

西南交通大学
本科毕业设计（论文）

多边形区域上的 Bézier 曲面的研究
Researches on Bézier Surfaces in
Polygonal Domains

年 级: 2017 级
学 号: 2017115364
姓 名: 李劲
专 业: 数学与应用数学
指导老师: 余国朱、陈发来(校外)

二零二一年五月

西南交通大学

本科毕业设计（论文）学术诚信声明

本人郑重声明：所呈交的毕业设计(论文)，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日期： 年 月 日

西南交通大学
本科毕业设计（论文）版权使用授权书

本毕业设计（论文）作者同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权西南交通大学可以将本毕业设计（论文）的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本毕业设计（论文）。

保密，在____年解密后适用本授权书。

本论文属于

不保密。

(请在以上方框内打“√”)

作者签名：

指导教师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

西南交通大学本科毕业设计(论文)

院 系 数学学院 专 业 数学与应用数学
年 级 2017 级 姓 名 李劲
题 目 多边形区域上的 Bézier 曲面的研究

指导教师

评 语 论文选题属于计算机辅助几何设计研究领域，其研究在计算机图形学、几何造型等方面具有理论意义。该生在毕业课题的研究过程中，大量查阅相关中英文资料，能够较好地运用所学知识解决课题中遇到的实际问题，研究问题比较深入。论文通过对已有方法总结对比和计算机实验，完成对五种常见多边形域上 Bézier 曲面的总结，并探讨了三种不同广义面积坐标的选取对 GB 面片的影响。这些成果对曲面变形的研究具有理论价值。

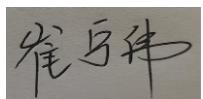
论文反映作者对本专业基础理论和课题方面的知识掌握深入、牢固，具备了较强的分析问题和解决问题的能力。论文条理清楚、图表规范、数据可信，基本观点和过程没有错误。

本人认为论文达到了本科毕业论文的要求，同意该生参加论文答辩。

指导教师 _____ (签章)

评 阅 人

评 语 该论文研究多边形区域上的 Bézier 曲面，是非常具有理论意义的一个选题。该生的毕业论文通过对已有方法总结对比和计算机实验，总结归纳了已有的多边形域上 Bézier 曲面的构造方法，并且探讨了三种不同广义面积坐标的选取对 GB 面片的影响。论文的行文过程清晰流畅、能反映作者良好的数学基础、计算机操作和应用能力，具备了较强的分析问题和解决问题的能力。论文逻辑清晰、条理分明、图表的使用规范、结论正确，是一篇合格的毕业论文。



评 阅 人 _____ (签章)

成 绩 _____

答辩委员会主任 _____ (签章)

年 月 日

毕业设计（论文）任务书

班 级 数学 2017-01 班 学生姓名 李劲 学号 2017115364

发题日期：2020 年 11 月 24 日 完成日期：2021 年 5 月 24 日

题 目 多边形区域上的 Bézier 曲面的研究

1、本论文的目的、意义 培养学生调研资料、自学曲面设计知识，包括基本的计算几何基础知识，传统 Bézier 曲线曲面的性质及相关算法等。同时培养学生进行初步科学研究的能力，包括文献查找、文献阅读、论文书写和归纳总结、科研探索以及使用计算机软件解决问题的能力。

2、学生应完成的任务

(1) 调研并自学广义重心坐标的知识；

(2) 调研学习多边形区域上 Bézier 曲面的知识；

(3) 结合以上两条探讨不同 GBC 选取对 GB 面片的影响。

3、本设计（论文）与本专业的培养目标达成度如何？（如在知识结构、能力结构、素质结构等方面有哪些有效的训练。）

该项目属于计算几何研究方向，需用到数值分析、几何造型、C 语言程序等基础知识，在知识结构、能力结构及素质结构等方面与本专业培养目标有较高的达成度。

4、本设计（论文）各部分内容及时间分配：（共 16 周）

第一部分 查阅书籍，了解 Bezier 曲线、曲面等基础知识 (3 周)

第二部分 了解曲面升阶、de Casteljau、blossom 等有关算法设计 (1 周)

第三部分 查阅文献，了解重心坐标及广义重心坐标等常见形式 (4 周)

第四部分 查阅文献，了解常见的多边形区域构造 Bezier 曲面的方法 (4 周)

第五部分 探讨不同 GBC 选取对 GB 面片的影响，完成论文 (5 周)

评阅及答辩 _____ (1 周)

备 注 _____

指导教师: 余国朱、陈发来(校外) 2020 年 11 月 24 日

审 批 人: _____ 2020 年 12 月 10 日

摘要

Bézier 曲面在计算机图形学等很多领域有着广泛应用,而传统 Bézier 曲面只能定义在矩形域和三角形域上,如何在平面多边形域上构造新的 Bézier 曲面一直以来都得到了许多研究者的关注,也产生了大量丰富的成果。本文选取其中应用比较多的五种 Bézier 曲面做系统的方法总结,并简单阐述其各自的优缺点,同时探讨了不同广义重心坐标的选取对 GB 面片的影响。

本文先是总结了有关计算几何的基础知识,包括 Bernstein 基函数和两种传统的 Bézier 曲面等,并介绍了三种常见的 Wachspress 坐标、MeanValue 坐标和 Harmonic 坐标。然后查阅相关文献了解多边形域上构造了 Bézier 曲面的有关方法,并选取其中五种进行方法总结,借助 Matlab R2016b 软件完成了五种曲面的绘制。最后从中心控制点的移动、等高线和高斯曲率三个角度探讨了不同广义重心坐标选取对 GB 面片的影响。

通过总结五种 Bézier 曲面构造方法,我们发现在多边形域上构造 Bézier 曲面主要关心四个问题,分别为域多边形形状、定义域的参数化方法、控制网格划分和基函数选取,若能找到合适的解决该四个问题的办法,则可以构造出新的多边形域上的 Bézier 曲面。我们考虑三种不同五边形形状上的 5 次 GB 面片,通过实验发现选用 Mean Value 坐标的 GB 面片受中心控制点的影响更大,且在五边形中心和各顶点的连线处会表现出不同程度的“山脊”或“山谷”现象,选用 Harmonic 坐标的 GB 面片也有类似现象,但不如 Mean Value 坐标显著,而选用 Wachspress 坐标的 GB 面片则并无明显该现象。选用 Wachspress 坐标的 GB 面片,在中心点附近的高斯曲率受中心控制点的位置影响更大,而选用 Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标的 GB 面片的高斯曲率分布有一定程度的相似性。

关键词: Bézier 曲面; GB 面片; 广义重心坐标; 中心控制点

Abstract

Bézier surfaces are widely used in many fields such as computer graphic, but traditional Bézier surfaces can only be defined on rectangular and triangular domains. How to construct new Bézier surfaces on planar polygonal domains has always attracted the attention of many researchers and has produced a lot of results. This article summarizes five kinds of Bézier surfaces among them, and their advantages and disadvantages are briefly explained, respectively. At the same time, the influence of different Generalized Barycentric Coordinates on the GB patches is discussed.

This article first summarizes the basic knowledge about computational geometry, including Bernstein basis functions and two traditional Bézier surfaces, and introduces Wachspress coordinates, Mean Value coordinates and Harmonic coordinates. Then we summarize five of the methods of constructing the Bézier surface on the polygonal domain by consulting related literature. The drawing of the five surfaces was completed by Matlab R2016b. Finally, the influence of the selection of different Generalized Barycentric Coordinates on the GB patches is discussed from three perspectives: the movement of the central control point, the contour line and the Gaussian curvature.

By summarizing the five Bézier surface construction methods, we find that the construction of Bézier surfaces on the polygonal domain is mainly concerned with four issues, namely the shape of the domain polygon, the parameterization method of the domain, the control of meshing and the selection of basis functions. If we can find a suitable solution to these four problems, the new Bézier surface on polygonal domain will be constructed. We consider five-sided quintic GB patches on three different pentagonal domain, and find that the GB patches with Mean Value coordinates are more affected by the central control point compared with the other two coordinates, and it is at the line between the center of the pentagon and the vertices, it will show different degrees of “ridge” or “valley” phenomenon. The GB patches with Harmonic coordinates have a similar phenomenon, but it is not as significant as the Mean Value coordinates, while the GB patches with Wachspress coordinates do not have this obvious phenomenon. The Gaussian curvature near the center point of the GB patches with Wachspress coordinates is more affected by the position of the central control point, while the GB patches with Mean Value coordinates and Harmonic coordinates have a certain degree of similarity in the Gaussian curvature distribution.

Key words: Bézier surfaces; GB patches; GBC; central control point

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 背景与意义.....	1
1.2 论文所做工作及章节安排.....	3
第 2 章 预备知识	4
2.1 符号说明.....	4
2.2 基本定义.....	5
2.3 Bernstein 基函数	6
2.3.1 基本形式.....	6
2.3.2 张量积型 Bernstein 基函数	7
2.3.3 d 次二元 Bernstein 基函数	8
2.4 Bézier 曲线	9
2.4.1 Bézier 曲线的定义及性质	9
2.4.2 De Casteljau 算法	10
2.5 传统 Bézier 曲面	12
2.5.1 矩形域上的张量积型 Bézier 曲面	12
2.5.2 三角域上的 Bézier 曲面	13
2.6 广义重心坐标.....	14
2.6.1 Wachspress 坐标.....	15
2.6.2 Mean Value 坐标	16
2.6.3 Harmonic 坐标.....	17
第 3 章 Bézier 曲面构造及方法总结	19
3.1 S 面片	19
3.2 Toric 面片	21
3.3 Base point 方法.....	23
3.4 Zheng 等人的方法	25
3.5 GB 面片	28
3.6 方法总结.....	30

第 4 章 GBC 选取对 GB 面片的影响.....	32
4.1 GB 面片的主要性质	33
4.2 中心控制点的移动.....	34
4.3 等高线.....	36
4.4 高斯曲率图.....	39
结论	43
致谢	45
参考文献	46
附录 1 有关数值方法	48
附录 2 部分 Matlab 代码	52

第 1 章 绪论

1.1 背景与意义

Weierstrass 利用 Bernstein 多项式证明了闭区间上的连续函数都可以用多项式函数来逼近，到 1959 年，De Casteljau 在 Bernstein 多项式的基础上，提出了生成(Bézier)曲线的 De Casteljau 算法(见 2.4.2 节)，大大减少了计算曲线上每个点的复杂度，且具有直观的几何性，表现为几何作图法(见图 2-5)。1962 年，法国工程师 Pierre Bézier 将该曲线应用于汽车车体的工业设计，引起巨大反响，人们称为 Bézier 曲线。现如今，Bézier 曲线是其它领域的基本组成部分，如计算机图形学的图像造型等，且在许多位图软件中都得到应用。Bézier 曲线是事先给定控制点 $V_i, i = 0, \dots, d$ ，再与 Bernstein 基函数 $B_i^d(t)$ 加权求和得到。事实上，Bernstein 基函数同传统的多项式空间的基底 $t^i, i = 0, \dots, d$ 相比，其具有很多良好的性质(见 2.3.1 节)，也正是因为这些性质，保证了 Bézier 曲线的仿射不变性、凸包性、升阶公式、分割算法等多项特征(见 2.4 节)。

将一维的 Bézier 曲线推广至二维的 Bézier 曲面，一个很自然的想法是做张量积，考虑两个 Bernstein 基函数的乘积形式 $B_i^{d_1}(u)B_j^{d_2}(v)$ ，即张量积型 Bernstein 基函数(见 2.3.2 节)，再类似于一维 Bézier 曲线的定义，与给定的控制点加权求和即可得到张量积型的 Bézier 曲面，同样的可以证明张量积型 Bézier 曲面也有仿射不变性等众多性质(见 2.5.1 节)。张量积型 Bézier 曲面适用于规则的 $[a,b] \times [c,d]$ 矩形域，其定义域的表示可以采用简单的二维笛卡尔坐标， $u \in [a,b], v \in [c,d]$ ，且 u 与 v 是相互独立的，这就使得张量积型 Bernstein 基函数可以应用。而对于三角形域 T 而言，若仍选择笛卡尔坐标，那么其两个坐标之间存在约束条件，最终的曲面表示存在一定的困难。事实上，三角形域上的 Bézier 曲面(见 2.5.2 节)采用的是二维重心坐标，亦即面积坐标(见 2.2 节)，对于三角域 T 内部的每一个点 x ，其可以写成 T 的三个顶点 v_1, v_2, v_3 的线性表示 $x = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3$ ，其系数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 即为 x 关于 T 的重心坐标，可以发现该坐标之间只存在着 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$ 这一约束；另一方面，将一元的 Bernstein 基函数进行推广，得到 d 次二元 Bernstein 基函数 $B_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (见 2.3.3 节)，同样的与给定的控制点加权求和即得到最终的三角形域上的 Bézier 曲面。

除此之外，对于不同的需求，各个控制点的重要程度可能不一样，因此可以在控制点与 Bernstein 基函数加权求和的同时再乘上相应控制点的权因子，最终得到的曲面(曲线)，称之为有理 Bézier 曲面(曲线)。

进一步，对于不规则的四边形域或一般的 n 边形域，其上构造 Bézier 曲面变

得复杂。1988 年, DeRose^[1]对三角形域上的 Bézier 曲面进行推广, 将二维面积坐标推广到 n 维面积坐标, 即 Wachspress 坐标(见 2.6.1 节), 并将 d 次二元 Bernstein 基函数推广到 d 次 n 元 Bernstein 基函数, 从而在单纯形域(见 2.2 节)上构造了有理 Bézier 曲面。1989 年, Loop and DeRose^[2]考虑一般 m 维空间中的凸 n 面体(当 $n=m+1$ 时即为单纯形), 其先将凸 n 面体保边嵌入(见 2.2 节)到 $n-1$ 维空间中的单纯形, 再与单纯形域的有理 Bézier 曲面复合得到最终面片, 称之为 S 面片(见 3.1 节)。初始定义的 S 面片的局限性主要体现在两方面, 一方面是寻找这样的保边嵌入并非一件很直观的事情, 针对不同的边数、不同的形状, 其保边嵌入的形式也不一样, Loop 等人在[2]中也并未详细讨论这一问题; 另一方面, 其只适用于凸多面体的情形。事实上, 凸性条件是由保边嵌入的定义约束的, 而用现有的广义重心坐标(Generalized Barycentric Coordinates, 简记为 GBC)^[3-6]替代保边嵌入就能使问题得到简化。此时 S 面片的适用条件即为广义重心坐标的适用条件, 如采用 Mean Value 坐标^[4-6](见 2.6.2 节)和 Harmonic 坐标^[3](见 2.6.3 节)作为 S 面片的 GBC, 就可以定义在非凸多边形域上, 这就有了 S 面片的另一种定义方式, 其解决了一般多面体构造 Bézier 面片的问题。S 面片的控制点数由边数 n 和次数 d 决定(当 $n=3$, GBC 选用 Wachspress 坐标时即为三角域上的 d 次 Bézier 曲面)。我们用 $\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 表示控制点的编号, 其中 λ_i 为非负整数, 用 V_λ 表示 λ 对应的控制点, 那么控制点 V_λ 的数量就是所有使得 $|\lambda|=d$ 的 λ 的个数。例如, 当 $n=4, d=2$ 时, 对应的 λ 有 $(2,0,0,0), (0,2,0,0), (0,0,2,0), (0,0,0,2), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)$ 10 种, 所以四边 2 次 S 面片共有 10 个控制点。S 面片的一大缺点是控制点数量随着次数和边数的增加而显著上升, 2015 年, Smith and Schaefer^[7]给了一种 S 面片升阶时的控制点选择的方法, 一定程度上降低了由 S 面片升阶带来的大幅度上升的控制点数量, 但对于原 S 面片的控制点数量问题仍未被很好地解决。

2002 年, Krasauskas^[8]利用代数几何里 toric 簇理论构造了格多边形上的 toric 面片(见 3.2 节), 其面片解析式类似于有理 S 面片。不同的是, 其控制点数量取决于多边形内部的格点(坐标均为整数的点)数, 与边数和次数无关, 其定义域的参数表示也并非广义重心坐标, 而是自定义的线性算子 h_i , 其基函数也不是通常的 Bernstein 基函数, 而是采用类似形式由 h_i 构造而来。2015 年, Sun and Zhu^[9]给出了 toric 面片的 G1 连接条件。除此之外, Warren^[10] 以三角域 T 上有理 Bézier 曲面为基础, 通过令部分控制点权因子为 0, 称之为 Base point, 经过一系列计算与整理, 非常巧妙地得出了一种构造 3 至 6 边面片的方法(见 3.3 节), 但该方法的局限性在于只能构造 3 至 6 边的 Bézier 面片。

除了考虑域多边形的形状外, 也有不少研究工作者从控制网格入手^[11-14]。1983 年, Sabin^[12]给出了 3、5、6 边 2 次面片的控制网格的“轮盘式”图案(见图 3-7), 到 1984 年, Hosaka and Kimura^[11]进一步给出了 3、5、6 边 3 次面片的控

制网格图案(见图 3-8)及其相应的面片解析式。Zheng and Ball^[14]在此基础上给出了非四边形上的任意次数面片的构造方法(见 3.4 节), 其通过事先规定面片的一般方程, 及其需满足的有关性质, 如仿射不变性、插值性等, 从而对系数进行求解得到最终方程。该方法提供了一种构造多边形域上 Bézier 曲面的新思路, 但其没有统一的面片解析式, 针对不同的次数和边数均需进行相应求解。2016 年, Várady, et al.^[13]以“轮盘式”图案为控制网格, 并引入中心控制点的概念, 给出了任意多边形上任意次数的广义 Bézier 曲面亦即 GB 面片(见 3.5 节)的统一解析式, 其定义域的参数表达经过两次复合映射而来, 先是将二维笛卡尔坐标映射到广义重心坐标, 再进一步映射到自定义的局部参数 s_i, h_i , 这样即可沿用张量积型 Bernstein 基函数。对每个控制点分配权重, 不同的是, 各个控制点的权重并不是一成不变的, 其是一个关于局部参数、控制点层数的函数, 从而保证了 GB 面片在边界上的性质。相较于 S 面片, GB 面片的一大优势是控制点数量大大减少, 例如, 五边 5 次的 S 面片需要 165 个控制点, 而 GB 面片仅需 46 个控制点。GB 面片虽然解析式较为复杂, 但其性质优越、应用性强, 近几年得到了许多研究者的关注^[15-18]。

另一方面, 广义重心坐标作为多边形域上 Bézier 曲面构造中重要的定义域参数化工具, 其不同的选取对最终的 Bézier 曲面会有什么样的影响, 这对于最终多边形域上的 Bézier 曲面的应用包括模型设计等是非常有意义的, 因此在论文的最后一章我们将以五边 5 次 GB 面片为例探讨三种不同广义重心坐标, 包括 Wachspress 坐标、Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标对 GB 面片的影响。

1.2 论文所做工作及章节安排

论文工作整体可分为 3 个阶段, 第一阶段, 归纳总结了有关计算几何、曲面设计的基础知识; 第二阶段, 查阅有关文献, 了解了多边形域上构造 Bézier 曲面的方法, 并对其中五种方法做了系统总结; 第三阶段, 以 GB 面片为例, 探讨了不同 GBC 选取对 GB 面片的影响。

本论文章节安排如下: 在第 2 章, 我们对论文中涉及到的部分重要符号做了系统说明, 以及整理了有关 Bernstein 基函数及推广形式、传统 Bézier 曲线曲面及相关性质、三种常见的广义重心坐标等基础知识; 在第 3 章, 我们总结了五种重要的多边形域构造 Bézier 曲面方法包括 S 面片、Toric 面片、Base point 方法、Zheng 等人的方法和 GB 面片, 并进行方法总结, 以及借助 Matlab 软件对五种面片具体实现; 在第 4 章, 我们以五边 5 次 GB 面片为例, 从中心控制点的移动、等高线、高斯曲率图三方面探讨了 Wachspress 坐标、Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标的选取对 GB 面片的影响; 最后, 我们对论文做了总结, 指出了文中的不足之处并阐述了未来的进一步规划。

