

Metode Numerik EE221

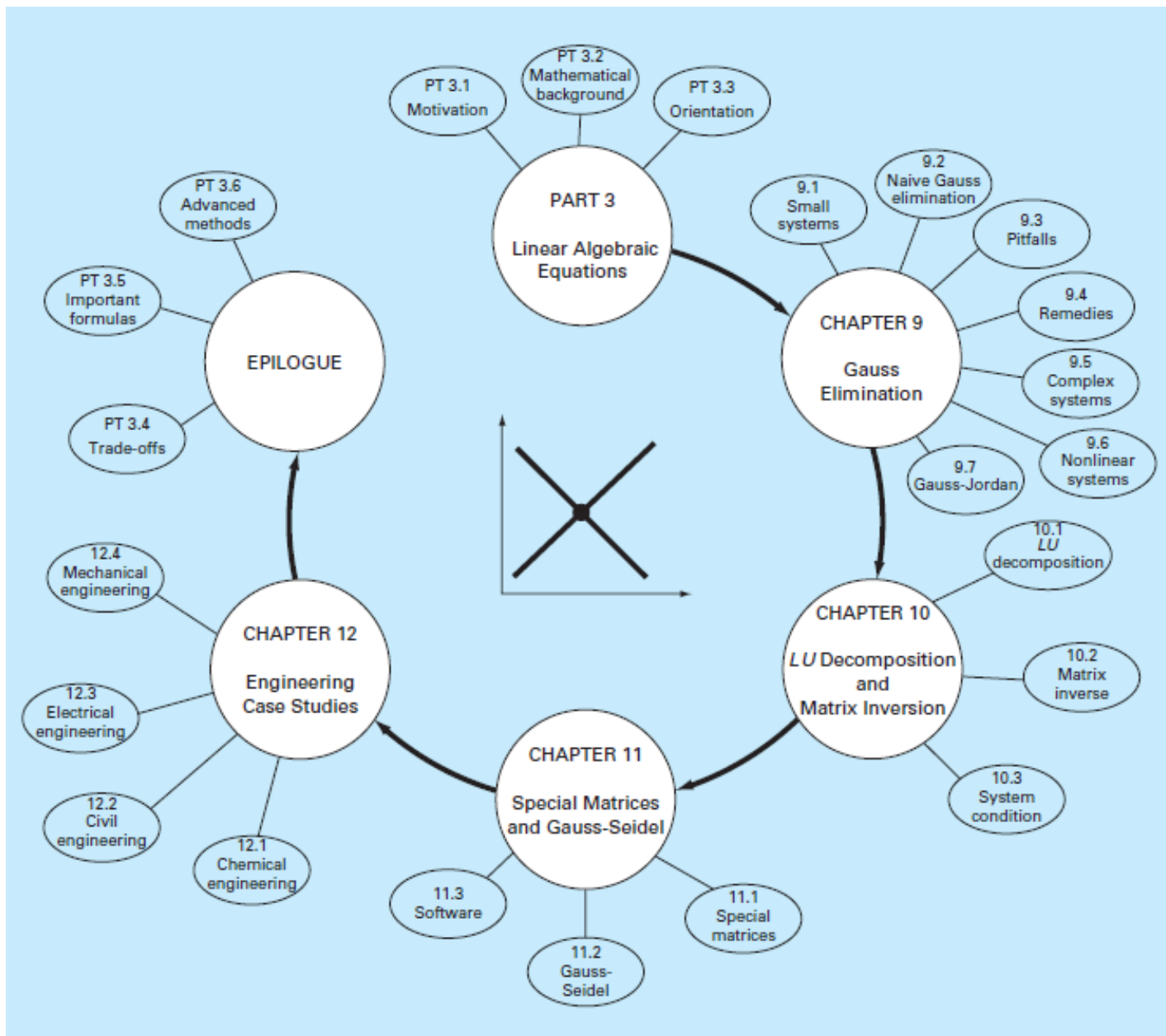
Bab 4. Solusi Sistem Persamaan Linier

Dirangkum dan diterjemahkan dari :

- Thomson Brooks Chapra, Steven and Raymond Canale. 2009. Numerical Methods for Engineers 6th Edition, **Chapter 9**
- Linear Algebra A Modern Introduction 2nd Edition, **Chapter 2**

