - 1$이 된다.

따라서 $y = 3x - 1$의 x축 절편 $m = \frac{1}{3}$이고, y축 절편 $n = -1$이다.

예제 3.2

다음 조건을 만족하는 1차함수의 식을 각각 구하라.

(1) x축과 y축 절편이 -3과 6인 1차함수

(2) 두 점 $P(1, 2)$와 $Q(3, 4)$를 지나는 1차함수

풀이

(1) x축과 y축 절편이 -3과 6이므로 결과적으로 점$(-3, 0)$과 점$(0, 6)$을 지나는 1차함수이다. 식(1)에 두 점의 좌표를 대입하면

$$y-0=\frac{6-0}{0-(-3)}(x-(-3))$$

$$\therefore\ y=2x+6$$

(2) 식(1)에 두 점의 좌표를 대입하면 다음의 1차함수가 얻어진다.

$$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore\ y=x+1$$

2) 2차 다항함수(2차함수)

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0,\ b, c\text{는 상수})$$ ⟵ 일반형

또는

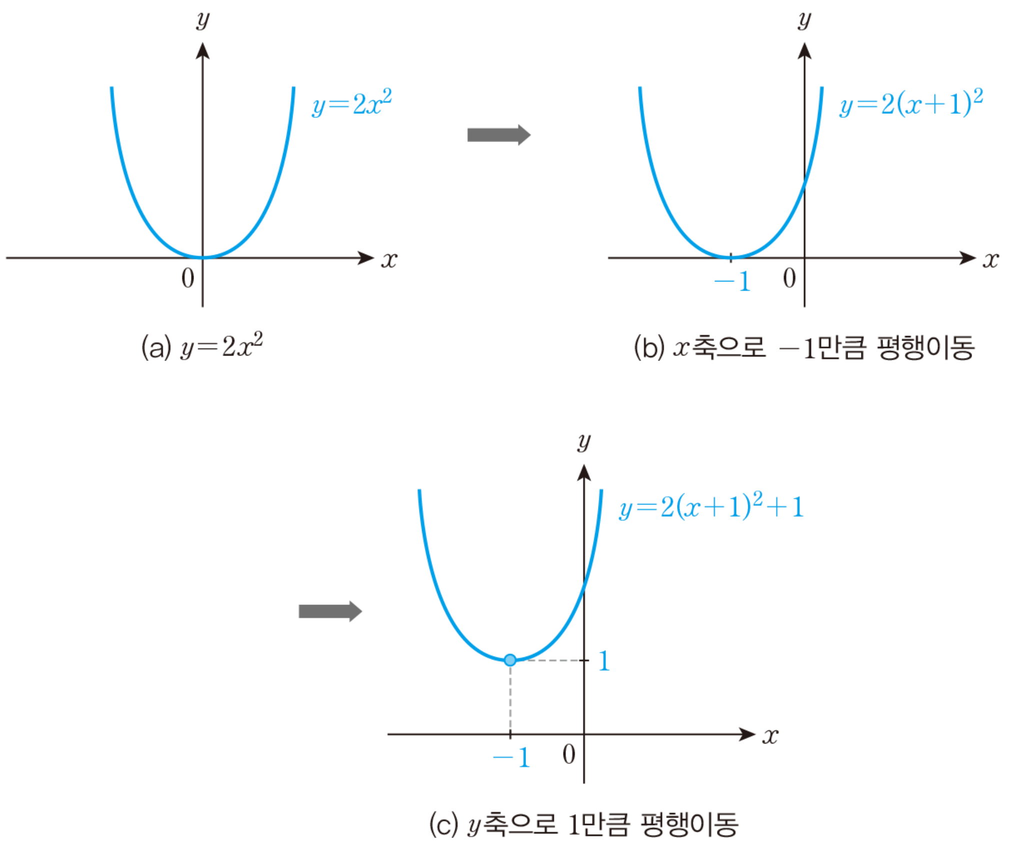
$$y = a(x-m)^2 + n$$ ⟵ 완전제곱형

- $y = 2x^2 + 4x + 3$ 을 완전제곱형으로 변형하기

$$\begin{aligned} y = 2x^2 + 4x + 3 &= 2(x^2 + 2x) + 3 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) + 1 \\ &= 2(x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

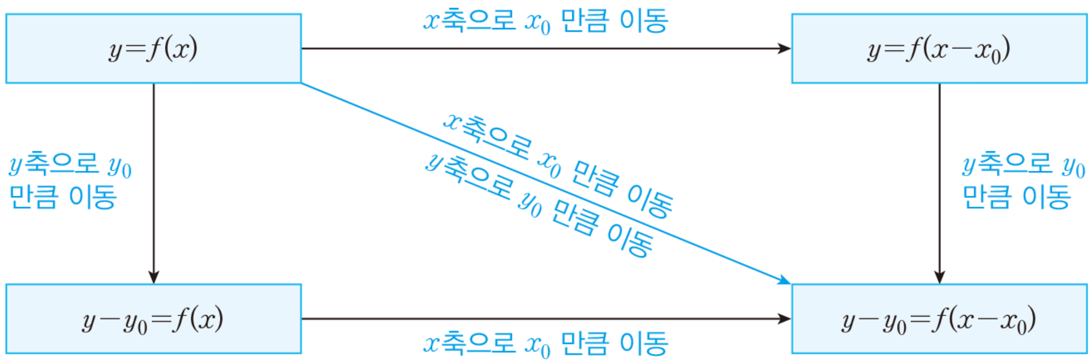
⟶ $y = 2(x+1)^2 + 1$은 $y = 2x^2$의 그래프를 x축을 따라 -1만큼, y축을 따라 1만큼 평행이동한 함수이다.