第 2 章 预备知识

2.1 符号说明

Δ	单纯形(在第 4 章中也表示增量)
d	Bézier 曲线、各 Bézier 曲面的次数
S	Bézier 曲线、曲面
$B_i^d(t), i = 0, 1, \dots, d$	d 次 Bernstein 基函数
$A(x, v_i, v_j)$	按逆时针顶点顺序 x, v_i, v_j 围成的三角形有向面积
T	三角域
P	无特殊说明, 指平面上一多边形
∂P	多边形 P 的边界
$Int(P)$	多边形 P 的内部
\bar{P}	多边形 P 的凸包
n	平面多边形的边数
v_1, v_2, \dots, v_n	多边形按逆时针排列的顶点
l_1, l_2, \dots, l_n	多边形按逆时针排列的各边, l_1 为 v_1, v_2 所在的边
$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$	广义重心坐标
w_1, w_2, \dots, w_n	齐次坐标函数
V	控制点
ω	控制点权重
λ	控制点索引, 各分量均为正整数
e_1, e_2, \dots, e_n	单位向量
$ \cdot $	向量的模长
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	向量的内积
$[]$	向下取整
S^d	特指 d 次 GB 面片
s_i, h_i	GB 面片的局部参数(h_i 在 Toric 面片中为线性算子)
C^∞	全体无穷可微函数构成的集合
δ_{ij}	Kronecker 符号
∇^2	Laplace 算子
K	高斯曲率

在本文中, 所有角标采用循环方法, 如控制点 V_{-1} 表示 V_n , 控制点 V_{n+1} 表示 V_0 。

2.2 基本定义

1. 凸包

定义 2.1 D 为一线性空间中的子集, 称 D 中任意有限个点的凸组合构成的全体为集合 D 的凸包。

定义 2.2 D 为一线性空间中的子集, 称所有包含 D 的凸集的交集为集合 D 的凸包。

可证明上述两种定义方式等价。我们把 D 的凸包记作 \bar{D} 。

2. 单纯形

考虑一 n 维线性空间, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ 是其中的元素, 且 $\{\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_0, \dots, \alpha_n - \alpha_0\}$ 线性无关, 则称点集

$$\Delta = \{p = b_0\alpha_0 + b_1\alpha_1 + \dots + b_n\alpha_n \mid b_0 + b_1 + \dots + b_n = 1\} \quad (2-1)$$

为该空间上的一单纯形。例如, 线段、三角形、四面体分别为 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 的单纯形。

3. 重心坐标

先考虑简单的一维情形, 任取空间中两点 v_1 和 v_2 , 对于它们所在直线上的任一点 v 可由其与 v_1 和 v_2 的相对位置决定。令

$$\varphi_1 = \frac{|\overrightarrow{vv_2}|}{|\overrightarrow{v_1v_2}|}, \varphi_2 = \frac{|\overrightarrow{v_1v}|}{|\overrightarrow{v_1v_2}|} \quad (2-2)$$

则称 (φ_1, φ_2) 为点 v 关于 v_1 和 v_2 的一维重心坐标, 可以发现其满足 $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ 。

类似地, 在二维情形下, 给定平面上三角形 T , 其三个顶点逆时针排列为 v_1, v_2, v_3 , 任取平面上一点 v , 令 $A = A(v_1, v_2, v_3), A_1 = A(v, v_2, v_3), A_2 = A(v, v_3, v_1), A_3 = A(v, v_1, v_2)$, 如图 2-1 所示。

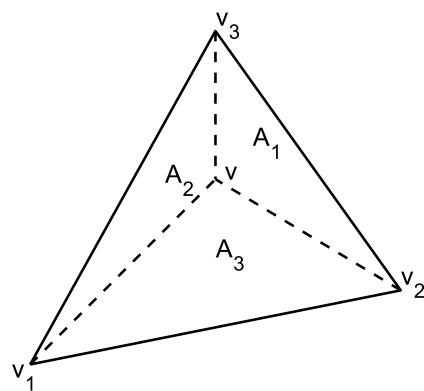


图 2-1 面积坐标示意图

定义

$$\varphi_i = \frac{A_i}{A}, i = 1, 2, 3 \quad (2-3)$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 称为点 x 关于 v_1, v_2, v_3 的二维重心坐标，亦即我们熟悉的面积坐标，且满足 $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$ 。可知，当 $0 \leq \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \leq 1$ 时， $v \in T$ 。例如，当点 x 为三角形 T 的重心时，其重心坐标 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 1/3$ 。

4. 保边嵌入^[2]

P 为凸 n 边形， Δ 为 n 维单纯形。若 $E: P \rightarrow \Delta$ ， $E \in C^\infty$ 且满足 P 的内部映射到 Δ 内部； P 的边界映射到 Δ 边界，则称 E 为保边嵌入。例如，我们考虑平面上一凸四边形 P ，逆时针排列顶点为 v_1, v_2, v_3, v_4 ， Δ 为三维空间中的一四面体，其顶点为 $v_1^+, v_2^+, v_3^+, v_4^+$ ， $\forall v \in P$ ，我们利用 3.5.1 节中介绍的 Wachspress 坐标得到 $v = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 + \varphi_3 v_3 + \varphi_4 v_4$ ，则令 $E(v) = \varphi_1 v_1^+ + \varphi_2 v_2^+ + \varphi_3 v_3^+ + \varphi_4 v_4^+$ ，此时 E 即为从凸四边形 P 到三维单纯形 Δ 的保边嵌入。

下面我们介绍重要的 Bernstein 基函数和 Bézier 曲线和两种传统的 Bézier 曲面，具体可参见文献[19]。

2.3 Bernstein 基函数

2.3.1 基本形式

Bernstein 基函数可以看做一元 d 次实多项式空间 \mathbb{P}_d 的一组基且其具有很好的性质，具体形式如下：

$$B_i^d(t) = \binom{d}{i} t^i (1-t)^{d-i}, \quad i = 0, 1, \dots, d \quad (2-4)$$

Weierstrass 在证明闭区间上连续函数的第一逼近定理时就利用了 Bernstein 多项式，后来其成为了 Bézier 曲线曲面的基函数。事实上，Bézier 曲线曲面的大部分性质是由 Bernstein 基函数保证的，因此我们介绍下当 $t \in [0,1]$ 时 Bernstein 基函数的主要性质：

(1) 非负性：

$$B_i^d(t) \geq 0 \quad (2-5)$$

(2) 单位分解性：

$$\sum_{i=0}^d B_i^d(t) = (t + (1-t))^d \equiv 1 \quad (2-6)$$

(3) 端点性质。在起点 $t=0$ 和终点 $t=1$ 处，分别只有一个 Bernstein 基函数取值为 1，其余取值为 0；

(4) 对称性： $B_i^d(t)$ 和 $B_{d-i}^d(t)$ 关于直线 $t=1/2$ 对称；

(5) 最值性： $B_i^d(t)$ 在 $t=i/d$ 处取得最大值；

(6) 导函数: 可由两个 $d-1$ 次 Bernstein 基函数组合;

$$\left(B_i^d(t)\right)' = d\left(B_{i-1}^{d-1}(t) - B_i^{d-1}(t)\right) \quad (2-7)$$

(7) 递推性:

$$\begin{cases} B_i^d(t) = (1-t)B_i^{d-1}(t) + tB_{i-1}^{d-1}(t) \\ B_i^d(t) = \frac{i+1}{d+1}B_{i+1}^{d+1}(t) + \left(1 - \frac{i}{d+1}\right)B_i^{d+1}(t) \end{cases} \quad i=0,1,\dots,d \quad (2-8)$$

其中, $B_{-1}^{d-1}(t) \equiv B_d^{d-1}(t) \equiv 0$;

(8) 积分等值性:

$$\int_0^1 B_i^d(t) dt = \frac{1}{d+1} \quad (2-9)$$

注: $\mathbb{P}_d = \text{span}\{B_0^d(t), B_1^d(t), \dots, B_d^d(t)\}$, 取实系数 $b_i = i/d$, 则 $t = \sum_{i=0}^d b_i B_i^d(t)$ 。

下图展示了 d 分别取值 1, 2, 3, 5 时的 0 到 1 区间上的 Bernstein 基函数

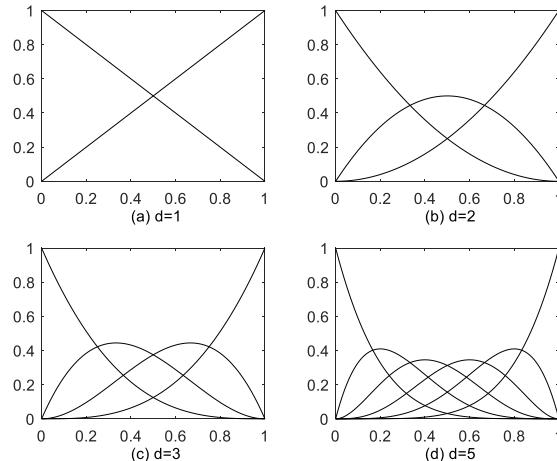


图 2-2 $d=1,2,3,5$ 时的 Bernstein 基函数

2.3.2 张量积型 Bernstein 基函数

考虑实二元多项式空间 \mathbb{P}_{d_1, d_2} , 其可由两个实一元多项式空间 \mathbb{P}_{d_1} 和 \mathbb{P}_{d_2} 的张量积得到, 即

$$\mathbb{P}_{d_1, d_2} = \text{span}\{u^i v^j, \quad i=0,1,\dots,d_1, \quad j=0,1,\dots,d_2\} \quad (2-10)$$

由此可以得到张量积型的二元 Bernstein 基函数

$$B_{i,j}^{d_1, d_2}(u, v) = B_i^{d_1}(u) B_j^{d_2}(v), \quad i=0,1,\dots,d_1, \quad j=0,1,\dots,d_2 \quad (2-11)$$

所以对于任意二元多项式 $f(u, v) \in \mathbb{P}_{d_1, d_2}$, 其可以表示为

$$f(u, v) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} a_{i,j} u^i v^j = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} b_{i,j} B_{i,j}^{d_1, d_2}(u, v) \quad (2-12)$$

2.3.3 d 次二元 Bernstein 基函数

考虑所有次数不超过 d 次的实二元多项式空间 \mathbb{P}_d^2

$$\mathbb{P}_d^2 = \text{span} \{ u^i v^j, i+j \leq d, i, j = 0, 1, \dots, d \} \quad (2-13)$$

令 $\tau = (u, v, w)$, 其中 $w = 1 - u - v$; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = d$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为非负整数, 定义 $\lambda! = \lambda_1! \lambda_2! \lambda_3!$; $\tau^\lambda = u^{\lambda_1} v^{\lambda_2} w^{\lambda_3}$ 。由此得到 $(d+1)(d+2)/2$ 个 d 次二元 Bernstein 基函数

$$B_\lambda^d(\tau) = B_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^d(u, v, w) = \frac{d!}{\lambda!} \tau^\lambda = \frac{d!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3!} u^{\lambda_1} v^{\lambda_2} w^{\lambda_3}, |\lambda| = d \quad (2-14)$$

对于给定三角域 T , 其上任意点对应顶点的重心坐标我们同样用记号 τ 表示, 即 $\tau = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, 为方便说明, 我们简记为 $\tau \in T$, 则三角域上的 d 次二元 Bernstein 基函数有如下性质:

(1) 非负性:

$$B_\lambda^d(\tau) \geq 0, \tau \in T \quad (2-15)$$

(2) 单位分解性:

$$\sum_{|\lambda|=d} B_\lambda^d(\tau) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)^d \equiv 1 \quad (2-16)$$

(3) 基底性质:

$$\mathbb{P}_d^2 = \text{span} \{ B_\lambda^d(\tau), |\lambda| = d \} \quad (2-17)$$

(4) 角点性质: 在三角形 T 的三个交点上, 分别只有一个基函数取值为 1, 其余基函数在该顶点取值为 0;

(5) 最值性: $B_\lambda^d(\tau)$ 在 $\tau = \lambda/d$ 处达到最大值;

(6) 递推性:

$$\begin{cases} B_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^d(\tau) = \varphi_1 B_{\lambda_1-1, \lambda_2, \lambda_3}^{d-1}(\tau) + \varphi_2 B_{\lambda_1, \lambda_2-1, \lambda_3}^{d-1}(\tau) + \varphi_3 B_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3-1}^{d-1}(\tau) \\ B_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^d(\tau) = \frac{\lambda_1+1}{d+1} B_{\lambda_1+1, \lambda_2, \lambda_3}^{d+1}(\tau) + \frac{\lambda_2+1}{d+1} B_{\lambda_1, \lambda_2+1, \lambda_3}^{d+1}(\tau) + \frac{\lambda_3+1}{d+1} B_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3+1}^{d+1}(\tau) \end{cases} \quad (2-18)$$

其中, 我们规定当 λ 的任何分量小于 0 时, $B_\lambda^d(\tau) = 0$;

(7) 积分等值性:

$$\int_T B_\lambda^d(\tau) ds = \frac{2A(v_1, v_2, v_3)}{(d+1)(d+2)} \quad (2-19)$$

其中, v_1, v_2, v_3 为三角形 T 的三个按逆时针排列的顶点。

2.4 Bézier 曲线

2.4.1 Bézier 曲线的定义及性质

定义 2.3 取 $d+1$ 个空间向量 $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^3 (i=0,1,\dots,d)$, 称

$$S(t) = \sum_{i=0}^d \mathbf{V}_i B_i^d(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2-20)$$

为一条 d 次 Bézier 曲线。 \mathbf{V}_i 称为控制点, 依次连接两相邻控制点 \mathbf{V}_i 得到的 d 边形称为该 Bézier 曲线的控制多边形。特别地, 当 $B_i^d(t)$ 的系数为实数 b_i 时, 其控制点可以看成 $\mathbf{V}_i = (i/d, b_i) (i=0,1,\dots,d)$ 。

下图中, 我们取控制点 $\mathbf{V}_0 = (0,0), \mathbf{V}_1 = (0.2,0.4), \mathbf{V}_2 = (0.4,0.6), \mathbf{V}_3 = (0.6,0.3), \mathbf{V}_4 = (0.8,0.5), \mathbf{V}_5 = (1,0.2)$, 实线为其对应的 5 次 Bézier 曲线和其对应的控制多边形, 当移动控制点 \mathbf{V}_2 至 $\mathbf{V}_2^* = (0.4,0.5)$ 时, 曲线发生变化, 得到一条新的 5 次 Bézier 曲线, 如图虚曲线所示, 虚折线为相应的控制多边形。

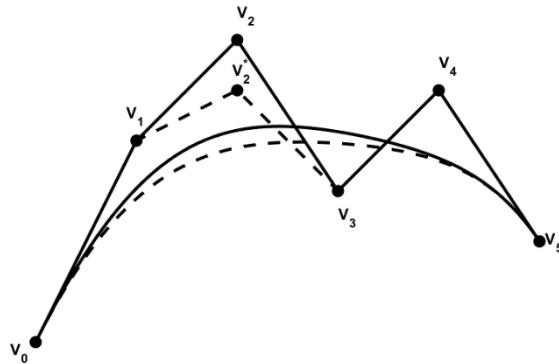


图 2-3 5 次 Bézier 曲线和移动控制点对曲线影响

我们列举 Bézier 曲线的几条重要性质:

- (1) 凸包性质: Bézier 曲线上各点 $S(t)$ 是控制点 $\mathbf{V}_i (i=0,1,\dots,d)$ 的凸组合, 即 Bézier 曲线落在控制多边形的凸包之中;
- (2) 导函数:

$$S'(t) = d \sum_{i=0}^{d-1} (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) B_i^{d-1}(t) \quad (2-21)$$

- (3) 端点性质:

$$\begin{aligned} S(0) &= \mathbf{V}_0, \quad S(1) = \mathbf{V}_d, \\ S'(0) &= d(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad S'(1) = d(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_{d-1}) \end{aligned} \quad (2-22)$$

这表明, Bézier 曲线插值于起点 \mathbf{V}_0 和终点 \mathbf{V}_d , 并与控制多边形起始两边 $\mathbf{V}_d - \mathbf{V}_{d-1}$, $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0$ 相切。如在图 2-3 中可以看到, Bézier 曲线经过 \mathbf{V}_0 和 \mathbf{V}_d , 且和控制多边形的起始两条边相切。

(4) 对称性质：若将控制点的次序反向，即令 $\mathbf{V}_i^* = \mathbf{V}_{d-i}$ ($i = 0, 1, \dots, d$)，则对应新的 Bézier 曲线 $S^*(t)$ 为

$$S^*(t) = \sum_{i=0}^d \mathbf{V}_i^* B_i^d(1-t) = S(1-t) \quad (2-23)$$

其表示为同一条但方向相反的 Bézier 曲线；

(5) 升阶性质：由 Bernstein 基函数的递推公式(2-8)，一条 d 次 Bézier 曲线形式上可看作一条 $d+1$ 次 Bézier 曲线。

$$S(t) = \sum_{i=0}^d \mathbf{V}_i B_i^d(t) = \sum_{i=0}^{d+1} \mathbf{V}_i^* B_i^{d+1}(t) \quad (2-24)$$

其中，

$$\mathbf{V}_i^* = \frac{i}{d+1} \mathbf{V}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{d+1}\right) \mathbf{V}_i, \quad i = 0, 1, \dots, d+1, \quad \mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_{d+1} = 0 \quad (2-25)$$

记 \mathbf{V} 、 $\mathbf{V}^{(1)}$ 分别为原控制点和升阶一次后得到的控制点按次序排列成的向量，则升阶过程可表示为

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{T}_{d+1} \mathbf{V} \quad (2-26)$$

其中，

$$\mathbf{T}_{d+1} = \frac{1}{d+1} \begin{pmatrix} d+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & d-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d+1 \end{pmatrix} \quad (2-27)$$

称为升阶算子。一般地，不断升阶到 $d+r$ 次得到的 Bézier 曲线，其控制点

$$\mathbf{V}^{(r)} = \mathbf{T}_{d+r} \cdots \mathbf{T}_{d+2} \mathbf{T}_{d+1} \mathbf{V} \quad (2-28)$$

可以证明，当 $r \rightarrow \infty$ 时，控制多边形 $\mathbf{V}^{(r)}$ 收敛到该 Bézier 曲线。

2.4.2 De Casteljau 算法

在计算 Bézier 曲线在某一具体参数处的值时，直接代入曲线定义式(2-20)进行计算显然可以，但随着次数 d 逐渐升高时，其求解过程变得逐渐复杂，且存在很多重复类似的计算。而利用 De Casteljau 算法就可以大大降低求解的复杂度。

由 Bernstein 基函数降阶公式(2-8)可得

$$S(t) = \sum_{i=0}^d \mathbf{V}_i B_i^d(t) = \sum_{i=0}^{d-1} ((1-t)\mathbf{V}_i + t\mathbf{V}_{i+1}) B_i^{d-1}(t) \quad (2-29)$$

进一步可以得如下 De Casteljau 算法，用于计算曲线在某一参数处的取值，

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i^0(t) \equiv \mathbf{V}_i^0 = \mathbf{V}_i, & i = 0, 1, \dots, d \\ \mathbf{V}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{V}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(t), & r = 1, 2, \dots, d, \quad i = 0, 1, \dots, d-r \end{cases} \quad (2-30)$$

于是，所求 $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0^d(t)$ 。下图展示了控制点的递推关系：