Nabila Husna Shabrina

Fakultas Teknik dan Informatika, Universitas Multimedia Nusantara



Sub Bahasan :

- Sistem Persamaan Linier
- Matriks
- Eliminasi Gaussian
 - Determinan & cramer's rule
 - Elimination of unknowns
 - Eliminasi Naive gauss

Sistem Persamaan Linier

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

a : koefisien

b : konstanta

Matriks

Column 3

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{Row 2}$$

Notasi Matriks

Perkalian Matriks

$$[A]_{n \times m} [B]_{m \times l} = [C]_{n \times l}$$

Interior dimensions are equal; multiplication is possible

Exterior dimensions define the dimensions of the result

Matriks

Menyatakan Sistem Persamaan Linier dengan Matriks

$$\begin{array}{rrcr} x & - & y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 16 \\ 2x & - & y & + & z & = & 9 \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Matrik *augmented*

Menyelesaikan Persamaan dengan Nilai yang Kecil

Metode Grafik

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$



$$x_2 = -\left(\frac{a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$x_2 = -\left(\frac{a_{21}}{a_{22}}\right)x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

Gambarkan persamaan tersebut. Perpotongan dari kedua garis merupakan solusi dari SPL

Menyelesaikan Persamaan dengan Nilai yang Kecil

Contoh 1.

Dengan metode grafik tentukan solusi dari SPL berikut.

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

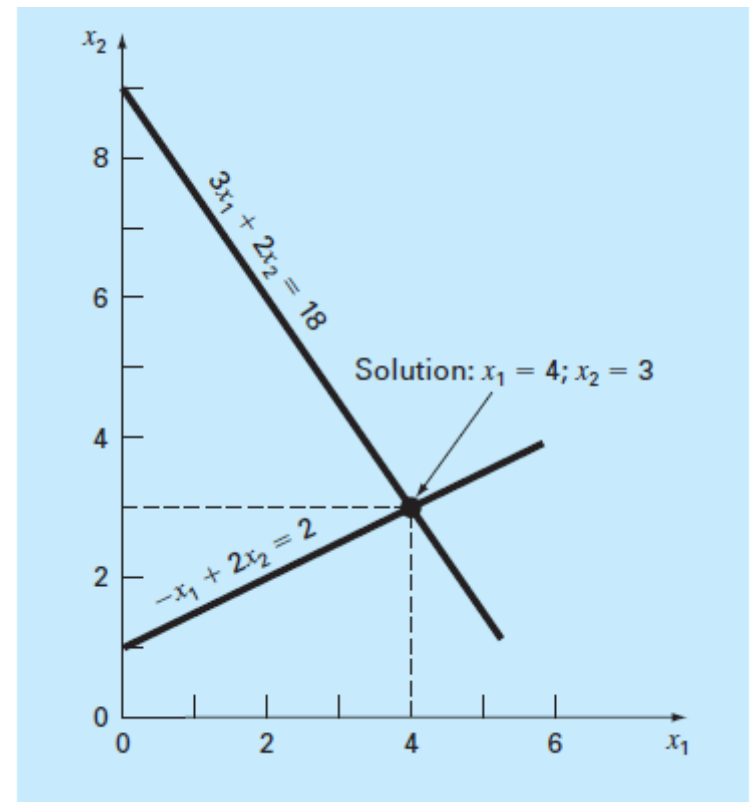
$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + 9$$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1$$