⟶ 일반형으로 표현된 2차함수를 완전제곱형으로 변형하면 함수의 그래프를 쉽고 편리하게 그릴 수 있다.



[그림 3.2] 완전제곱형 2차함수의 그래프

- 함수의 평행이동의 개념



- $y = ax$를 x 축으로 x_0만큼, y 축으로 y_0만큼 평행이동

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

- $y = ax^2$을 x축으로 x_0만큼, y축으로 y_0만큼 평행이동

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2$$

예제 3.3

다음 2차함수의 그래프를 그리고 꼭지점의 좌표를 구하라.

(1) $y=x^2+2x+3$

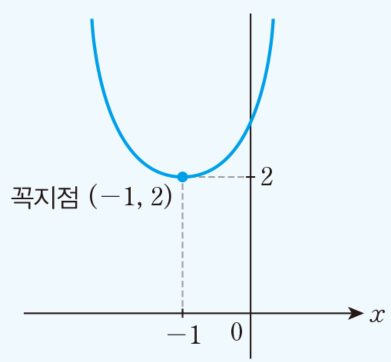
(2) $y=-x^2+6x-8$

풀이

(1) 일반형 2차함수를 완전제곱형으로 변형한다.

$$\begin{aligned} y=x^2+2x+3 &= (x^2+2x)+3 \\ &= (x^2+2x+1-1)+3 \\ &= (x+1)^2+2 \end{aligned}$$

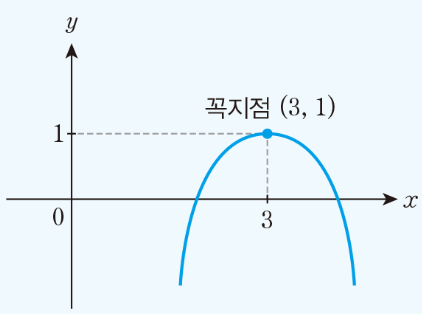
따라서 $y=(x+1)^2+2$는 $y=x^2$의 그래프를 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



(2) 일반형 2차함수를 완전제곱형으로 변형한다.

$$\begin{aligned} y = -x^2+6x-8 &= -(x^2-6x)-8 \\ &= -(x^2-6x+9-9)-8 \\ &= -(x-3)^2+1 \end{aligned}$$

따라서 $y=-(x-3)^2+1$은 $y=-x^2$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



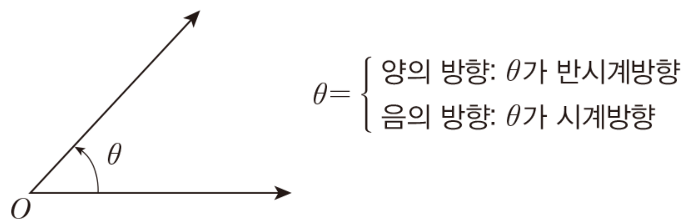
1차 2차 함수 LAB

- 1차 함수, 2차 함수의 이해
- 1,2차 함수의 평행이동 개념 확인

3.2 삼각함수

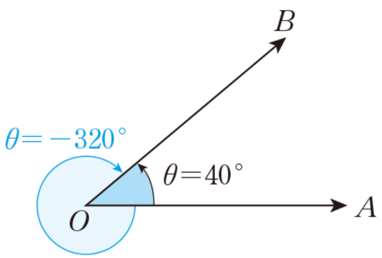
1) 각의 방향

- 각 θ가 반시계 방향으로 회전하면 양(+)의 방향, 시계 방향으로 회전하면 음(-)의 방향으로 정의한다.



[그림 3.3] 각 θ의 방향

- 각의 두 가지 가능한 값



[그림 3.4] 각 θ의 두 가지 가능한 값

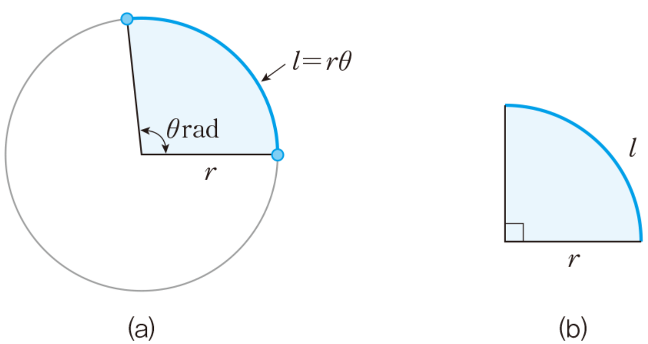
2) 각도의 표현방법

- 360분법(60분법) : 원주를 360개의 조각으로 나누어 한 조각에 해당하는 각도를 1°로 정의한다.
- 호도법(Circular Measure) : 호의 길이로부터 각도를 표현하는 방법이며, 단위로는 rad(라디안)을 사용한다.

