# Search Tree

Jin Hyun Kim
Fall, 2019

# 이진탐색트리
# (Binary Search Tree)

# 탐색트리

- 저장된 데이터에 대해 탐색, 삽입, 삭제, 갱신 등의 연산을 수행할 수 있는 자료구조
- 1차원 리스트나 연결리스트는 각 연산을 수행하는데 O(N) 시간이 소요
- 스택이나 큐는 특정 작업에 적합한 자료구조.
- 리스트 자료구조의 수행시간을 향상시키기 위한 트리 형태의 다양한 사전 자료구조들을 소개
    - 이진탐색트리, AVL트리, 2-3트리, 레드블랙트리, B-트리

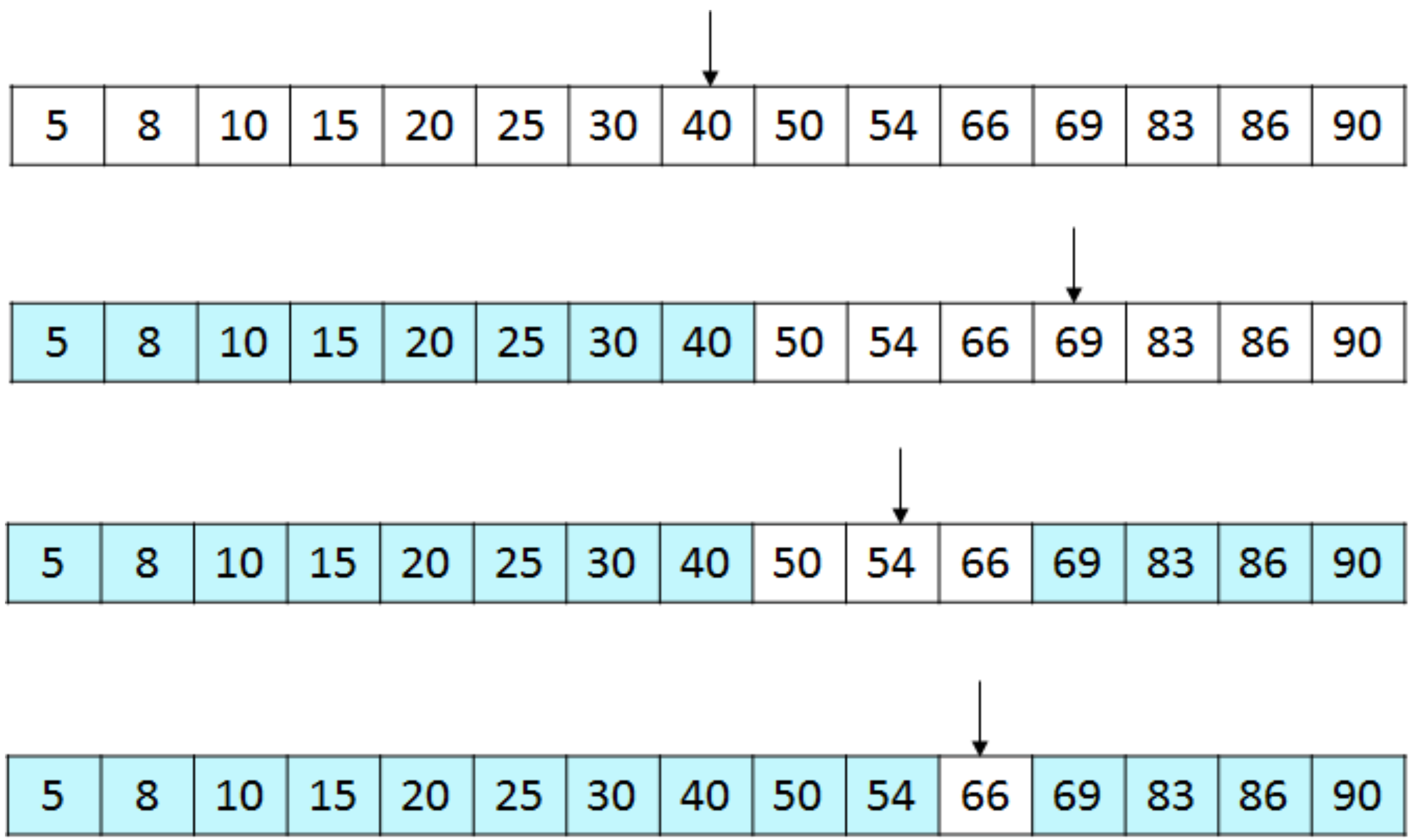
# 이진탐색

- 정렬된 데이터의 중간에 위치한 항목을 기준으로 데이터를 두 부분으로 나누어 가며 특정 항목을 찾는 탐색방법

```
binary_search(left, right, t):
[1] if left > right: return None # 탐색 실패 (즉, t가 리스트에 없음)
[2] mid = (left + right) // 2    #  중간 항목의 인덱스 계산
[3] if a[mid] == t: return mid    # 탐색 성공
[4] if a[mid] > t:  binary_search(left, mid-1, t)  # 앞부분 탐색
[5] else: binary_search(mid+1, right, t)           # 뒷부분 탐색
```

# 이진탐색의 예

- 66을 찾아 가는 과정



# 수행시간

- T(N) = 입력 크기 N인 정렬된 리스트에서 이진탐색을 하는데 수행되는 키 비교 횟수

- T(N)은 1번의 비교 후에 리스트의 1/2, 즉, 앞부분이나 뒷부분을 재귀호출하므로

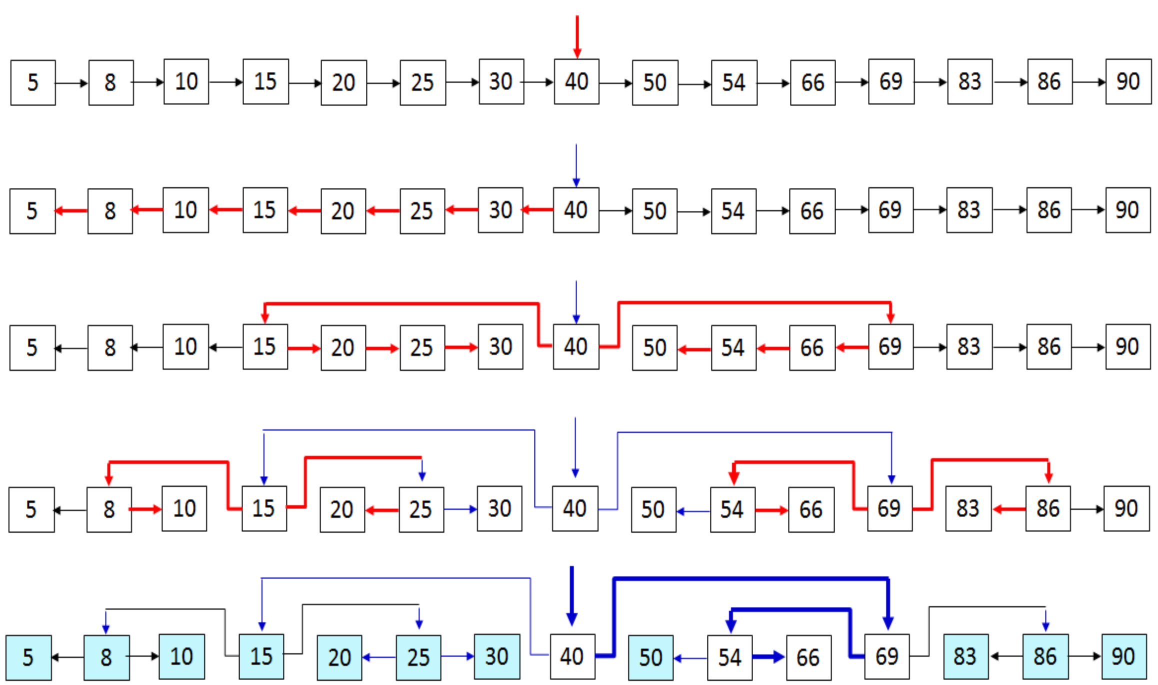
$$T(N) = T(N/2) + 1$$
$$T(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
T(N) &= T(N/2) + 1 \\
&= [T((N/2)/2) + 1] + 1 = T(N/2^2) + 2 \\
&= [T((N/2)/2^2) + 1] + 2 = T(N/2^3) + 3 \\
&= \mathbf{L} = T(N/2^k) + k \\
&= T(1) + k, \text{ if } N = 2^k,\ k = \log_2 N \\
&= 1 + \log_2 N = O(\log N)
\end{aligned}$$

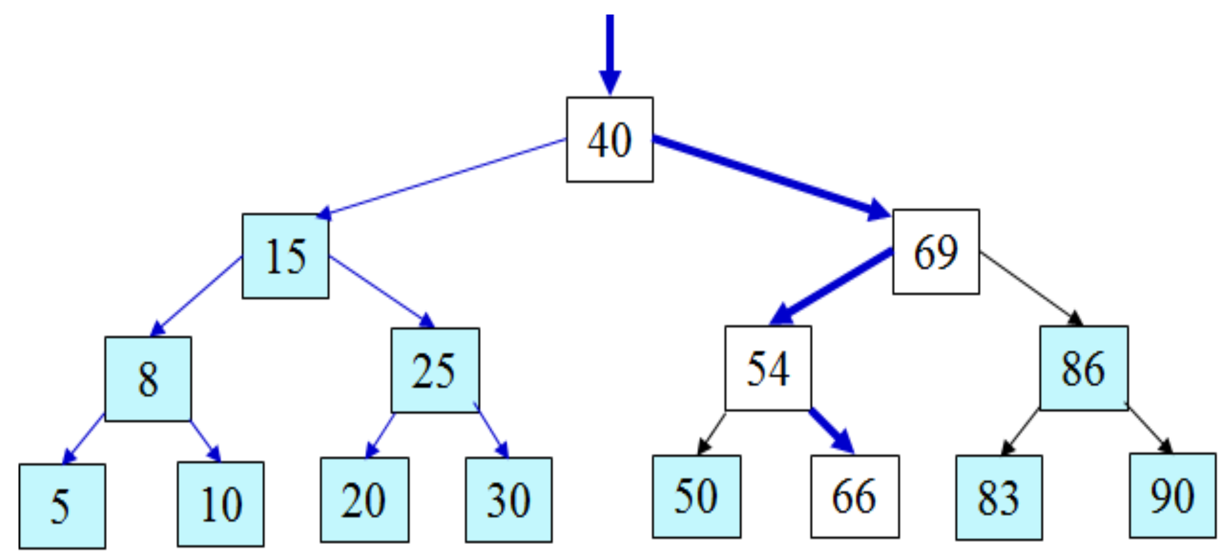
# 이진탐색트리
# Binary Search Tree

- 이진탐색(Binary Search)의 개념을 트리 형태의 구조에 접목한 자료구조

# 이진탐색과 이진트리



5 8 10 15 20 25 30 40 50 54 66 69 83 86 90
5 8 10 15 20 25 30 40 50 54 66 69 83 86 90
5 8 10 15 20 25 30 40 50 54 66 69 83 86 90
5 8 10 15 20 25 30 40 50 54 66 69 83 86 90
5 8 10 15 20 25 30 40 50 54 66 69 83 86 90

40
15
69
8
25
54
86
5
10
20
30
50
66
83
90

# 이진탐색트리
# Binary Search Tree

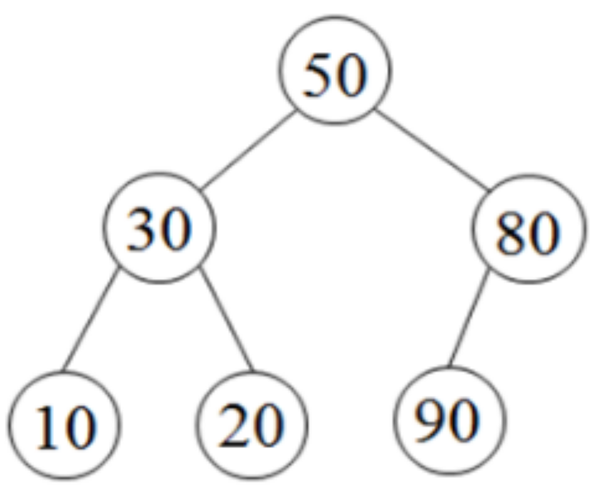
- 이진탐색(Binary Search)의 개념을 트리 형태의 구조에 접목한 자료구조

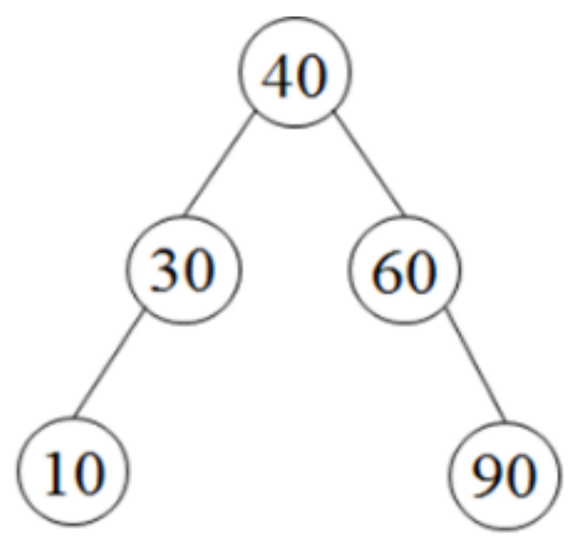
- 이진탐색트리는 이진트리로서 각 노드가 다음과 같은 조건을 만족한다.

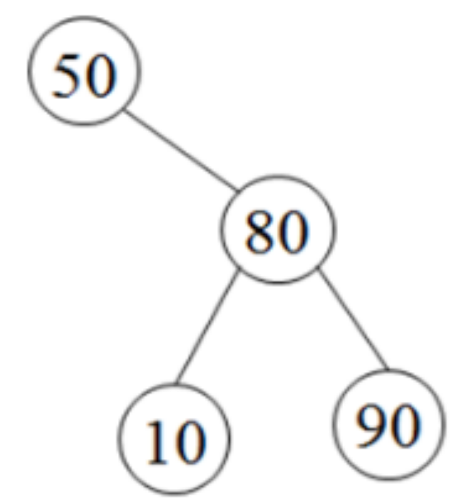
  - 각 노드 n의 키가 n의 왼쪽 서브트리에 있는 키들보다 (같거나) 크고, n의 오른쪽 서브트리에 있는 키들보다 작다. **[이진탐색트리 조건]**

# 이진탐색트리

- 다음 중 이진탐색트리는?



# 이진탐색 클래스

```python
class Node:
    def __init__(self, key, value, left=None, right=None):
        self.key   = key
        self.value = value
        self.left  = left
        self.right = right

class BST:
    def __init__(self): # 트리 생성자
        self.root = None

    def get(self, key): # 탐색 연산

    def put(self, key, value): # 삽입 연산

    def min(self): # 최솟값 가진 노드 찾기

    def deletemin(self): # 최솟값 삭제

    def delete(self, key): # 삭제 연산
```

노드 생성자
키, 항목과 왼쪽, 오른쪽자식 레퍼런스

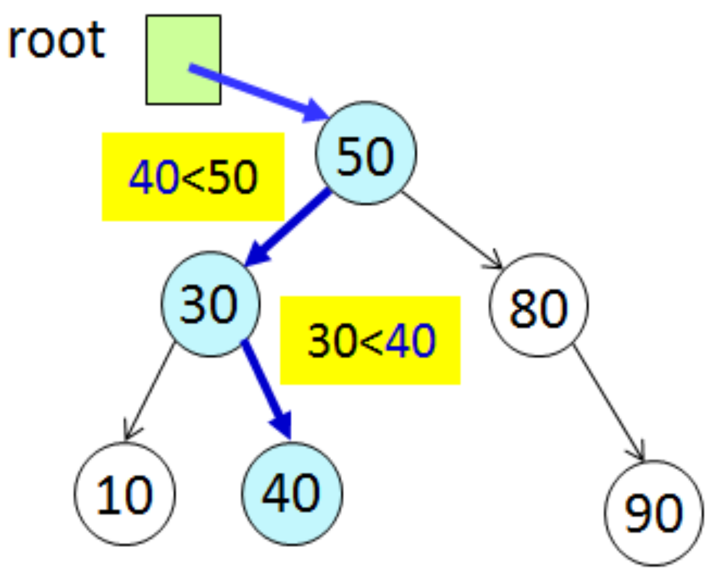
트리 루트

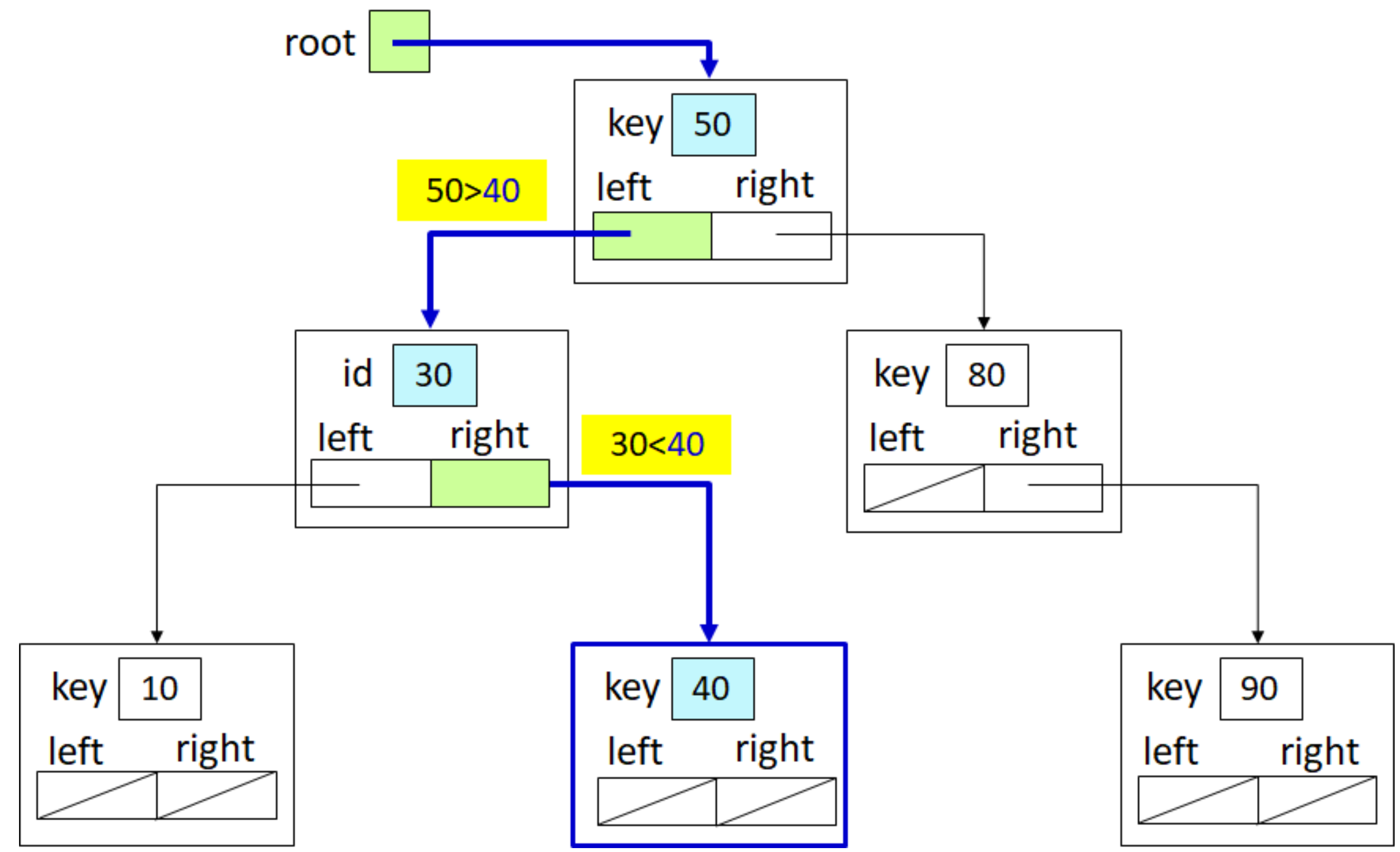
탐색, 삽입, 삭제 연산
min()과 delete_min()은
삭제 연산에서 사용됨

