Metode Numerik
EE221

Bab 1. Aproksimasi dan Galat

Dirangkum dan diterjemahkan dari Thomson Brooks Chapra, Steven and Raymond Canale. 2009. Numerical Methods for Engineers 6th Edition, **Chapter 3**

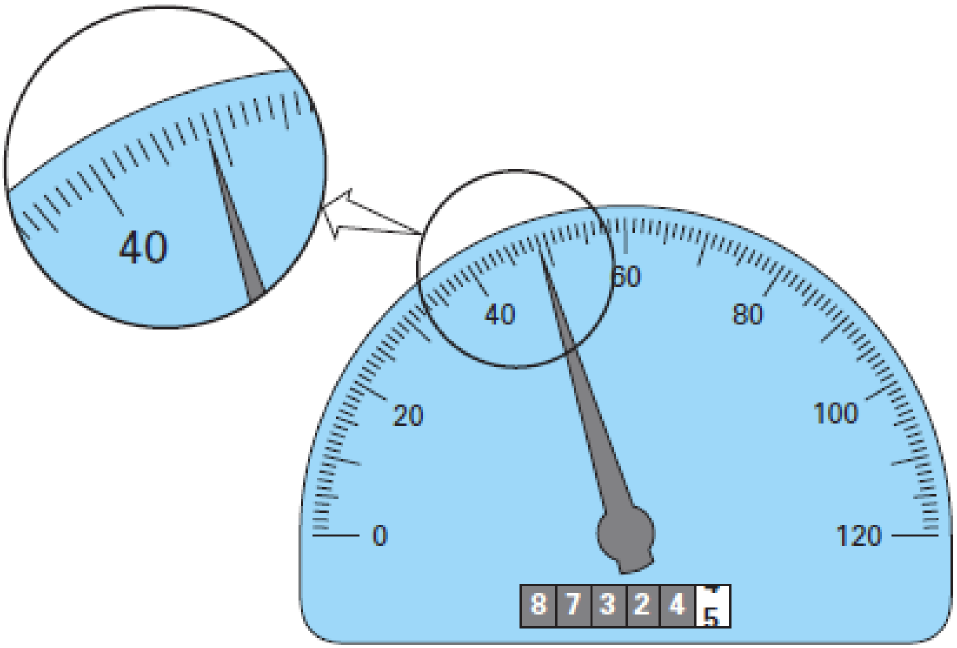
Nabila Husna Shabrina
Fakultas Teknik dan Informatika, Universitas Multimedia Nusantara

nabila.husna@umn.ac.id

Sub Bahasan :

- Angka Penting
- Akurasi dan Presisi
- Error

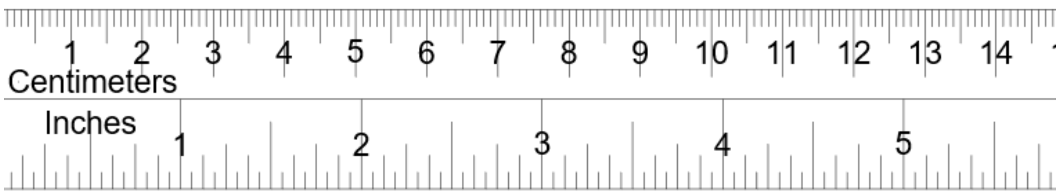
Angka Penting (Significant Figures)



Angka Penting

- Jumlah digit dari suatu bilangan
- Angka penting = angka pasti + angka taksiran (sesuai dengan alat ukur yang digunakan)

$13.2 \pm 0.5\ mm$



Angka Penting

Aturan

- Setiap angka bukan nol → angka penting
- Angka nol yang diapit dua angka bukan nol → angka penting
- Setiap angka nol pada deretan terakhir di belakang koma → angka penting
- Setiap angka nol yang ada sebelum angka lain → **bukan angka penting**
- Setiap angka nol setelah angka lain dan sebelum desimal → **ambigu**
- **Untuk memudahkan gunakan notasi penulisan ilmiah**