Lakukan pengecekan

$$3(4) + 2(3) = 18$$

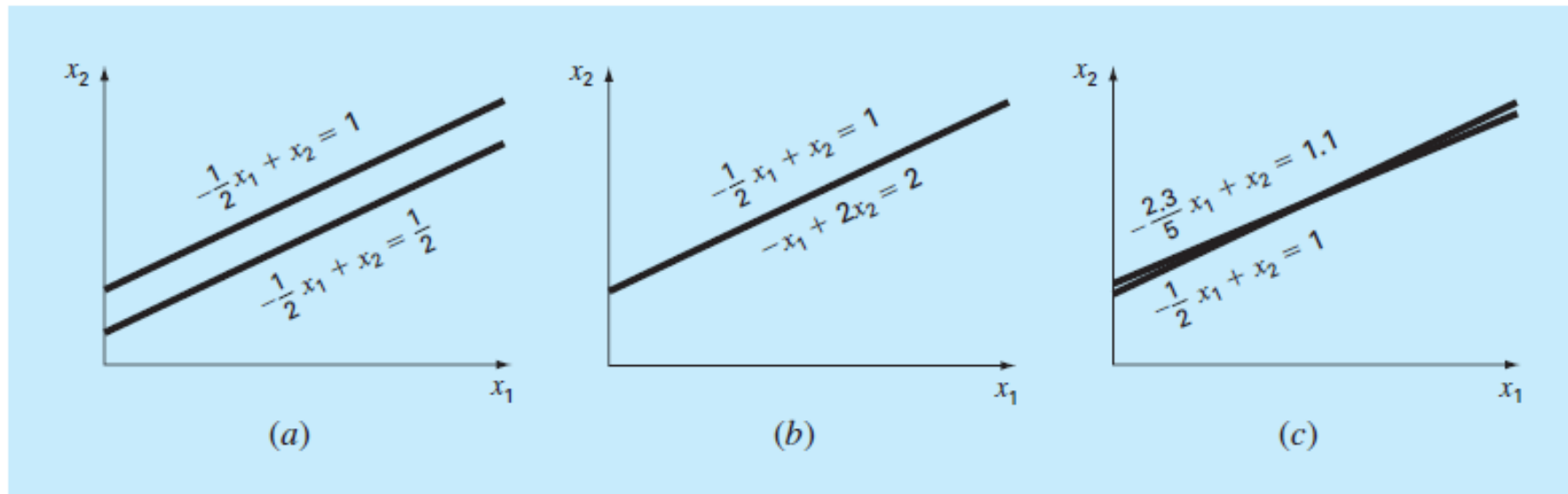
$$-(4) + 2(3) = 2$$



Menyelesaikan Persamaan dengan Nilai yang Kecil

FIGURE 9.2

Graphical depiction of singular and ill-conditioned systems: (a) no solution, (b) infinite solutions, and (c) ill-conditioned system where the slopes are so close that the point of intersection is difficult to detect visually.



Determinan & Cramer's Rule

Determinan Matrik

Determinan matrik dapat dicari dengan persamaan berikut.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \rightarrow D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matrik
2x2

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Matrik
3x3

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinan & Cramer's Rule

Contoh 2.

Tentukan determinan dari Figure 9.2 a dan b

$$D = \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}(1) - 1\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}(2) - 1(-1) = 0$$

Determinan & Cramer's Rule

Cramer's Rule

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

Mengganti kolom yang memiliki koefisien yang akan dicari dengan konstanta b_1, b_2 , dst

Bentuk umum

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dimana A_{ij} adalah matrik yang didapatkan dengan menukar entri pada kolom ke- j dengan entri matrik

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Determinan & Cramer's Rule

Contoh 3.

Dengan cramer's rule, selesaikan SPL berikut.

$$0.3x_1 + 0.52x_2 + x_3 = -0.01$$

$$0.5x_1 + x_2 + 1.9x_3 = 0.67$$

$$0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = -0.44$$

Determinan & Cramer's Rule

Determinan

$$D = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}$$

Minor

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1.9 \\ 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} = 1(0.5) - 1.9(0.3) = -0.07$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 0.5 & 1.9 \\ 0.1 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.5(0.5) - 1.9(0.1) = 0.06$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.3 \end{vmatrix} = 0.5(0.3) - 1(0.1) = 0.05$$

$$D = 0.3(-0.07) - 0.52(0.06) + 1(0.05) = -0.0022$$

Determinan & Cramer's Rule

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0.01 & 0.52 & 1 \\ 0.67 & 1 & 1.9 \\ -0.44 & 0.3 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \frac{0.03278}{-0.0022} = -14.9$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.3 & -0.01 & 1 \\ 0.5 & 0.67 & 1.9 \\ 0.1 & -0.44 & 0.5 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \frac{0.0649}{-0.0022} = -29.5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.3 & 0.52 & -0.01 \\ 0.5 & 1 & 0.67 \\ 0.1 & 0.3 & -0.44 \end{vmatrix}}{-0.0022} = \frac{-0.04356}{-0.0022} = 19.8$$

Elimination of Unknowns

Diketahui persamaan linier berikut

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\end{aligned}$$

Dengan metode *elimination of unknowns* SPL tersebut dapat diselesaikan menjadi

$$\begin{aligned}a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 &= b_1a_{21} \\a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 &= b_2a_{11}\end{aligned}$$

$$a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11}$$

$$a_{22}a_{11}x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Elimination of Unknowns

Contoh 4.