# 탐색연산: get(key)

- 탐색하고자 하는 키가 k라면, 루트의 키와 k를 비교하는 것으로 탐색을 시작
- k가 루트의 키가 k 보다 작으면, 루트의 왼쪽 서브트리에서 k를 찾고, 크면 루트의 오른쪽 서브트리에서 k를 찾으며, 같으면 탐색 성공
- 왼쪽이나 오른쪽 서브트리에서 k를 탐색은 루트에서의 탐색과 동일

# 탐색연산: get(key)


root
40<50
50
30
80
30<40
10
40
90


root
key 50
left right
50>40
id 30
left right
30<40
key 80
left right
key 10
left right
key 40
left right
key 90
left right

# 탐색연산: get(key)

```python
def get(self, k): # 탐색 연산
    return self.get_item(self.root, k)

def get_item(self, n, k):
    if n == None:
        return None
    if n.key > k:
        return self.get_item(n.left, k)
    elif n.key < k:
        return self.get_item(n.right, k)
    else:
        return n.value
```

탐색 실패

k가 노드의 key보다 작으면 왼쪽 서브트리 탐색

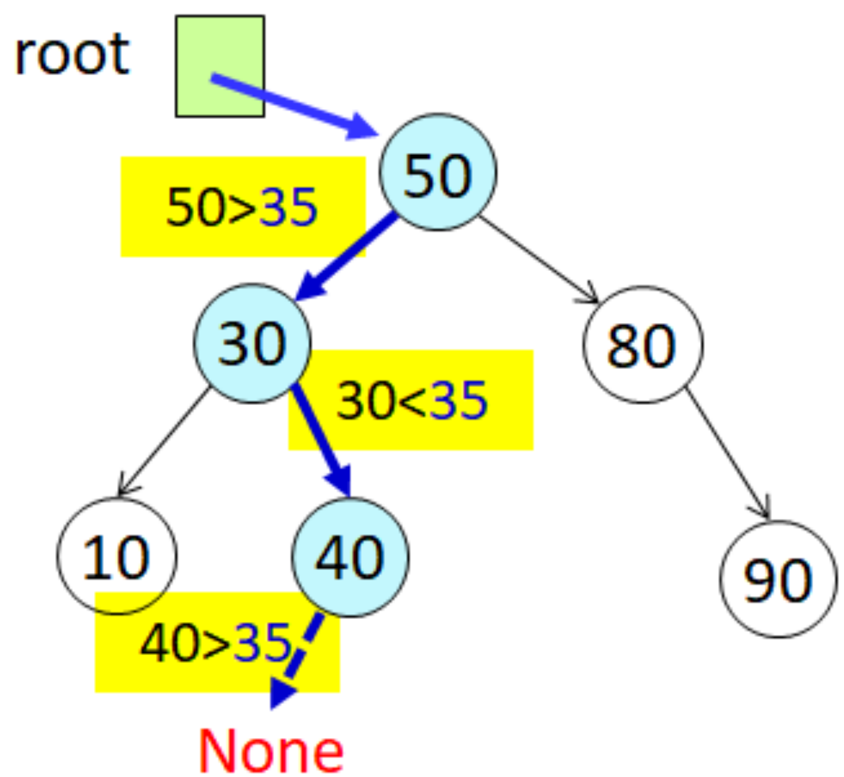
k가 노드의 key보다 크면 오른쪽 서브트리 탐색

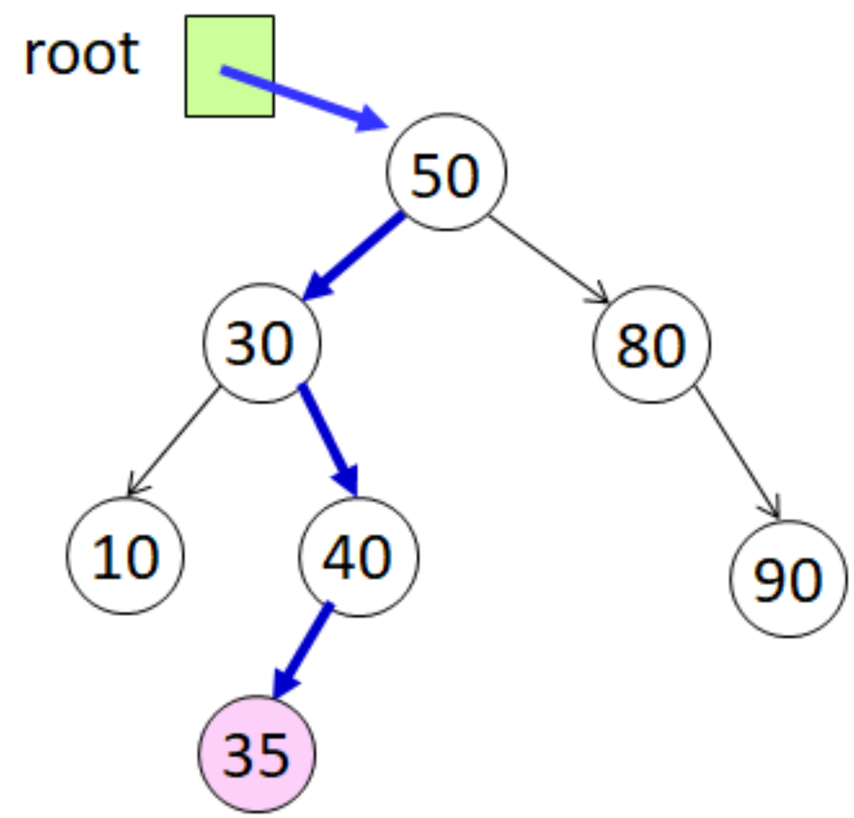
탐색 성공

# 삽입연산: put(key, value)

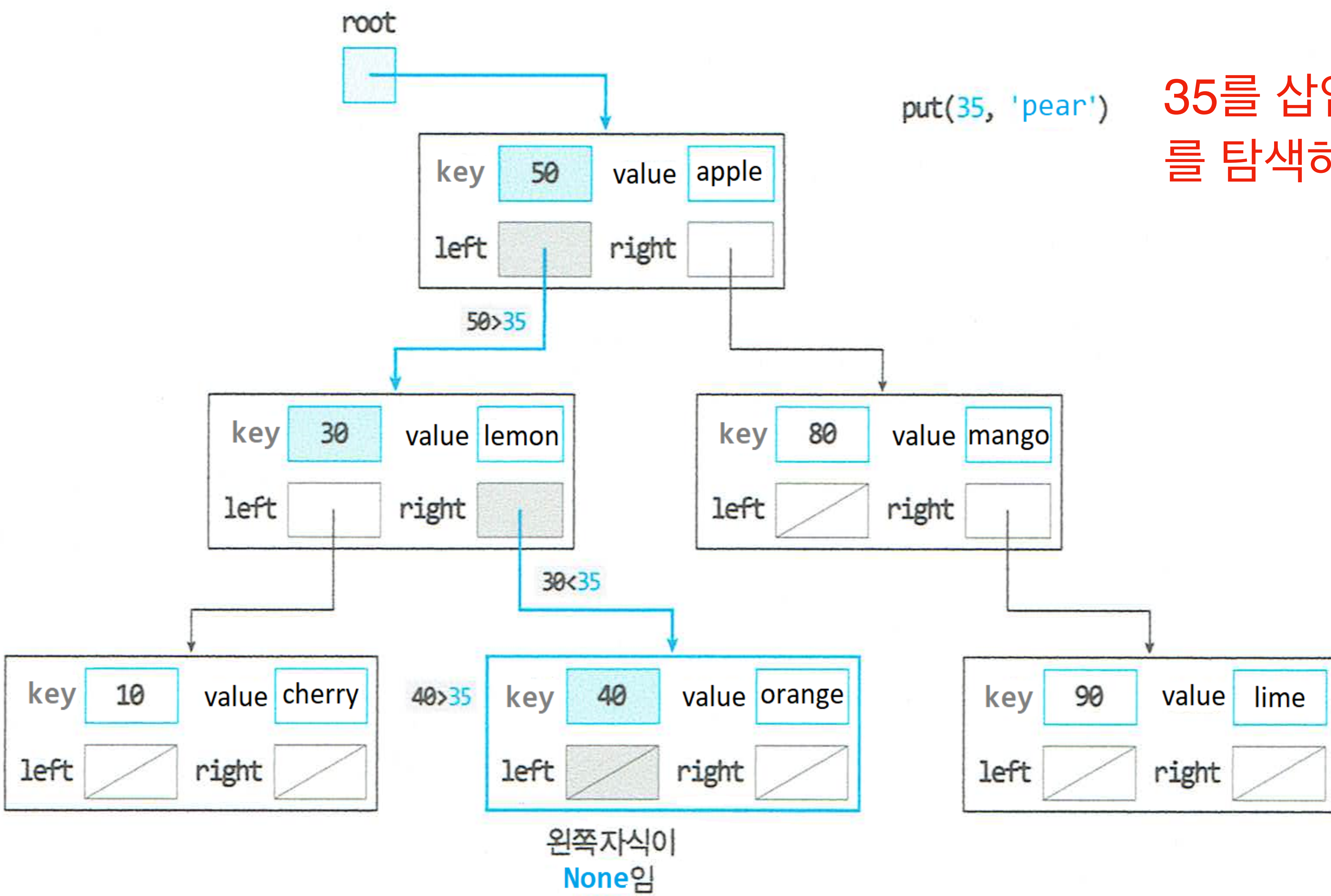
- 삽입은 탐색 연산과 거의 동일
- 탐색 중 None을 만나면 새 노드를 생성하여 부모노드와 연결
- 단, 이미 트리에 존재하는 키를 삽입한 경우, value만 갱신

# 삽입연산: put(key, value)



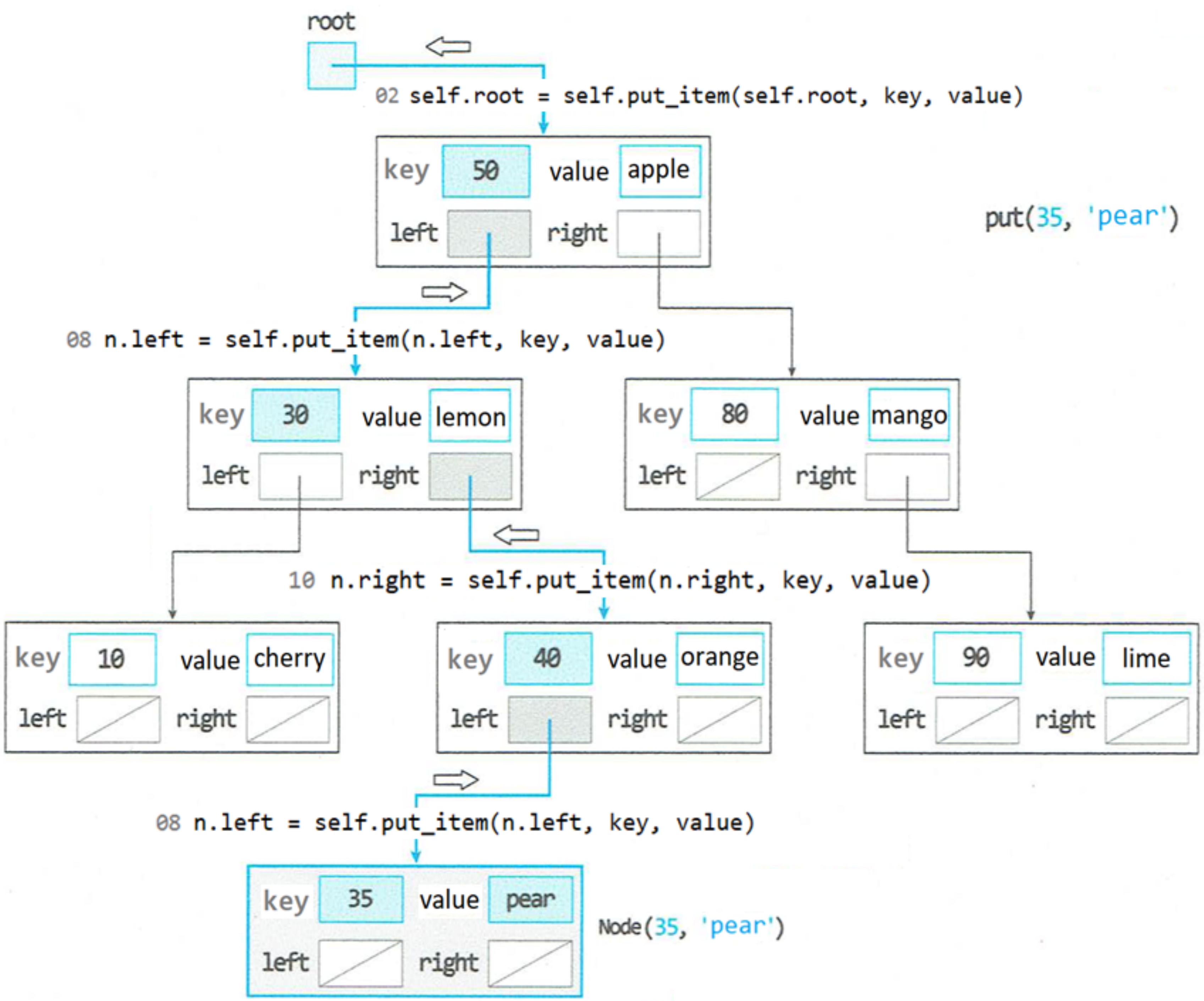



# 삽입연산: put(key, value)




35를 삽입할 장소
를 탐색하는 과정

# 삽입연산: put(key, value)




새 노드 삽입 후 루트로 거슬러 올라가며 재 연결하는 과정

# 삽입연산: put(key, value)

```python
def put(self, key, value): # 삽입 연산
    self.root = self.put_item(self.root, key, value)

def put_item(self, n, key, value):
    if n == None:
        return Node(key, value)
    if n.key > key:
        n.left = self.put_item(n.left, key, value)
    elif n.key < key:
        n.right = self.put_item(n.right, key, value)
    else:
        n.vlaue = value
    return n
```

루트와 put_item()이 리턴하는 노드를 재 연결

새 노드 생성

n의 왼쪽자식과 put_item()이 리턴하는 노드를 재 연결

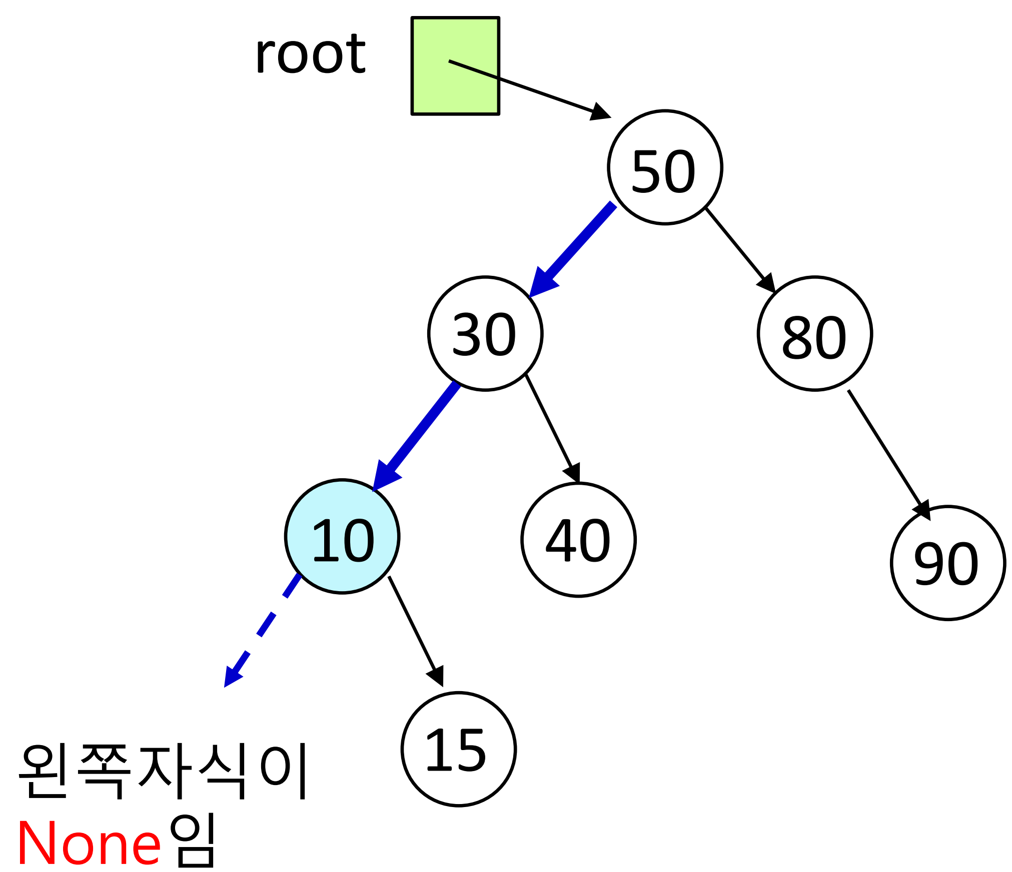
n의 오른쪽자식과 put_item()이 리턴하는 노드를 재 연결

key가 이미 있으므로 value만 갱신

부모노드와 연결하기 위해 노드 n을 리턴

# 최소값 찾기

- 최솟값은 루트노드로부터 왼쪽 자식을 따라 내려가며, None을 만났을 때 None의 부모가 가진 value



# 최소값 찾기

- 최솟값은 루트노드로부터 왼쪽 자식을 따라 내려가며, None을 만났을 때 None의 부모가 가진 value

```python
def min(self): # 최솟값 가진 노드 찾기
    if self.root == None:
        return None
    return self.minimum(self.root)

def minimum(self, n):
    if n.left == None:
        return n
    return self.minimum(n.left)
```