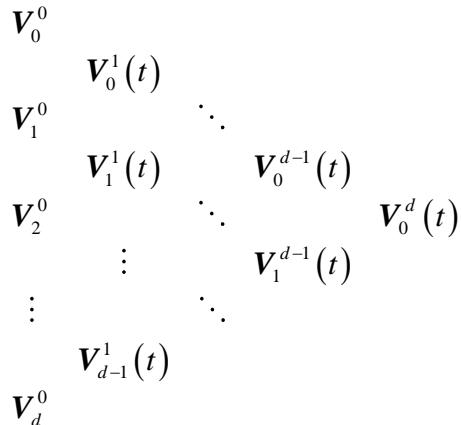


图 2-4 控制点的递推关系

可知，后阶控制点是前阶两相邻控制点按权重 $1-t$ 和 t 的组合，在几何上表现为在该两点的连线上，在图形上多次迭代下去，由此可以得到几何作图法。

如下例中，取控制点 $\mathbf{V}_0 = (0,0), \mathbf{V}_1 = (1/3, 0.6), \mathbf{V}_2 = (2/3, 0.3), \mathbf{V}_3 = (1, 0.5)$ ，得到一条 3 次 Bézier 曲线，求当 $t=1/3$ 时的曲线上对应的点。我们按照 $1/3$ 和 $2/3$ 的权重依次连接两相邻控制点，重复两次循环得到控制点 $\mathbf{V}_0^2(1/3)$ 和 $\mathbf{V}_1^2(1/3)$ ，对其再按照 $1/3$ 权重和 $2/3$ 权重加权得到最终点 $\mathbf{V}_0^3(1/3)$ ，亦即为原 3 次 Bézier 曲线上 $t=1/3$ 时对应的点，其实现代码见附录 2.1。

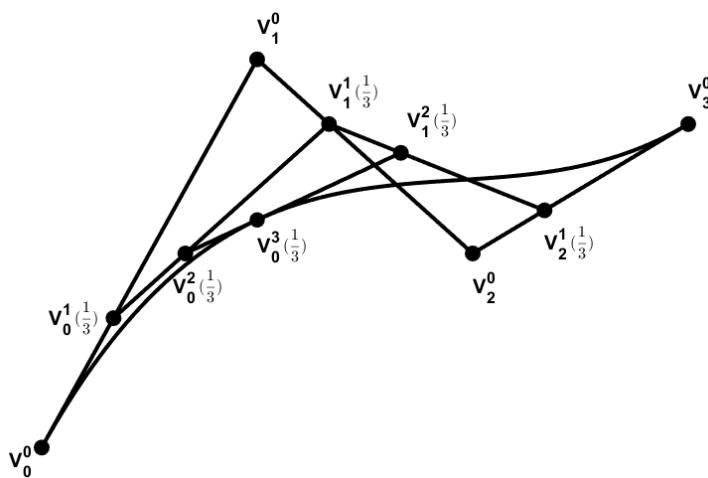


图 2-5 Bézier 曲线上的几何作图法

2.5 传统 Bézier 曲面

2.5.1 矩形域上的张量积型 Bézier 曲面

定义 2.4 给定 $(d_1+1)(d_2+1)$ 个向量 $\mathbf{V}_{i,j} \in \mathbb{R}^3 (i=0,1,\dots,d_1, j=0,1,\dots,d_2)$, 则曲面

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} \mathbf{V}_{i,j} B_{i,j}^{d_1, d_2}(u, v) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} \mathbf{V}_{i,j} B_i^{d_1}(u) B_j^{d_2}(v), \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1] \quad (2-31)$$

称为一个 $d_1 \times d_2$ 次 Bézier 曲面, $\mathbf{V}_{i,j}$ 称为控制点, 连接同行同列(索引)两个相邻的控制点所得的 $d_1 \times d_2$ 边折线网格称为控制网格。特别当系数为实数 $b_{i,j}$ 时, 其控制点可以看成 $\mathbf{V}_{i,j} = (i/d_1, j/d_2, b_{i,j}) (i=0,1,\dots,d_1, j=0,1,\dots,d_2)$ 。

例如我们选取控制点 $\mathbf{V}_{00} = (0,0,1), \mathbf{V}_{10} = (1,0,1.5), \mathbf{V}_{20} = (2,0,1), \mathbf{V}_{01} = (0,1,1.5), \mathbf{V}_{11} = (1,1,1.7), \mathbf{V}_{21} = (2,1,1.5), \mathbf{V}_{02} = (0,2,1), \mathbf{V}_{12} = (1,2,1.5), \mathbf{V}_{22} = (2,2,1)$, 得到 2×2 次张量积 Bézier 曲面, 如图 2-5 所示, 其中黑色圆点为控制点, 按照相应原则连接得到 2×2 边控制网格。

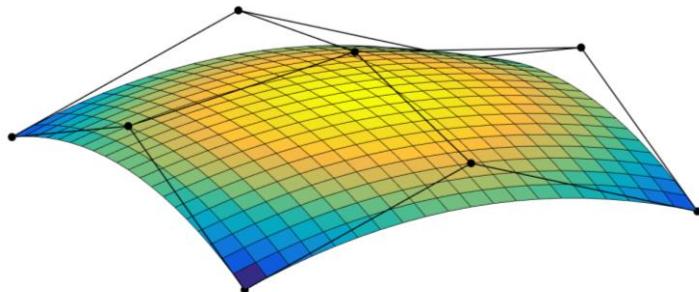


图 2-5 2×2 次张量积 Bézier 曲面

需要注意的是, 上述只给了矩形域 $[0,1] \times [0,1]$ 上的张量积 Bézier 曲面的定义, 而事实上, 对于任一矩形域 $[a,b] \times [c,d]$, 其上点 (u, v) , 我们只需令 $u = (u - a)/(b - a), v = (v - c)/(d - c)$, 就可以转换成标准的张量积 Bézier 曲面, 这里我们不再具体展开。

我们列举几条张量积型的 Bézier 曲面的重要性质:

- (1) 凸包性质: 张量积型的 Bézier 曲面位于控制网格的凸包内;
- (2) 等参数性质: 固定参数 $v = v^*$ 和 $u = u^*$ 分别对应 d_1 次和 d_2 次 Bézier 曲线;
- (3) 角点插值: 曲面在 4 个角点处取值为其相应的控制点。即

$$S(0,0) = \mathbf{V}_{0,0}, \quad S(0,1) = \mathbf{V}_{0,d_2}, \quad S(1,0) = \mathbf{V}_{d_1,0}, \quad S(1,1) = \mathbf{V}_{d_1,d_2} \quad (2-32)$$

(4) 升阶性质：令 $\alpha_i = i/(d_1+1)$, $\beta_i = j/(d_2+1)$, 则

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{d_1+1} \sum_{j=0}^{d_2+1} V_{i,j}^* B_i^{d_1+1}(u) B_j^{d_2+1}(v) \quad (2-33)$$

其中，

$$V_{i,j}^* = \alpha_i \beta_j V_{i-1,j-1} + \alpha_i (1-\beta_j) V_{i-1,j} + (1-\alpha_i) \beta_j V_{i,j-1} + (1-\alpha_i)(1-\beta_j) V_{i,j} \quad (2-34)$$

(5) De Casteljau 算法：

$$\begin{cases} V_{i,j}^{0,0}(u, v) \equiv V_{i,j}^{0,0} = V_{i,j}, & i = 0, 1, \dots, d_1, j = 0, 1, \dots, d_2 \\ V_{i,j}^{r,s}(u, v) = (1-u)(1-v)V_{i,j}^{r-1,s-1}(u, v) + (1-u)vV_{i,j+1}^{r-1,s-1}(u, v) \\ \quad + u(1-v)V_{i+1,j}^{r-1,s-1}(u, v) + uvV_{i+1,j+1}^{r-1,s-1}(u, v), & r = 1, 2, \dots, d_1, s = 1, 2, \dots, d_2; \\ i = 0, 1, \dots, d_1 - r, j = 0, 1, \dots, d_2 - s. \end{cases} \quad (2-35)$$

$V_{0,0}^{m,n}(u, v)$ 即为所求的 $S(u, v)$ 。

2.5.2 三角域上的 Bézier 曲面

定义 2.5 给定平面上三角形 T , 其上任意一点的重心坐标为 $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, 给定 $(d+1)(d+2)/2$ 个向量 $V_{i,j,k} \in \mathbb{R}^3 (i, j, k \geq 0, i+j+k=d)$, 则称

$$S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \sum_{i+j+k=n} V_{i,j,k} B_{i,j,k}^d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in T \quad (2-36)$$

为三角域 T 上的 d 次 Bézier 曲面, $V_{i,j,k}$ 称为曲面的控制点。 $V_{i,j,k}, V_{i-1,j+1,k}, V_{i-1,j,k+1}$ 用直线段相连所得到的由 d^2 个三角形组成的网格称为控制网格。

假设 T 的逆时针排列的顶点为 v_1, v_2, v_3 , 特别地, 当取实数 $b_{i,j,k}$ 时, 其控制点可看成三维向量 $((iv_1 + jv_2 + kv_3)/d, b_{i,j,k})$, 亦即其横纵坐标为 T 各边 d 等分线的网格结点(可参见图 3-2)。例如图 2-6 展示了一个正三角形上的 3 次 Bézier 曲面及其对应的控制网, 其中黑色圆点表示控制点。这里我们选取 $b_{300} = b_{030} = b_{003} = 0$, $b_{210} = b_{120} = b_{021} = b_{012} = b_{201} = b_{102} = 0.4, b_{111} = 0.8$ 。

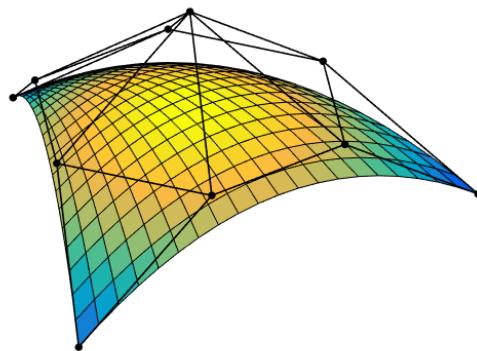


图 2-6 三角域上 3 次 Bézier 曲面

同样的，三角域上的 Bézier 曲面也有如下性质：

- (1) 凸包性质：三角域上的 Bézier 曲面位于控制网格的凸包内；
- (2) 边界性质：三角域上的 Bézier 曲面在各边上的取值为一条该边上相应控制点对应的 d 次 Bézie 曲线；
- (3) 角点插值：曲面在三个角点处的取值为其相应的控制点；
- (4) 升阶性质：

$$S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \sum_{i+j+k=d} V_{i,j,k} B_{i,j,k}^d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \sum_{i+j+k=d+1} V_{i,j,k}^* B_{i,j,k}^{d+1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (2-37)$$

其中，

$$V_{i,j,k}^* = \frac{i}{d+1} V_{i-1,j,k} + \frac{j}{d+1} V_{i,j-1,k} + \frac{k}{d+1} V_{i,j,k-1}, \quad i+j+k=d+1 \quad (2-38)$$

- (5) De Casteljau 算法：

$$\begin{cases} V_{i,j,k}^0(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv V_{i,j,k}^0 = V_{i,j,k}, & i+j+k=d \\ V_{i,j,k}^r(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \varphi_1 V_{i+1,j,k}^{r-1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \varphi_2 V_{i,j+1,k}^{r-1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ + \varphi_3 V_{i,j,k+1}^{r-1}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), & r=1, 2, \dots, d, \quad i+j+k=d-r \end{cases} \quad (2-39)$$

则 $V_{0,0,0}^d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 即为所求的 $S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ 。

2.6 广义重心坐标

在本节中，我们介绍下广义重心坐标(GBC)的定义及其几种常见形式。

一般地，将 2.2 节的重心坐标推广到高维情形，Hormann and Sukumar [20] 给出了严格的广义重心坐标的数学定义：

定义 2.6^[20] 给定一空间中的非退化多面体 P ，其顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ ，
 $n \geq d+1$ ，若存在函数 $\varphi_i : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, n$ ，且满足如下两条性质

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i(v) &= 1 & \forall v \in \bar{P} \\ \sum_{i=1}^n \varphi_i(v) v_i &= v \end{aligned} \quad (2-40)$$

则称 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为 P 上的广义重心坐标。

可以证明，当 $n=d+1$ 时， $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是唯一确定的。如当 $d=2, n=3$ 时，对应的 φ_i 即为面积坐标。

构造广义重心坐标主要有两种方法，一是借助齐次坐标函数，若函数 $w_i : P \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, n$ ，满足

$$\sum_{i=1}^n w_i(v)(v_i - v) = 0, \quad \forall v \in P \quad (2-41)$$

则称 w_i 为齐次坐标函数，事实上对他们归一化即可得到广义重心坐标：

$$\varphi_i(v) = \frac{w_i(v)}{W(v)}, \quad W(v) = \sum_{i=1}^n w_i(v), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2-42)$$

除此之外，还可以利用数值计算方法进行构造。这里我们介绍下两种常见的利用齐次坐标构造的 Wachspress 坐标和 Mean Value 坐标以及数值求解的 Harmonic 坐标。

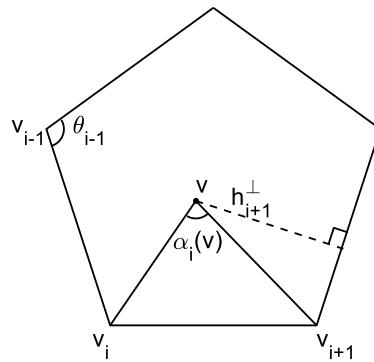


图 2-7 域多边形的有关符号表示

2.6.1 Wachspress 坐标

Wachspress and Rohde^[21]是最早研究广义重心坐标的，其将三角形的面积坐标进行推广，给出了平面多边形的广义重心坐标公式，后来 Meyer, et al.^[22] 给出了其更加简洁的等价形式：

定义 2.7 设 P 是平面上一凸多边形， $v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 3$ 是其按逆时针排列的顶点， $\forall v \in Int(P)$ ，令

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)} \\ w_i(v) &= \frac{A(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{A(v, v_{i-1}, v_i)A(v, v_i, v_{i+1})} \end{aligned} \quad (2-43)$$

则称 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为 P 上的 Wachspress 坐标。

需要注意的是，上述 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是定义在 $Int(P)$ 上的，事实上，Floater 在[23] 中证明了 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是可以唯一连续延拓至整个 P ，即包括 ∂P 。为简化起见，我们总将 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 视为整个 P 上的广义重心坐标。

我们简单介绍下 Wachspress 坐标的几个重要性质：

- (1) 非负性： $\varphi_i(v) \geq 0, \forall v \in P$ ；
- (2) 拉格朗日性： $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ ；
- (3) 线性性： $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在 P 边界的每条边上是线性函数，亦即，

$$\varphi_i(\alpha v_{j-1} + (1-\alpha)v_j) = \alpha\varphi_i(v_{j-1}) + (1-\alpha)\varphi_i(v_j), 1 \leq i, j \leq n, \alpha \in [0, 1] \quad (2-44)$$

$$(4) \text{仿射不变性: } \sum_{i=1}^n \varphi_i(v) = 1, \forall v \in P;$$

(5) 无穷可微性: $\varphi_i \in C^\infty$ 。

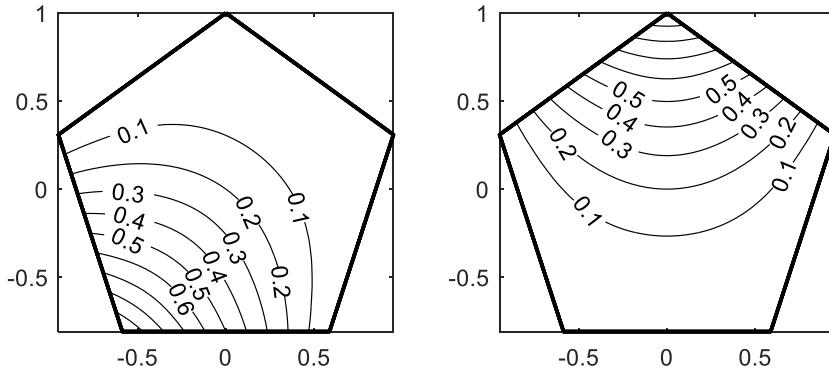


图 2-8 Wachspress 坐标的 φ_2 (左) 和 φ_5 (右) 的等值线

图 2-8 展示了一正五边形上的 Wachspress 坐标中 φ_2 和 φ_5 的等值线, 可以发现越靠近相应的顶点其值越大, 在顶点处取值为 1, 越远离相应的顶点其值越小。在第 4 章中我们会在 GB 面片中具体讨论这一问题。

Wachspress 坐标有着直观的几何性和简单的形式, 但其只能定义在凸多边上, 对于非凸多边而言, 其可能在某些点处没有定义。关于非凸多边上的广义重心坐标有着诸多的研究, 接下来我们介绍下常用的 Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标。

2.6.2 Mean Value 坐标

文献[4-6]给出了 Mean Value 坐标的定义和有关性质。

定义 2.8 设 P 为平面上任意多边形, $v_1, v_2, \dots, v_n, n \geq 3$ 是其按逆时针排列的顶点, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_i(v)$ 为 $\angle v_{i+1} v v_i$ 的方向角, 定义

$$w_i = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{|v_i - v|} \quad (2-45)$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sum\limits_{j=1}^n w_j}, & v \notin \partial P \\ (1-\mu)\delta_{i,j} + \mu\delta_{i,j+1}, & v = (1-\mu)v_j + \mu v_{j+1} \in \partial P \end{cases} \quad (2-46)$$

图 2-7 展示了方向角 $\alpha_i(v)$ 。同样地, Mean Value 坐标也有很多良好性质:

- (1) 非负性: φ_i 在多边形的核部(kernel), 特别在凸多边形的全体内部取值为正数;
- (2) 拉格朗日性: $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$;
- (3) 线性性: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在 P 边界的每条边上是线性函数;

(4) 仿射不变性: $\sum_{i=1}^n \varphi_i(v) = 1, \forall v \in P;$

(5) 无穷可微性: φ_i 除了在 v_j 处为 C^0 外, 其余点均 C^∞ 。

需要注意的是:

(1) 此时因为 $-\pi < \alpha_i < \pi$, 所以有些 w_i 可能为负数, 但 $\sum_{j=1}^n w_j$ 始终为正数;

(2) 该 Mean Value 坐标适用于平面上任意多边形, 不要求凸性;

(3) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在整个平面均有定义, 但在本文的 Bézier 曲面构造中, 我们只考虑多边形区域。

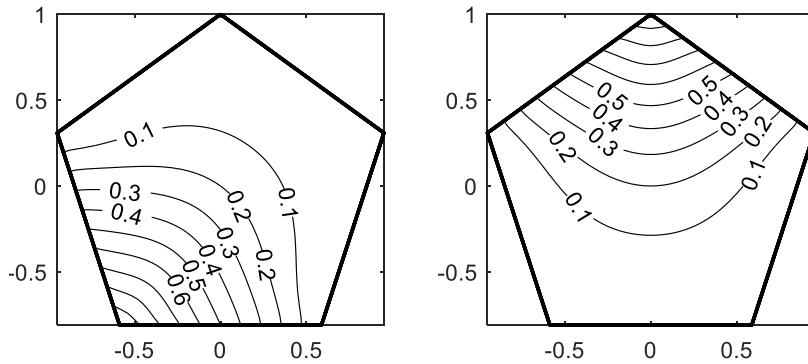


图 2-9 Mean Value 坐标的 φ_2 (左) 和 φ_5 (右) 的等值线

图 2-9 展示了同一正方形上的 Mean Value 坐标的 φ_2 和 φ_5 的等值线, 可以发现其同样的在相应的顶点处附近其值更大, 不同于 Wachspress 坐标的是, 其有一定程度的向五边形中心突起的趋势, 即“山谷”现象, 在第 4 章中我们也会观察到类似现象。

2.6.3 Harmonic 坐标

Mean Value 坐标虽然可以定义在非凸的多边形域上, 但其只在多边形的核部具有非负性, 即在 Bézier 面片构造中, 移动某一控制点, 其曲面在相应点处可能朝反方向移动。事实上, 在很多场合, 我们都要求广义重心坐标的非负性。

2006 年, DeRose and Meyer^[3]结合 Laplace 方程提出了 Harmonic 坐标, 其二维情形的定义如下:

定义 2.9 设 P 为平面上任意多边形, $v_i, i=1, 2, \dots, n$ 为其顶点, 称满足下列 Laplace 方程和 Dirichlet 边值条件的解为 P 上的 Harmonic 坐标:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_i(v) &= 0, \forall v \in \text{Int}(P) \\ \varphi_i(v_j) &= \delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, \dots, n \\ \varphi_i(\alpha v_j + (1-\alpha)v_{j+1}) &= \alpha \varphi_i(v_j) + (1-\alpha)\varphi_i(v_{j+1}) \end{aligned} \tag{2-47}$$