1 rad ≜ 호의 길이가 반지름의 1배가 되는 각도

2 rad ≜ 호의 길이가 반지름의 2배가 되는 각도

θ rad ≜ 호의 길이가 반지름의 θ배가 되는 각도



[그림 3.5] 호도법의 정의

- 90°에 대한 호의 길이 = 원주의 길이$\times \frac{1}{4} = 2\pi r \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} r$

⟶ 호의 길이 $\ell = (\frac{\pi}{2}) r$이 반지름의 $\frac{\pi}{2}$ 배이므로 90°는 $\frac{\pi}{2}$ rad

- 360분법과 호도법 사이의 변환

$$\pi\text{rad} : 180^\circ = \theta\text{rad} : x^\circ$$
$$\therefore\ x^\circ = \frac{\theta\text{rad}}{\pi\text{rad}} \times 180^\circ = \frac{\theta}{\pi} \times 180^\circ$$

⟵ 호도법을 360분법으로

$$180^\circ : \pi\text{rad} = x^\circ : \theta\text{rad}$$
$$\therefore\ \theta\text{rad} = \frac{x^\circ}{180^\circ} \times \pi\text{rad} = \frac{x}{180} \times \pi\text{rad}$$

⟵ 360분법을 호도법으로

예제 3.4

다음의 각에 대하여 360분법은 호도법으로 호도법은 360분법으로 변환하라.

(1) 45°　　　　(2) $\frac{4}{3}\pi \mathrm{rad}$

풀이

(1) 45°를 $\theta \mathrm{rad}$ 이라고 가정하면 식(8)에 의하여 다음과 같다.

$$\theta = \frac{45}{180} \times \pi = \frac{\pi}{4} \mathrm{rad}$$

(2) $\frac{4}{3}\pi \mathrm{rad}$을 x°라고 가정하면 식(7)에 의하여 다음과 같다.

$$x^\circ = \frac{\frac{4}{3}\pi}{\pi} \times 180^\circ = 240^\circ$$

3) 삼각함수

- 삼각함수 정의의 확장 : 직각삼각형에서 세 변의 길이에 대한 비율로 정의하였으나 개념을 확장하여 정의한다.

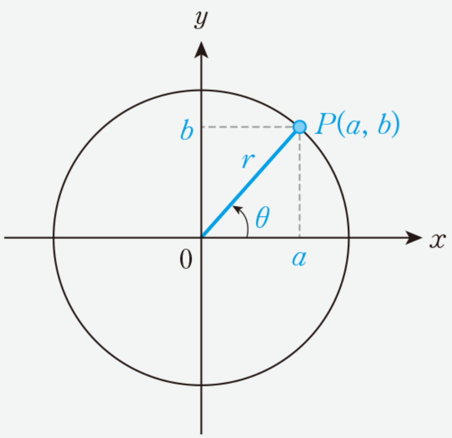
정의 3.1 삼각함수

x축의 양의 방향과 반직선 $\overrightarrow{OP}$ 가 이루는 각을 θ라고 할 때 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$



[그림 3.6] 삼각함수의 정의

- 삼각함수의 역수

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{r}{b}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{a}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{a}{b}$$

- 삼각함수의 부호

〈표 3.1〉 삼각함수의 부호

	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
a, b의 부호	$a > 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$	$a > 0$ $b < 0$
$\sin\theta$	양	양	음	음
$\cos\theta$	양	음	음	양
$\tan\theta$	양	음	양	음

→ 제1사분면에서는 모든 삼각함수의 부호가 양(+)이 된다.

예제 3.5

다음의 삼각함수의 값을 계산하라.

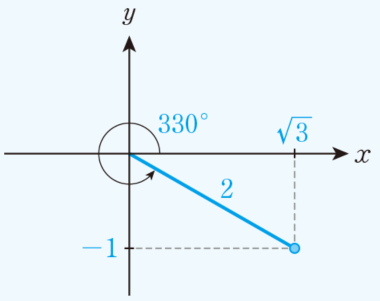
(1) $\cos 330^\circ$ (2) $\sin \frac{5}{4}\pi$

풀이

(1) 330°는 제4사분면에 있는 각이므로

$$\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

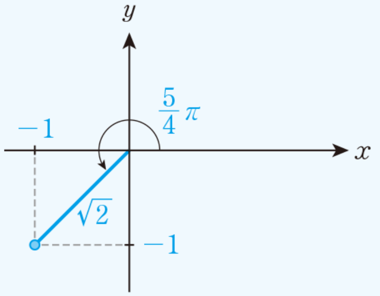
이다.