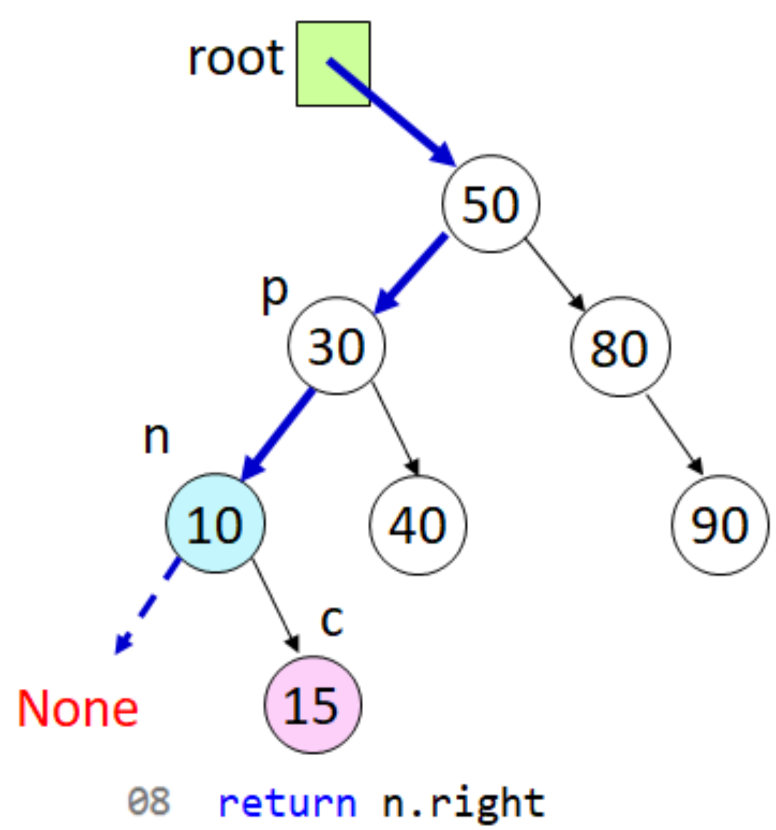
왼쪽자식이 None인 노드(최솟값을 가진)를 리턴

왼쪽자식으로 재귀호출하며 최솟값 가진 노드를 리턴

# 최소값 삭제

- 최솟값을 가진 노드를 삭제하는 것은 최솟값을 가진 노드 n을 찾아낸 뒤, n의 부모 p와 n의 오른쪽 자식 c를 연결

- 이 때 c 가 None이더라도 자식으로 연결



# 최소값 삭제

- 최솟값을 가진 노드를 삭제하는 것은 최솟값을 가진 노드 n을 찾아낸 뒤, n의 부모 p와 n의 오른쪽 자식 c를 연결

- 이 때 c 가 None이더라도 자식으로 연결

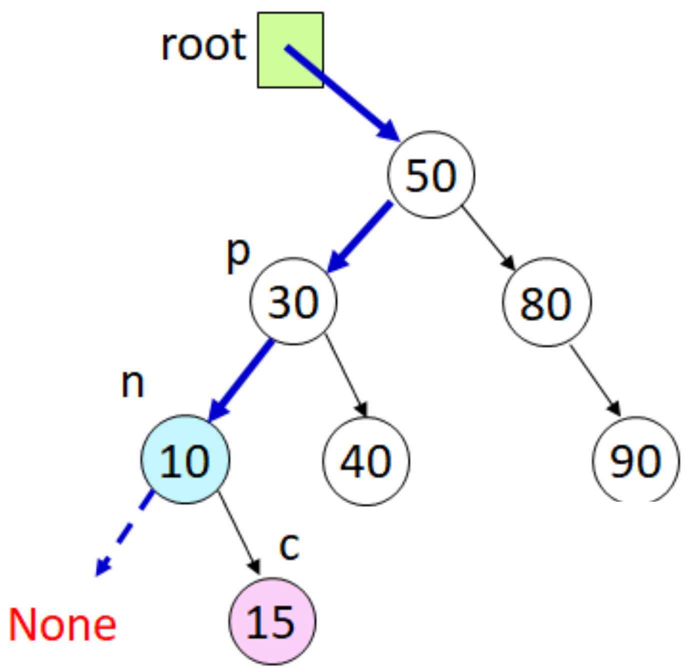
```
def delete_min(self): # 최솟값 삭제
    if self.root == None:
        print('트리가 비어 있음')
    self.root = self.del_min(self.root)

def del_min(self, n):
    if n.left == None:
        return n.right
    n.left = self.del_min(n.left)
    return n
```

루트와 del_min()이 리턴하는 노드를 재 연결

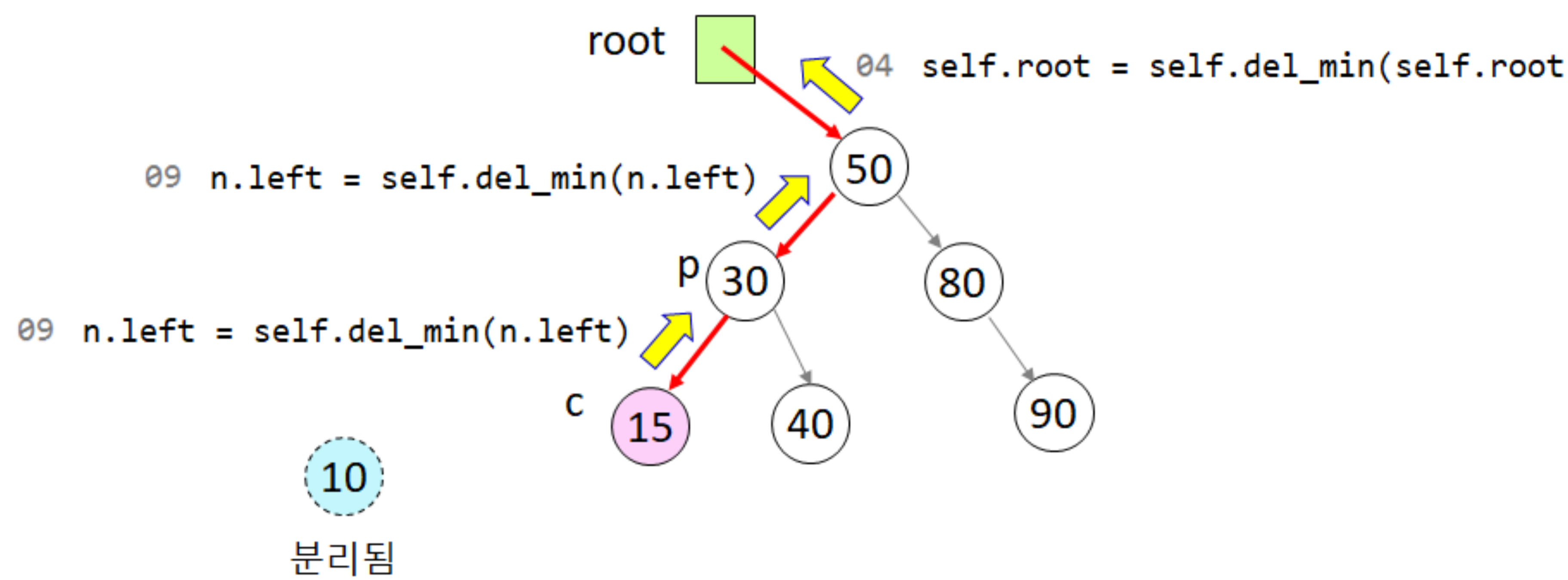
최솟값 가진 노드의 오른쪽 자식을 리턴

n의 왼쪽자식과 del_min()이 리턴하는 노드를 재 연결

# 최소값 삭제



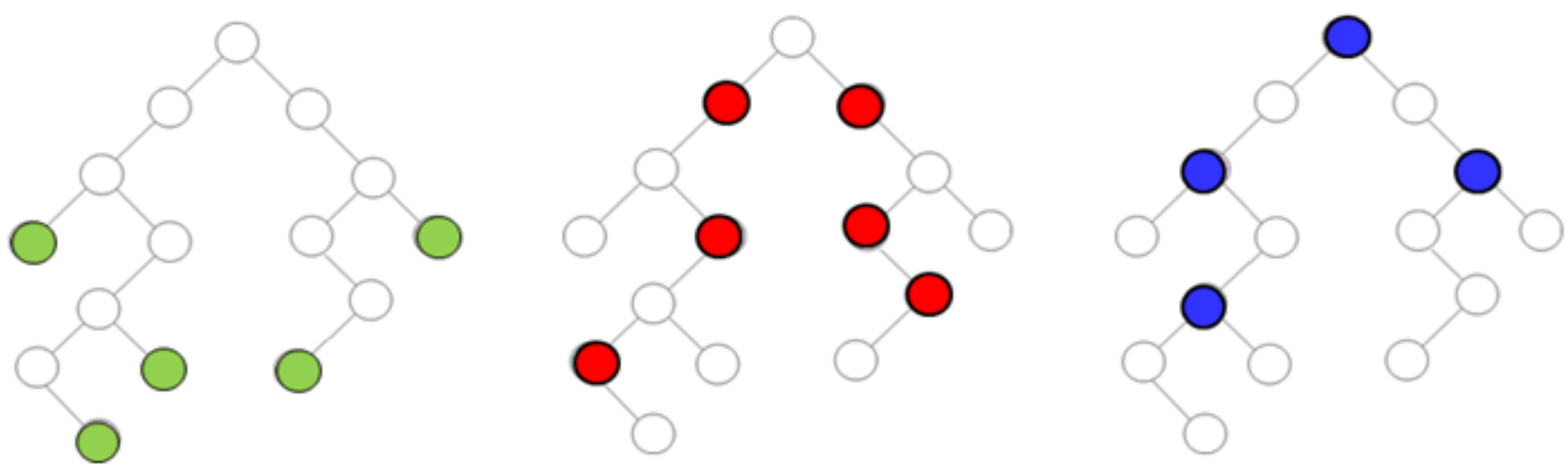

```
08  return n.right
```



# 삭제연산: delete(key)

- 우선 삭제하고자 하는 노드를 찾은 후 이진탐색트리 조건을 만족하도록 삭제된 노드의 부모와 자식(들)을 연결해 주어야 함

- 삭제되는 노드가 자식이 없는 경우(case 0), 자식이 하나인 경우(case 1), 자식이 둘인 경우(case 2)로 나누어 delete 연산을 수행

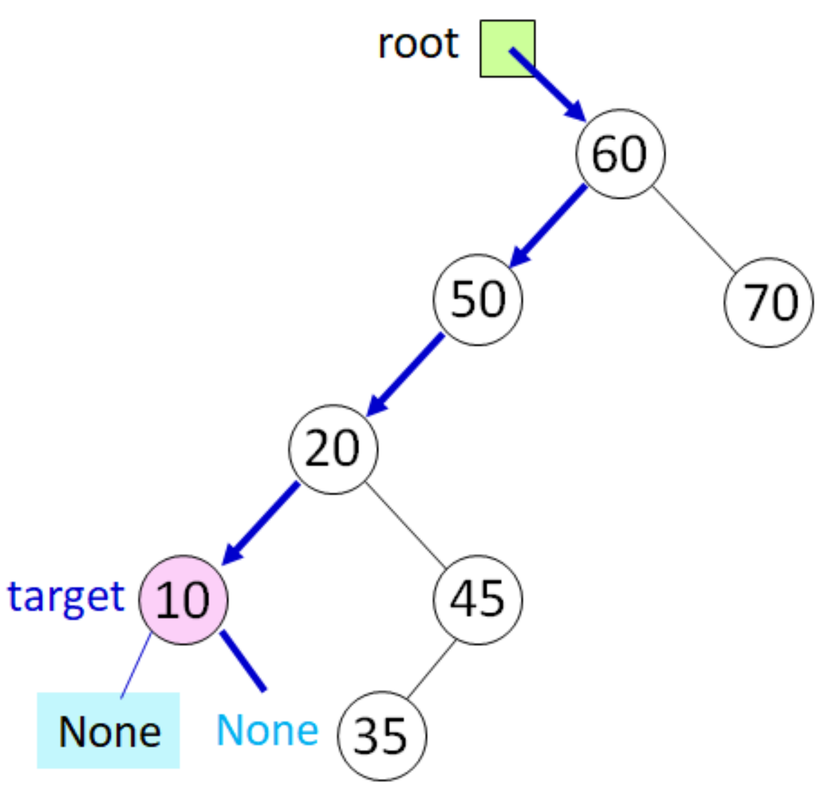


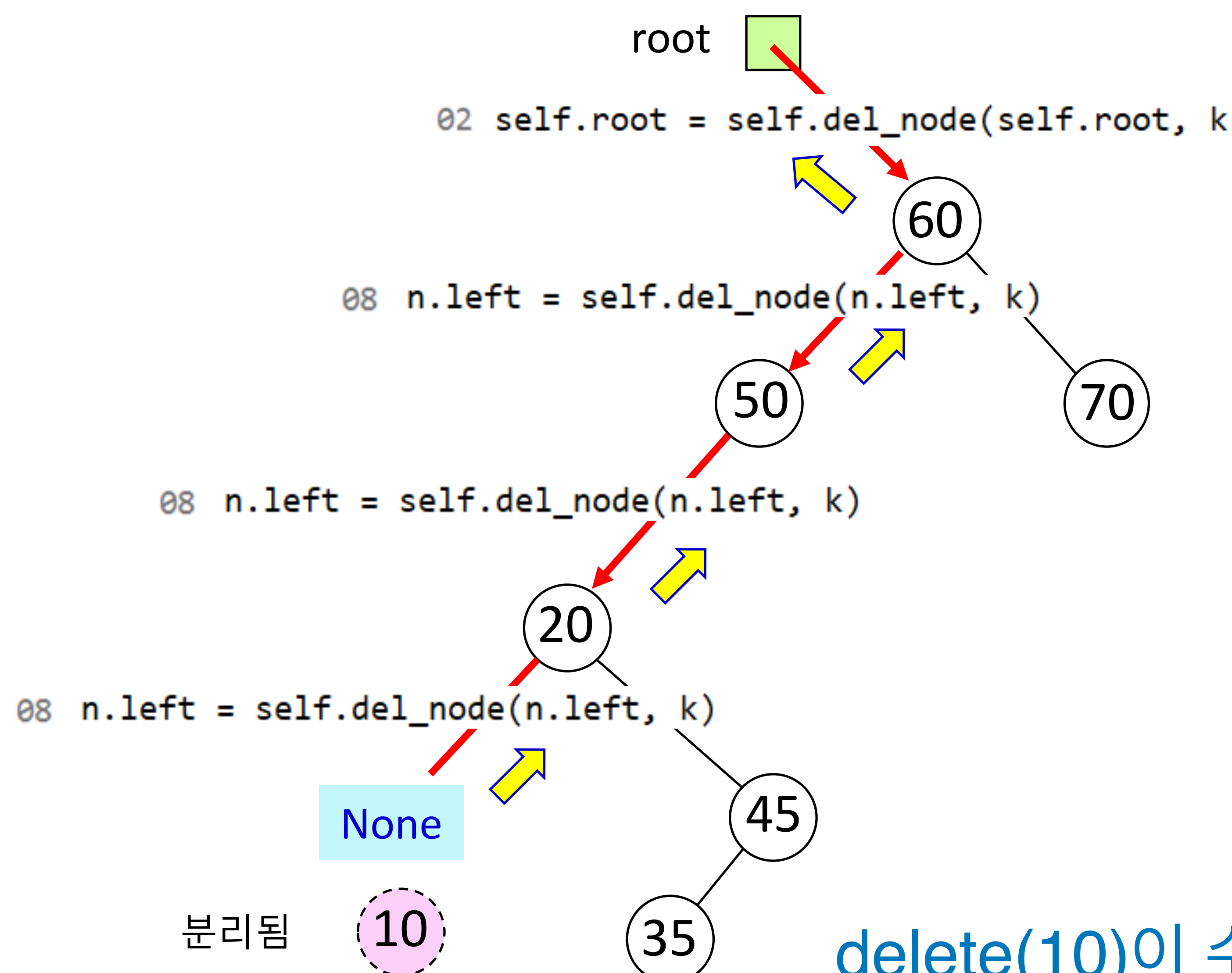
case 0　　case 1　　case 2

# 삭제연산: delete(key)

- **Case 0**: 삭제해야 할 노드 n의 부모가 n을 가리키던 레퍼런스를 None으로 만든다.
- **Case 1**: n가 한쪽 자식인 c만 가지고 있다면, n의 부모와 n의 자식 c를 직접 연결
- **Case 2**: n의 부모는 하나인데 n의 자식이 둘이므로  n의 자리에 중위순회하면서 n을 방문하기 직전 노드(Inorder Predecessor, 중위 선행자) 또는 직후에 방문되는 노드(Inorder Successor, 중위 후속자)로 대체

# Case 0




delete(10)이 수행되는 과정 (case 0)

# Case 0

delete(10)이 수행되는 과정 (case 0)

```
def delete(self, k): # 삭제 연산
    self.root = self.del_node(self.root, k)

def del_node(self, n, k):
    if n == None:
        return None
    if n.key > k:
        n.left = self.del_node(n.left, k)
    elif n.key < k:
        n.right = self.del_node(n.right, k)
    else:
        if n.right == None:
            return n.left
        if n.left == None:
            return n.right
        target = n
        n = self.minimum(target.right)
        n.right = self.del_min(target.right)
        n.left = target.left
    return n
```