Angka Penting

Contoh angka penting untuk nilai “nol”

$$009 5\underline{0}2.\underline{000}$$

$$0.009 5\underline{0}2$$

$$1.6\underline{000} \cdot 10^4 \quad \text{or} \quad 16\underline{000}.$$

$$16000$$

Hijau : angka penting

Merah : bukan angka penting

Angka Penting

Aturan operasi matematis untuk angka penting

- Penjumlahan dan pengurangan : hasil penjumlahan dan pengurangan harus mengandung jumlah angka desimal paling sedikit

Contoh : 1.234 + 5.67 = 6.90

3 desimal 2 desimal 2 desimal

- Perkalian : hasil perkalian harus mengandung angka penting sebanyak bilangan yang angka pentingnya paling sedikit

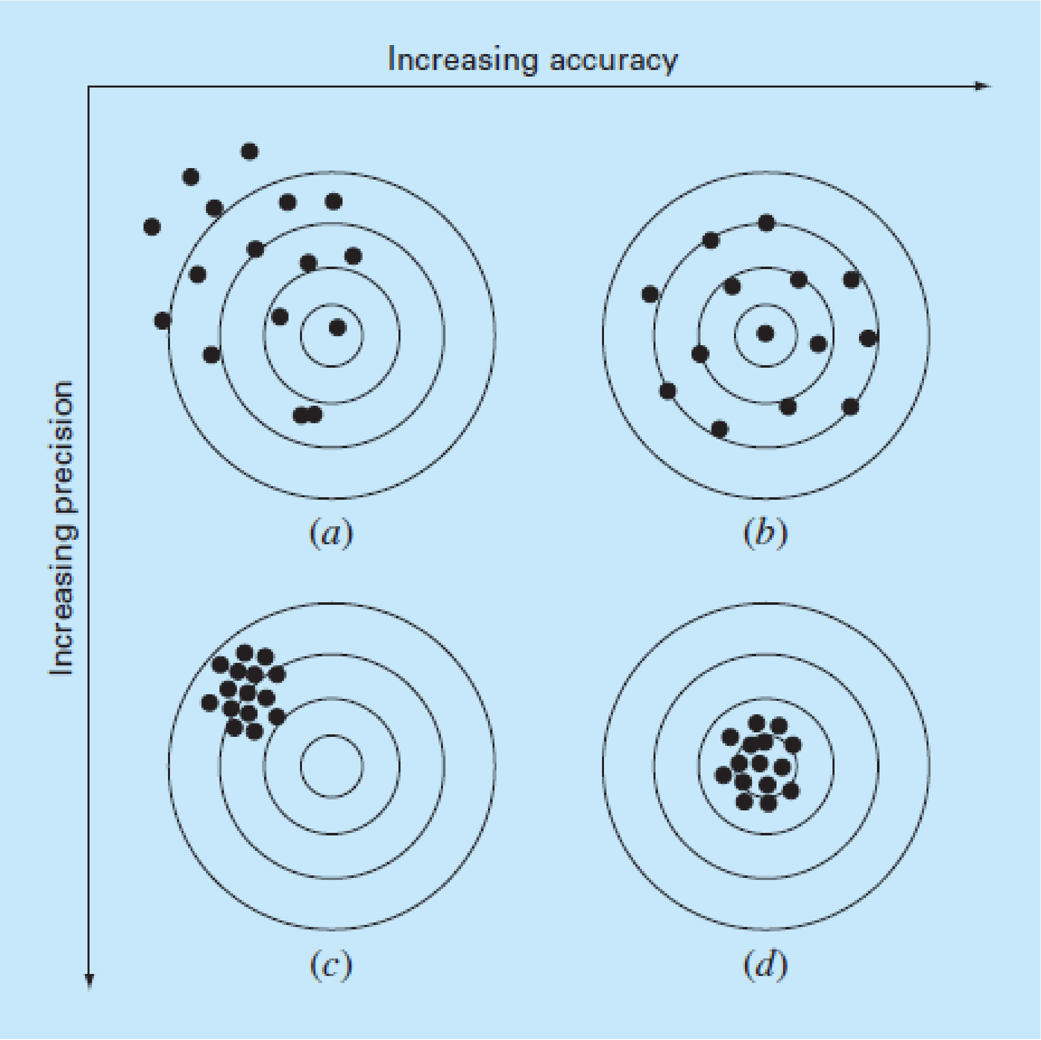
Contoh : 1.20 x 3.9 = 4.7

3 a.p 2 a.p 2 a.p

Akurasi dan Presisi

- **Akurasi** : seberapa dekat hasil perhitungan dengan hasil sebenarnya (hasil teoritis)
- **Presisi** : seberapa dekat hasil pengukuran antar data

Akurasi dan Presisi



Error

- **Rounding error**
- Truncation error

Definisi Error

Misalkan, x = nilai sebenarnya

y = nilai hasil pengukuran

Error absolut = $x - y$

Error relatif = $\frac{x-y}{x}$

Error biasanya akan bermakna jika dibandingkan (relatif) terhadap yang lain

Definisi Error

$$True\ value\ =\ approximation\ +\ error$$

$$E_t\ (true\ error) = true\ value\ - approximation$$

$$True\ fractional\ relative\ error = \frac{true\ error}{true\ value}$$