Dengan elimination of unknowns tentukan solusi dari SPL berikut.

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

$$x_1 = \frac{2(18) - 2(2)}{3(2) - 2(-1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{3(2) - (-1)18}{3(2) - 2(-1)} = 3$$

Eliminasi Naive Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

\Downarrow

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array} \right]$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3 / a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23}x_3) / a'_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} \end{aligned}$$

Forward
elimination

Back
substitution

Eliminasi Naive Gauss

Contoh 5.

Dengan eliminasi gauss tentukan solusi SPL berikut.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (\text{E9.5.1})$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \quad (\text{E9.5.2})$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \quad (\text{E9.5.3})$$

Forward elimination

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617 \quad \text{Kalikan 9.51 dengan } 0.1/3$$

Kalikan 9.51 dengan $0.3/3$ dan kurangkan dengan 9.5.3

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (\text{E9.5.4})$$

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617 \quad (\text{E9.5.5})$$

$$-0.190000x_2 + 10.0200x_3 = 70.6150 \quad (\text{E9.5.6})$$

Eliminasi Naive Gauss

Kalikan 9.5.5 dengan $-0.19/7.0033$ dan kurangkan dengan 9.5.6

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (\text{E9.5.7})$$

$$7.00333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617 \quad (\text{E9.5.8})$$

$$10.0120x_3 = 70.0843 \quad (\text{E9.5.9})$$

Back substitution

$$x_3 = \frac{70.0843}{10.0120} = 7.0000$$

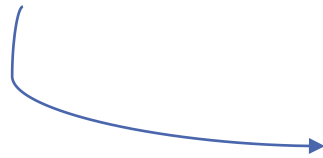
$$7.00333x_2 - 0.293333(7.0000) = -19.5617$$

$$x_2 = \frac{-19.5617 + 0.293333(7.0000)}{7.00333} = -2.50000$$

Eliminasi Naive Gauss

$$3x_1 - 0.1(-2.50000) - 0.2(7.0000) = 7.85$$

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.50000) + 0.2(7.0000)}{3} = 3.00000$$



$$3(3) - 0.1(-2.5) - 0.2(7) = 7.85$$

$$0.1(3) + 7(-2.5) - 0.3(7) = -19.3$$

$$0.3(3) - 0.2(-2.5) + 10(7) = 71.4$$

Eliminasi Naive Gauss

Pseudocode untuk eliminasi Naive gauss

(a)

```
DOFOR k = 1, n - 1
  DOFOR i = k + 1, n
    factor =  $a_{i,k} / a_{k,k}$ 
    DOFOR j = k + 1 to n
       $a_{i,j} = a_{i,j} - \text{factor} \cdot a_{k,j}$ 
    END DO
     $b_i = b_i - \text{factor} \cdot b_k$ 
  END DO
END DO
```

Forward elimination

(b)

```
 $x_n = b_n / a_{n,n}$ 
DOFOR i = n - 1, 1, -1
  sum =  $b_i$ 
  DOFOR j = i + 1, n
    sum = sum -  $a_{i,j} \cdot x_j$ 
  END DO
   $x_i = \text{sum} / a_{i,i}$ 
END DO
```

Back substitution

Kerumitan Eliminasi Naive Gauss

Hal-hal yang perlu diperhatikan dalam eliminasi gauss

- Pembagian dengan nol
- Round-off error
- ill-Conditioned system : perubahan kecil pada koefisien persamaan menyebabkan perubahan yang signifikan pada solusi persamaan
- Sistem singular

Kerumitan Eliminasi Naive Gauss

ill-Conditioned System

Contoh 6.

Selesaikan SPL berikut.