루트와 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

n의 왼쪽자식과 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

n의 오른쪽자식과 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

target은 삭제될 노드

target의 중위 후속자 찾아 n이 참조하게 함

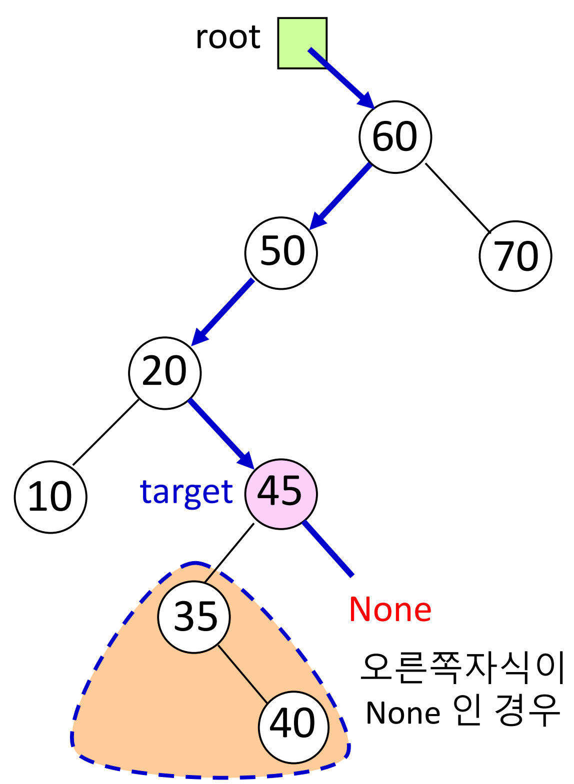
n의 오른쪽자식과 target의 오른쪽자식 연결

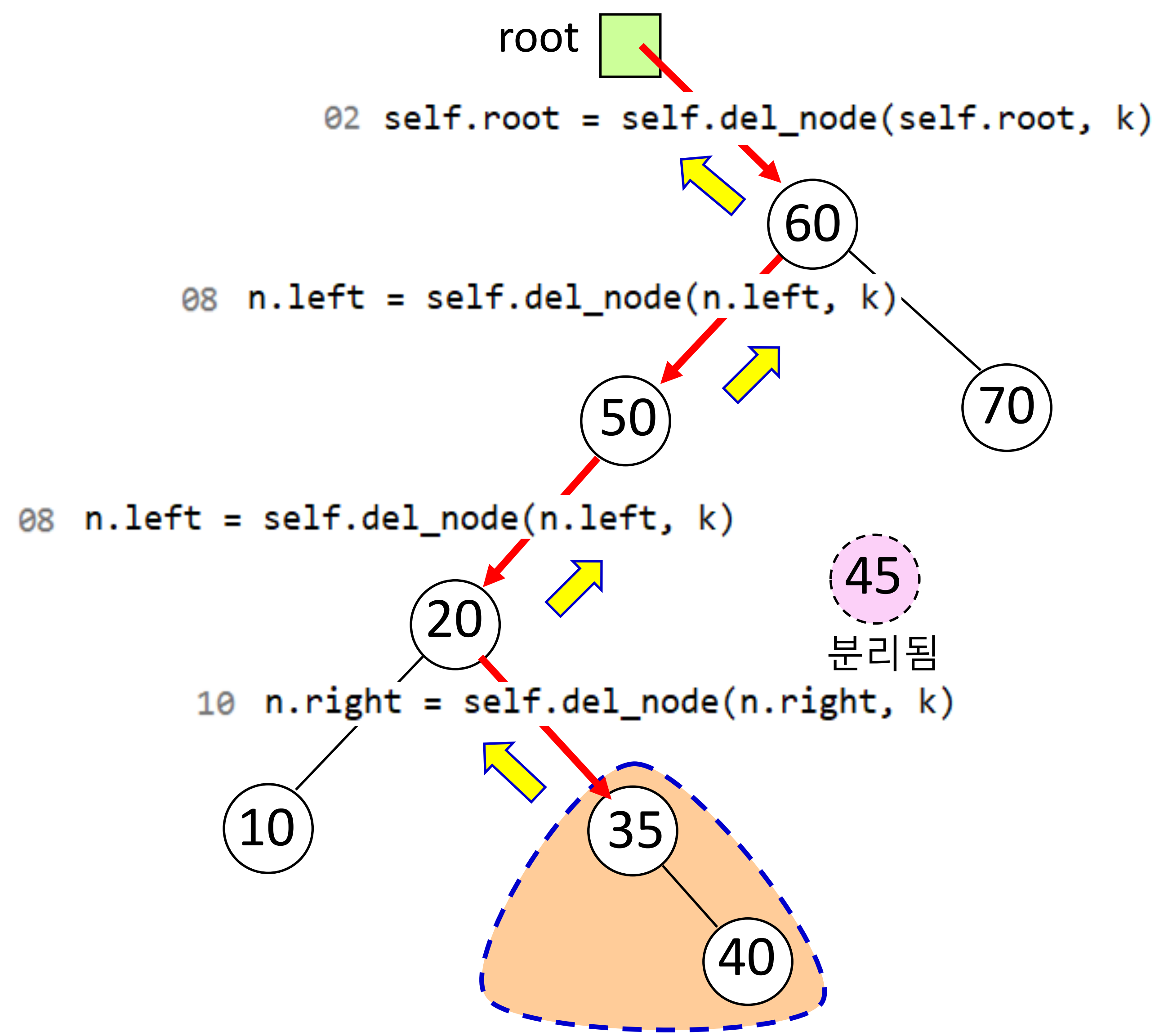
n의 왼쪽자식과 target의 왼쪽자식 연결

**target 오른쪽자식 트리중 가장 작은 키를 가진 n을 찾아서 target을 대체하게 함**

**target 오른쪽자식 트리중 가장 작은 키를 가진 n을 찾아서 삭제 후, 삭제된 노드의 오른쪽 노드를 n의 오른쪽에 붙임**

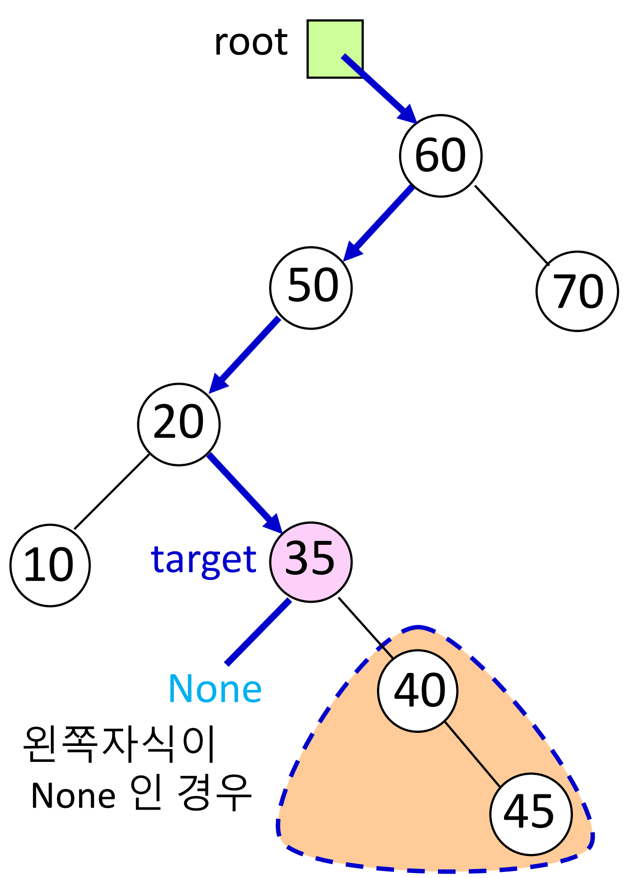
# Case 1

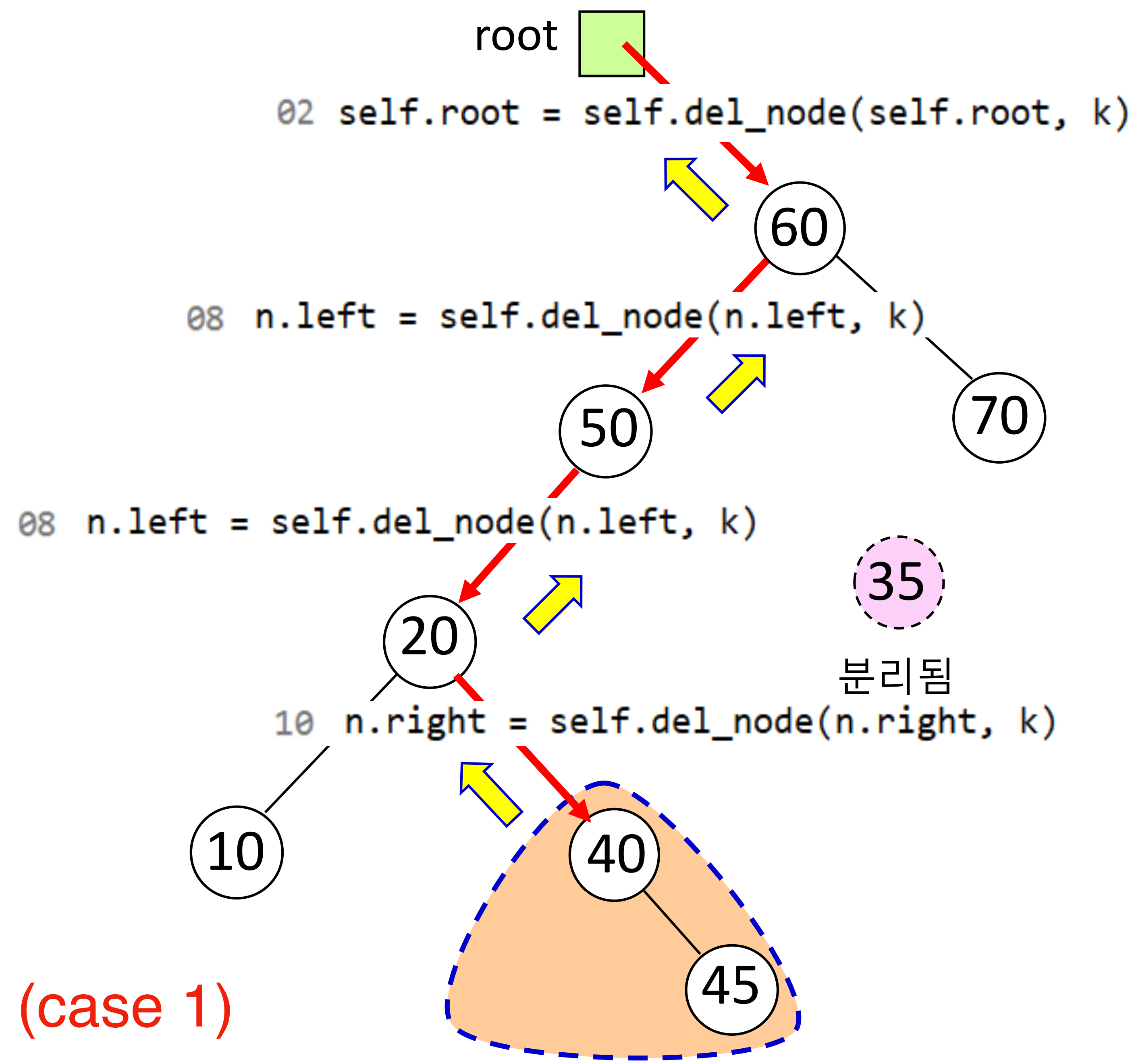



delete(45)가 수행되는 과정 (case 1)

# Case 1




delete(35)가 수행되는 과정 (case 1)

# Case 1

delete(10)이 수행되는 과정 (case 0)

```
def delete(self, k): # 삭제 연산
    self.root = self.del_node(self.root, k)

def del_node(self, n, k):
    if n == None:
        return None
    if n.key > k:
        n.left = self.del_node(n.left, k)
    elif n.key < k:
        n.right = self.del_node(n.right, k)
    else:
        if n.right == None:
            return n.left
        if n.left == None:
            return n.right
        target = n
        n = self.minimum(target.right)
        n.right = self.del_min(target.right)
        n.left  = target.left
    return n
```

루트와 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

n의 왼쪽자식과 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

n의 오른쪽자식과 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

target 오른쪽자식 트리중 가장 작은 키를 가진 n을 찾아서 target을 대체하게 함

target은 삭제될 노드

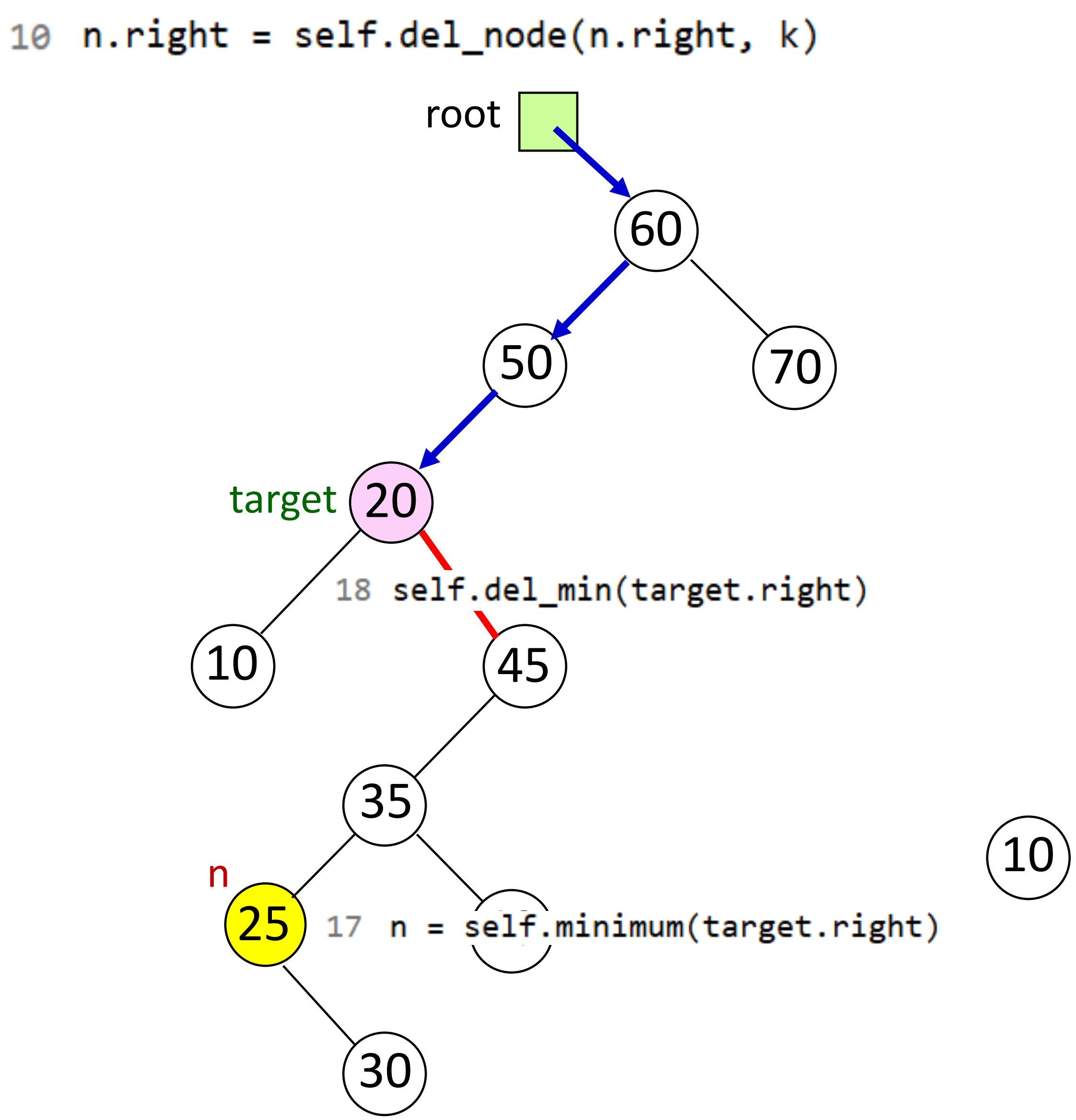
target의 중위 후속자 찾아 n이 참조하게 함

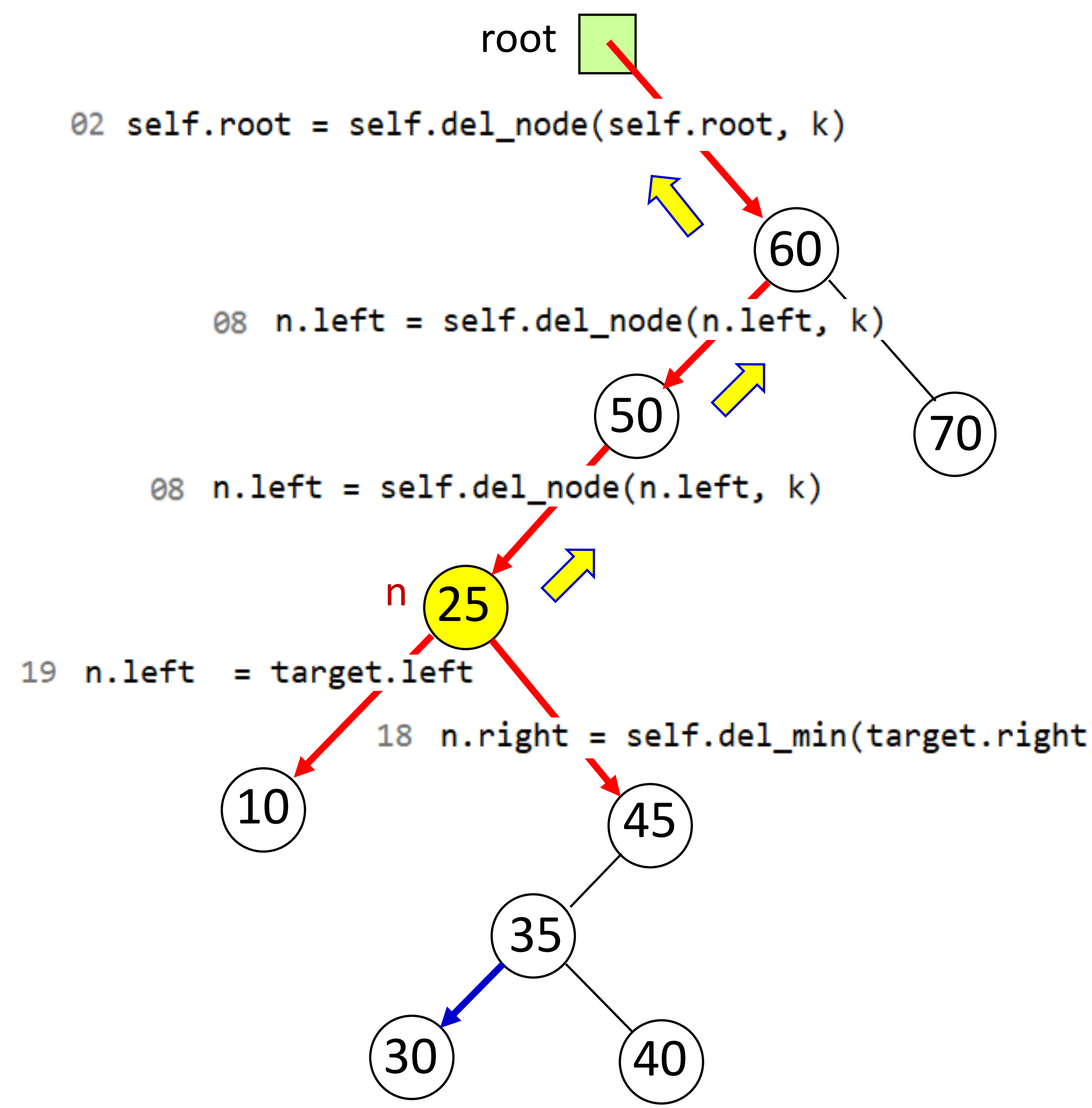
n의 오른쪽자식과 target의 오른쪽자식 연결

target 오른쪽자식 트리중 가장 작은 키를 가진 n을 찾아서 삭제 후, 삭제된 노드의 오른쪽 노드를 n의 오른쪽에 붙임

n의 왼쪽자식과 target의 왼쪽자식 연결

# Case 2




delete(20)이 수행되는 과정

# Case 2

delete(10)이 수행되는 과정 (case 0)

```
def delete(self, k): # 삭제 연산
    self.root = self.del_node(self.root, k)

def del_node(self, n, k):
    if n == None:
        return None
    if n.key > k:
        n.left = self.del_node(n.left, k)
    elif n.key < k:
        n.right = self.del_node(n.right, k)
    else:
        if n.right == None:
            return n.left
        if n.left == None:
            return n.right
        target = n
        n = self.minimum(target.right)
        n.right = self.del_min(target.right)
        n.left  = target.left
    return n
```

루트와 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

n의 왼쪽자식과 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

n의 오른쪽자식과 del_node()가 리턴하는 노드를 재 연결

target 오른쪽자식 트리중 가장 작은 키를 가진 n을 찾아서 target을 대체하게 함

target은 삭제될 노드

target의 중위 후속자 찾아 n이 참조하게 함

n의 오른쪽자식과 target의 오른쪽자식 연결

target 오른쪽자식 트리중 가장 작은 키를 가진 n을 찾아서 삭제 후, 삭제된 노드의 오른쪽 노드를 n의 오른쪽에 붙임

n의 왼쪽자식과 target의 왼쪽자식 연결

# 수행시간

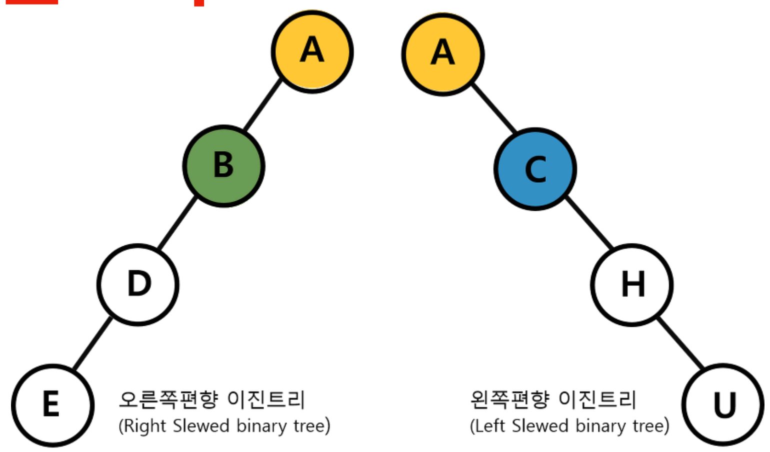
- 이진탐색트리에서 탐색, 삽입, 삭제 연산은 공통적으로 **루트에서 탐색을 시작하여 최악의 경우에 이파리까지 내려가**고, 삽입과 삭제 연산은 다시 루트까지 거슬러 올라가야 함

- 트리를 한 층 내려갈 때는 재귀호출이 발생하고, 한 층을 올라갈 때는 재 연결이 수행되는데, 이들 각각은 O(1) 시간 소요

- **연산들의 수행시간은 각각 트리의 높이(h)에 비례, O(h)**

# 수행시간

- N개의 노드가 있는 이진탐색트리의 높이가 가장 낮은 경우는 완전 이진트리 형태일 때이고, **가장 높은 경우는 편향이진트리**




- 따라서 이진트리의 높이 h는 아래와 같다

$$\lceil \log (N+1) \rceil \approx \log N \leq h \leq N$$

- Empty 이진탐색트리에 랜덤하게 선택된 N개의 키를 삽입한다고 가정했을 때, 트리의 높이는 약 1.39 log N

# AVL Tree

# AVL트리

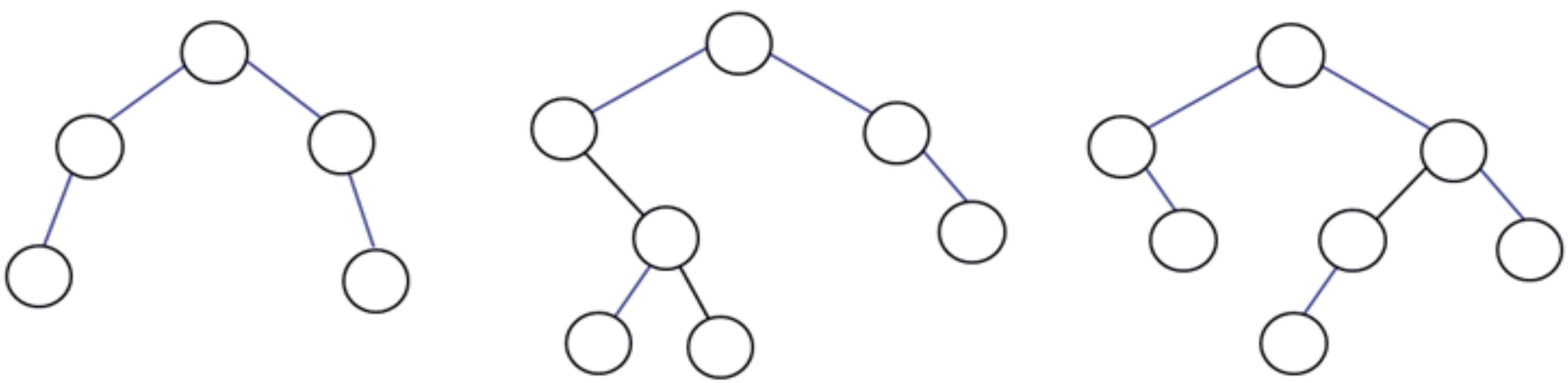
- AVL 트리는 트리가 한쪽으로 치우쳐 자라나는 현상을 방지하여 트리 높이의 균형(Balance)을 유지하는 이진탐색트리

- 균형(Balanced) 이진트리를 만들면 N개의 노드를 가진 트리의 높이가 O(logN)이 되어 탐색, 삽입, 삭제 연산의 수행시간이 O(logN)으로 보장

- **[핵심 아이디어] AVL트리는 삽입이나 삭제로 인해 균형이 깨지면 회전 연산을 통해 트리의 균형을 유지한다**

# AVL트리

- AVL트리는 임의의 노드 x에 대해 x의 왼쪽 서브트리의 높이와 오른쪽 서브트리의 높이 차이가 1을 넘지 않는 이진탐색트리이다.