$$true\ percent\ relative\ error, \varepsilon_t = \frac{true\ error}{true\ value} x\ 100\ \%$$

Contoh : Buku Chapra, example 3.1

Definisi Error

Dalam metode numerik, true value hanya akan diketahui jika kita menyelesaikan fungsi-fungsi sederhana. Dalam aplikasi real, bisanya kita tidak mengetahui nilai true value di awal pengukuran, sehingga

$$\varepsilon_a = \frac{approximate\ error}{approximation}\ x\ 100\ \%$$

Perlu dilakukan pendekatan iteratif

$$\varepsilon_a = \frac{current\ approximation\ - previous\ approximation}{current\ approximation}\ x\ 100\ \%$$

Hasil bisa + atau -

Definisi Error

- Jika aproksimasi lebih besar daripada true value → error negatif
- Jika aproksimasi lebih kecil daripada true value → error positif
- Iterasi dilakukan sampai $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
- Contoh : Buku Chapra, Example 3.2

Sumber Error

- Error pemodelan
- Error aproksimasi
- Error iterasi
- Round-off error

Round-off Error

Representasi Bilangan

Sistem Bilangan

- Merupakan konvensi untuk merepresentasikan suatu kuantitas
- Menggunakan kombinasi digit, dengan lokasi dari setiap digit merupakan magnitudo bilangan tersebut

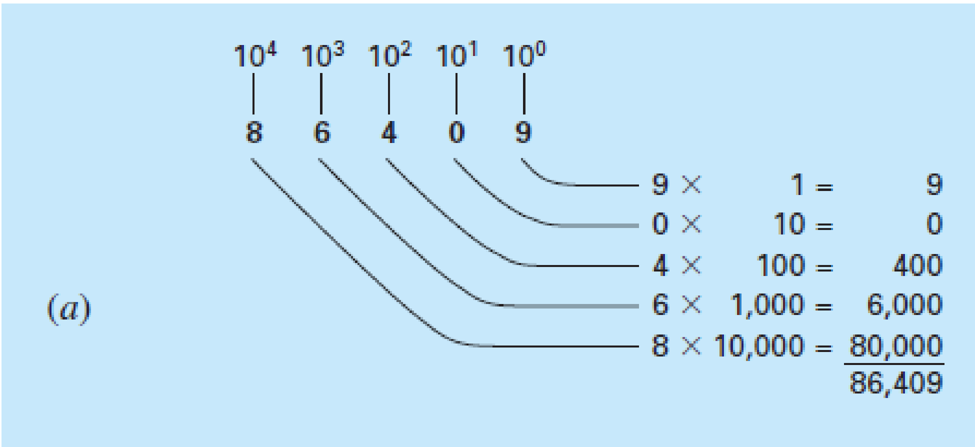
a**. Desimal, base-10**

- Digunakan oleh manusia, karena manusia memiliki 10 jari
- Menggunakan 10 digit : 0,1,2,…,9
- Contoh 19 = $1 \,.\, 10^1 + 4 \,.\, 10^0$