(2) $\frac{5}{4}\pi$ 는 제3사분면에 있는 각이므로

$$\sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다.



- 삼각함수의 함숫값은 먼저 각이 어떤 사분면에 위치하는가를 판단한 다음, 삼각함수의 정의와 <표3.1>을 참고하여 계산할 수 있다.

3.3 덧셈정리와 삼각함수 합성

1) 덧셈정리

- 삼각함수의 덧셈정리는 매우 기본적인 정리이므로 기억을 해두는 것이 좋다. 덧셈정리로부터 여러 가지 유용한 삼각함수의 공식들이 유도된다.

정리 3.2 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

(2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

(3) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

예제 3.6

다음 삼각함수의 값을 덧셈정리를 이용하여 구하라.

(1) $\cos\frac{\pi}{12}$ (2) $\sin\frac{7}{12}\pi$

풀이

(1)
$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sin\frac{7}{12}\pi &= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

- 2배각 공식

$$\sin(x+y) = \sin x \ \cos y + \cos x \sin y$$

$y = x$를 대입

$$\sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \ \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

- 반각공식

$$\cos(x+y) = \cos x \ \cos y - \sin x \sin y$$

$y = x$를 대입

$$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 의 관계를 이용

$$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\therefore \ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- 곱을 합으로 변환하는 공식

$\sin(x+y)$와 $\sin(x-y)$의 양변을 더하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} & \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \\ +) & \underline{\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y} \\ & \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \\ \therefore & \sin x\cos y=\dfrac{1}{2}\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\} \end{array}$$

마찬가지로 $\cos(x+y)$와 $\cos(x-y)$의 양변을 더하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} & \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \\ +) & \underline{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y} \\ & \cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y \\ \therefore & \cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\} \end{array}$$

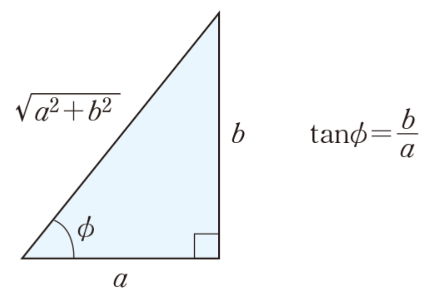
만일 $\cos(x+y)$와 $\cos(x-y)$의 양변을 빼면 다음과 같다.

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}$$

2) 삼각함수의 합성

- $a\sin x + b\cos x$ 형태의 삼각함수를 한 종류의 삼각함수로 표현하는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다. ⟶ 단진동 합성

$$
\begin{aligned}
a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\phi + \cos x\sin\phi) \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi),\quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$



[그림 3.7] 밑변과 높이가 각각 a, b인 직각삼각형

예제 3.7

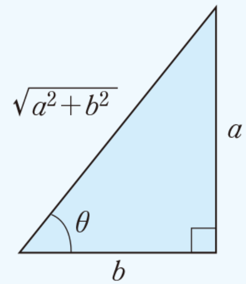
a와 b가 실수일 때 $a\sin x+b\cos x$를 cosine 함수만을 이용하여 합성하면 다음과 같이 표현된다는 것을 증명하라.

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

풀이

삼각함수를 합성하는 과정에서 [그림 3.7]과는 다르게 밑변이 b이고 높이가 a인 직각삼각형을 도입한다.



$\tan\theta = \frac{a}{b}$

위의 직각삼각형에서 다음의 관계가 성립한다.

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

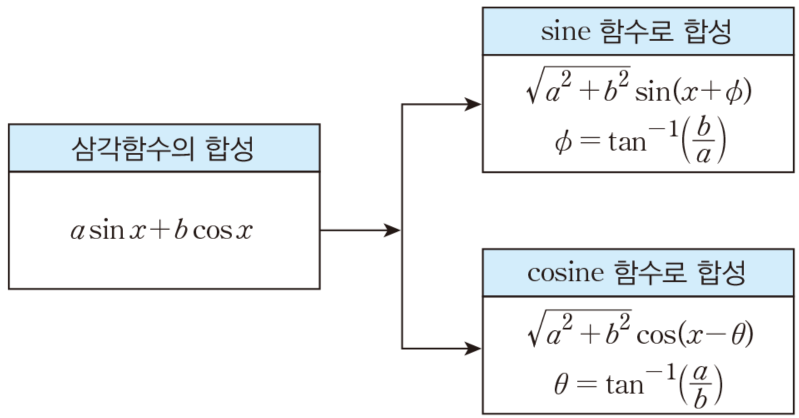
여기서 각 θ는 다음과 같이 구해진다.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} a\sin x + b\cos x &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\sin\theta + \cos x\cos\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) \end{aligned}$$

- 삼각함수의 합성요약

$a\sin x + b\cos x$ 형태의 삼각함수를 한 종류의 sine 또는 cosine의 한 종류의 삼각함수로만 표현 가능하다.