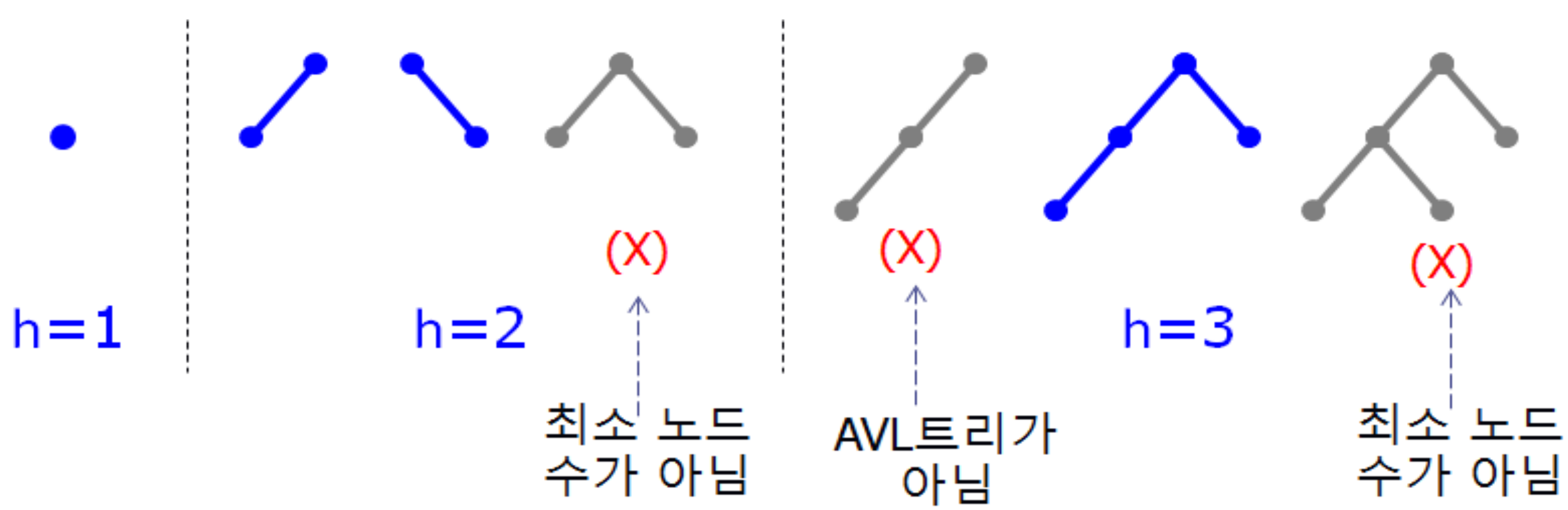


(a) (b) (c)

# AVL 트리

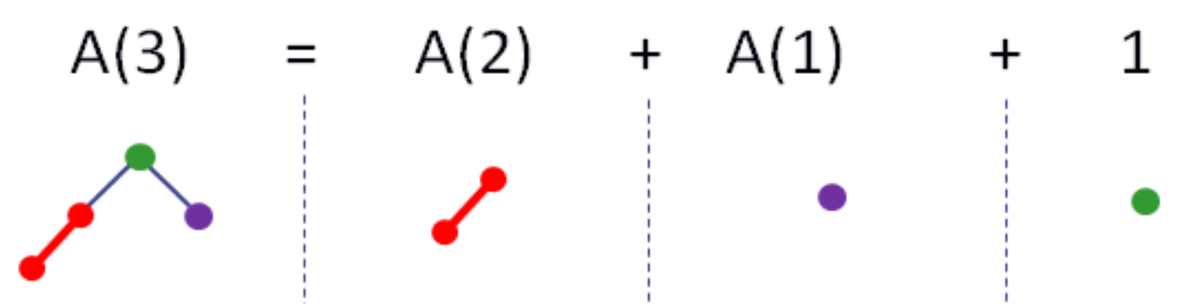
- [정리]  N개의 노드를 가진 AVL 트리의 높이는 O(logN)이다.

- [증명] A(h) = 높이가 h인 AVL 트리를 구성하는 최소의 노드 수
A(1) = 1, A(2) = 2, A(3) = 4이다.



# AVL 트리

- A(3)을 재귀적으로 표현해보면




- A(3)이 위와 같이 구성되는 이유:
  - 높이가 3인 AVL 트리에는 루트와 루트의 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리가 존재해야 하고,
  - 각 서브트리 역시 최소 노드 수를 가진 AVL 트리여야 하므로
  - 또한 이 두 개의 서브트리의 높이 차이가 1일 때 전체 트리의 노드 수가 최소가 되기 때문

# AVL 트리

- 이를 A(h)에 대한 식으로 표현하면

$$A(h) = A(h-1) + A(h-2) + 1,\ \text{단},\ A(0)=0,\ A(1)=1,\ A(2)=2$$

| h | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A(h) | 0 | 1 | 2 | 4 | 7 | 12 | 20 | 33 | ... |
| F(h) | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | ... |

- A(h)와 피보나치 수 F(h)와의 관계

$$A(h) = F(h+2) - 1$$

# AVL 트리

- 피보나치 수 $F(h) \approx \frac{\varphi^h}{\sqrt{5}}$ 이므로, $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ 이므로

$$A(h) \approx \frac{\varphi^{h+2}}{\sqrt{5}-1}$$

- A(h) = 높이가 h인 AVL트리에 있는 최소 노드 수이므로, 노드 수가 N인 임의의 AVL트리의 최대 높이를 A(h) ≤ N의 관계에서 다음과 같이 계산할 수 있다.

$A(h) \approx \phi^{h+2}/\sqrt{5} - 1 \leq N$

$\phi^{h+2} \leq \sqrt{5}\,(N + 1)$

$h \leq \log_{\phi}(\sqrt{5}(N+1)) - 2 \approx 1.44\log N = O(\log N)$. □

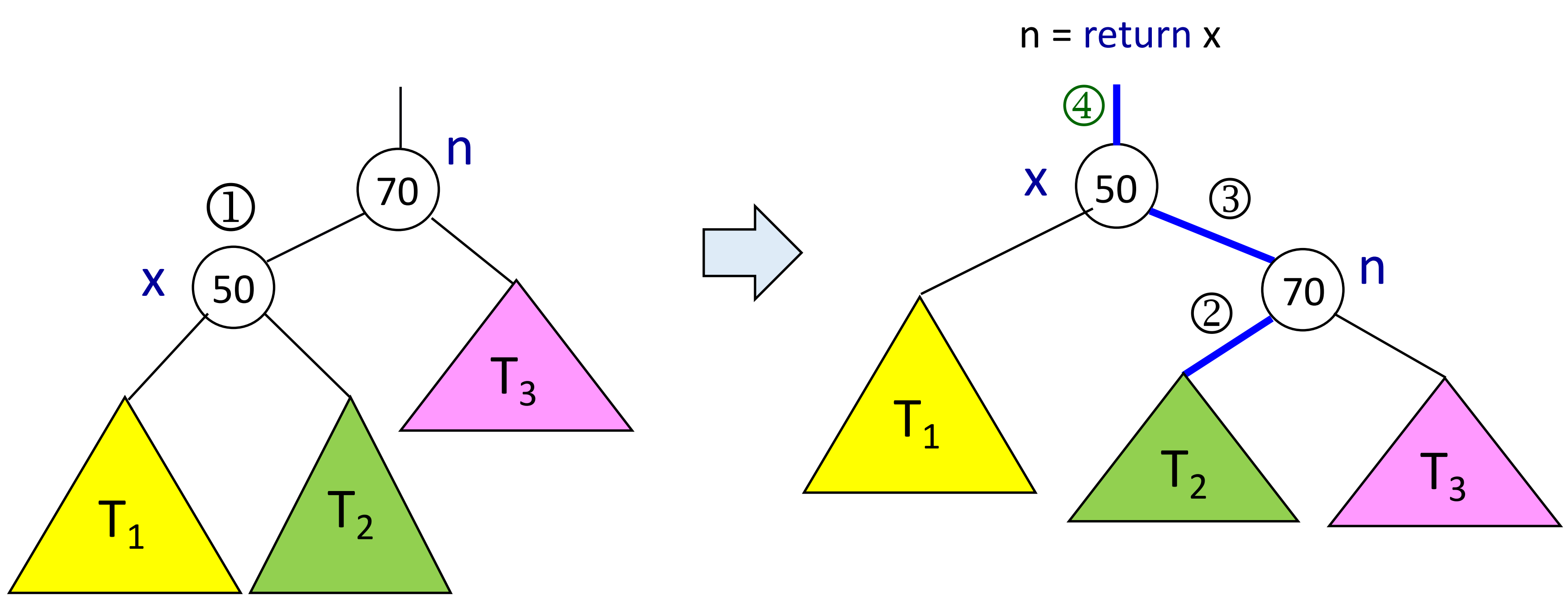
# AVL 트리의 회전 연산

- AVL 트리에서 삽입 또는 삭제 연산을 수행할 때 트리의 균형을 유지하기 위해 LL-회전, RR-회전, LR-회전, RL-회전 연산 사용

- 회전 연산은 2 개의 기본적인 연산으로 구현

# AVL 트리의 회전 연산: rotate_right(n)

- rotate_right(): 왼쪽 방향의 서브트리가 높아서 불균형이 발생할 때 서브트리를 오른쪽 방향으로 회전
    - 노드 n의 왼쪽 자식 x를 노드 n의 자리로 옮기고, 노드 n을 노드 x의 오른쪽 자식으로 만들며, 이 과정에서 서브트리 T2가 노드 n의 왼쪽 서브트리로 이동



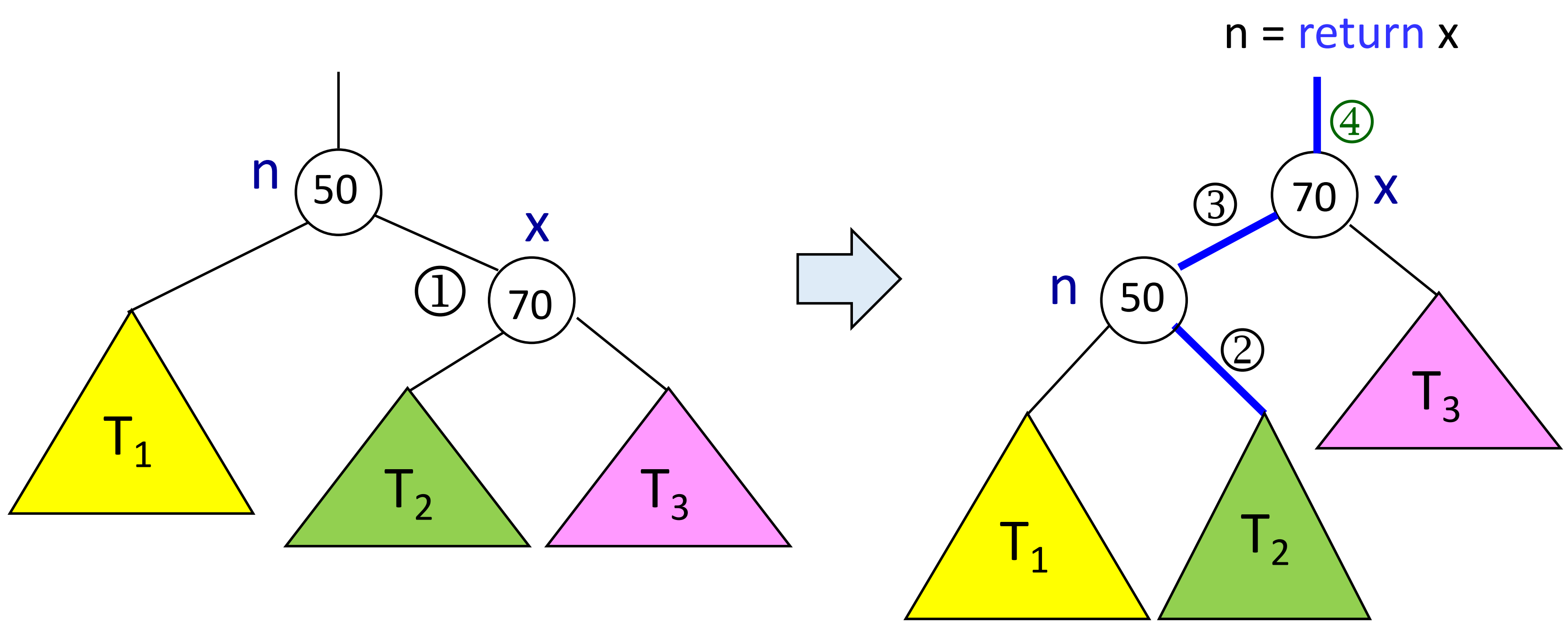
# AVL 트리의 회전 연산: rotate_right(n)

- rotate_right(): 왼쪽 방향의 서브트리가 높아서 불균형이 발생할 때 서브트리를 오른쪽 방향으로 회전

  - 노드 n의 왼쪽 자식 x를 노드 n의 자리로 옮기고, 노드 n을 노드 x의 오른쪽 자식으로 만들며, 이 과정에서 서브트리 T2가 노드 n의 왼쪽 서브트리로 이동

```
def rotate_right(self, n): # 우로 회전
  ① x = n.left
  ② n.left = x.right
  ③ x.right = n
    n.height = max(self.height(n.left), self.height(n.right)) + 1
    x.height = max(self.height(x.left), self.height(x.right)) + 1
  ④ return x
```

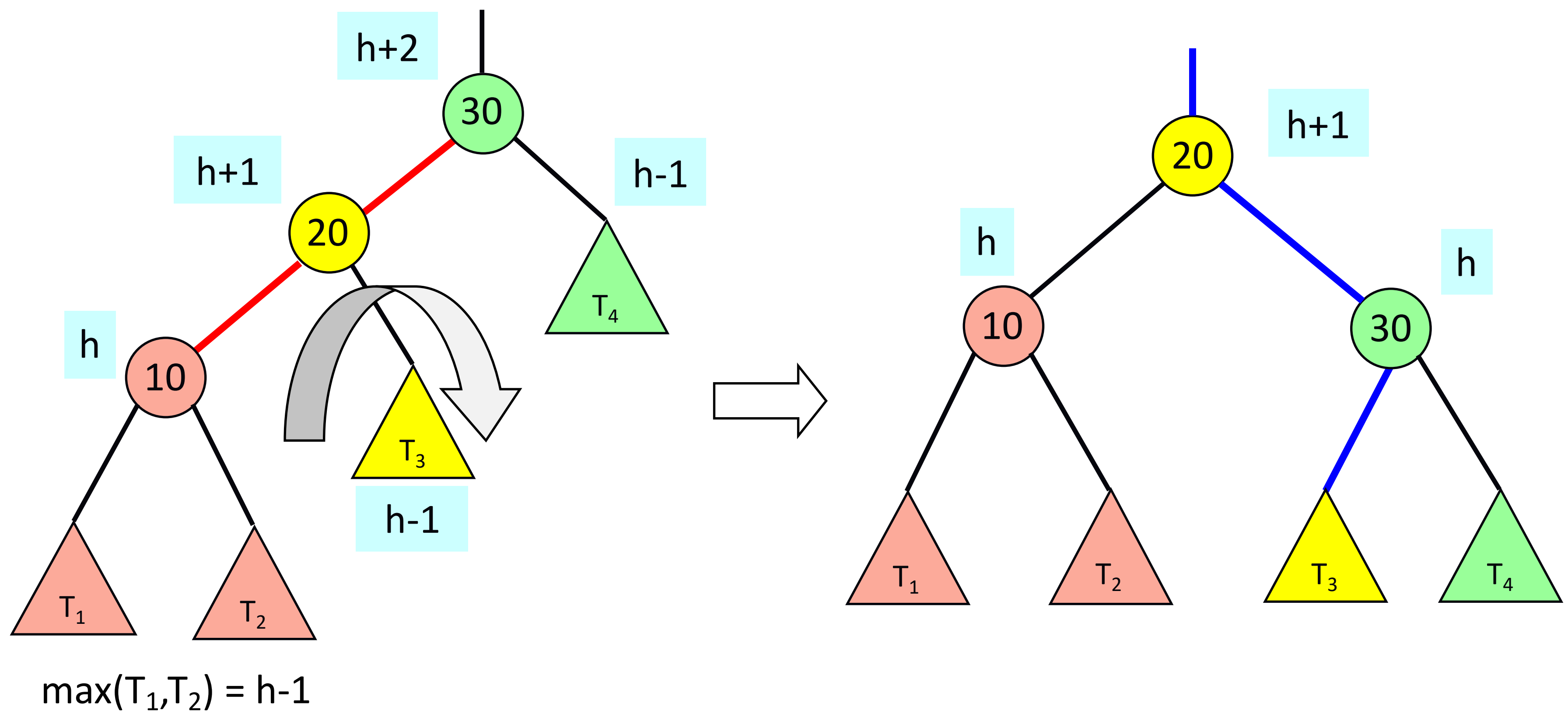
# AVL 트리의 회전 연산:
# rotate_left(n)




```
def rotate_left(self, n): # 좌로 회전
    ① x = n.right
    ② n.right = x.left
    ③ x.left = n
       n.height = max(self.height(n.left), self.height(n.right)) + 1
       x.height = max(self.height(x.left), self.height(x.right)) + 1
    ④ return x
```