可以看到, 边值条件即为要求 φ_i 在 P 的边界为分段线性函数, 且在顶点处满足 $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ 。Harmonic 坐标虽然计算量较 Wachspress 坐标和 Mean Value 坐标大, 且通常情况下为数值解, 但其有着诸多优越的性质:

- (1) 非负性: $\varphi_i(v) \geq 0, \forall v \in P$;
- (2) 拉格朗日性: $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$;
- (3) 线性性: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在 P 边界的每条边上是线性函数;
- (4) 仿射不变性: $\sum_{i=1}^n \varphi_i(v) = 1, \forall v \in P$;
- (5) 可微性: φ_i 至少 C^1 光滑;
- (6) 局部性: φ_i 在 P 的内部没有极值。

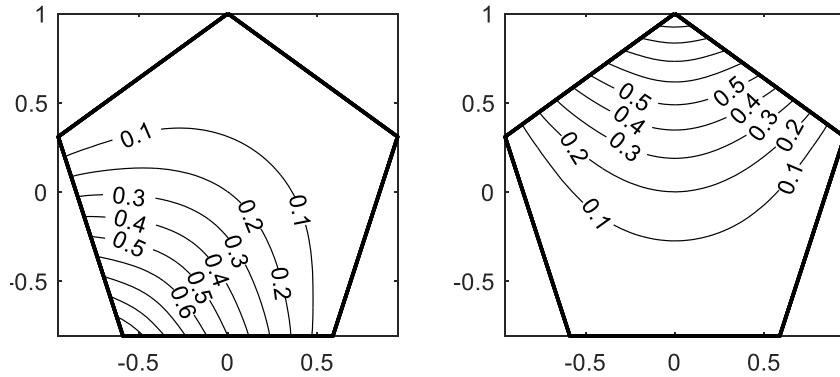


图 2-9 Harmonic 坐标的 φ_2 和 φ_5 的等值线

同样地, 图 2-9 展示了正五边形上的 Harmonic 坐标的 φ_2 和 φ_5 的等值线, 其等值线分布与 Wachspress 坐标的分布大致相同, 且没有明显的向五边形中心突起的“山谷”现象, 在第 4 章中, 我们也会对利用 Harmonic 坐标作为广义重心坐标的 GB 面片的等高线做具体探讨。

Harmonic 坐标虽然没有明确的解析式, 大部分只能通过数值方法求解, 但同 Wachspress 坐标相比, Harmonic 坐标可适用于非凸多边形域, 同 Mean Value 坐标相比, Harmonic 坐标具有全局非负性。除此之外, Harmonic 坐标还具有局部性, 即在内部取不到极值。这些性质为某些特殊 Bézier 面片的构造带来了便利, 如在[16, 18]中, 作者利用 Harmonic 坐标解决了有洞、有凹角的多边形域上 GB 面片构造的问题。

第3章 Bézier曲面构造及方法总结

最早的 Bézier 曲面的构造始于上世纪 60 年代，包括传统的矩形域上的张量积型 Bézier 曲面以及三角域上的 Bézier 曲面。下面我们介绍几种重要的 Bézier 曲面的推广形式。

3.1 S 面片

S 面片最早是 Loop and DeRose^[2]提出的，其基本思想是先将凸多边形域映射到同顶点数的单纯形域，再与单纯形上有理 Bézier 曲面复合得到。其严格定义如下：

定义 3.1 设 P 是一个凸多边形， v_1, v_2, \dots, v_n 为其顶点， Δ 为某 $n-1$ 维空间的单纯形， $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*$ 为其顶点，若映射 $S: P \rightarrow Y, S = \mathbf{B} \circ E$ ，其中 $E: P \rightarrow \Delta$ 为保边嵌入， $\mathbf{B}: \Delta \rightarrow Y$ 是 d 次有理 Bézier 单纯形，则称 S 为次数为 d 的 n 边 S 面片。由 3.1 节中保边嵌入的定义可知，映射 E 可以写成

$$E(x) = e_1(x)v_1^* + e_2(x)v_2^* + \dots + e_n(x)v_n^* \quad (3-1)$$

其中， $e_1, e_2, \dots, e_n: P \rightarrow \mathbb{R}$ 非负且 $\sum_{i=1}^n e_i(x) = 1$ 。事实上 $(e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x))$ 为 $E(x)$ 关于 Δ 的重心坐标。

下图展示了 S 面片借助单纯形进行构造的方式：

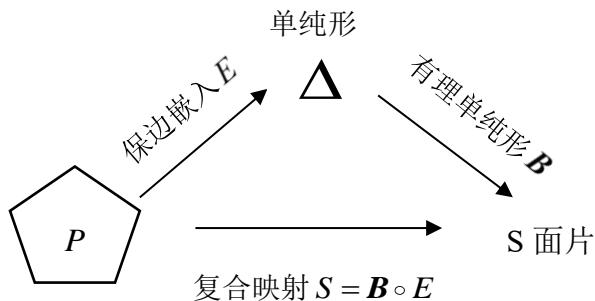


图 3-1 S 面片原始定义示意图

由有理 Bézier 单纯形 \mathbf{B} 的定义可以得到如下 S 面片的最终解析式：

$$S(x) = \frac{\sum_{\lambda} \omega_{\lambda} V_{\lambda} B_{\lambda}^d(e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x))}{\sum_{\lambda} \omega_{\lambda} B_{\lambda}^d(e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x))}, \quad x \in P \quad (3-2)$$

其中 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$ ，满足 $|\lambda| = d$ ， $V_{\lambda} \in Y$ 为控制点； ω_{λ} 为控制点 V_{λ} 的权重因子。

显然，S 面片是三角域上 Bézier 曲面的推广，当 $n=3$ 且 ω_{λ} 都相等时，其所构造的 Bézier 曲面可以看成三角域上构造的 Bézier 曲面。另一方面，S 面片也是张量积型 Bézier 曲面的推广，Loop and DeRose^[2] 证明了对于平行四边域而言，当权重

ω_λ 均取值为1时，S面片的解析式可以写成如下张量积Bernstein基函数形式：

$$S(x) = \sum_{i,j} W_{ij} B_i^d(u) B_j^d(v), \quad x \in P$$

$$W_{ij} = \sum_{\lambda} \frac{\binom{d}{\lambda}}{\binom{d}{i}\binom{d}{j}} V_\lambda$$

$$\begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = i \\ \lambda_3 + \lambda_4 = j \end{array} \quad (3-3)$$

其中 u, v 为点 x 在平行四边形 P 两邻边向量的坐标。

可以看到，原始S面片的定义是借助保边嵌入将凸多边形域映射到单纯形，而由保边嵌入的局限性，其只适用于凸多边形，且并没有直观具体的保边嵌入解析式。而随着多种广义重心坐标的出现，可以将多边形域映射到已有的重心坐标参数域，再与 n 元Bernstein基函数乘积求和得到S面片，从而可以定义在任意多边形域，且只取决于广义重心坐标的选取，此时相应的解析式可写成：

$$S(x) = \sum_{\lambda} B_{\lambda}^d(x) V_{\lambda}$$

$$B_{\lambda}^d(x) = \binom{d}{\lambda} \prod_{i=1}^n \varphi_i(x)^{\lambda_i} \quad (3-4)$$

其中， V_λ 为控制点， $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为 P 上的广义重心坐标，此时 P 为任意多面体。后者的关于S面片定义更被广泛使用。

我们简单对比下两种不同构造方式的区别与联系。

联系：

- (1) 二者均是先将多边形域通过某一映射再与有理Bézier单纯形复合；
- (2) 第二种是第一种的一般化，其控制网、性质等均与第一种相同。

区别：

- (1) 第一种采用保边嵌入，将凸多边形域采用映射到单纯形域；而第二种采用广义重心坐标，将多边形域映射到 \mathbb{R}^n 空间；
- (2) 由保边嵌入的定义，第一种只适用于凸多边形域，而第二种由广义重心坐标的定义，只需选取合适的重心坐标，其适用于任意多边形域。

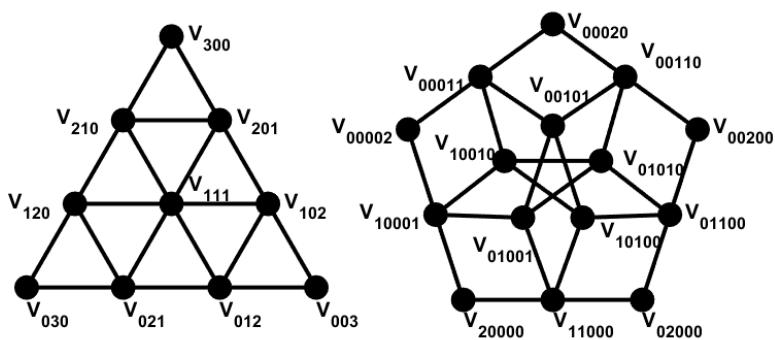


图 3-2 S 面片控制网， $|\lambda|=d$ ， $n=3, d=3$ (左)， $n=5, d=2$ (右)

同传统 Bézier 曲面, S 面片也具有相应的控制网, 其控制点的连接规则是三角域上 Bézier 曲面控制网的推广。控制点 V_{λ_1} 和 V_{λ_2} 相连当且仅当存在正整数 r 满足 $\lambda_1 - e_r = \lambda_2 - e_{r+1}$ 。可知, 当 $n=3$ 时, 其控制网格同三角域上的网格一致。如图 3-2 展示了当 $n=3, d=3$ 和 $n=5, d=2$ 时的控制网, 其控制网格的 Matlab 程序见附录 2.2。例如, $n=5, d=2$ 时, 对于控制点 V_{00110} 和 V_{01010} , 可知存在正整数 $r=3$, 使得 $\lambda_1 - e_3 = (0, 0, 1, 1, 0) - e_3 = \lambda_2 - e_2 = (0, 1, 0, 1, 0) - e_2 = (0, 0, 0, 1, 0)$, 故控制点 V_{00110} 和 V_{01010} 连接。

下图展示了一正五边形上的 2 次 S 面片, 包括其三维视图、主视图、俯视图和侧视图, 其中广义重心坐标选取 Wachspress 坐标, 其 Matlab 程序代码见附录 2.3。有关本文多边面片的实现方法见附录 1.1(下同)。

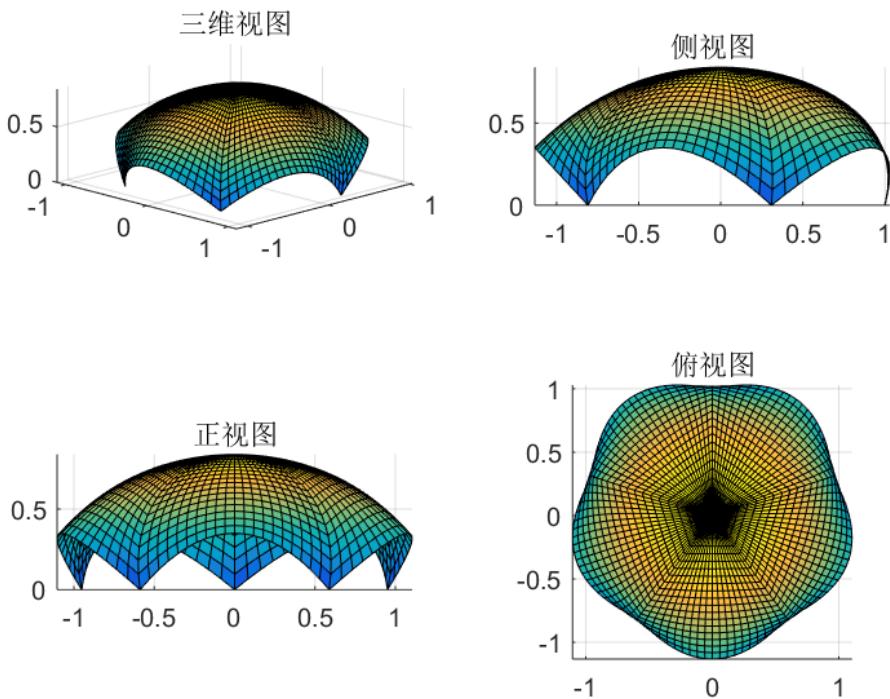


图 3-3 五边 2 次 S 面片的各个视图

3.2 Toric 面片

2002 年, Krasauskas^[8]利用代数几何里 toric 簇的理论, 构造了 toric 面片。不同于一般的多边形, Krasauskas 最初讨论的是顶点坐标均为整数的格多边形。

给定凸 n 边形 $P \in \mathbb{R}^2$, 如果它的顶点 $v_i \in \mathbb{Z}^2, i = 0, 1, \dots, n$, 则称 P 为格多边形。记 l_i 为 P 的第 i 条边, 在 l_i 上定义仿射函数 $h_i(x) = \langle e_i, x \rangle + a_i$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积算子; e_i 为 l_i 上指向内部的法向量, 且其为该方向上所有坐标均为整数的向量里最短向量; a_i 为实参数, 使得 h_i 在 l_i 上的取值恒为 0。定义 $\hat{P} = P \cap \mathbb{Z}^2$, 则 toric 面片解析式如下:

$$S(x) = \frac{\sum_{\lambda \in \hat{P}} \omega_\lambda V_\lambda B_\lambda(x)}{\sum_{\lambda \in \hat{P}} \omega_\lambda B_\lambda(x)}, \quad x \in P \quad (3-5)$$

$$B_\lambda(x) = c_\lambda \prod_{i=1}^n h_i(x)^{h_i(\lambda)}$$

其中, $V_\lambda \in \mathbb{R}^3$ 为控制点; 权因子 $\omega_\lambda > 0$; B_λ 为基函数, $c_\lambda \in \mathbb{Z}^+$ 为其系数。

可以看到, toric 面片解析式和有理 S 面片的类似, 不同的是, 其要求的多边形为格多边形; 定义域点的参数表示采用了线性算子 $h_i : P \rightarrow \mathbb{R}$, 基函数 B_λ 发生了变化, 且控制点索引 λ 是多边形内部的整数坐标点, 而 S 面片的 λ 为所有分量为 d 的 n 维向量。下图是 n 分别取 3、4 时的格点分布:

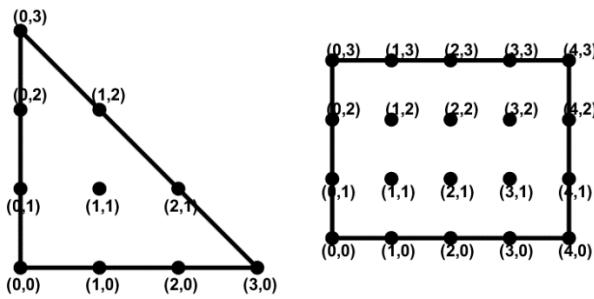


图 3-4 $n=3$ (左)、 $n=4$ (右)时的格点分布

例如, $n=3$ 时, 考虑三角形顶点分别为 $(0,0), (k,0), (0,k)$, $k \in \mathbb{Z}$, 则 $\hat{P} = \{(i, j) | i + j \leq k, i, j \in \mathbb{N}\}$, $h_1(x_1, x_2) = x_1, h_2(x_1, x_2) = x_2, h_3(x_1, x_2) = k - x_1 - x_2$, 令 $c_{ij} = k! / (i! j! (k-i-j)!)$, 于是得到基函数

$$B_{ij}(x) = \frac{k!}{i! j! (k-i-j)!} x_1^i x_2^j (k - x_1 - x_2)^{k-i-j}, \quad (i, j) \in \hat{P}, x \in P \quad (3-6)$$

进而得到三角域上 k 次有理 Bézier 曲面。

另一方面, $n=4$ 时, 考虑矩形四个顶点分别为 $(0,0), (k,0), (k,l), (0,l)$, 则得到线性算子 $h_1(x_1, x_2) = x_1, h_2(x_1, x_2) = x_2, h_3(x_1, x_2) = k - x_1, h_4(x_1, x_2) = k - x_2$, 且系数 $c_{ij} = \binom{k}{i} \binom{l}{j}$, 则基函数

$$B_{ij}(x) = \binom{k}{i} x_1^i (k - x_1)^{k-i} \binom{l}{j} x_2^j (l - x_2)^{l-j}, \quad (i, j) \in \hat{P}, x \in P \quad (3-7)$$

进而得到矩形域上 $k \times l$ 次张量积型 Bézier 曲面, 即传统的 Bézier 曲面是 toric 面片的特殊形式。

除此之外, Krasauskas [8] 还证明了 Warren [10] 借助 Base point 方法(见 3.3 节)构造的曲面是重参数化的 toric 面片。

如上图展示 $n=3$ 和 $n=4$ 的控制网格, 下图给出了对应的三边和四边的 toric 面片, 相关 Matlab 程序代码见附录 2.4。

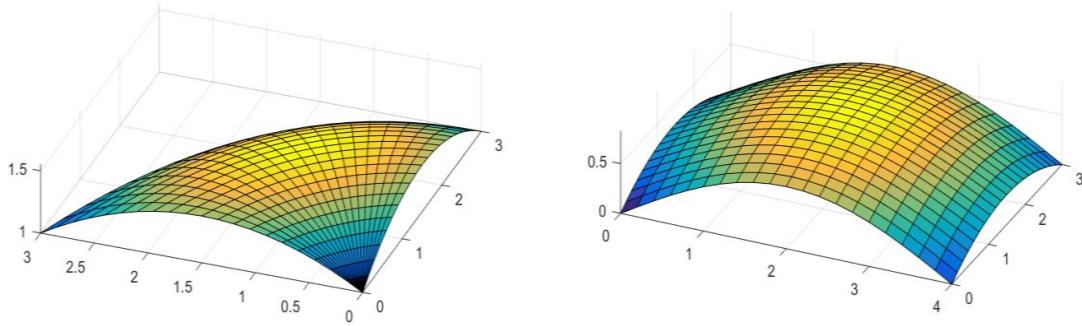


图 3-5 三边 toric 面片(左)和四边 toric 面片(右)

3.3 Base point 方法

1992 年, Warren^[10]通过令部分控制点的权重 ω_i 为 0, 给了一种从三角域 T 上有理 Bézier 曲面构造 3 至 6 边面片的方法。给定三角域 T 上一 d 次有理 Bézier 曲面:

$$S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{\sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} V_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\sum_{i+j+k=n} \omega_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}, \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in T \quad (3-8)$$

其中, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1$ 是重心坐标, $\omega_{i,j,k}$ 是控制点 $V_{i,j,k}$ 的权因子。

设 a, b, c 为非负整数, 且满足 $a+b, a+c, b+c < d$ 。令所有满足 $i+j < c$ 或 $i+k < b$ 或 $j+k < a$ 的权因子 $\omega_{i,j,k} = 0$, 借助重心坐标与二维笛卡尔坐标的转换, 整理可得到新的多边 Bézier 面片。若 a, b, c 三个均大于 0, 则可得到 6 边 Bézier 面片, 若仅有两个大于 0, 则得到五边 Bézier 面片, 若只有一个大于 0, 则得到 4 边 Bézier 面片。称 $\omega_{i,j,k} = 0$ 对应的控制点 $V_{i,j,k}$ 为 Base point。

我们以一个简单例子来说明基于 Base point 构造多边面片的方法。例如, 当 $d = 2$ 时, 三角形域上的有理 Bézier 曲面写成

$$S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{\sum_{i+j+k=3} \omega_{i,j,k} V_{i,j,k} B_{i,j,k}^3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\sum_{i+j+k=3} \omega_{i,j,k} B_{i,j,k}^3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}, \quad (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in T \quad (3-9)$$

由三角形面积坐标和二维笛卡尔坐标的转换:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \\ v &= 1 - \varphi_3 \end{aligned} \quad (3-10)$$

其逆映射:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= (1-u)v \\ \varphi_2 &= uv \\ \varphi_3 &= 1-v\end{aligned}\quad (3-11)$$

将其代入有理 Bézier 曲面解析式，可以得到关于 u 和 v 的解析式：

$$S(u, v) = \frac{\vec{V}_0(1-v)^2 + \vec{V}_1(2v(1-v)) + \vec{V}_2v^2}{\omega_1(1-v)^2 + \omega_2(2v(1-v)) + \omega_3v^2}, \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1] \quad (3-12)$$