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

Kemudian selesaikan kembali persamaan di atas dengan koefisien x_1 pada baris kedua diganti menjadi 1.05

Penyelesaian persamaan ketika koefisien $x_1 = 1.1$

$$x_1 = \frac{2(10) - 2(10.4)}{1(2) - 2(1.1)} = 4$$

$$x_2 = \frac{1(10.4) - 1.1(10)}{1(2) - 2(1.1)} = 3$$

Kerumitan Eliminasi Naive Gauss

Penyelesaian persamaan ketika koefisien x_1 berubah menjadi 1.05

$$x_1 = \frac{2(10) - 2(10.4)}{1(2) - 2(1.05)} = 8$$

$$x_2 = \frac{1(10.4) - 1.1(10)}{1(2) - 2(1.05)} = 1$$

Substitusi pada persamaan awal

$$8 + 2(1) = 10 = 10$$

$$1.1(8) + 2(1) = 10.8 \cong 10.4$$

Kerumitan Eliminasi Naive Gauss

Efek penskalaan pada determinan

Contoh 7.

a. $3x_1 + 2x_2 = 18$

$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

b. $x_1 + 2x_2 = 10$

$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

c. Ulangi b dengan mengalikan terlebih dahulu dengan faktor 10

a. $D = 3(2) - 2(-1) = 8$

b. $D = 1(2) - 2(1.1) = -0.2$

Kerumitan Eliminasi Naive Gauss

c. $10x_1 + 20x_2 = 100$

$$11x_1 + 20x_2 = 104$$

$$D = 10(20) - 20(11) = -20$$

Kerumitan Eliminasi Naive Gauss

Scaling

Contoh 8.

Lakukan scaling untuk soal pada contoh 7 untuk maksimum nilai setiap koefisien adalah 1

a. $x_1 + 0.667x_2 = 6$

$$-0.5x_1 + x_2 = 1$$

$$D = 1(1) - 0.667(-0.5) = 1.333$$

b. $0.5x_1 + x_2 = 5$

$$0.55x_1 + x_2 = 5.2$$

$$D = 0.5(1) - 1(0.55) = -0.05$$

Teknik Meningkatkan Solusi

Untuk meningkatkan solusi yang diperoleh dari SPL dapat digunakan beberapa teknik yaitu

- Gunakan lebih banyak angka penting
- Pivoting
- Scaling

Teknik Meningkatkan Solusi

Partial Pivoting

Contoh 8.

Selesaikan SPL berikut dengan eliminasi gauss

$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$$

$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$$

$$x_1 + 10,000x_2 = 6667$$

$$-9999x_2 = -6666$$

Teknik Meningkatkan Solusi

Significant Figures	x_2	x_1	Absolute Value of Percent Relative Error for x_1
3	0.667	-3.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.30000	10
6	0.666667	0.330000	1
7	0.6666667	0.3330000	0.1

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{2.0001 - 3(2/3)}{0.0003}$$

Teknik Meningkatkan Solusi

Significant Figures	x_2	x_1	Absolute Value of Percent Relative Error for x_1
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0001
7	0.6666667	0.3333333	0.00001

$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$$

$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$$

$$x_1 = \frac{1 - (2/3)}{1}$$

Teknik Meningkatkan Solusi

Efek pivoting pada scaling dan round-off

Contoh 9.

Selesaikan SPL berikut

a. $2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$

$$x_1 + x_2 = 2$$

b. Ulangi perhitungan sampai koefisien variable maksimum di setiap baris adalah 1

c. Gunakan koefisien yang telah diskalakan untuk menentukan apakah pivoting perlu untuk dilakukan (catatan : jawaban seharusnya adalah

$$x_1 = 1.00002 \text{ dan } x_2 = 0.99998)$$

Teknik Meningkatkan Solusi

a. $2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$ $x_2 = 1.00$
 $-50,000x_2 = -50,000$ $x_1 = 0.00$

b. $0.00002x_1 + x_2 = 1$ $x_1 + x_2 = 2$
 $x_1 + x_2 = 2$ $x_2 = 1.00$
 $x_1 + x_2 = 2$ $x_1 = x_2 = 1$
 $0.00002x_1 + x_2 = 1$

c. $x_1 + x_2 = 2$
 $2x_1 + 100,000x_2 = 100,000$
 $x_1 + x_2 = 2$
 $100,000x_2 = 100,000$

Latihan

Thomson Brooks Chapra, Steven and Raymond Canale. 2009.
Numerical Methods for Engineers 6th Edition

Problems Chapter 9

Nomor 9,10,11