b. Binary, base-2

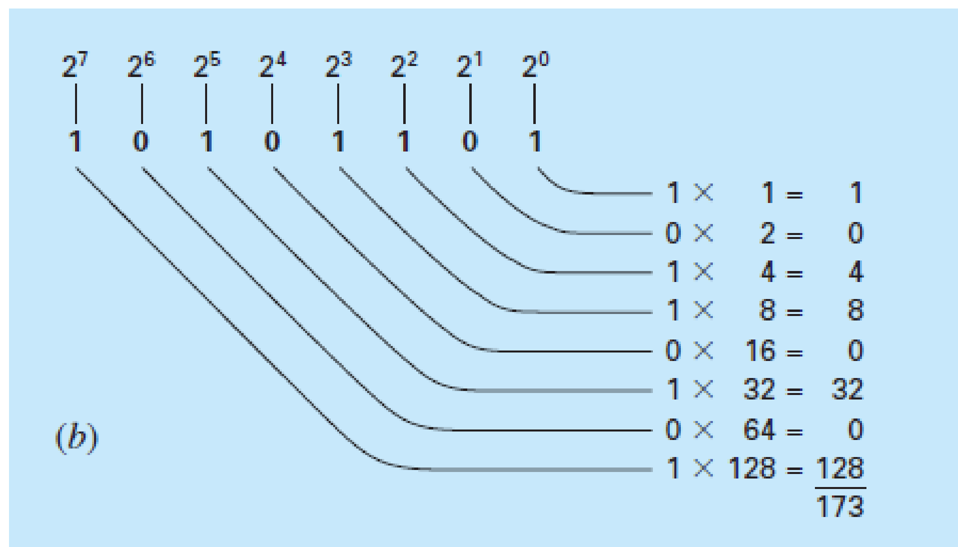
- Digunakan oleh komputer (primary logic unit dari komputer 1/0)
- Contoh : 1101 = $1 \,.\, 2^3 + 1.\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 1.\, 2^0 = 14$

Representasi Bilangan



Sistem desimal

Sistem binary



Representasi Bilangan

Representasi Bilangan pada Komputer

- Bit
- Words
- Integer
- Floating points

Representasi Bilangan

Bit

- Merupakan unit basis untuk mengolah informasi di komputer
- Hanya ada 2 nilai : 1 dan 0

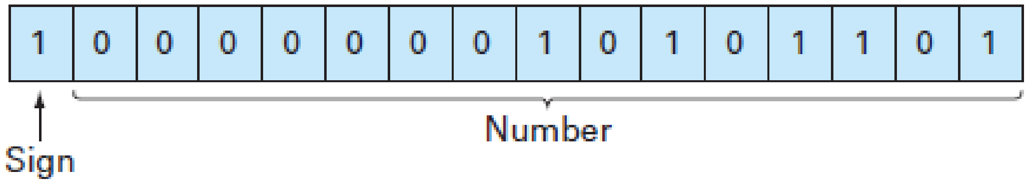
Words

- Kelompok dengan ukuran bit tetap yang diatur oleh sistem
- Jumlah bit dalam words merupakan karakteristik yang cukup penting dalam arsitektur komputer
- Contoh : komputer 32 bit atau 64 bit