其中，

$$\begin{aligned}\vec{V}_0 &= \omega_{002} \vec{V}_{002} \\ \vec{V}_1 &= \omega_{101} \vec{V}_{101}(1-u) + \omega_{011} \vec{V}_{011}u \\ \vec{V}_2 &= \omega_{200} \vec{V}_{200}(1-u)^2 + 2\omega_{110} \vec{V}_{110}(1-u)u + \omega_{020} \vec{V}_{020}u^2 \\ \omega_1 &= \omega_{002} \\ \omega_2 &= \omega_{101}(1-u) + \omega_{011}u \\ \omega_3 &= \omega_{200}(1-u)^2 + 2\omega_{110}(1-u)u + \omega_{020}u^2\end{aligned}\quad (3-13)$$

上式可以看成为矩形域 $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ 上的张量积 2×2 次有理 Bézier 曲面，特殊的是，在边 $v=0$ 上其退化为一点 $\omega_{002} \vec{V}_{002}$ ，整体表现为三边面片。事实上，不难将其写成标准的张量积有理 Bézier 形式：

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=0}^2 \omega_{ij} \vec{V}_{ij} B_j^2(u) \right) B_i^2(v)}{\sum_{i=0}^2 \left(\sum_{j=0}^2 \omega_{ij} B_j^2(u) \right) B_i^2(v)}, \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1] \quad (3-14)$$

其中，

$$\begin{aligned}\omega_{0j} &= \omega_{002}, \vec{V}_{0j} = \vec{V}_{002} \\ \omega_{1j} &= \omega_{011}, \vec{V}_{10} = \frac{\omega_{101}}{\omega_{011}} \vec{V}_{101}, \vec{V}_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{101}}{\omega_{011}} \vec{V}_{101} + \vec{V}_{011} \right), \vec{V}_{12} = \vec{V}_{011} \\ \omega_{2j} &= \omega_{2-j, j, 0}, \vec{V}_{2j} = \vec{V}_{2-j, j, 0}\end{aligned}\quad (3-15)$$

将 ω_{002} 作为 Base point，即 $\omega_{002} = 0$ ，再除以 v 可以得到

$$S(u, v) = \frac{\vec{V}_0(1-v) + \vec{V}_1v}{\omega_0(1-v) + \omega_1v}, \quad (u, v) \in [0,1] \times [0,1] \quad (3-16)$$

其中，

$$\begin{aligned}\vec{V}_0 &= 2\omega_{101} \vec{V}_{101}(1-u) + 2\omega_{011} \vec{V}_{011}u \\ \vec{V}_1 &= \omega_{200} \vec{V}_{200}(1-u)^2 + \omega_{110} \vec{V}_{110}2u(1-u) + \omega_{020} \vec{V}_{020}u^2 \\ \omega_0 &= 2\omega_{101}(1-u) + 2\omega_{011}u \\ \omega_1 &= \omega_{200}(1-u)^2 + \omega_{110}2u(1-u) + \omega_{020}u^2\end{aligned}\quad (3-17)$$

即为矩形域 $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ 上的张量积 1×2 次有理 Bézier 曲面, 且在边 $v=0$ 上为一条连接 V_{101} 和 V_{011} 的直线段, 得到的为矩形域上的四边面片。下图为操作前的三边面片和操作后的四边面片, 相应的 Matlab 程序代码见附录 2.5。

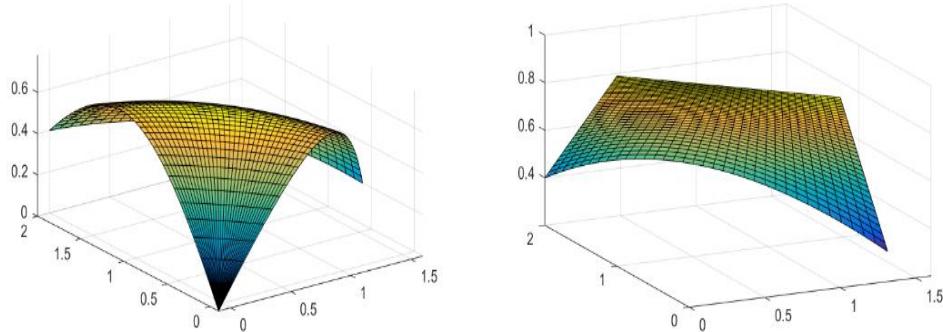


图 3-6 操作前(左)三边面片, 操作后(右)四边面片

3.4 Zheng 等人的方法

1997 年, Zheng and Ball^[14]在 Sabin^[12]提出的 3、5、6 边 2 次面片和 Hosaka and Kimura^[11]提出的 3、5、6 边 3 次面片基础上给出了一种 n 边 d 次的构造多边面片的方法, 并具体给出 3、5、6 边 2 次面片的解析式。

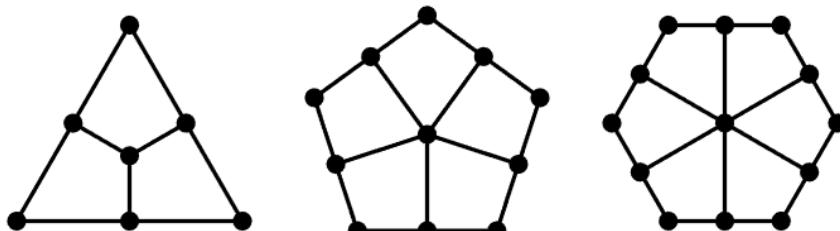


图 3-7 Sabin 的 3、5、6 边 2 次控制网格

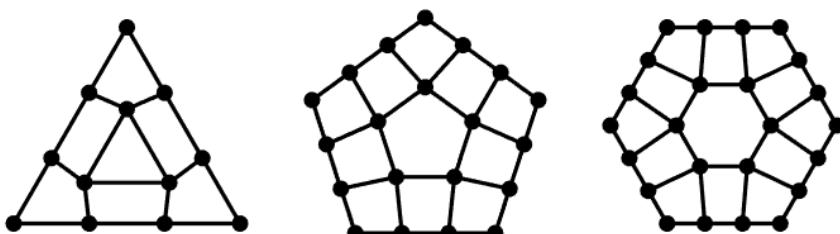


图 3-8 Hosaka and Kimura 的 3、5、6 边 3 次控制网格

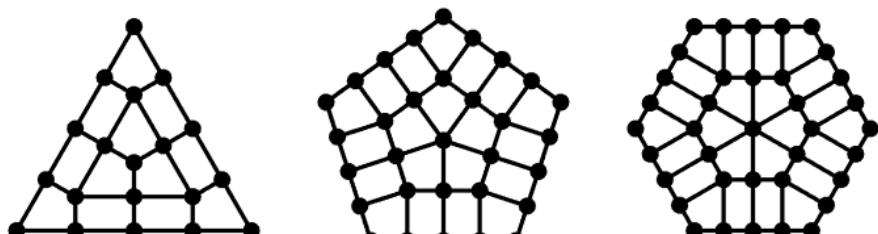


图 3-9 Zheng 的 $n=3, 5, 6, d=4$ 时的控制网格

S 面片的控制点 $\mathbf{V}_\lambda, |\lambda|=d$ 按照相邻原则连接得到控制网格，其控制点数量随着边数 n 和 d 增加而迅速增多，体系愈加庞大。Sabin^[12]和 Hosaka and Kimura^[11]提出了另一种类似于轮盘式的控制网格，如图 3-7 和图 3-8，其 Matlab 程序见附录 2.6。

该控制网格的控制点数较 S 面片控制网格控制点数大大减少，例如 6 边 3 次的 S 面片需要 56 个控制点，而上述控制网格只需 24 个控制点。进一步，Zheng and Ball^[14]将该想法推广到 n 边 d 次的情形，图 3-9 展示了当 $n=3, 5, 6, d=4$ 时对应的控制网格。

设 P 为 \mathbb{R}^2 上的 n 边形。我们介绍下 Zheng and Ball^[14] 的构造方法：

(1) 控制点编号：

每一控制点 $\mathbf{V}_\lambda, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，其中 λ_i 表示该控制点到多边形第 i 条边的“距离”。例如当 $n=3$ 时，“距离”为该控制点到边之间的控制点的排数。如下图：

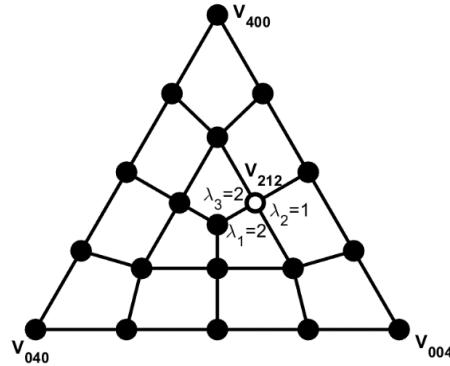


图 3-10 控制点 \mathbf{V}_{212} , $n=3, d=4$

假设最底下为第 1 条边，按逆时针旋转分别为第 2、3 条边，则该控制点到三边的“距离”依次为 2、1、2。而当 $n \geq 5$ 时，令离该控制点最近的两条边分别是边 l_{i-1}, l_i ，则 λ_{i-1}, λ_i 由上述方式定义，其余由下式决定：

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1} &= d - \lambda_{i-1}, \quad \lambda_{i-2} = d - \lambda_i \\ \lambda_j &= d - \min\{\lambda_{i-1}, \lambda_i\}, \quad j \neq i-2, i-1, i, i+1\end{aligned}\tag{3-18}$$

(2) 定义域参数表示：

设 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 P 上点的参数表示(显然， u 中只有两个独立变元)，其中满足在边 l_i 上， $u_i = 0$ ， $u_{i-1} + u_{i+1} = 1$ ， $u_j = 1$ ， $j \neq i-1, i, i+1$ 。另外，除此条件，针对不同边数 n ， u 还有额外约束(见下文)。

(3) 面片解析式求解：

所要构造的面片解析式形如

$$S(u) = \sum_\lambda B_\lambda(u) V_\lambda \tag{3-19}$$

现要构造合适基函数 $B_\lambda(u)$ ，使其能继承大部分传统 Bézier 曲面的性质：

边界性质：

$$S(u)|_{u_i=0} = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} u_{i-1}^k u_{i+1}^{d-k} V_{ke_{i-1} + (d-k)e_{i+1} + \sum_{j \neq i-1, i, i+1} \lambda_j e_j} \quad (3-20)$$

边界导数性质：

$$S(u)'|_{u_i=0} = d \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} u_{i-1}^k u_{i+1}^{d-k} \left(V_{ke_{i-1} + (d-k)e_{i+1} + \sum_{j \neq i-1, i, i+1} \lambda_j e_j} - V_{ke_{i-1} + (d-k)e_{i+1} + \sum_{j \neq i-1, i, i+1} \lambda_j e_j} \right) \quad (3-21)$$

归一化性质：

$$\sum_{\lambda} B_{\lambda}(u) = 1 \quad (3-22)$$

经过一系列计算，Zheng 等人最终给出了 $n=3, 5, 6$ 时的一种满足上述前两条性质的 $B_{\lambda}(u)$ 表达式，其形式较为复杂，具体可见[14]，并在此基础上进一步构造了满足上述三条性质的基函数 $B_{\lambda}^*(u)$ 和参数 u 的约束，从而得到最终解析式。

$n=3$ 时面片解析式：

$$S(u) = \sum_{l=0}^{[d/2]} \sum_{\substack{|\lambda|=d+l \\ \min \lambda = l}} B_{\lambda}^*(u) V_{\lambda} \quad (3-23)$$

其中，

$$B_{\lambda}^*(u) = \begin{cases} B_{\lambda}(u) & \min \lambda = 0 \\ B_{\lambda}(u) - \frac{S_{3,d}(u)}{T_{3,d}} & \min \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (3-24)$$

$$S_{3,d}(u) = \sum_{\lambda} B_{\lambda}(u) - 1 \quad T_{3,d} = \begin{cases} \frac{3(d-2)d}{4} + 1 & d \text{ 为偶数} \\ \frac{3(d-2)^2}{4} & d \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (3-25)$$

且满足约束条件：

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2u_1 u_2 u_3 + 1 \quad (3-26)$$

其中 $\min \lambda$ 为 λ 各分量的最小值。

可以发现，当 $d=2$ 时，其同 Sabin [12] 构造的三边 2 次面片一致，当 $d=3$ 时，其同 Hosaka and Kimura [11] 构造的三边 3 次面片一致。同时，Zheng and Ball [14] 给出了 $n=5, 6$ 时面片解析式，当 $d=2, 3$ 时，其结论同[11, 12] 一致。

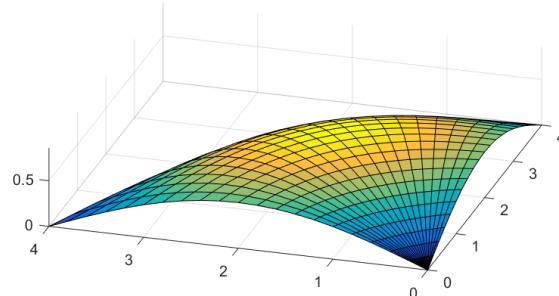


图 3-11 三边 4 次面片

图 3-11 展示了一个定义在由 $(0,0), (4,0), (0,4)$ 三点围成的采用 Zheng 等人 的方法所构造的三角域上的 4 次面片，相应的 Matlab 程序代码见附录 2.7。

3.5 GB 面片

2016 年，Várady, et al. [13] 在 [11, 12, 14] 的基础上，结合其轮盘式控制网格，对控制点分配权重，利用二元 Bernstein 基函数和自定义的局部参数构造广义 Bézier 面片，即 GB 面片。

我们介绍下凸多边形的情况，GB 面片由 n 个 Bézier 带构成，每个 Bézier 带有 $(d+1) \times l$ 个控制点，其中 $l = \lceil (d+1)/2 \rceil$ 为控制点层数， d 为曲面深度。

以下图五边 5 次 GB 面片控制网格为例，Matlab 程序见附录 2.8，由 $l=3$ ，每一条边上三排控制点为一 Bézier 带。控制点可以分成三类，如下图中我以三种颜色加以区分：红色控制点决定了面片在角点处的位置和切平面；绿色控制点跟曲线边界和跨界导数有关；黄色控制点跟曲面边界和内部之间的光滑程度有关；蓝色控制点，亦即中心控制点 V_0 ，是黄色控制点的几何中心，用于调整曲面内部的位置。

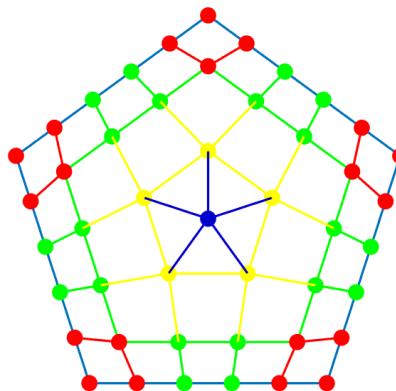


图 3-12 五边 5 次 GB 控制网格

GB 面片的定义域参数表示并不是用二维笛卡尔坐标，也不是直接采用广义重心坐标，而是利用广义重心坐标构造的局部参数 s_i, h_i ，其定义如下：

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i + \varphi_{i+1}} \\ h_i &= 1 - \varphi_i - \varphi_{i+1} \end{aligned} \quad (3-27)$$

其中 φ_i 为某一广义重心坐标。关于局部参数 s_i, h_i ，其有如下几条性质：

- (1) 在边 l_i 上， s_i 从 0 线性变化到 1， $h_i = 0$ 。
- (2) 在边 l_{i-1} 上， $s_i = 0$ ， h_i 从 0 线性变化到 1；
- (3) 在边 l_{i+1} 上， $s_i = 1$ ， h_i 从 0 线性变化到 1；
- (4) 在其余点， s_i 的取值介于 0 到 1 之间，在其余边， $h_i = 1$ 。

需要注意的是，式(3-27)中定义的 s_i 在不相邻的边($l_j, j \neq i-1, i, i+1$)上没有意义，因此，Várady, et al. [13]给了新的 s_i 的定义：

$$s_i = \frac{\sin(\theta_{i+1}) h_{i-1}^\perp}{\sin(\theta_{i+1}) h_{i-1}^\perp + \sin(\theta_i) h_{i+1}^\perp} \quad (3-28)$$

其中， θ_i 为 $\angle v_{i-1} v_i v_{i+1}$ ， h_{i-1}^\perp 为点到边 l_{i-1} 的距离。如图 2-7 展示了角 θ_{i-1} 和距离 h_{i+1}^\perp 。

不同于 Zheng and Ball [14]的控制点索引方法，GB 面片控制点的索引方式更为直观。我们用 $\mathbf{V}_{j,k}^{d,i}$ 表示第 i 条边上第 k 层第 j 个控制点。对于每一层的控制点编号 j 采用从左至右的方式。可以看到，两条相邻边有公共控制点，但其在不同的边上的编号不同。例如在图 3-12 中，我们以最底边为第一条边，按逆时针方向，分别为第 2、3、4、5 条边，考虑最左下角控制点，对于第一条边而言，其编号为 $\mathbf{V}_{0,0}^{5,1}$ ，而对于第五条边而言，其编号为 $\mathbf{V}_{5,0}^{5,5}$ ，即控制点 $\mathbf{V}_{0,0}^{5,1}$ 和 $\mathbf{V}_{5,0}^{5,5}$ 为同一控制点。

第 i 条边上的 Bézier 带定义成如下形式：

$$S_i^d(s_i, h_i) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i \mathbf{V}_{j,k}^{d,i} B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) \quad (3-29)$$

其中， $\mu_{j,k}^i$ 为权重函数，其特殊取值可以使得 GB 面片在第 i 条边上的曲线只由第 i 条边上的 Bézier 带控制点决定：

$$k < 2 \quad \mu_{j,k}^i = \begin{cases} \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} & j < 2 \\ 1 & 2 \leq j \leq d-2 \\ \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} & j > d-2 \end{cases} \quad (3-30)$$

$$k \geq 2 \quad \mu_{j,k}^i = \begin{cases} 0 & j < k \\ \frac{1}{2} & j = k \\ 1 & j > k \end{cases} \quad \mu_{j,k}^i = \begin{cases} 0 & j > d-k \\ \frac{1}{2} & j = d-k \\ 1 & j < d-k \end{cases} \quad (3-31)$$

可以看到上述加权 Bernstein 多项式之和不为 1，为保证 GB 面片的仿射不变性，引入中心控制点 \mathbf{V}_0 ，在图形上为最内层控制点的几何中心(见式(3-32))，其权重即为不足 1 的部分，见式(3-34)。

$$\mathbf{V}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_{l,l-1}^{d,i} \quad (3-32)$$

至此，GB 面片的解析式可以写出，其由所有 Bézier 带和中心控制点决定：

$$S^d(u, v) = \sum_{i=1}^n S_i^d(s_i(u, v), h_i(u, v)) + S_0^d(u, v) \quad (3-33)$$

其中，

$$\begin{aligned} S_0^d(u, v) &= V_0 B_0^d(u, v) \\ B_0^d(u, v) &= 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i(u, v)) B_k^d(h_i(u, v)) \end{aligned} \quad (3-34)$$