# LL-회전

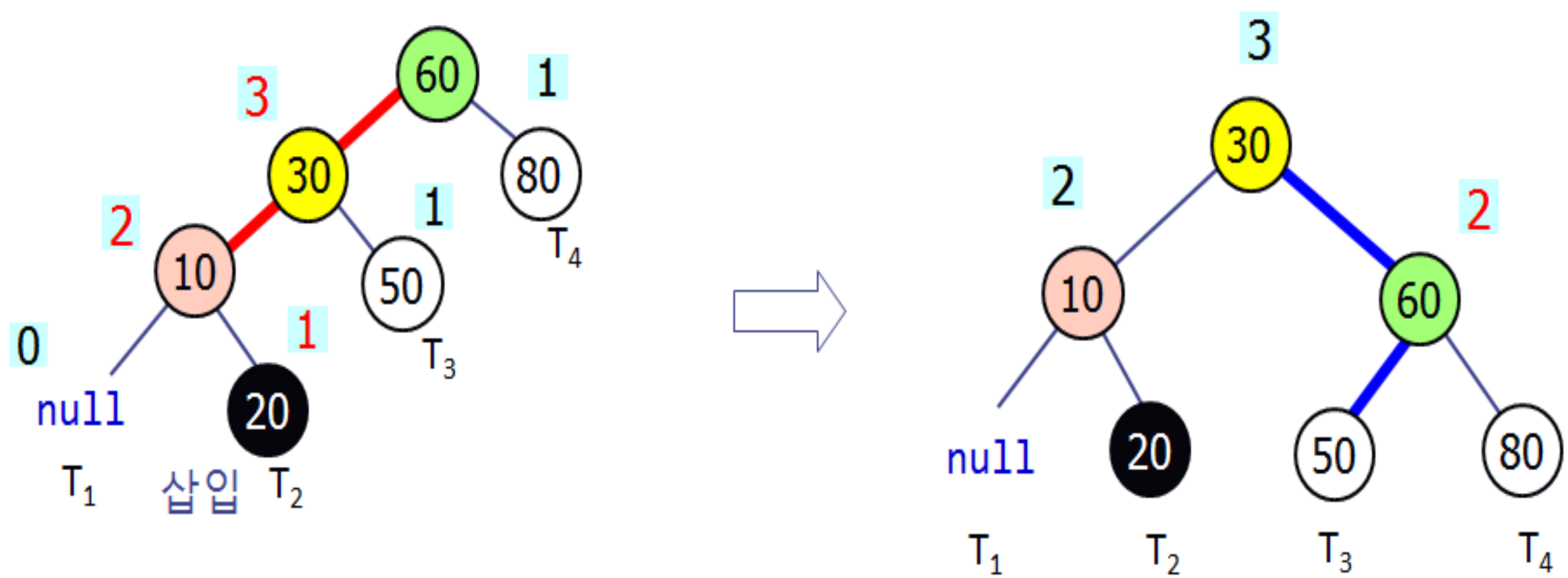
- (a) 노드 10의 왼쪽 서브트리(T1) 또는 오른쪽 서브트리(T2)에 새로운 노드 삽입
  - T1 또는T2의 높이 = h-1
  - 노드 30의 왼쪽과 오른쪽 서브트리의 높이 차이 = 2
  - 노드 30의 왼쪽(L) 서브트리의 왼쪽(L) 서브트리에 새로운 노드가 삽입되었기 때문
- (b)
  - 20이 30의 자리로 이동
  - 30을 20의 오른쪽 자식으로
  - T3은 30의 왼쪽 자식으로
  - T3에 있는 키들은 20과 30 사이 값을 가지므로 T3의 이동 전후 모두 이진탐색트리 조건이 만족




(a) $T_1$ 또는$T_2$에 새 노드 삽입

(b) LL-회전 후

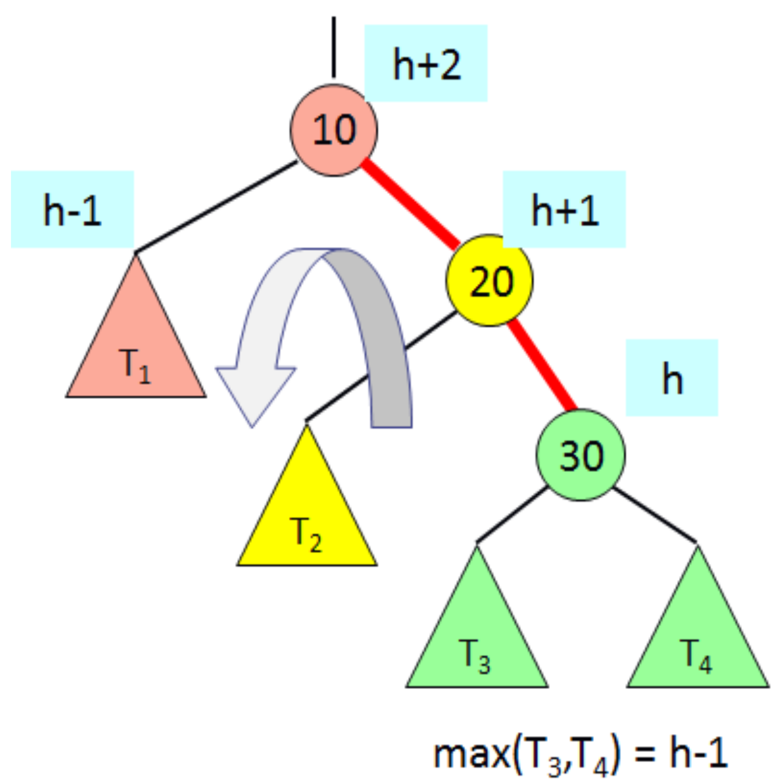
# LL-회전



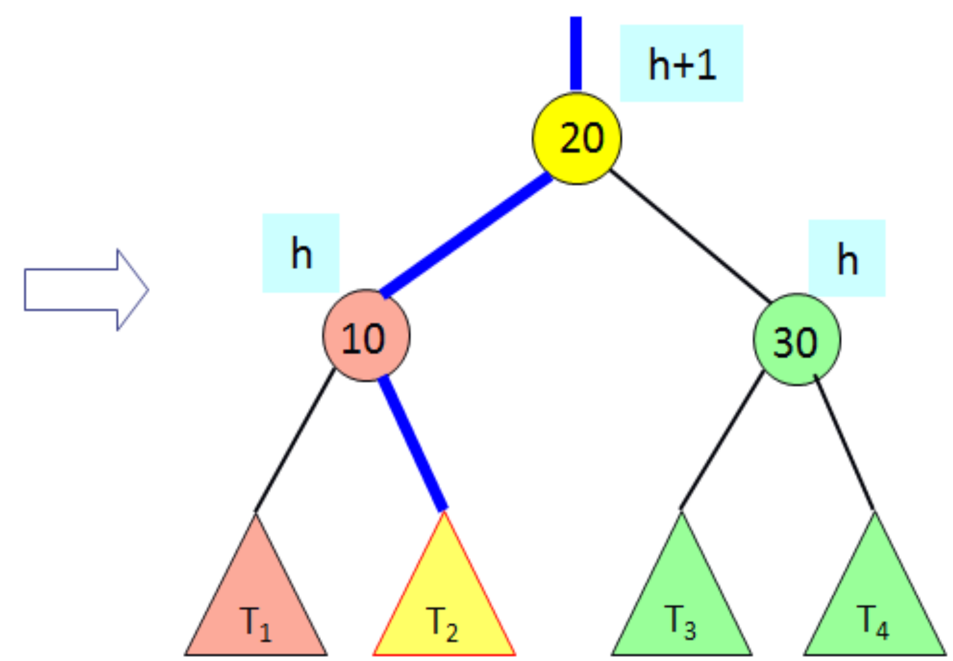
3
60
1
30
80
2
1
10
50
$T_4$
0
1
$T_3$
null
20
$T_1$
삽입
$T_2$
3
30
2
2
10
60
null
20
50
80
$T_1$
$T_2$
$T_3$
$T_4$

# RR-회전

- (a)  30의 왼쪽 서브트리(T3) 또는 오른쪽 서브트리(T4)에 새로운 노드 삽입
    - T3 또는T4의 높이 = h-1
    - 노드 10의 왼쪽과 오른쪽 서브트리의 높이 차이 = 2
    - 노드 10의 오른쪽(R) 서브트리의 오른쪽(R) 서브트리에 새로운 노드가 삽입되었기 때문
- (b)
    - 20이 10의 자리로 이동
    - 10을 20의 왼쪽 자식으로
    - T2는 10의 오른쪽 자식으로
    - T2에 있는 키들은 10과 20 사이 값을 가지므로 T2의 이동 전후 모두 이진탐색트리 조건이 만족
- RR-회전은 rotate_left() 사용

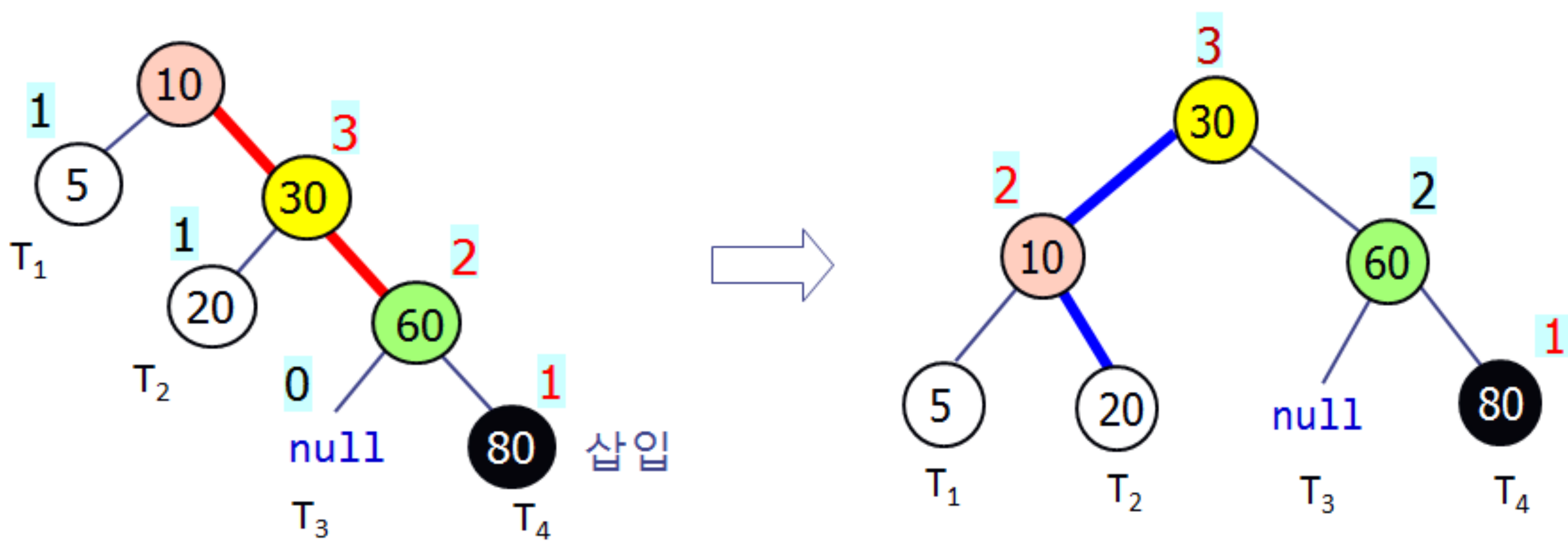



(a) $T_3$ 또는$T_4$에 새 노드 삽입




(b) RR-회전 후

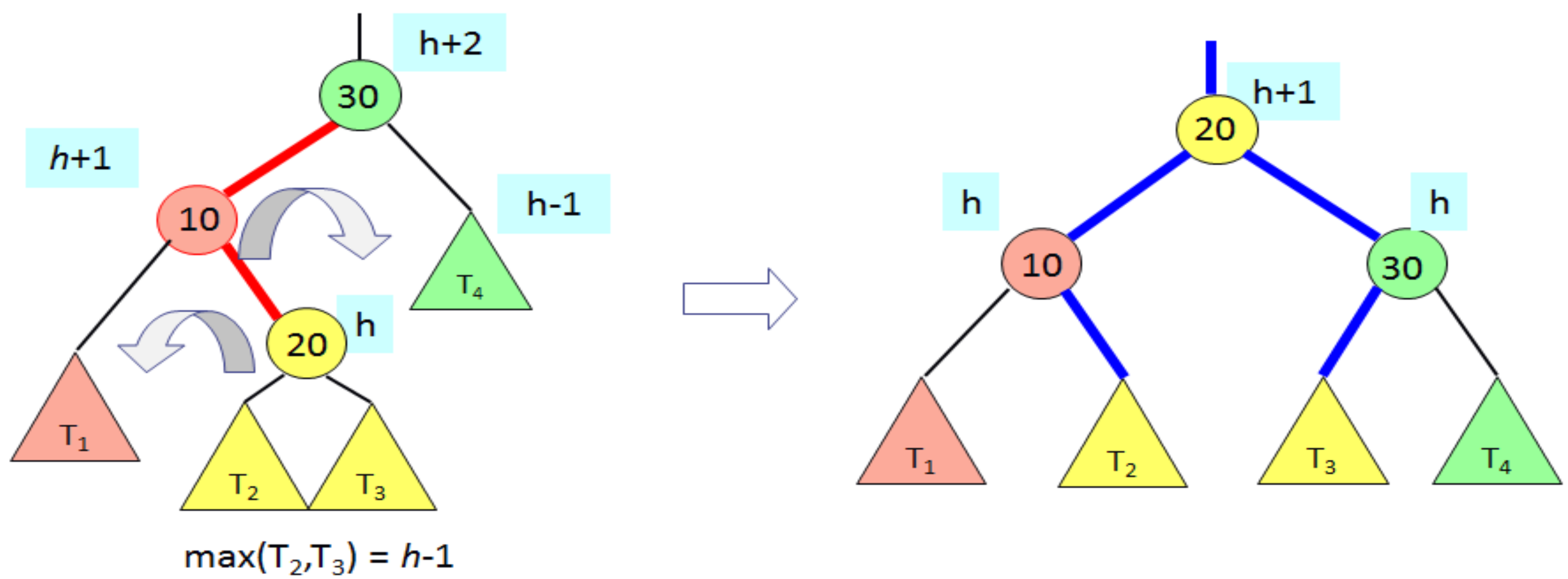
# RR-회전



10
5
30
20
60
80
null
삽입
1
3
1
2
0
1
T1
T2
T3
T4
30
10
60
5
20
null
80
3
2
2
1
T1
T2
T3
T4

# LR-회전

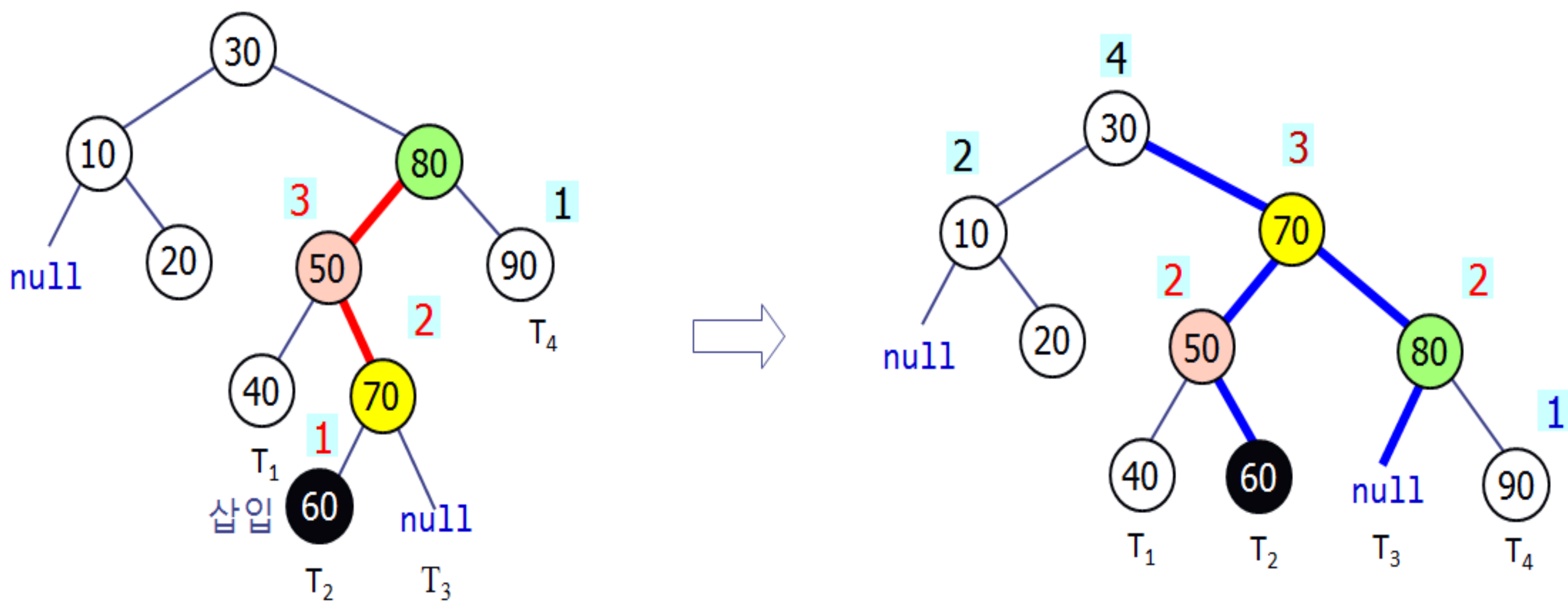
- (a) 20의 왼쪽 서브트리(T2) 또는 오른쪽 서브트리(T3)에 새로운 노드가 삽입 되어 T2 또는T3의 높이가 h-1이 됨에 따라 30의 왼쪽과 오른쪽 서브트리의 높이 차이가 2가 된 상태
- 30의 왼쪽(L) 서브트리의 오른쪽(R) 서브트리에서 새로운 노드가 삽입되었기 때문
- LR-회전은 rotate-left(10) 수행 후 rotate_right(30) 수행




(a) $T_2$ 또는$T_3$ 에 새 노드 삽입

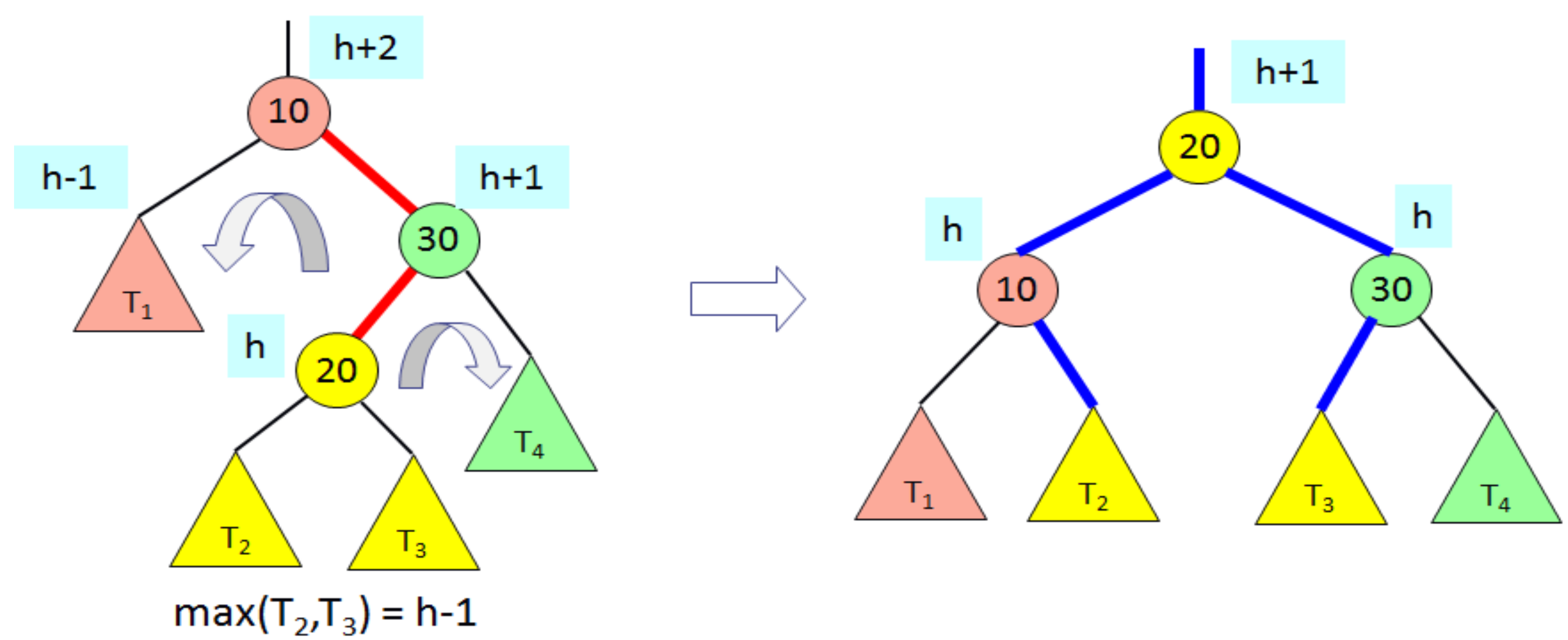
(b) LR-회전 후

# LR-회전


30
10
80
3
1
null
20
50
90
2
T4
40
70
T1
1
삽입
60
null
T2
T3
4
30
2
3
10
70
2
2
null
20
50
80
1
40
60
null
90
T1
T2
T3
T4