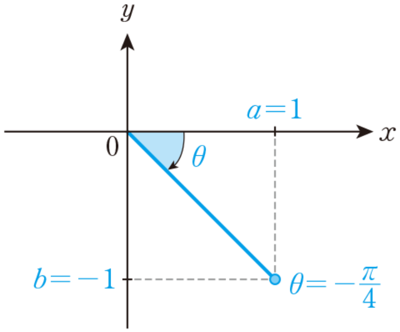
$\longrightarrow$ 삼각함수의 합성에서 $\emptyset$ 또는 θ 를 계산하는데 a와 b의 부호에 따라 $\tan^{-1}$ 함수의 값이 달라지므로 주의하여 계산하도록 한다.

• tan^{-1} 함수의 계산

① a와 b의 부호에 따라 θ가 어떤 사분면에 위치하는 각인지를 판별한다.

② 해당되는 사분면에서의 각도를 계산한다.

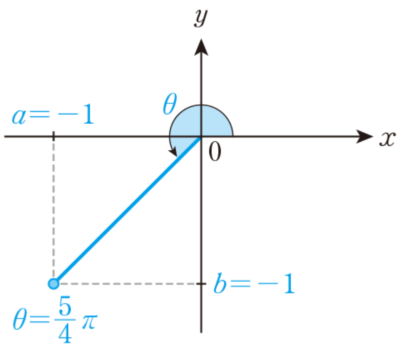
예를 들어, $a=1$, $b=-1$인 경우 θ는 제4사분면에 위치하는 각이다.



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)$$

$$\therefore\ \theta = -\frac{\pi}{4} \quad \text{또는} \quad \frac{7}{4}\pi$$

만일 $a=-1$, $b=-1$인 경우 θ는 제3사분면에 위치하는 각이다.



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right)$$

$$\therefore\ \theta = \frac{5}{4}\pi \quad \text{또는} \quad -\frac{3}{4}\pi$$

예제 3.8

다음을 sine 함수만을 이용하여 합성하라.

(1) $\sin x + \cos x$ (2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$

풀이

(1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\phi)$

$$\phi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{4}\sin(x+\phi) = 2\sin(x+\phi)$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

예제 3.9

다음을 cosine 함수만을 이용하여 합성하라.

(1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ (2) $\sin x - \cos x$

풀이

(1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{4}\cos(x-\theta) = 2\cos(x-\theta)$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(2) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos(x-\theta)$

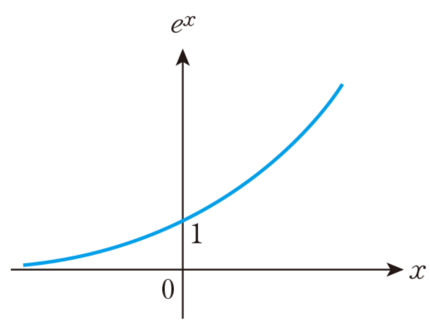
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3}{4}\pi$

$\therefore \sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

3.6 지수함수와 로그함수

1) 지수함수 e^x

$$f(x) = e^x,\ e = 2.718\ldots$$



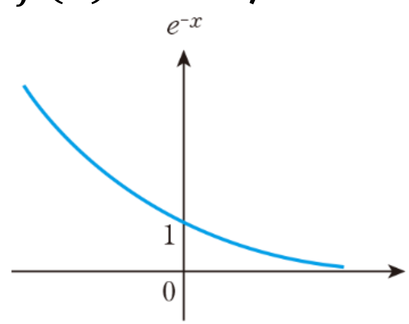
[그림 3.14] e^x의 그래프

① e^x는 독립변수 x가 증가할 때 매우 빠르게 증가하며, $x \to \infty$이면 $e^x \to \infty$로 발산한다. $\longrightarrow$ 지수적인 증가(Exponential Growth)

② e^x는 독립변수 x가 감소할 때 매우 빠르게 감소하며, $x \to -\infty$이면 $e^x \to 0$으로 수렴한다. $\longrightarrow$ 지수적인 감쇠(Exponential Decay)

2) 지수함수 e^{-x}

$$f(x) = e^{-x},\ e=2.718...$$



[그림 3.15] e^{-x}의 그래프

① e^{-x}는 독립변수 x가 증가할 때 매우 빠르게 감소하며, $x \to \infty$이면 $e^{-x} \to 0$로 수렴하여 지속적으로 감쇠한다. ⟶ 지수적인 감쇠

② 만일 독립변수 x가 감소할 때 매우 빠르게 증가하며, $x \to -\infty$이면 $e^{-x} \to \infty$로 발산하여 지수적으로 증가한다. ⟶ 지수적인 증가

- 지수함수는 공학분야에서 흔히 사용되는 매우 중요한 함수이므로 충분한 이해가 필수적이다.

예제 3.14

다음 함수 $f(x)$의 그래프를 그리고 $f(x)$의 최솟값을 구하라.