Representasi Bilangan

Integer

- Untuk tanda bit pertama, bit 0 = positif, 1 = negatif
- 00000000 merepresentasikan nol
- 10000000 untuk merepresentasikan bilangan negatif tambahan
- Range tergantung jumlah bit
- Contoh 8 bit integer, range -128 sampai 127



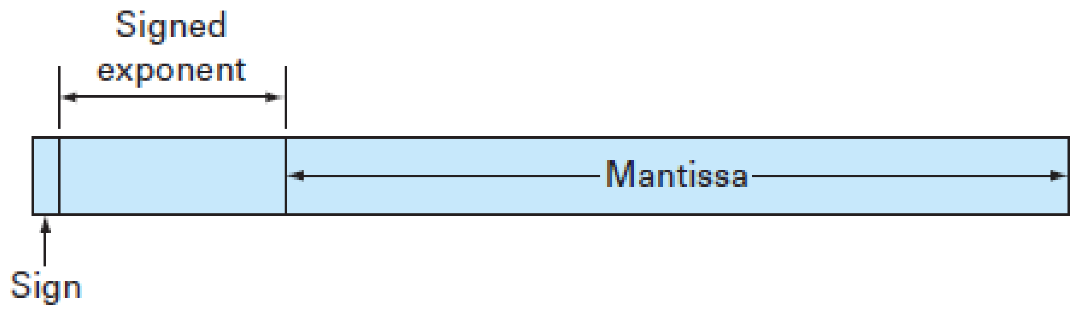
Contoh 16 bit integer

Representasi Bilangan

Floating-point

- Merepresentasikan bilangan x sebagai $\boldsymbol{x = m.b^e}$
- m = mantissa
- b = basis bilangan yang digunakan
- e = eksponen
- 156.78 = 0.15678 x 10^3 pada floating point basis 10
- Contoh : Buku Chapra, example 3.5