# RL-회전

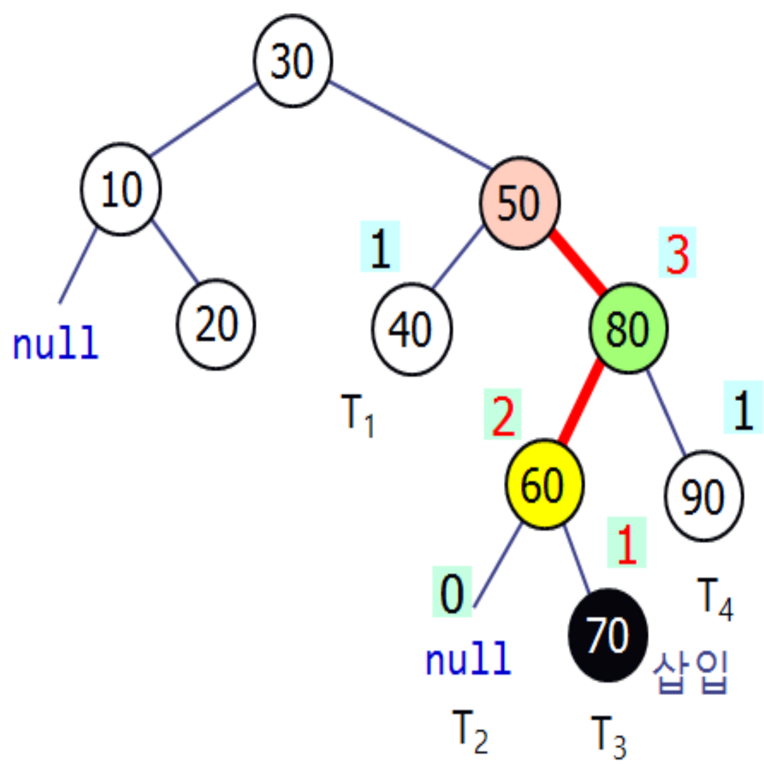
- (a) 20의 왼쪽 서브트리 (T2) 또는 오른쪽 서브트리 (T3)에 새로운 노드가 삽입 되어 T2 또는T3의 높이가 h-1이 되고 10의 왼쪽과 오른쪽 서브트리의 높이 차이가 2가 된 상태
- 10의 오른쪽(R) 서브트리의 왼쪽(L) 서브트리에서 새로운 노드가 삽입되었기 때문
- RL-회전은 rotate_right(30) 수행한 후 rotate_left(10) 수행



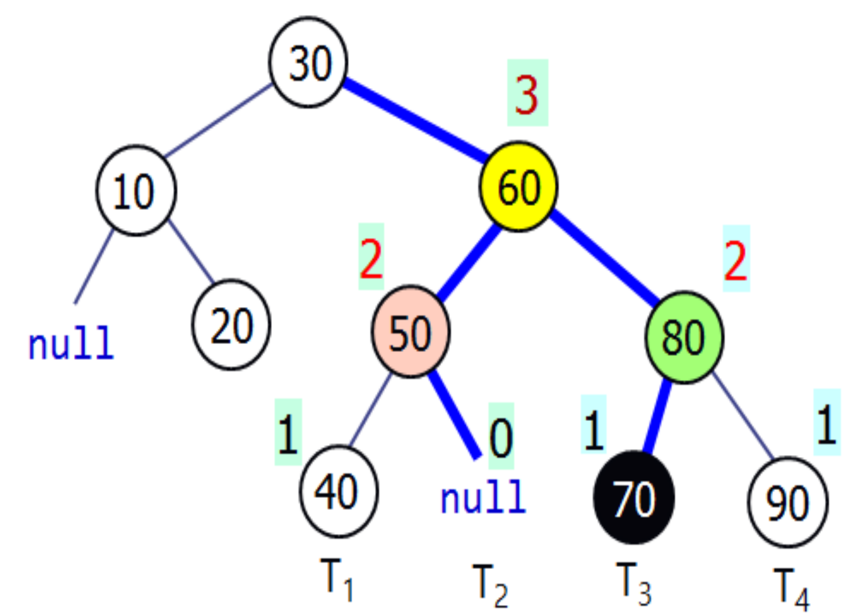

(a) $T_2$ 또는$T_3$ 에 새 노드 삽입

(b) RL-회전 후

# RL-회전



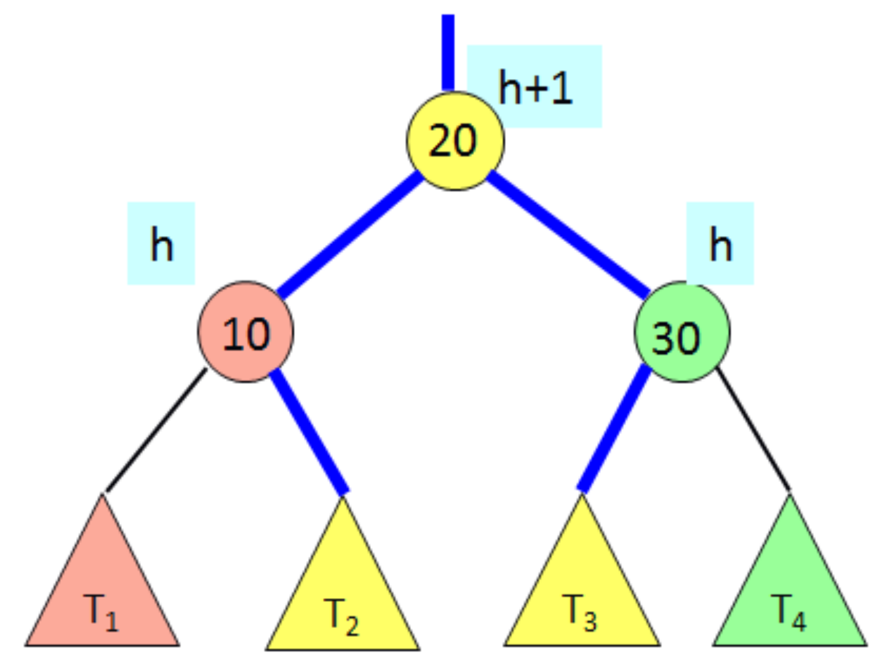
30
10
50
null
20
40
80
T1
60
90
0
null
70
삽입
T4
T2
T3
3
1
2
1
1

30
10
60
null
20
50
80
40
null
70
90
T1
T2
T3
T4
3
2
2
1
0
1
1

# 4가지 회전의 공통점

- 회전 후의 트리들이 모두 동일
    - 각 그림(a)의 트리에서 10, 20, 30이 어디에 위치하든지, 3개의 노드들 중에서 중간값을 가진 노드, 즉, 20이 위로 이동하면서 10 과 30이 각각 20의 좌우 자식이 되기 때문
- 각 회전 연산의 수행시간이 O(1)
    - 각 그림(b)에서 변경된 노드 레퍼런스 수가 O(1) 개이기 때문



# AVL 트리의 삽입연산

- AVL트리에서의 삽입은 두 단계로 수행
- [1 단계] 이진탐색트리의 삽입과 동일하게 새로운 노드 삽입
- [2 단계] 새로 삽입한 노드로부터 루트로 거슬러 올라가며 각 노드의 서브트리 높이 차이를 갱신
  - 이 때 가장 먼저 불균형이 발생한 노드를 발견하면, 이 노드를 기준으로 새 노드가 어디에 삽입되었는지에 따라 적절한 회전연산을 수행

# AVL 트리의 삽입연산

```
class Node:
    def __init__(self, key, value, height, left=None, right=None):
        self.key    = key
        self.value  = value
        self.height = height
        self.left   = left
        self.right  = right

class AVL:
    def __init__(self):
        self.root = None

    def height(self, n):
        if n == None:
            return 0
        return n.height

    def put(self, key, value): # 삽입 연산
    def balance(self, n): # 불균형 처리
    def bf(self, n): # bf 계산
    def rotate_right(self, n): # 우로 회전
    def rotate_left(self, n): # 좌로 회전
    def delete(self, key): # 삭제 연산
    def delete_min(self): # 최솟값 삭제
    def min(self): # 최솟값 찾기
```

노드 생성자
key, value, 노드의 높이,
왼쪽, 오른쪽 자식노드 레퍼런스

트리 루트

노드 n의 높이 리턴

삭제 및 삭제 관련 연산

# AVL 트리의 삽입연산

bf(n): (노드 n의 왼쪽 서브트리 높이) – (오른쪽 서브트리 높이) 리턴

```python
def bf(self, n): # bf 계산
    return self.height(n._left) - self.height(n._right)
```

```python
def balance(self, n): # 불균형 처리
    if self.bf(n) > 1:
        if self.bf(n._left) < 0:
            n._left = self.rotate_left(n._left)
        n = self.rotate_right(n)

    elif self.bf(n) < -1:
        if self.bf(n._right) > 0:
            n._right = self.rotate_right(n._right)
        n = self.rotate_left(n)
    return n
```

노드 n에서 불균형 발생

노드 n의 왼쪽자식의 오른쪽 서브트리가 높은 경우

LR 회전

LL 회전

노드 n의 오른쪽자식의 왼쪽 서브트리가 높은 경우

RL 회전

RR 회전

```python
01 def balance(self, n): # 불균형 처리
02     if self.bf(n) > 1:
03         if self.bf(n._left) < 0:
04             n._left = self.rotate_left(n._left)
05         n = self.rotate_right(n)
06 
07     elif self.bf(n) < -1:
08         if self.bf(n._right) > 0:
09             n._right = self.rotate_right(n._right)
10         n = self.rotate_left(n)
11     return n
```

노드 n에서 불균형 발생

노드 n의 왼쪽자식의 오른쪽 서브트리가 높은 경우

LR 회전

LL 회전

노드 n의 오른쪽자식의 왼쪽 서브트리가 높은 경우

RL 회전

RR 회전

- balance()에서 line 02의 bf(n) > 1인 경우는 노드 n의 왼쪽 서브트리가 오른쪽 서브트리보다 높고, 그 차이가 1보다 큰 것으로 불균형 발생
- 이 때 bf(n.left)가 음수이면, n.left의 오른쪽 서브트리가 왼쪽 서브트리보다 높음
  - Line 04에서 rotate_left(n.left)를 수행하고 line 06에서 rotate_right(n)을 수행. 즉, LR-회전 수행
- bf(n.left)가 음수가 아니라면, line 06에서 LL-회전 만을 수행
- RR-회전과 RL-회전도 line 08~10에 따라 각각 수행되어 트리의 균형을 유지
- 참고로 현재 노드 n의 균형이 유지되어 있으면, 바로 line 11에서 노드 n의 레퍼런스를 리턴

# AVL 트리의 삽입연산

```python
def put(self, key, value): # 삽입 연산
    self.root  = self.put_item(self.root, key, value)

def put_item(self, n, key, value):
    if n == None:
        return Node(key, value, 1)
    if n.key > key:
        n.left = self.put_item(n.left,  key, value)
    elif n.key < key:
        n.right = self.put_item(n.right, key, value)
    else:
        n.value = value
        return n
    n.height = max(self.height(n.left), self.height(n.right)) + 1
    return self.balance(n)
```