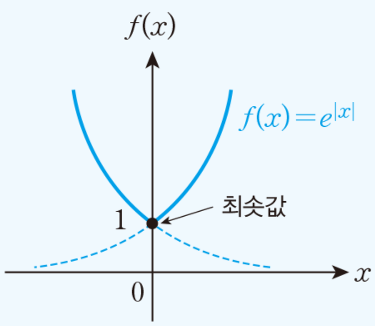
$$f(x) = e^{|x|}$$

풀이

$x > 0$일 때 $f(x) = e^{|x|} = e^{x}$

$x < 0$일 때 $f(x) = e^{|x|} = e^{-x}$

이므로 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)$의 그래프로부터 최솟값은 $x=0$에서 1이 된다.

예제 3.15

다음 함수 $f(x)$를 x축 방향으로 2만큼 y축 방향으로 1만큼 평행이동한 함수 $g(x)$의 그래프를 도시하고, $g(x)$의 최댓값을 구하라.

$$f(x) = e^{-|x|}$$

풀이

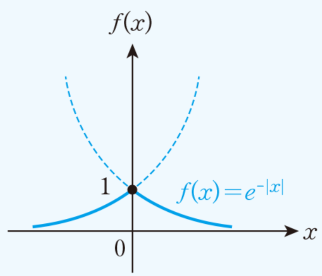
평행이동의 정의에 의하여 x축으로 2만큼, y축으로 1만큼 평행이동한 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

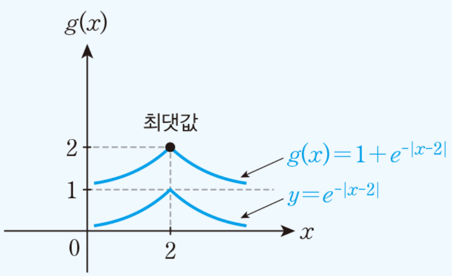
$$y-1 = f(x-2) \to y = 1+e^{-|x-2|} \qquad \therefore g(x) = 1+e^{-|x-2|}$$

먼저 $f(x) = e^{-|x|}$의 그래프를 도시하기 위하여 x의 범위에 따라 $f(x)$를 구해본다.

$x > 0$일 때 $f(x) = e^{-|x|} = e^{-x}$

$x < 0$일 때 $f(x) = e^{-|x|} = e^{x}$





$f(x)$의 그래프를 x축으로 2만큼, y축으로 1만큼 평행이동한 $g(x)$의 그래프는 위의 우측에 나타내었다. 위의 우측 그림에서 $g(x) = 1-e^{-|x-2|}$의 최댓값은 $x=2$에서 $y=2$를 가진다.

3) 로그함수

정의 3.2 상용로그와 자연로그

(1) 밑이 10인 로그를 상용로그라고 하며, 밑 10을 생략하여 다음과 같이 $\log x$로 표현한다.

$$y = \log_{10} x \triangleq \log x$$

(2) 밑이 e인 로그를 자연로그라고 하며, 밑 e를 생략하여 다음과 같이 $\ln x$로 표현한다.

$$y = \log_e x \triangleq \ln x$$

정리 3.3 로그의 성질

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$

(3) $\log_a x^m = m \log_a x$

(4) $\log_a a^m = m \log_a a = m$

(5) $a^{\log_a x} = x^{\log_a a} = x$

(6) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$인 양수)

예제 3.16

다음 식의 값을 계산하라.

(1) $\log_2 8 - \log_2 \frac{1}{4} + \log_2 16$

(2) $e^{\ln e^2} + \ln e$

(3) $\log \frac{1}{100} - 20 \log 10^2$

풀이

(1) $\log_2 8 - \log_2 \frac{1}{4} + \log_2 16$

$= \log_2 2^3 - (\log_2 1 - \log_2 4) + \log_2 2^4$

$= 3 - (0 - 2) + 4 = 9$

(2) $e^{\ln e^2} + \ln e = e^{2 \ln e} + \ln e = e^2 + 1$

(3) $\log \frac{1}{100} - 20 \log 10^2 = (\log 1 - \log 100) - 40 \log 10$

$= \log 1 - \log 10^2 - 40 \log 10$

$= 0 - 2 - 40 = -42$

예제 3.17

$a \neq 1$ 인 양수 a에 대하여 다음 지수함수의 역함수를 구하라.

$$y = a^x$$

풀이

역함수를 구하기 위하여 원 함수를 로그의 정의를 이용하여 x에 대하여 정리한다.

$$y = a^x \longrightarrow x = \log_a y$$

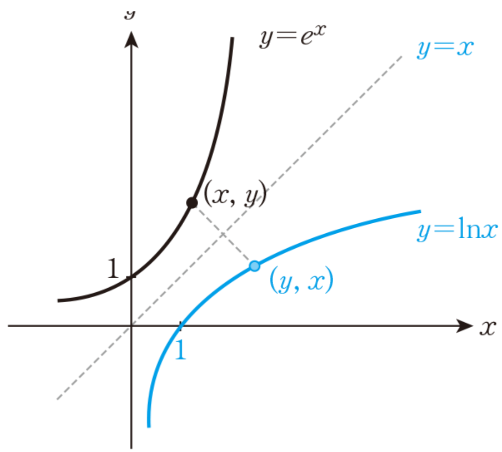
원 함수와 역함수는 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 x와 y를 서로 바꾸면 다음의 역함수를 구할 수 있다.