下图为定义在正五边形上的 5 次的 GB 面片, 其 Matlab 程序代码见附录 2.9。

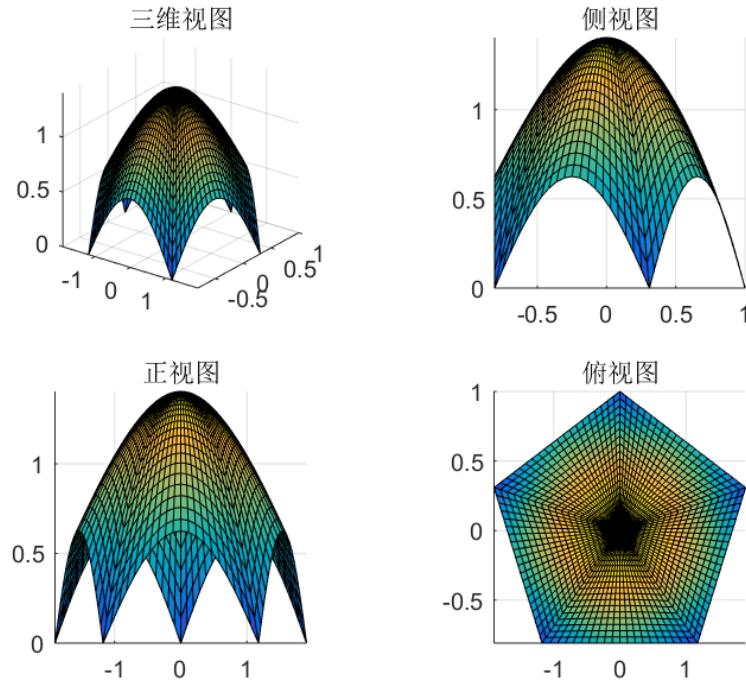


图 3-13 五边 5 次 GB 面片

在[17]中, 作者对 GB 面片进行了修正, 包括从中心控制点的选取、局部参数的改进、GB 面片解析式等。在[16, 18]中, 作者将其推广到多边形有凹角、多边形域有洞的情况, 并给出了相应的表达式。在下一章中, 我们是以本小节介绍的 GB 面片, 亦即初始定义的 GB 面片进行不同 GBC 对 GB 面片的影响分析。

3.6 方法总结

结合上述 Bézier 曲面, 可以看到除了 Warren^[10]的 Base point 方法外, 其余构造多边面片主要从四个方面着手, 多边形域、多边形域的参数表示、控制网格、基函数。我们简单总结下:

- (1) S 面片的适用多边形域取决于其所选用的广义重心坐标, 其控制网格是三角域上控制网格的推广, 所用的基函数为推广的 n 元 Bernstein 基函数。S 面片的一大缺点是随着面片边数和次数的上升, 其控制点数量显著增加;
- (2) Toric 面片只能定义在格多边形上, 其定义域参数为自定义的线性算子 h_i , 对应的控制网格为内部包含的整数格点, 自定义的基函数类似于 Bernstein 基函数的推广, 由 toric 簇的许多性质可以保证 toric 面片的诸多良好性质, 但其只适用于格多边形, 很大程度上限制了其具体应用;
- (3) Base point 方法与其它方法不同, 其是在三角域上的有理 Bézier 曲面的基础

上令部分权因子为 0 从而得到 2-6 边面片;

(4) Zheng 等人的方法可定义在 $n \leq 6$ 的多边形上, 对应的控制网格为“轮盘式”的图案, 但其对于不同边数和次数均需通过条件求解参数表示 u 和面片方程, 没有统一的解析式;

(5) GB 面片可以定义在任何多边形上, 包括非凸多边形、不连通的多边形等。本文只介绍了凸多边形上的 GB 面片情形, 其选用张量积型二元 Bernstein 基函数, 利用自定义的局部参数 s_i, h_i 作为定义域参数化的手段, 需要注意的是, s_i, h_i 也为广义重心坐标的函数。GB 面片采用“轮盘式”的控制网格, 并对每个控制点赋予权重函数 $\mu_{j,k}^i$ 。

我们连同 2.5 节介绍的两种传统 Bézier 曲面以表格的形式对多边形域上构造 Bézier 曲面进行了归纳, 见表 3-1。

表 3-1 Bézier 曲面构造方法对比

名称	域多边形	参数表示	控制网格	基函数
矩形域张量积型 Bézier 曲面	矩形域	二维笛卡尔坐标	$m \times n$ 棋盘式	张量积型二元 Bernstein 基函数
三角域上 Bézier 曲面	三角形域	三角形面积坐标	$ \lambda = d$	二元 Bernstein 基函数
S 面片	取决于广义重心坐标适用条件	广义重心坐标	$ \lambda = d$	n 元 Bernstein 基函数
Toric 面片	格多边形	线性算子 h_i	整数格点	$c_\lambda \prod_{i=1}^n h_i(t)^{h_i(\lambda)}$
Zheng 等人	$n \leq 6$ 的多边形	未具体给出, 满足约束条件即可	轮盘式	根据限制条件求解
GB 面片	凸多边形、有凹角、有洞的多边形	局部参数 s_i, h_i	轮盘式	张量积型二元 Bernstein 基函数
Base point 方法	三角域	在三角域上有理 Bézier 曲面上令部分权重为 0 构造		

第4章 GBC 选取对 GB 面片的影响

在第3章中，我们对几种重要的 Bézier 曲面构造做了系统的总结，并对其构造方法做了归纳。其中，GBC 作为定义域参数化的主要工具，其对 Bézier 曲面构造起着重要作用。在本章中，我们以最近提出的 GB 面片^[13, 16-18]为例，探讨三种 GBC(Wachspress、Mean Value、Harmonic 坐标)的选取对 Bézier 曲面的影响。

我们从简单的正五边 5 次 GB 面片入手。考虑各顶点到其中心点距离为 1 的正五边形，如下图 4-1 最左侧图形：

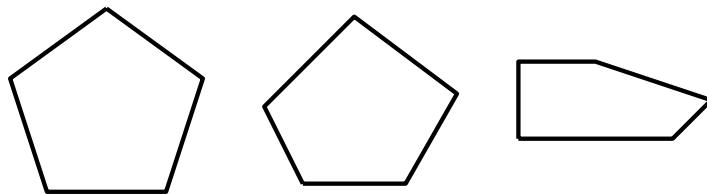


图 4-1 三种不同五边形域

可知控制点层数 $l = 3$ ，我们采用如下方法设定对称的控制网格：对于第 i 边，其上 3 层控制点 $k = 0, 1, 2$ ，控制点 $V_{j,0}^{5,i}$ 的横纵坐标为第 i 边的各 5 等分节点， $j = 0, 1 \dots, 5$ ，其高度即竖坐标依次取 0, 0.4, 0.8, 0.8, 0.4, 0。控制点 $V_{j,1}^{5,i}$ 的横纵坐标为控制点 $V_{4,0}^{5,i-1}$ 和 $V_{1,0}^{5,i+1}$ 所连线段的各 5 等分节点，其竖坐标依次取 0.4, 0.8, 1.2, 1.2, 0.8, 0.4。类似地，控制点 $V_{j,2}^{5,i}$ 的横纵坐标为控制点 $V_{3,0}^{5,i-1}$ 和 $V_{2,0}^{5,i+1}$ 所连线段的各 5 等分节点，对应的竖坐标依次取 0.8, 1.2, 1.6, 1.6, 1.2, 0.8。由 3.5 节中心控制点的定义，我们将中心控制点 V_0 的横纵坐标设定为正五边形的中心，竖坐标取 1.6。其控制网格在 XOY 平面上的投影可参见图 3-12。

借助 Matlab 软件，分别画出选取 Wachspress 坐标、Mean Value 坐标、Harmonic 坐标作为 GBC 时所构造出的正五边 5 次 GB 面片，相关程序代码见附录 2.8。需要注意的是，Harmonic 坐标为正五边形上的 Laplace 方程的解，我们借助 Matlab 里的 pdetool 工具进行数值求解，并利用插值方法求出所需要的网格点处的值。其实现技术见附录 1.2。

如图 4-2 所示，为加以区分，我们将选用 Wachspress 坐标对应的 GB 面片设定为红色，Mean Value 坐标对应的 GB 面片设定为绿色，Harmonic 坐标对应的 GB 面片设定为蓝色。可以看到，选取三种不同的 GBC 所构造的五边 5 次 GB 面片大体上一致，很难从直观上发掘其不同之处，因此，在下文中，我们将分别从中心控制点的移动、等高线、高斯曲率图三个角度进一步研究不同 GBC 对其所构造的 GB 面片的影响。

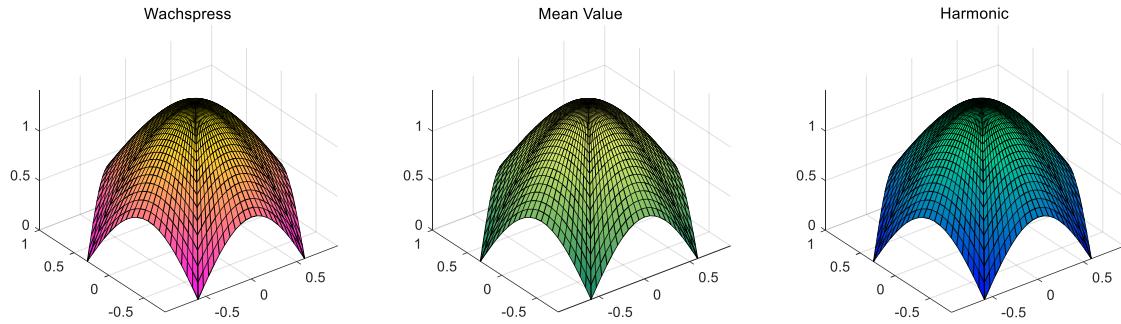


图 4-2 三种 GBC 下的正五边 5 次 GB 面片

在正式探讨不同 GBC 选取对 GB 面片的影响之前，我们先讨论下不同 GBC 对 GB 面片的一相同之处，那就是不改变 GB 面片的主要性质，在 2.5 节中我们介绍了传统 Bézier 曲面的几个重要性质，事实上，GB 面片也有类似性质，其不受 GBC 种类的影响。

4.1 GB 面片的主要性质

我们假设 S^d 为 n 边 d 次 GB 面片，其解析式见式(3-33)。我们总结 GB 面片的 3 个主要性质并进行证明。

(1) 仿射不变性。对 GB 面片做仿射变换 \mathbf{H} 得到新的 GB 面片与对原 GB 面片控制点 $\mathbf{V}_{j,k}^{d,i}$ 做相同仿射变换得到新的控制点对应的 GB 面片一致。

证明 设仿射变换 $\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{P}$ ，其中 \mathbf{A} 为线性变换， \mathbf{P} 为平移，则

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(S^d) &= \mathbf{A}(S^d) + \mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^n S_i^d(s_i, h_i) + S_0^d(s_i, h_i)\right) + \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) \mathbf{A}(\mathbf{V}_{j,k}^{d,i}) \\ &\quad + B_0^d(s_i, h_i) \mathbf{A}(\mathbf{V}_0) + \mathbf{P} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) + B_0^d(s_i, h_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) (\mathbf{A}(\mathbf{V}_{j,k}^{d,i}) + \mathbf{P}) + B_0^d(s_i, h_i) (\mathbf{A}(\mathbf{V}_0) + \mathbf{P}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) \mathbf{H}(\mathbf{V}_{j,k}^{d,i}) + B_0^d(s_i, h_i) \mathbf{H}(\mathbf{V}_0) \end{aligned}$$

(2) 边界性质。GB 面片在各边上为一条 d 次 Bézier 曲线。

证明 在边 l_{i_0} 上， $1 \leq i_0 \leq n$ ，由 3.5 节中局部参数的性质可知 $h_{i_0} = 0$ ，因此当 $k \geq 1$ 时， $B_k^d(h_{i_0}) = h_{i_0}^k (1-h_{i_0})^{d-k} d!/k!(d-k)! = 0$ ，又由 $\mu_{j,k}^i$ 的定义式(3-30)和式(3-31)可知 $\mu_{j,0}^{i_0} = 1, 0 \leq j \leq d$ ， $\mu_{d,k}^{i_0-1} = \mu_{1,k}^{i_0+1} = 0, 0 \leq k \leq l-1$ ，所以

$$S_{i_0}^d(s_{i_0}, h_{i_0}) = \sum_{j=0}^d B_j^d(s_{i_0}) \mathbf{V}_{j,0}^{d,i_0} \quad (4-1)$$

又因为 $s_{i_0-1} = 1, s_{i_0+1} = 0$ ，所以

$$\begin{aligned} S_{i_0-1}^d(s_{i_0-1}, h_{i_0-1}) &= \sum_{k=0}^{l-1} \mu_{d,k}^{d,i_0-1} B_k^d(h_{i_0-1}) V_{d,k}^{d,i_0-1} = 0 \\ S_{i_0+1}^d(s_{i_0+1}, h_{i_0+1}) &= \sum_{k=0}^{l-1} \mu_{0,k}^{d,i_0+1} B_k^d(h_{i_0+1}) V_{0,k}^{d,i_0+1} = 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

而当 $i \neq i_0 - 1, i_0 + 1$ 时, $h_i = 1$, 对于 S_i^d 的每一项 $\mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i)$, 由 $k \leq l-1 < d$, 所以 $B_k^d(h_i) = 0$, $0 \leq k \leq l-1$, 因此 $S_i^d = 0$ 。所以 GB 面片在边 l_{i_0} 上的取值为

$$S^d(u, v) = S_{i_0}^d(s_{i_0}, h_{i_0}) = \sum_{j=0}^d B_j^d(s_{i_0}) V_{j,0}^{d,i_0}, \quad (u, v) \in l_{i_0} \quad (4-3)$$

又因为 s_{i_0} 在边 l_{i_0} 上从 0 变化到 1, 因此式(4-3)即为一条以 $V_{j,0}^{d,i_0}, 0 \leq j \leq d$ 为控制点的 d 次 Bézier 曲线。

(3) 角点插值。GB 面片在角点处插值于其控制网格。

证明 直接由上述边界性质可得。

事实上, 之所以 GB 面片的主要性质与 GBC 种类无关, 是因为在 2.6 节中, 可以看到三种 GBC 均满足单位分解性和分段边界线性性, 使得 GB 面片的局部参数 s_i, h_i 在边界上的性质(见 3.5 节)成立, 从而 GB 面片的几个主要性质也成立。

下面我们从中心控制点的移动、等高线、高斯曲率三个角度正式探讨 GBC 选取对 GB 面片的不同之处。

4.2 中心控制点的移动

中心控制点 V_0 是 GB 面片的一大特点, 其用于调整 GB 面片的内部位置, 当中心控制点的位置发生变化时, GB 面片会随之发生相应的变化。本节中, 我们将研究在不同 GBC 选取下, 中心控制点的移动对 GB 面片的不同影响。

由式(3-33)可知, 当中心控制点变化 ΔV_0 时, GB 面片上各点的变化为

$$\Delta S^d = \Delta V_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^d \mu_{j,k}^i B_j^d(s_i) B_k^d(h_i) \right) \quad (4-4)$$

可知, 在给定 GBC 后, 各点的变化程度只与其域多边形形状、面片的次数 d 和中心控制点变化量 ΔV_0 有关, 而与设定的控制网格无关。域多边形的形状决定了该点的局部参数 s_i 和 h_i , 次数 d 决定了控制点层数 l 。我们更关心 V_0 在竖直方向的移动对 GB 面片上各点的高度的变化情况。当高度变化 Δz 时, 对于五边 5 次 GB 面片而言, 其各点的高度变化为

$$\Delta Z = \Delta z \left(1 - \sum_{i=1}^5 \sum_{k=0}^2 \sum_{j=0}^5 \mu_{j,k}^i B_j^5(s_i) B_k^5(h_i) \right) \quad (4-5)$$

我们分别画出 Δz 取 1.4、4.4、-0.6、-1.6 时对应的 GB 面片的高度变化, 如图 4-3 所示。可以发现, 在三种 GBC 选取下, GB 面片各点高度的变化同中心控制点高度变化均成正相关, 当中心控制点向上移动时, GB 面片整体高度变高,

当中心控制点向下移动时, GB 面片整体高度变低, 且越靠近中心的点其变化量越大, 事实上, 从式(4-5)中亦可得出此结论, 这也在一定程度上展示了中心控制点用于调整 GB 面片位置的优越性。

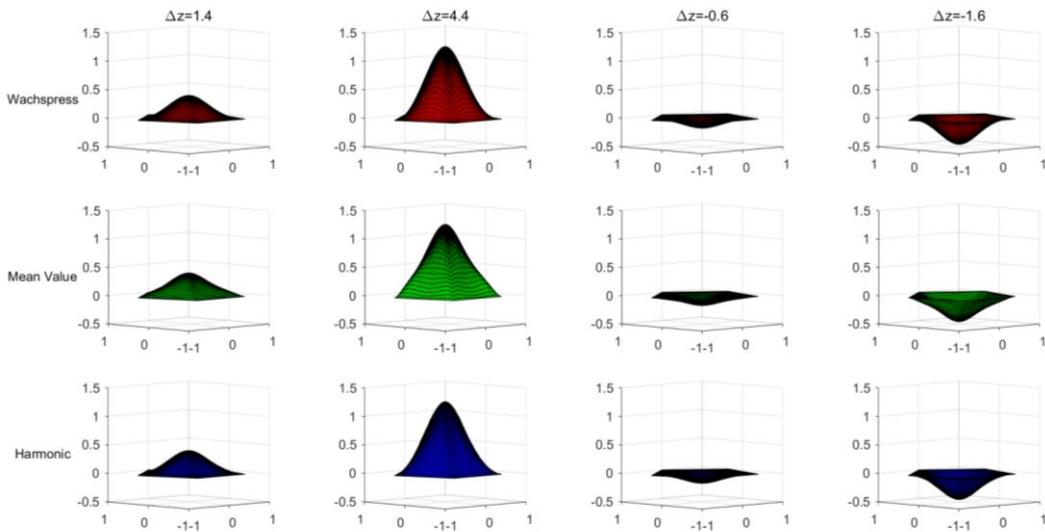


图 4-3 不同 GBC 下移动中心控制点 GB 面片高度的变化

另一方面, 从图 4-3 中难以看出三种 GBC 下的 GB 面片高度变化的差异, 我们将其放置在同一俯视图中进行观察, 由式(4-5)可知, 三种不同 GBC 对于同一点的高度变化的强弱只与该点所在位置有关(亦即 GBC 取值)而与 Δz 取值无关, 因此我们只需取一个 Δz 画出其高度变化的俯视图即可。

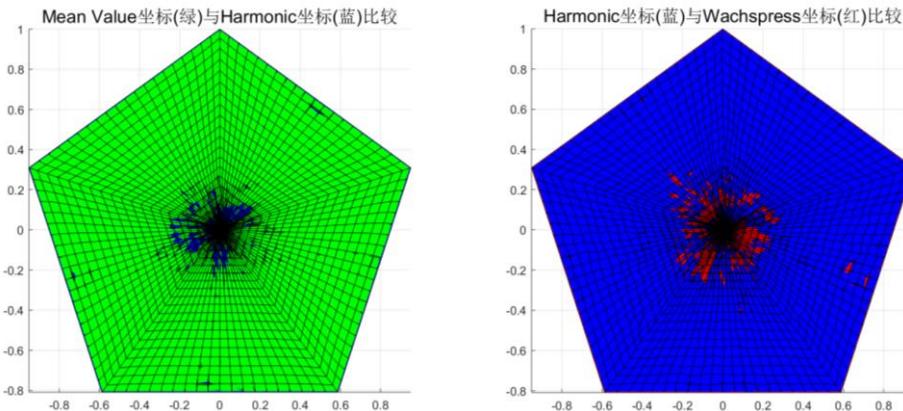


图 4-4 正五边形上 GB 面片在三种 GBC 下的高度变化俯视图

如图 4-4 所示, 在左图中, 我们将 Mean Value 坐标与 Harmonic 坐标对应的 GB 面片高度变化放一起比较, 其中绿色表示 Mean Value 坐标下的高度变化, 蓝色表示 Harmonic 坐标下的高度变化。可以发现, 在绝大部分区域, Mean Value 坐标与 Harmonic 坐标相比, 其高度变化更大, 只在中心处的部分小区域内 Harmonic 坐标下的高度变化较 Mean Value 坐标明显。类似的, 在右图中, 红色表示 Harmonic 坐标下的高度变化, 可以发现在大部分区域, Wachspress 坐标下的高度变化不如 Harmonic 坐标明显, 同样的仅在中心附近的部分区域内 Wachspress 坐标下的高度变化更大。