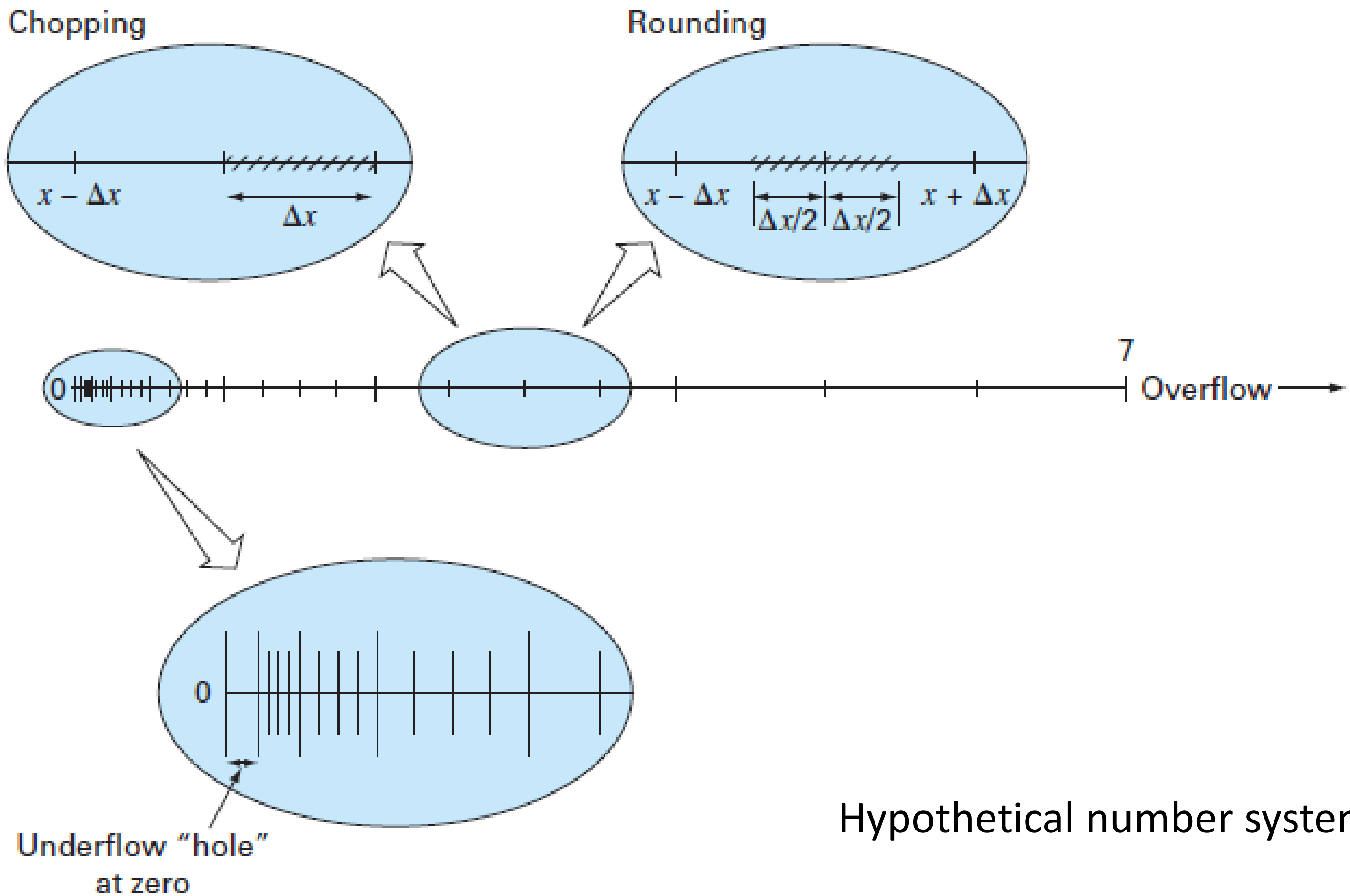
$$\frac{1}{b} \leq m < 1$$



Round-off Error

- Bilangan seperti π atau e tidak bisa diekspresikan dengan bilangan yang tepat
- Komputer menggunakan representasi basis 2 sehingga tidak dapat merepresentasikan bilangan basis 10 dengan tepat
- Bisangan bilangan fraksi direpresentasikan dengan *floating point*

Round-off Error



Hypothetical number system

Round-off Error

$\pi = 3.14159265358$ disimpan dalam sistem basis 10 dengan 7 angka penting

Chopping

$\pi = 3.141592$ chopping error $\varepsilon_t = 0.00000065$

Rounded

$\pi = 3.141593$ dengan $\varepsilon_t = 0.00000035$

Manipulasi Aritmetik pada Bilangan di Komputer

Operasi aritmetik berpengaruh terhadap round-off error

- **Perkalian dan pembagian**

Mantissa dikalikan, eksponen ditambahkan (x) atau dikurangkan (:)

Contoh

$$0.1363 \cdot 10^3 \times 0.6423 \cdot 10^{-1} = 0.08754549 \cdot 10^2$$

$$0.08754549 \cdot 10^2 \rightarrow 0.8754549 \cdot 10^1 \xrightarrow[\text{chopped}]{} 0.8754 \cdot 10^1$$

Manipulasi Aritmetik pada Bilangan di Komputer

- **Penjumlahan dan Pengurangan**

Bilangan dengan eksponen lebih kecil dimodifikasi sehingga eksponennya sama

Contoh

$$0.4381 \cdot 10^{-1} \rightarrow 0.004381 \cdot 10^{1}$$

$$\begin{array}{r} 0.1557 \quad \cdot 10^{1} \\ 0.004381 \cdot 10^{1} \\ \hline 0.160081 \cdot 10^{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.3641 \cdot 10^{2} \\ -0.2686 \cdot 10^{2} \\ \hline 0.0955 \cdot 10^{2} \end{array}$$

$\downarrow$

Dinormalisasi menjadi 0.9550 . 10^{-1}

Latihan

Buku Chapra, Problems Chapter 3

Nomor 1, 6, 8