$$y = \log_a x$$

- 로그함수와 지수함수의 관계

  $y = \ln x$는 $y = e^x$와 역함수 관계이므로 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

$$y = \ln x \xrightarrow{\text{역함수}} y = e^x$$



[그림 3.16] $y = \ln x$의 그래프

예제 3.18

양수 x와 y에 대하여 $x+y=3x-2y$ 의 관계가 성립할 때 다음을 계산하라.

$$\log\left(x+\frac{7}{2}y\right)-\log(x-y)$$

풀이

주어진 $x+y=3x-2y$ 로부터

$$2x=3y \qquad \therefore\ x=\frac{3}{2}y$$

이므로 주어진 식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\log\left(x+\frac{7}{2}y\right)-\log(x-y)\\&=\log\left(\frac{3}{2}y+\frac{7}{2}y\right)-\log\left(\frac{3}{2}y-y\right)\\&=\log\frac{10}{2}y-\log\frac{1}{2}y=\log\frac{\left(\frac{10}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\log 10=1\end{aligned}$$

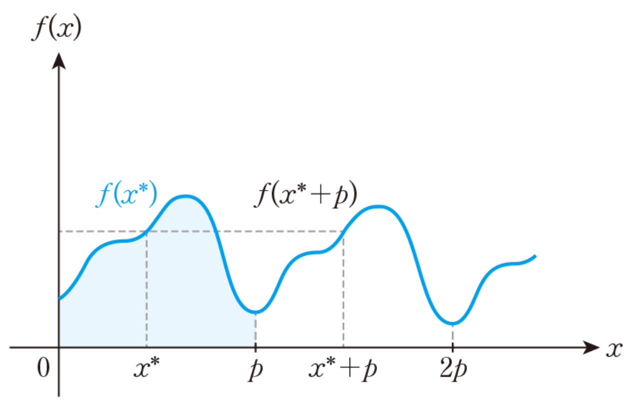
3.7 함수의 특성 : 주기성과 대칭성

1) 주기성과 주기함수

일정한 시간 간격으로 반복되는 주기적인 패턴이 나타날 때 이를 주기성(Periodicity)이라 한다.

- 주기가 p인 함수

$$f(x^*) = f(x^*+p), \ \forall x^*$$



[그림 3.17] 주기가 p인 주기함수

• x^*는 임의의 값이므로 x로 대체하여 주기함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x) = f(x+p), \ \forall x$$

$$f(x+2p) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x)$$ ← 주기가 $2p$

$$f(x+3p) = f[(x+2p)+p] = f(x+2p) = f(x)$$ ← 주기가 $3p$

$$\therefore \ f(x) = f(x+np)$$ ← 주기가 np

• 주기함수의 가능한 모든 주기 중에서 가장 작은 값 p를 기본주기 (Fundamental Period)라고 정의한다.

• 공학적인 현상 중에서 감쇠가 없는 스프링(Spring)의 진동이나 심전도 파형 등에서 일정한 시간 간격으로 반복되는 주기적인 패턴이 나타난다.

예제 3.19

다음 함수들의 기본주기를 구하라.

(1) $f(x) = \sin 2x$

(2) $g(x) = \sin x + \cos 2x$

(3) $h(x) = \sin 3x + \cos 2x$

풀이

(1) $f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x=f(x)$

따라서 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다.

(2) $\sin x$는 주기가 2π인 주기함수이고 $\cos 2x$는 주기가 π인 주기함수이므로

$g(x+2\pi)$를 계산해 보면

$$\begin{aligned} g(x+2\pi) &= \sin(x+2\pi)+\cos 2(x+2\pi) \\ &= \sin x+\cos(2x+4\pi)=\sin x+\cos 2x=g(x) \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 $g(x)$는 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) $\sin 3x$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 주기함수이고, $\cos 2x$는 주기가 π인 주기함수이므로

$\left\{\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{6}{3}\pi,\ \cdots\right\}$와 $\{\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots\}$의 교집합 중에서 가장 작은 값은

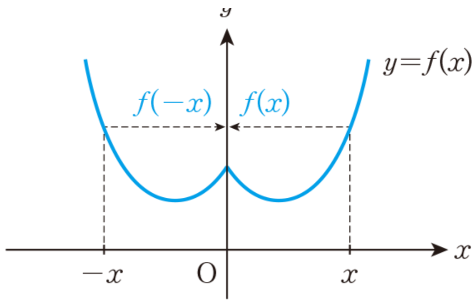
2π이므로 $h(x+2\pi)$를 계산해 본다.

$$\begin{aligned} h(x+2\pi) &= \sin 3(x+2\pi)+\cos 2(x+2\pi) \\ &= \sin(3x+6\pi)+\cos(2x+4\pi) \\ &= \sin 3x+\cos 2x=h(x) \end{aligned}$$

따라서 $h(x)$는 주기가 2π인 주기함수이다.