进一步，我们考虑非正五边形上的 5 次 GB 面片在三种不同 GBC 下随中心控制点移动的高度变化，我们选取了图 4-1 中右侧两种非正五边形域，同样我们分别画出三种 GBC 下的高度变化俯视图，如图 4-5。可以发现，在两种非正五边形域中，与 Wachspress 坐标和 Harmonic 坐标相比，选用 Mean Value 坐标下的高度变化仍更明显，但其变化更明显的区域较图 4-4 中的正五边形上的区域相比其面积有所减少。在图 4-5 上图中，Harmonic 坐标下的高度变化比 Wachspress 坐标下的高度变化更大，而在图 4-5 下图中，二者的面积无明显大小之分。

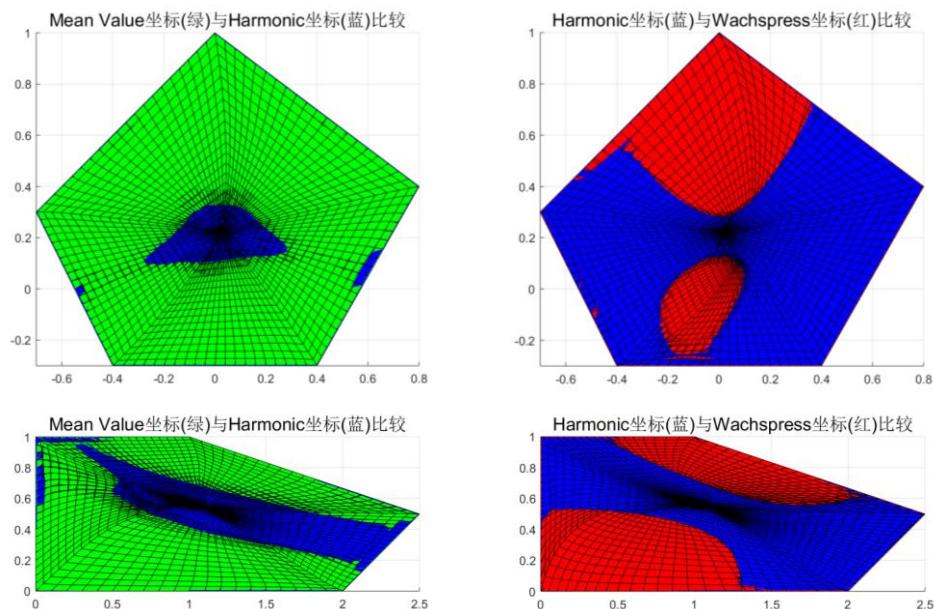


图 4-5 非正五边形上 GB 面片在三种 GBC 下的高度变化俯视图

通过上述实验，我们大致可以得出这样一个结论，在五边 5 次 GB 面片中，选用 Mean Value 坐标作为 GBC 时，其曲面的高度受中心控制点的影响较其它两种坐标更大，而 Wachspress 坐标与 Harmonic 坐标相比，其影响程度跟域多边形形状有关。类似的我们也可以去验证其它边数和次数的 GB 面片的结论。

4.3 等高线

为进一步研究 GB 面片在不同 GBC 下的各点高度情况，我们分别画出其对应的等高线图。我们沿用上节的颜色说明，依次将 Wachspress 坐标、Mean Value 坐标、Harmonic 坐标对应的等高线图颜色设定为红色、绿色、蓝色。

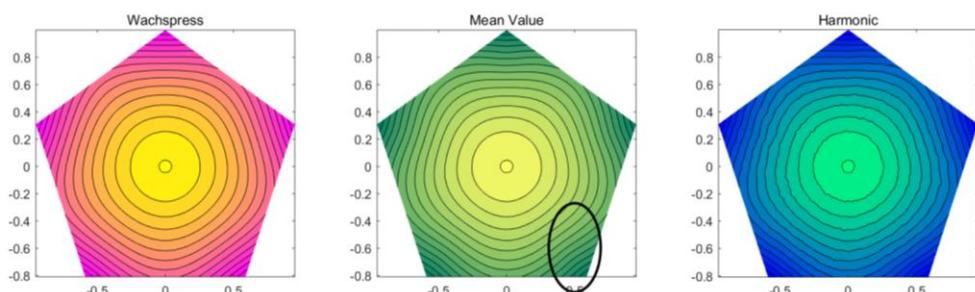


图 4-6 正五边形上三种 GBC 下的 GB 面片等高线图

图 4-6 展示了上节中正五边 5 次 GB 面片分别在三种 GBC 下的等高线图，其中两相邻等高线间隔为 0.1。可以发现，三者的等高线分布、各区域的等高线密集程度大体一致，且均在各边中点和五边形中心的连线处表现出明显的“山脊”现象。不同的是，在选用 Mean Value 坐标的 GB 面片中，五边形顶点和中心的连线处有一定程度的“山谷”现象，且越靠近顶点处，其现象越突出，如椭圆框内所示，而在其它两种坐标中表现均不明显。

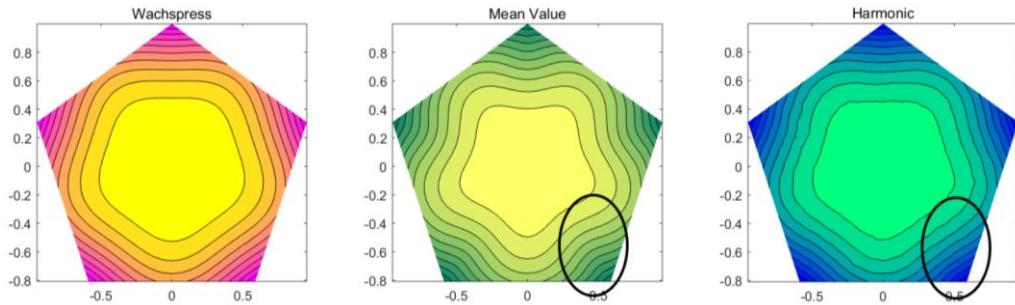


图 4-7 $\Delta z = -1.6$ 时的 GB 面片等高线图

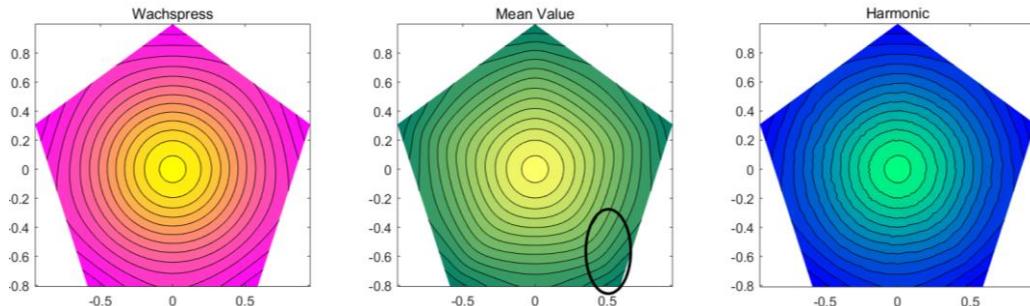


图 4-8 $\Delta z = 4.4$ 时的 GB 面片等高线图

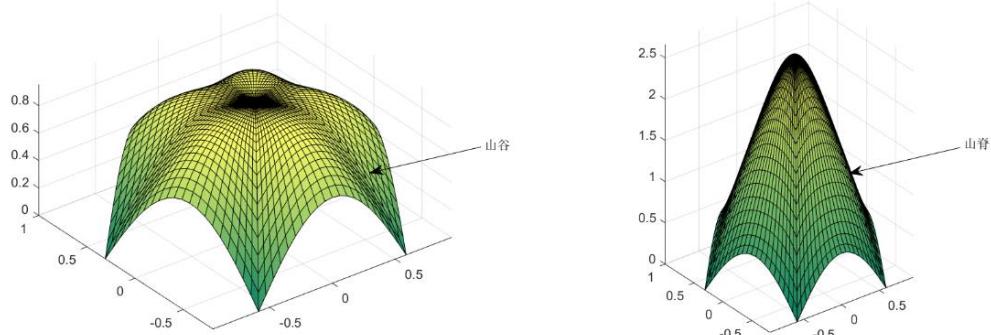


图 4-9 选用 Mean Value 坐标下的“山谷”和“山脊”现象

当我们把中心控制点向下移动 $\Delta z = -1.6$ 时，如图 4-7 所示，可以发现 Mean Value 坐标对应的 GB 面片在顶点处的“山谷”现象变得更加明显，图 4-9 左图展示了 $\Delta z = -1.6$ 时，选用 Mean Value 坐标对应的五边 5 次 GB 面片三维视图，在五边形顶点处曲面表现为“凹”进去的部分即为“山谷”。除此之外，选用 Harmonic 坐标对应的 GB 面片也有类似的“山谷”现象，但其不如 Mean Value 坐标明显，而选用 Wachspress 坐标对应的 GB 面片则表现更为稳定。当我们把中心控制点向上移动 $\Delta z = 4.4$ 时，如图 4-8 所示，可以发现选用 Mean Value 的 GB 面片在五边形顶点和中心的连线处表现为轻微的“山脊”现象，同样的，越靠近五边形顶

点处其现象越明显，而相比之下，其它两种坐标则没有此现象。图 4-9 右图展示了五边 5 次 GB 面片的“山脊”现象。

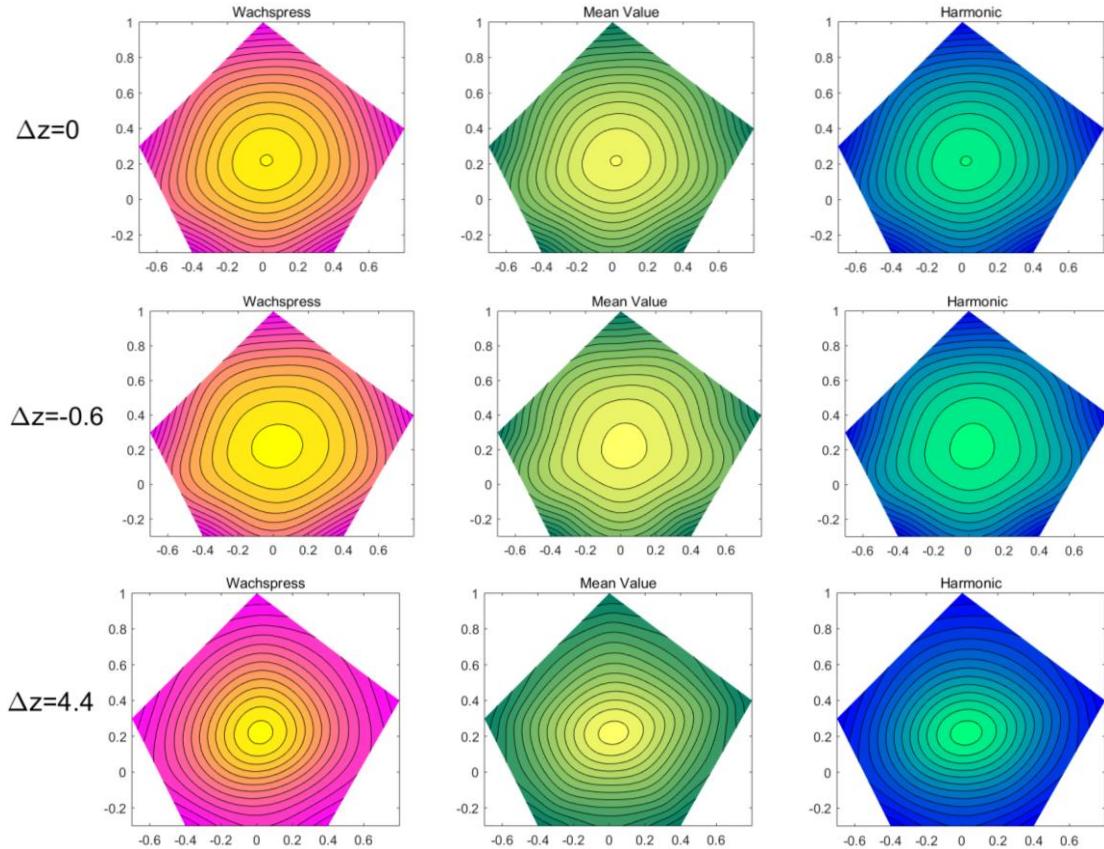


图 4-10 非正五边形域上 GB 面片的等高线图(一)

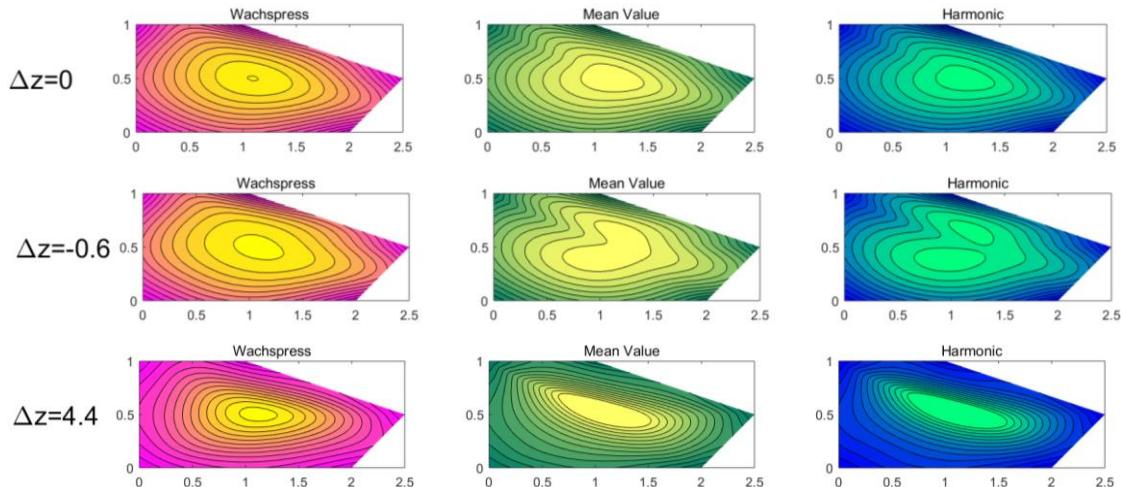


图 4-11 非正五边形域上 GB 面片的等高线图(二)

同样，我们考虑两种非正五边形域上的 GB 面片。如图 4-10 和图 4-11 所示，可以发现，三种 GBC 下的 GB 面片均在五边形各边中点和中心的连线处有明显的“山脊”现象，且选用 Wachspress 坐标的 GB 面片的等高线随中心控制点高度变化表现较为稳定，在五边形顶点和中心连线处没有明显的“山谷”现象。相比之下，选用 Mean Value 坐标的 GB 面片其在五边形顶点和中心连线处有不同程度的“山谷”或“山脊”现象，当中心控制点向下移动时，其表现为“山谷”现

象，且向下移动越大，其现象越明显；当中心控制点向上移动时，其表现为轻微的“山脊”现象。选用 Harmonic 坐标的 GB 面片，其也有类似于选用 Mean Value 坐标的结论，但其不如 Mean Value 坐标明显，即介于 Wachspress 坐标和 Mean Value 坐标之间。

4.4 高斯曲率图

为探讨不同的 GBC 选取对 GB 面片的各点的弯曲程度的影响，本节中我们画出各 GBC 下 GB 面片的高斯曲率图并加以分析。为更好地呈现曲率图的效果，我们将本章开头介绍的控制网格的高度整体降低，设定成原有高度的 $1/8$ ，使得曲面变“平缓”，从而不会出现中心点处和其它地方的高斯曲率差异很大的情况。另一方面，GB 面片的解析式(式 3-32)有一定复杂，计算出其高斯曲率的表达式不是一件容易的事情，因此，我们采用 Meyer, et al.^[24]提出的一种通过散乱数据点计算高斯曲率的估算算法。点 x 处的高斯曲率采用下式进行估算，其具体数值计算方法见附录 1.3，有关 Matlab 程序代码见附录 2.10。

$$K(x) = \frac{2\pi - \sum_{j \in N(x)} \theta_j}{A} \quad (4-6)$$

图 4-12 展示了正五边 5 次 GB 面片分别在三种 GBC 下的高斯曲率图，可以看到，三幅图中均表现为在中心点处的高斯曲率值更大，而其它地方的高斯曲率值较小。不同的是，选用 Mean Value 坐标的 GB 面片在中心处表现更明显，其中心点和顶点的连线出的高斯曲率值较其它两种坐标更突出，除此之外，选用 Wachspress 坐标和 Harmonic 坐标的 GB 面片其在五边形的边界处的高斯曲率值较 Mean Value 坐标平稳，曲面表现更平缓。

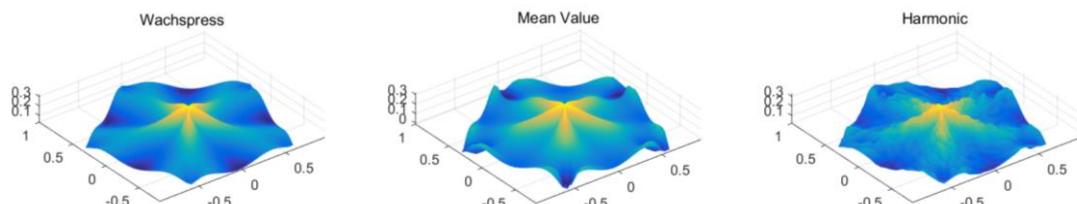


图 4-12 正五边形上三种 GBC 下的 GB 面片高斯曲率图

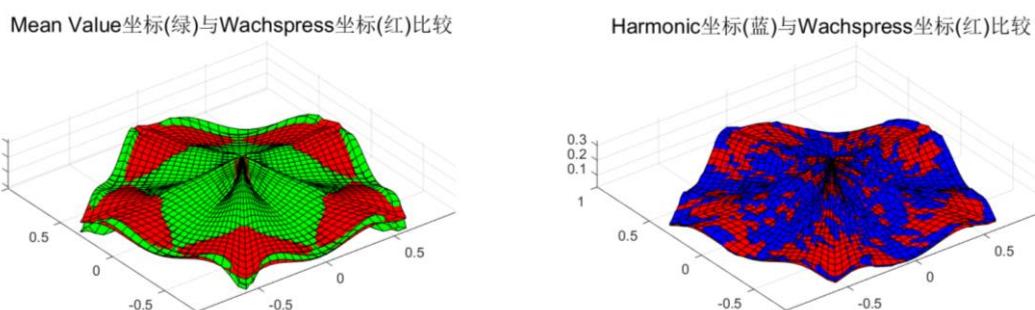


图 4-13 三种 GBC 下的 GB 面片高斯曲率比较

三种 GB 面片的高斯曲率的极值差异不大，因此，我们更关心其在各点处高斯曲率值的大小之分。我们将三种 GBC 下的 GB 面片放置在同一图中两两比较，如下图 4-13 所示，可以看到，在左图中，选用 Mean Value 坐标的 GB 面片在中心处的大部分区域其高斯曲率值较选用 Wachspress 坐标的 GB 面片高，而在五边形各边边缘附近选用 Wachspress 坐标的 GB 面片其高斯曲率值更大；在右图中，选用 Harmonic 坐标和 Wachspress 坐标的 GB 面片二者的高斯曲率值的高低区域较为离散，整体表现为在中心点附近，选用 Harmonic 坐标的 GB 面片其值更高，而在靠近五边形的各边附近，选用 Wachspress 坐标的 GB 面片其值更高。