새 노드 생성, 높이=1

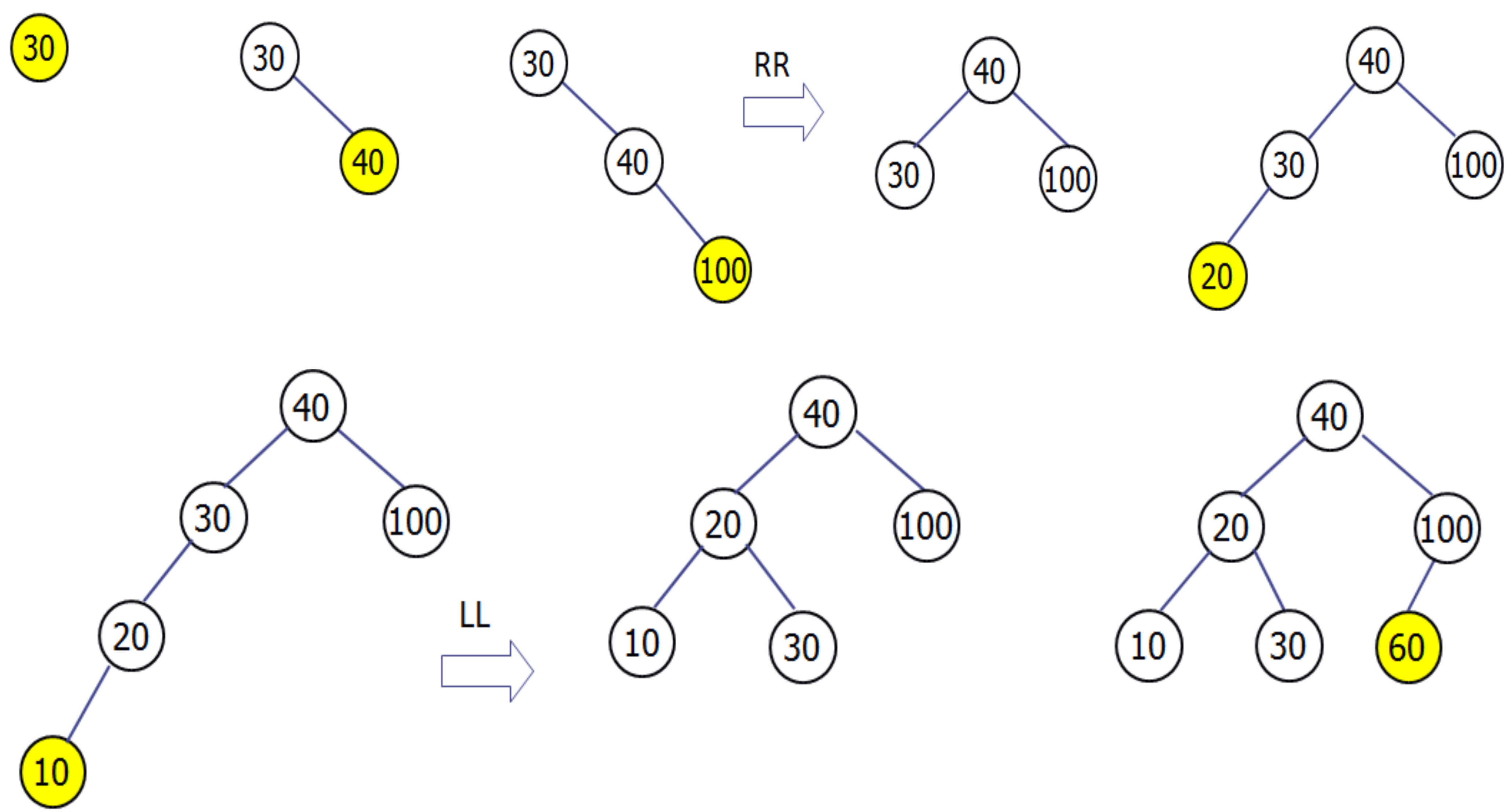
key가 이미 있으면 value만 갱신

노드 n의 높이 갱신

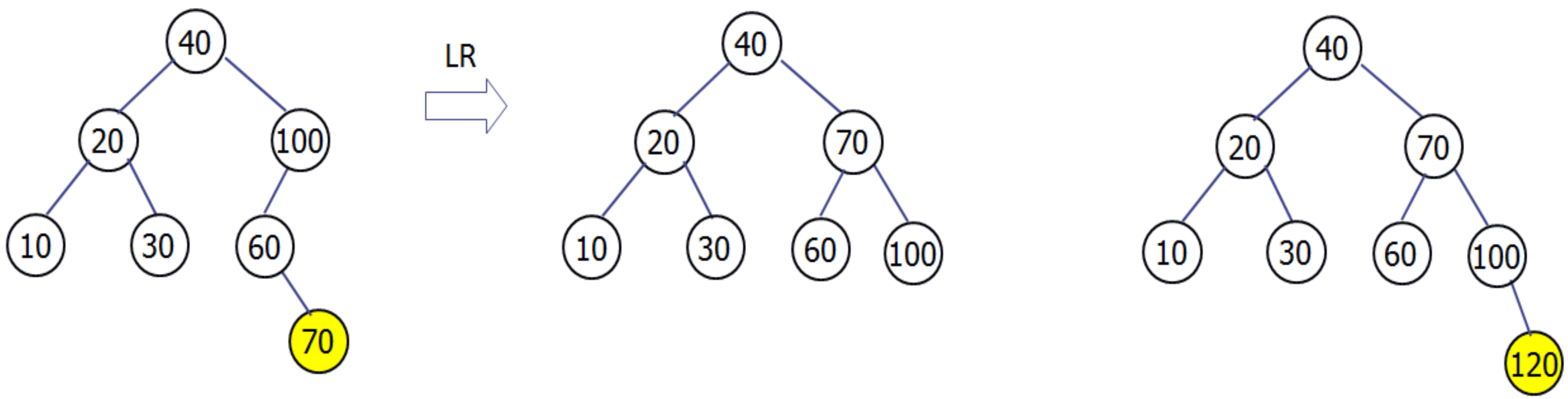
노드 n의 균형 유지

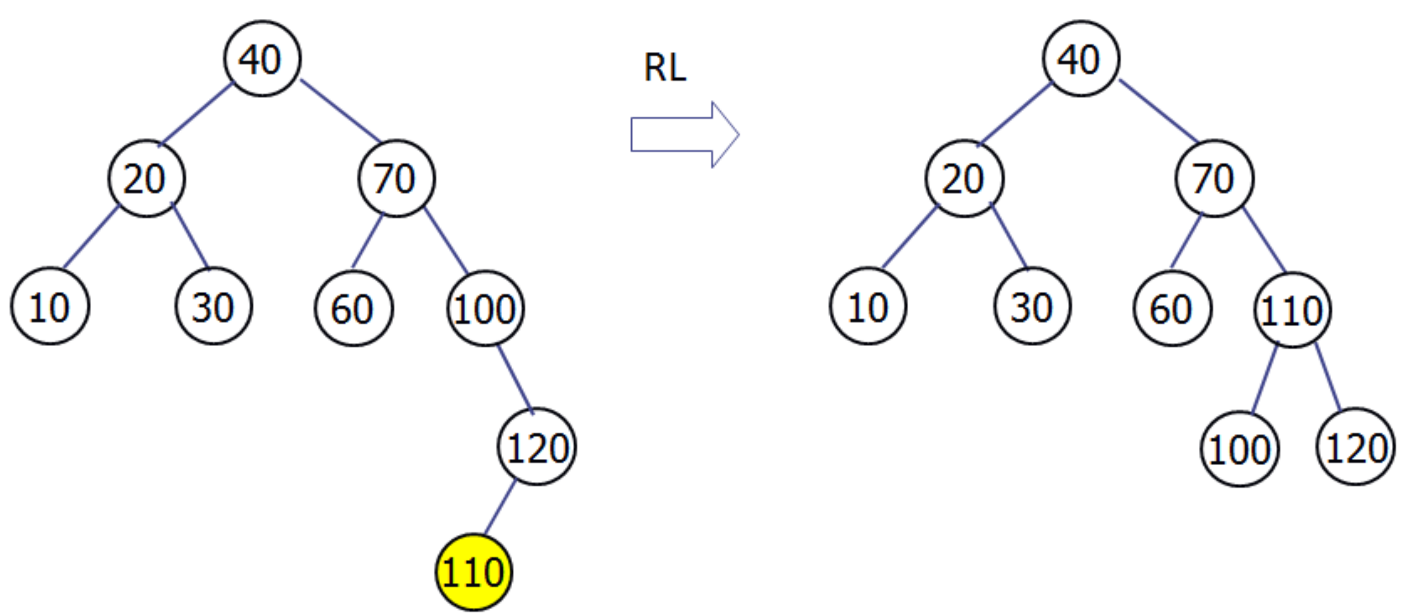
# AVL 트리의 삽입연산

- [예제] 30, 40, 100, 20, 10, 60, 70, 120, 110을 순차적으로 삽입



# AVL 트리의 삽입연산

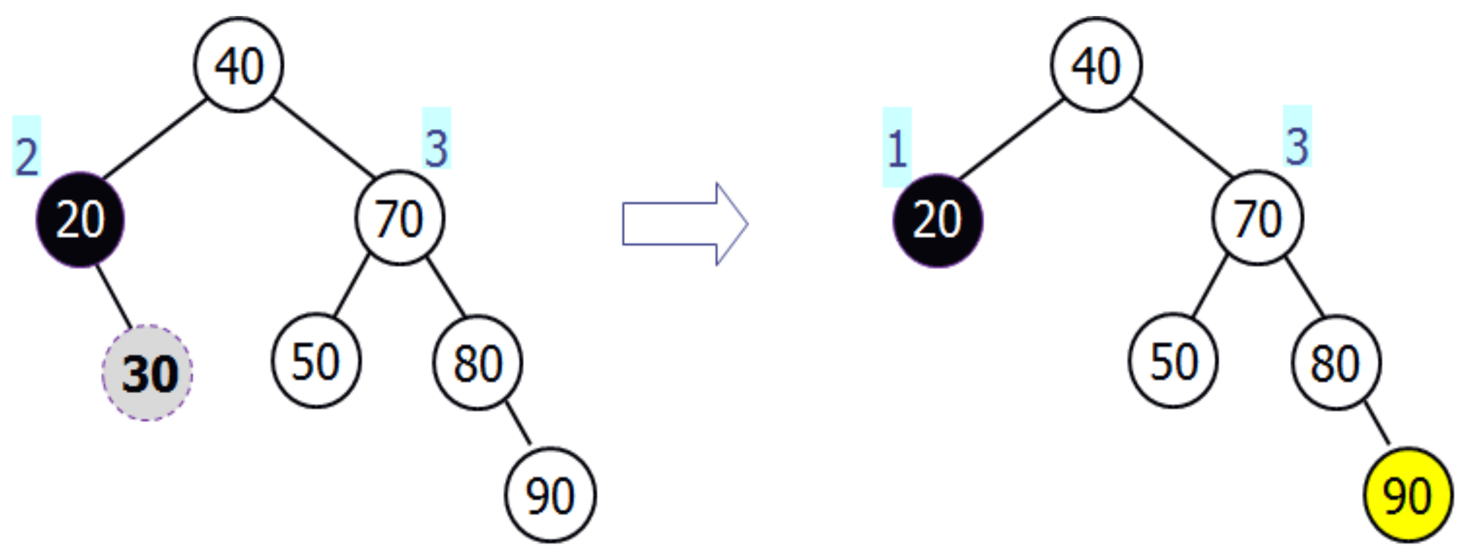


# AVL 트리의 삭제 연산

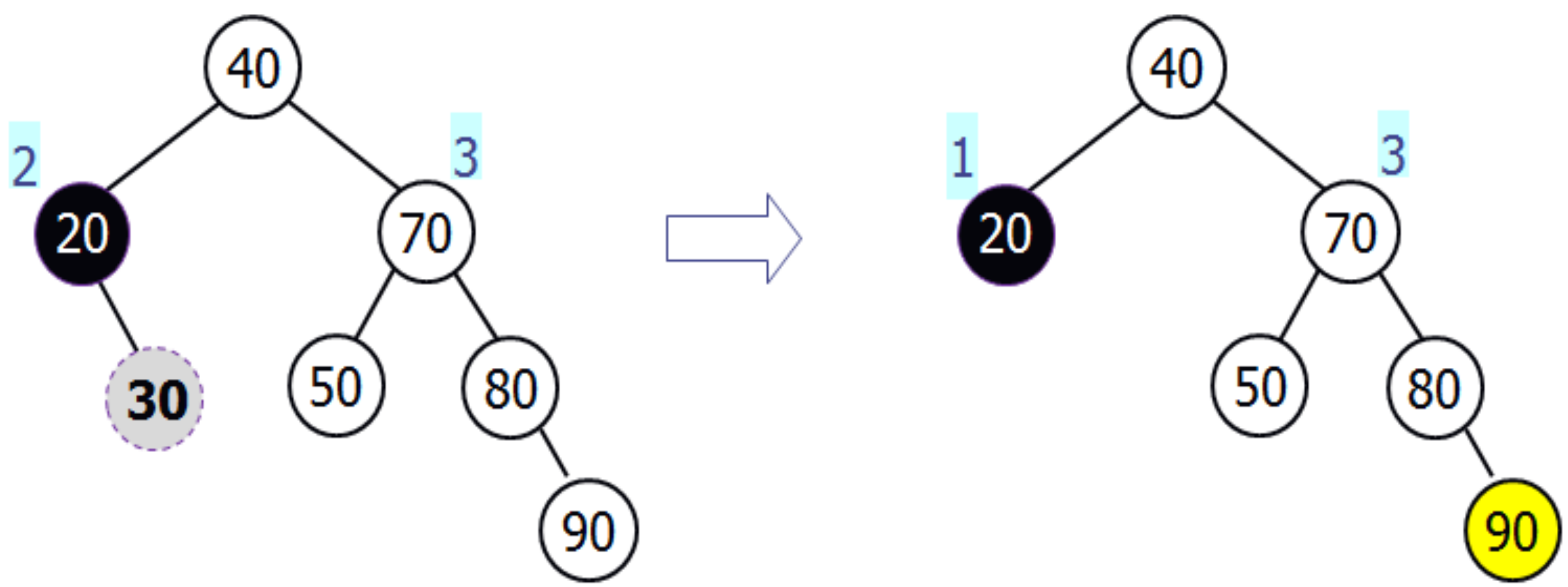
- AVL트리에서의 삭제는 두 단계로 진행
- [1단계] 이진탐색트리에서와 동일한 삭제 연산 수행
- [2단계] 삭제된 노드로부터 루트노드 방향으로 거슬러 올라가며 불균형이 발생한 경우 적절한 회전 연산 수행
  - 회전 연산 수행 후에 부모에서 불균형이 발생할 수 있고, 이러한 일이 반복되어 루트에서 회전 연산을 수행해야 하는 경우도 발생

# AVL 트리의 삭제 연산




(a) 삭제 전　　　　(b) 삭제 후 노드 40에서 불균형 발생

# AVL 트리의 삭제 연산

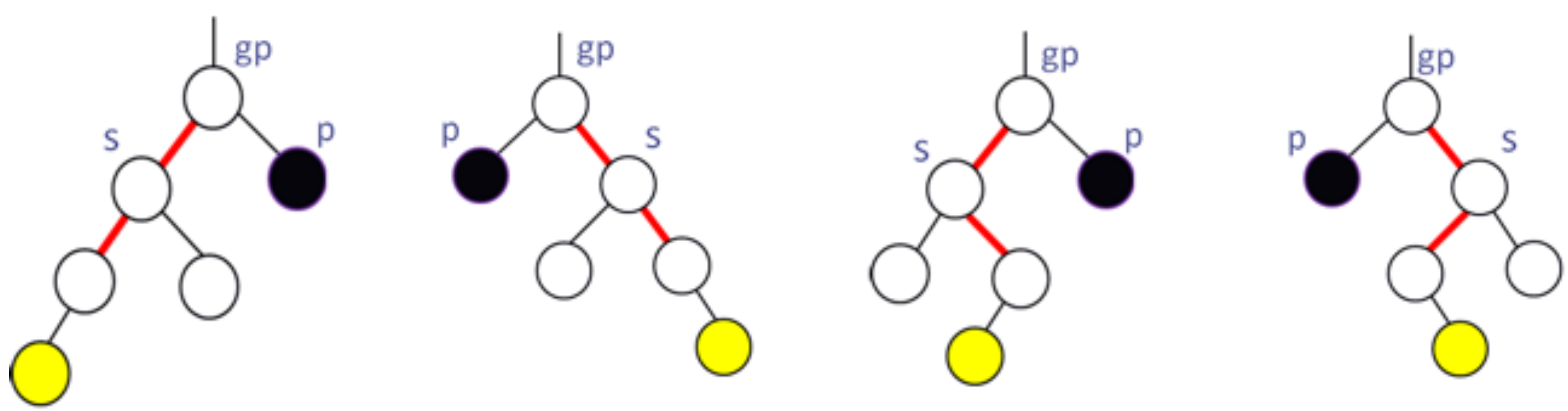



(a) 삭제 전

(b) 삭제 후 노드 40에서 불균형 발생

# AVL 트리의 삭제 연산

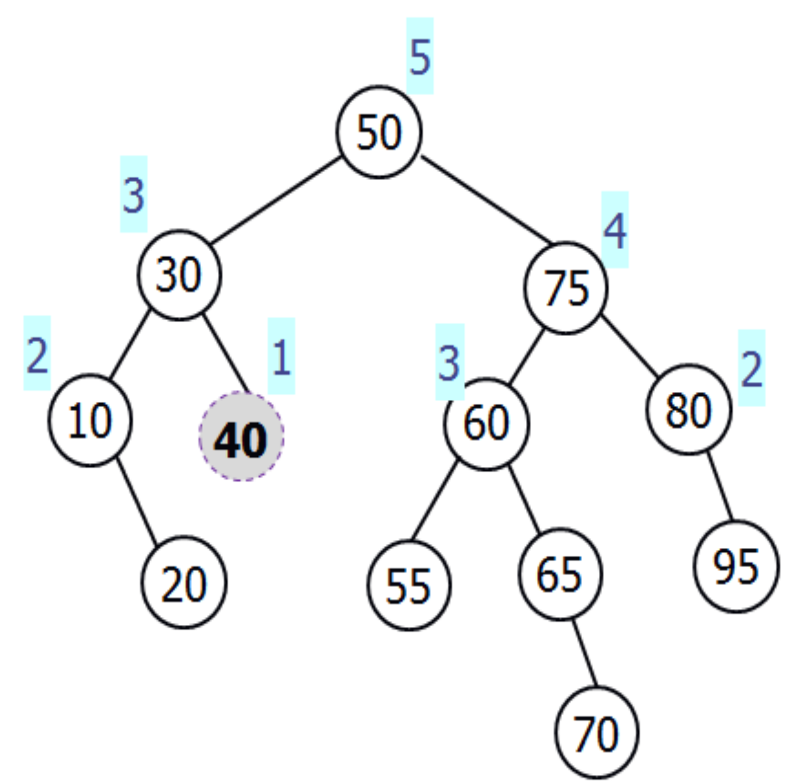
- [핵심 아이디어]  삭제 후 불균형이 발생하면 반대쪽에 삽입이 이루어져 불균형이 발생한 것으로 취급하자
  - 삭제된 노드의 부모= p, p의 부모 = gp, p의 형제 = s
  - s의 왼쪽과 오른쪽 서브트리 중에서 높은 서브트리에 마치 새 노드가 삽입된 것으로 간주

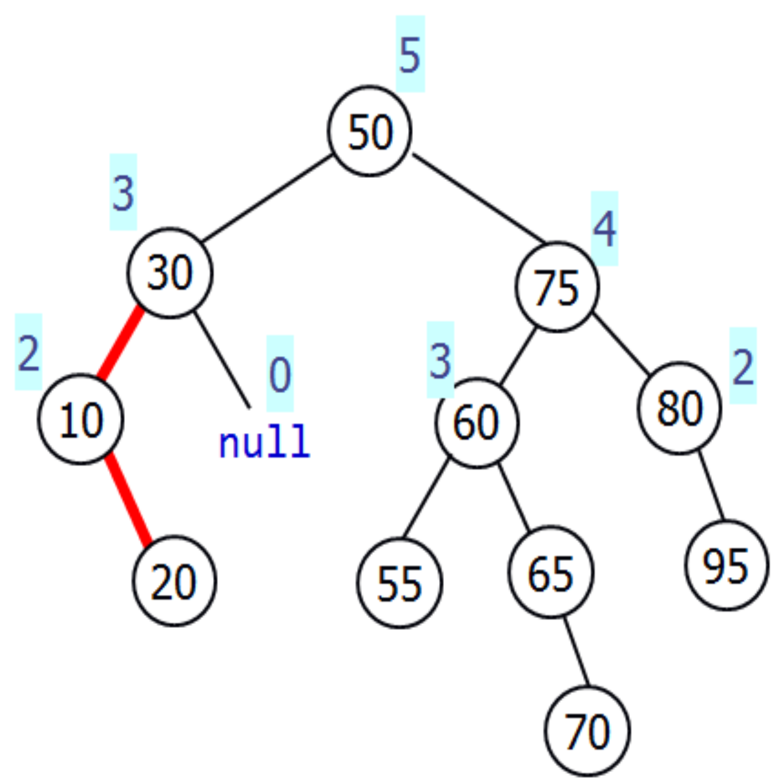



(a) LL-회전 (b) RR-회전 (c) LR-회전 (d) RL-회전

# AVL 트리의 삭제 연산

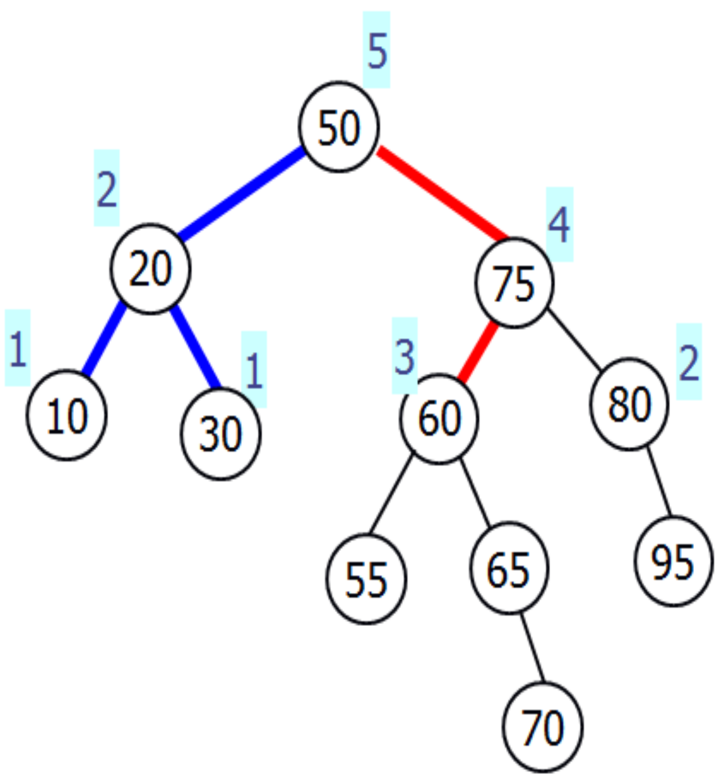
- 예제: 40을 삭제



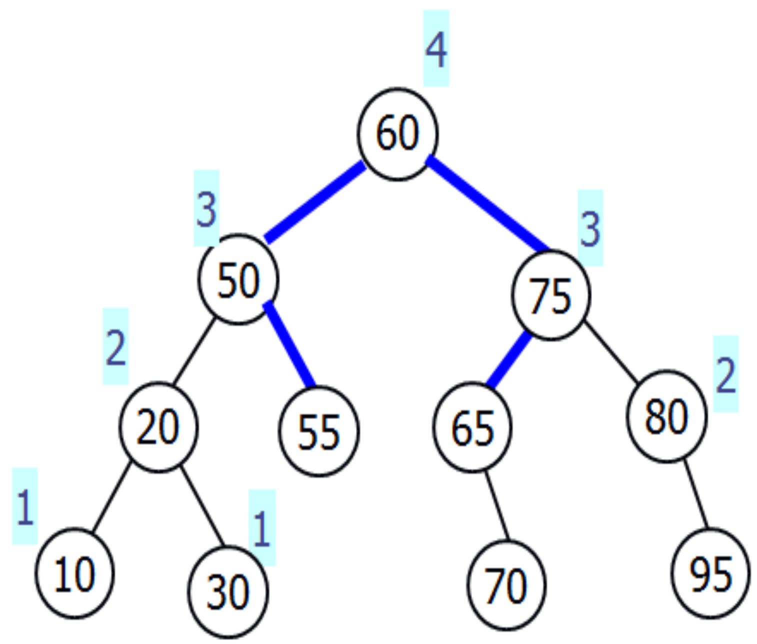



# AVL 트리의 삭제 연산

- 예제: 40을 삭제



LR-회전 후



RL-회전 후

# AVL Tree 테스팅

```python
from avl import AVL
if __name__ == '__main__':
    t = AVL()
    t.put(75, 'apple')
    t.put(80, 'grape')
    t.put(85, 'lime')
    t.put(20, 'mango')
    t.put(10, 'strawberry')
    t.put(50, 'banana')
    t.put(30, 'cherry')
    t.put(40, 'watermelon')
    t.put(70, 'melon')
    t.put(90, 'plum')
    print('전위순회:\t', end='')
    t.preorder(t.root)
    print('\n중위순회:\t', end='')
    t.inorder(t.root)
    print('\n75와 85 삭제 후:')
    t.delete(75)
    t.delete(85)
    print('전위순회:\t', end='')
    t.preorder(t.root)
    print('\n중위순회:\t', end='')
    t.inorder(t.root)
```

AVL 트리 객체 생성

10개의 항목 삽입

트리 순회 및 삭제 연산 수행

Console PyUnit

```
<terminated> main.py [C:₩Users₩sbyang₩AppData₩Local₩Programs₩Python₩Python36-32
전위순회:	75	40	20	10	30	50	70	85	80	90
중위순회:	10	20	30	40	50	70	75	80	85	90
75와 85 삭제 후:
전위순회:	40	20	10	30	80	50	70	90
중위순회:	10	20	30	40	50	70	80	90
```

# 수행시간

- AVL 트리에서의 탐색, 삽입, 삭제 연산은 공통적으로 루트부터 탐색을 시작하여 최악의 경우에 이파리까지 내려가고, 삽입이나 삭제 연산은 다시 루트까지 거슬러 올라가야

- 트리를 한 층 내려갈 때는 재귀호출하며, 한 층을 올라갈 때 불균형이 발생하면 적절한 회전 연산을 수행하는데, 이들 각각은 O(1) 시간 밖에 걸리지 않음

- 탐색, 삽입, 삭제 연산의 수행시간은 각각 AVL의 높이에 비례하므로 각 연산의 수행시간은 O(logN)

# 수행시간

- 다양한 실험결과에 따르면, AVL 트리는 거의 정렬된 데이터를 삽입한 후에 랜덤 순서로 데이터를 탐색하는 경우 가장 좋은 성능을 보임

- 이진탐색트리는 랜덤 순서의 데이터를 삽입한 후에 랜덤 순서로 데이터를 탐색하는 경우 가장 좋은 성능을 보임a