2) 대칭성 : 우함수와 기함수

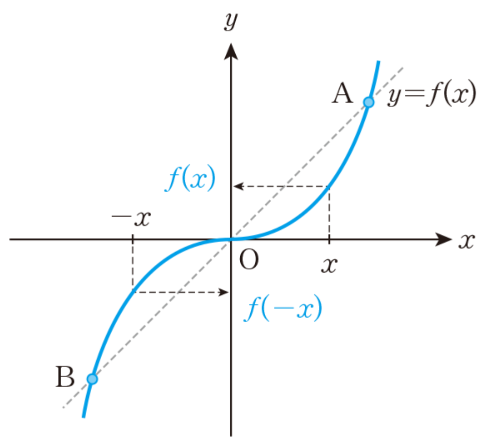
① 우함수(Even Function) : y축 대칭인 함수



[그림 3.18] y축 대칭함수(우함수)

$\Longleftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$

② 기함수(Odd Function) : 원점 대칭인 함수



[그림 3.19] 원점 대칭함수(기함수)

$\Longleftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$

- 우함수와 기함수의 성질

정리 3.3 우함수와 기함수의 성질

(1) 우함수의 합 또는 차는 우함수이다.

(2) 기함수의 합 또는 차는 기함수이다.

(3) 두 우함수의 곱 또는 몫은 우함수이다.

(4) 두 기함수의 곱 또는 몫은 우함수이다.

(5) 우함수와 기함수의 곱 또는 몫은 기함수이다.

예제 3.20

[정리 3.3]에서 다음의 성질을 증명하라.

(1) 두 기함수의 곱은 우함수이다.

(2) 우함수와 기함수의 곱은 기함수이다.

풀이

(1) $f(x)$와 $g(x)$를 기함수라 가정하면 다음의 관계가 성립된다.

$$f(x) = -f(-x)$$
$$g(x) = -g(-x)$$

$h(x) \triangleq f(x)g(x)$라 정의하고 $h(-x)$를 계산하면

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = \{-f(x)\}\{-g(x)\} = f(x)g(x) = h(x)$$

가 성립하므로 $h(x)$는 우함수이다.

(2) $f(x)$를 우함수, $g(x)$를 기함수라 가정하면 다음의 관계가 성립된다.

$$f(x) = f(-x)$$
$$g(x) = -g(-x)$$

$h(x) \triangleq f(x)g(x)$라 정의하고 $h(-x)$를 계산하면

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)\{-g(x)\} = -f(x)g(x) = -h(x)$$

가 성립하므로 $h(x)$는 기함수이다.

예제 3.21

다음 함수가 우함수인지 기함수인지 판별하라.

(1) $f(x) = x^2 + 3$

(2) $g(x) = x^3 + x$

(3) $h(x) = x + 1$

풀이

(1) $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ $\quad \therefore$ $f(x)$는 우함수이다.

(2) $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$

$\therefore$ $g(x)$는 기함수이다.

(3) $h(-x) = -x + 1 \neq h(x)$ 이므로 $h(x)$는 우함수도 기함수도 아니다.

예제 3.22

$f(x)$가 우함수이고 $g(x)$가 기함수라고 할 때, 다음 함수들이 우함수인지 기함수인지를 판별하라.

(1) $(f \circ f)(x)$

(2) $(g \circ g)(x)$

(3) $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$

풀이

(1) $p(x) \triangleq (f \circ f)(x)$라고 정의하고 $p(-x)$를 계산하면

$$p(-x) = (f \circ f)(-x) = f(f(-x)) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = p(x)$$

이므로 $p(x) = (f \circ f)(x)$는 우함수이다.

(2) $q(x) \triangleq (g \circ g)(x)$라고 정의하고 $q(-x)$를 계산하면

$$\begin{aligned} q(-x) &= (g \circ g)(-x) = g(g(-x)) = g(-g(x)) = -g(g(x)) \\ &= -(g \circ g)(x) = -q(x) \end{aligned}$$

이므로 $q(x) = (g \circ g)(x)$는 기함수이다.

풀이

(3) $r_1(x) \triangleq (f\circ g)(x)$라고 정의하고 $r_1(-x)$를 계산하면

$$\begin{aligned} r_1(-x) &= (f\circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) \\ &= f(g(x)) = (f\circ g)(x) = r_1(x) \end{aligned}$$

이므로 $r_1(x) = (f\circ g)(x)$는 우함수이다.

$r_2 \triangleq (g\circ f)(x)$라고 가정하고 $r_2(-x)$를 계산하면

$$r_2(-x) = (g\circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g\circ f)(x) = r_2(x)$$

이므로 $r_2(x) = (g\circ f)(x)$는 우함수이다.