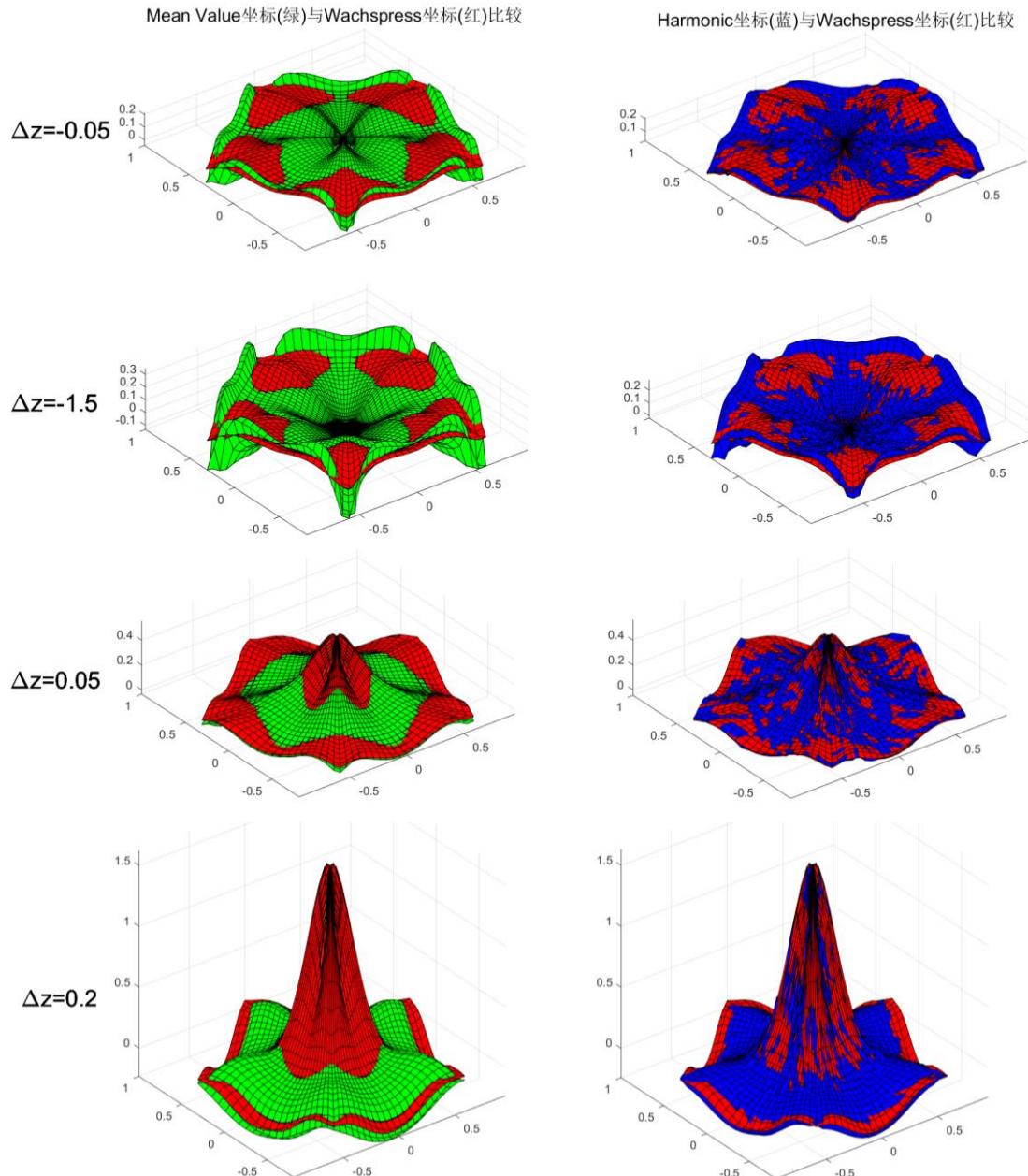


图 4-14 正五边 5 次 GB 面片中心控制点移动对应的高斯曲率

进一步，我们考虑在三种 GBC 下，中心控制点的位置对 GB 面片高斯曲率的影响。如图 4-14 所示。可以看到，当中心控制点向下移动时，三种坐标对应

的高斯曲率在中心处整体均成下降趋势，较周围处更低。选用 Mean Value 坐标的 GB 面片在中心点处附近的高斯曲率值仍然较其他两种坐标高，且与图 4-13 相比，其范围向四周扩散，如第二行图所示，当 $\Delta z = -1.5$ 时，范围接近于五边形边缘处。Harmonic 坐标具有类似的结论，但其不如 Mean Value 坐标明显，且同样的和 Wachspress 坐标相比的高斯曲率值的高低区域较为分散，但在中心点处附近，大体表现为较 Wachspress 坐标高。

另一方面，如图 4-14 最底下两行图所示，当中心控制点向上移动时，三种 GBC 下的 GB 面片在中心点处的高斯曲率整体呈上升趋势，不同的是，和上述结论相反，选用 Wachspress 坐标的 GB 面片在中心点处的高斯曲率值较其它两种坐标更高，只在中心点处和五边形边缘中间的部分环面上表现为 Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标较 Wachspress 坐标高。当 $\Delta z = 2$ 时，该现象表现更明显。

同样的，我们考虑两种非正五边 5 次的 GB 面片。如图 4-15 所示。可以看到，选用 Wachspress 坐标的 GB 面片在中心点处的高斯曲率图变化，其现象同正五边 GB 面片类似，不同的是，对于非正五边 GB 面片而言，其在中心点处的高斯曲率分布大部分是不对称的，亦即其并无明显的以中心为圆心向四周扩散的区域。除此之外，还可以看到，“绿色”和“红色”的分布大致上一致的，亦即选用 Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标的 GB 面片其高斯曲率分布有一定程度的高相似性。

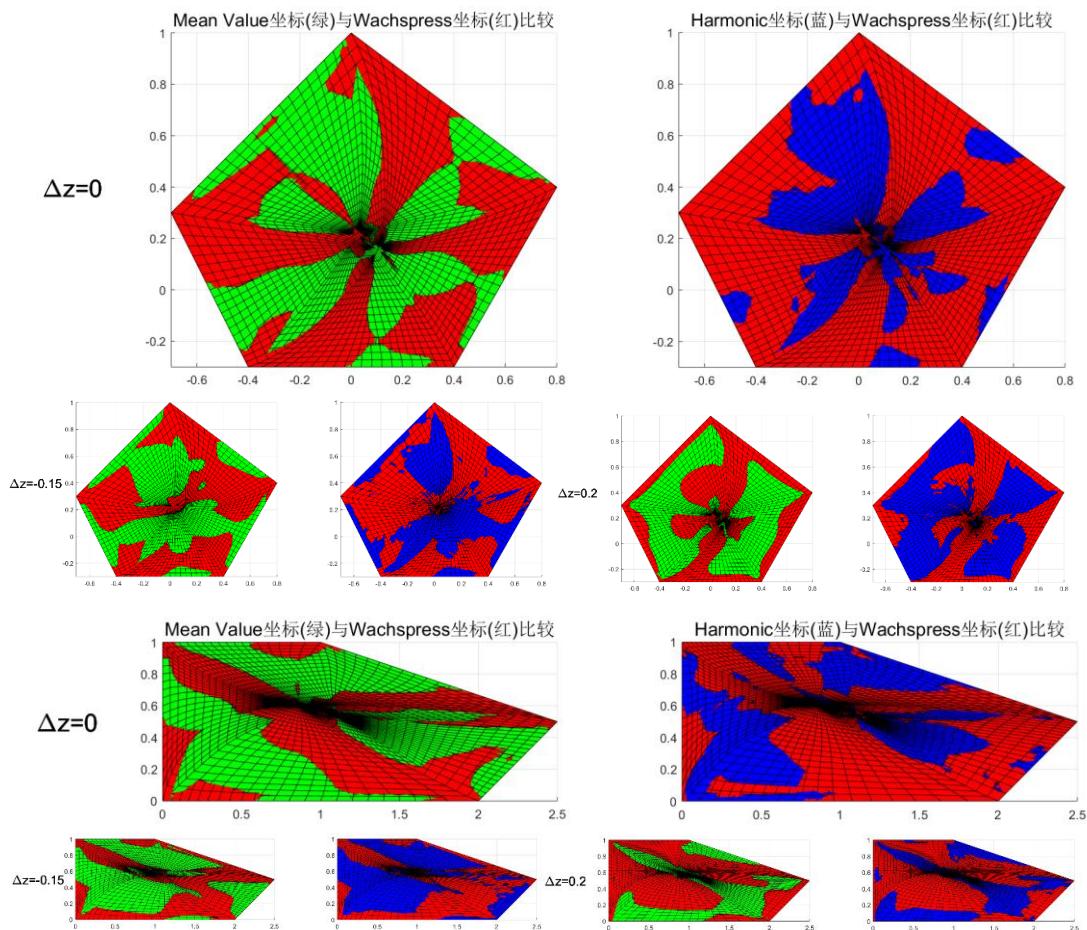


图 4-15 非正五边 5 次 GB 面片中心控制点移动对应的高斯曲率

综上所述，我们可以大致认为对于五边 5 次 GB 面片而言，选用 Wachspress 坐标的 GB 面片，其在中心点处的高斯曲率分布受中心控制点的位置影响较大，具体表现为，当中心控制点高度相比于控制网格较高时，其中心点附近的高斯曲率值较其它两种 GBC 高，而当中心控制点高度相比于控制网格较低时，中心点附近的高斯曲率值较其它两种 GBC 低，而选用 Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标的 GB 面片，其高斯曲率分布有高相似性。

结论

本论文先介绍了有关几何设计的基础知识，包括若干基本定义、Bernstein 基函数及其各种推广形式、Bézier 曲线及其相关性质和两种传统的 Bézier 曲面，然后介绍了三种重要的广义重心坐标，其中 Wachspress 坐标是三角形面积坐标的推广，但其只适用于凸多边形，Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标可用于非凸多边形的情形，但 Mean Value 坐标只在多边形的核部具有非负性，而 Harmonic 坐标具有整体非负性，但其数值求解计算量较大。

接着在第 3 章中，我们系统总结了五种常见多边形域上构造 Bézier 曲面的方法，其中，S 面片可以看作是三角域 Bézier 曲面的推广，其选用广义重心坐标作为定义域参数化，但其控制点数量随着边数和次数的增加而显著上升。Toric 面片定义在格多边形多边形，由 toric 簇的性质可以得到 toric 面片的许多性质，但其格状形式的控制网格结构很大程度上限制了其应用。Base Point 方法考虑三角域上的有理 Bézier 曲面，通过令部分控制点权重为 0 进行构造，但其只能得到 2-6 边面片。Zheng 等人的方法考虑特殊的“轮盘式”的控制网格，通过给定限制条件进行方程的求解，但其没有统一的解析式，针对不同的边数和次数均需重新求解。GB 面片在此基础上给了更一般多边形域上的面片方程，并且引入中心控制点的概念，使得面片可以灵活调整，且相较于 S 面片而言，其控制点数量大大减少。通过了解五种 Bézier 曲面的构造方法，我们得出了这样一个结论，构造多边形域上的 Bézier 曲面主要考虑 4 个问题，包括域多边形形状、定义域参数化方法、控制网格划分及基函数构造，若能合适地处理该 4 个问题，就可以找到构造新的 Bézier 曲面的方法。

为进一步研究不同 GBC 对 Bézier 曲面的影响，我们以三种不同形状的五边形域上 5 次 GB 面片为例，从中心控制点的移动、等高线、高斯曲率三个角度进行研究。大致得出如下结论：

- (1) 选用 Mean Value 坐标的 GB 面片其整体高度受中心控制点移动的影响更大，而 Wachspress 坐标与 Harmonic 坐标相比，其影响程度跟域多边形形状有关；
- (2) 三种 GBC 对应的 GB 面皮均会在中心和各边中点的连线处表现为不同程度的“山脊”现象。而选用 Mean Value 坐标的 GB 面片，其在五边形中心和顶点连线处也会表现出不同程度的“山谷”或“山脊”现象，具体体现为当中心控制点较整体控制点高度更高时，其表现为“山脊”现象；当中心控制点较整体控制点高度更低时，其表现为“山谷”现象。选用 Harmonic 坐标的 GB 面片也有类似现象，但其不如 Mean Value 坐标显著，而相对来说，选用 Wachspress 坐标的 GB 面片在顶点附近的现象不明显；
- (3) 选用 Wachspress 坐标的 GB 面片，其在中心点附近的高斯曲率受中心控制点的高度影响更大，具体表现为，当中心控制点较整体控制点高度更高时，其高斯

曲率值较其它两种坐标高；当中心控制点较整体控制点高度更低时，其高斯曲率值较其它两种坐标低。而 Mean Value 坐标和 Harmonic 坐标分别对应的 GB 面片，其高斯曲率分布有一定程度的相似性。

第 3 章总结了五种多边形域上构造 Bézier 曲面的方法，并做了系统的方法总结，但目前还尚未找到从 4 方面构造新 Bézier 曲面的合适的方法；同时，因为 Harmonic 坐标的计算和高斯曲率的计算均采用数值解法，所以在绘制选用 Harmonic 坐标的 GB 面片的高斯曲率图时存在一定的上下波动情况(见图 4-13、图 4-14、图 4-15)；另一方面，由于 GB 面片解析式的复杂性，本文在探讨不同 GBC 对 GB 面片的影响时，结论主要基于计算机实验得出，且只研究了五边 5 次 GB 面片的情形，对于一般的 GB 面片而言，目前还尚未找到合适的理论说明。

针对论文的不足之处，未来的规划主要体现在三个方面：一是进一步研究多边形域上现有几种主要的 Bézier 曲面的各自优缺点，在方法总结的基础上探讨构造新的 Bézier 曲面的方法；二是改进选用 Harmonic 坐标的 GB 面片的高斯曲率数值算法；三是寻找 GBC 对一般 GB 面片的影响包括中心控制点的移动、等高线、高斯曲率等多个方面的数学证明。

致谢

本毕业论文是在余国朱老师和中国科学技术大学陈发来老师的悉心指导下完成的。从课题选择、文献阅读到方法总结、对比研究，陈老师给予了我很大的指引和帮助。余老师多次阅读我的论文，包括论文格式、语言描述、整体框架等提了许多有用的意见，也正因如此，才能完整呈现出最终的成果。在此，我谨向两位老师致以衷心的感谢和崇高的敬意！

同时，本毕业论文的完成离不开学院老师和同学的支持，在文献查找和程序调试等多个环节中给了我很大的帮助，在此我也诚挚地向他们表示感谢！

最后，感谢学校和学院四年来的栽培，不仅让我学到了许多丰富的知识，更培养了我的思维方式、表达能力，拓宽了我的视野。我将不忘初心、继续前行！

参考文献

- [1] Diderose T D. Composing Bézier simplexes [J]. ACM Transactions on Graphics, 1988, 7(3): 198-221.
- [2] Loop C T, Diderose T D. A multisided generalization of Bézier surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics, 1989, 8(3): 204-234.
- [3] Diderose T, Meyer M. Harmonic coordinates; proceedings of the Pixar Technical Memo 06-02, Pixar Animation Studios, F, 2006 [C]. Citeseer.
- [4] Floater M S. Mean value coordinates [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(1): 19-27.
- [5] Floater M S. Wachspress and Mean Value Coordinates [M]. Approximation Theory XIV: San Antonio 2013. 2014: 81-102.
- [6] Hormann K, Floater M S. Mean value coordinates for arbitrary planar polygons [J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(4): 1424-1441.
- [7] Smith J, Schaefer S. Selective Degree Elevation for Multi-Sided Bézier Patches [J]. Computer Graphics Forum, 2015, 34(2): 609-615.
- [8] Krasauskas R. Toric surface patches [J]. Advances in Computational Mathematics, 2002, 17(1): 89-113.
- [9] Sun L, Zhu C. G1 continuity between toric surface patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 2015, 35-36: 255-267.
- [10] Warren J. Creating multisided rational Bézier surfaces using base points [J]. ACM Transactions on Graphics, 1992, 11(2): 127-139.
- [11] Hosaka M, Kimura F. Non-four-sided patch expressions with control points [J]. Computer Aided Geometric Design, 1984, 1(1): 75-86.
- [12] Sabin M A. Non-rectangular surface patches suitable for inclusion in a b-spline surface; proceedings of the Eurographics '83, Proceedings of the International Conference and Exhibition Fourth Annual Conference of the European Association for Computer Graphics, F, 1983 [C]. North-Holland.
- [13] Várdy T, Salvi P, Karikó G. A Multi-sided Bézier Patch with a Simple Control Structure [J]. Computer Graphics Forum, 2016, 35(2): 307-317.
- [14] Zheng J J, Ball A A. Control point surfaces over non-four-sided areas [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(9): 807-821.
- [15] Hettlinga G J, Kosinka J. Multisided generalisations of Gregory patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 2018, 62: 166-180.
- [16] Salvi P, Várdy T. Multi-sided Bézier surfaces over concave polygonal domains [J]. Computers & Graphics, 2018, 74(AUG.): 56-65.
- [17] Várdy T, Salvi P, Kovács I. Enhancement of a multi-sided Bézier surface representation [J]. Computer Aided Geometric Design, 2017, 55: 69-83.
- [18] Várdy T, Salvi P, Vaitkus M, Sipos Á. Multi-sided Bézier surfaces over curved, multi-connected domains [J]. Computer Aided Geometric Design, 2020, 78.
- [19] 王仁宏, 李崇君, 朱春钢. 计算几何教程 [M]. 计算几何教程, 2008.

- [20] Hormann K, Sukumar N. Generalized barycentric coordinates in computer graphics and computational mechanics [M]. CRC Press, 2017.
- [21] Wachspress E L, Rohde S M. A Rational Finite Element Basis [J]. Journal of Tribology, 1975, 98(4): 635.
- [22] Meyer M, Barr A, Lee H, Desbrun M. Generalized Barycentric Coordinates on Irregular Polygons [J]. Journal of Graphics Tools, 2002, 7(1): 13-22.
- [23] Floater M S, Hormann K, Kós G. A general construction of barycentric coordinates over convex polygons [J]. Advances in Computational Mathematics, 2006, 24(1): 311-331.
- [24] Meyer M, Desbrun M, Schröder P, Barr A H. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds [J]. Visualization and Mathematics III, 2002: 113-134.

附录 1 有关数值方法

1.1 多边面片的实现

Matlab 自带的画三维曲面 `surf` 函数适用于规则的矩形网状结构，在本文的五边形域中，我们考虑连接五边形中心和各边顶点从而得到 5 个三角形，如图 1。我们在每个三角形中分别实现相应的面片，从而得到最终的多边面片。

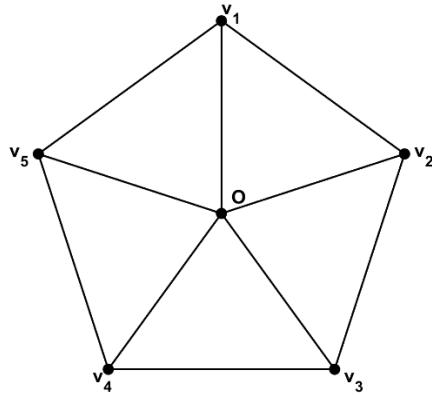


图 1 五边形域分割成五个三角域

如图 2 所示，对于每个三角域的点 (x, y) ，我们采用 (u, v) 参数，其中， u 决定了其在边 $v_i v_{i+1}$ 相对位置， v 决定了其离中心点 O 的距离，有 $(x, y) = v(uv_i + (1-u)v_{i+1}) + (1-v)O$ ，此时 $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ ，即 (u, v) 参数的定义域为规则的矩形域，因此可以利用 `surf` 函数进行面片的实现。

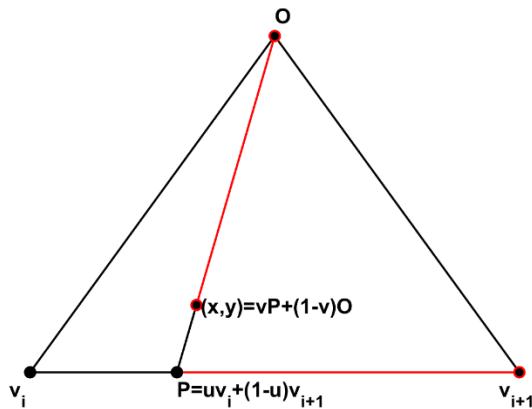


图 2 三角域内点的参数表示

1.2 Harmonic 坐标实现

我们借助 Matlab 里的 `pdetool` 工具，选择“Draw Mode”完成五边形定义域的绘制；再选择“Boundary Condition”输入 Dirichlet 边值条件；接着选择“Mesh Mode”完成三角网格的划分，根据实际情况，选择合适的“Refine Mesh”对网格加细；最后选择“Solve PDE”进行相应的 Laplace 方程求解。图 3 至图 5 展示了求解步骤，图 6 展示了其中求解正五边形域上的 Laplace 方程的解。

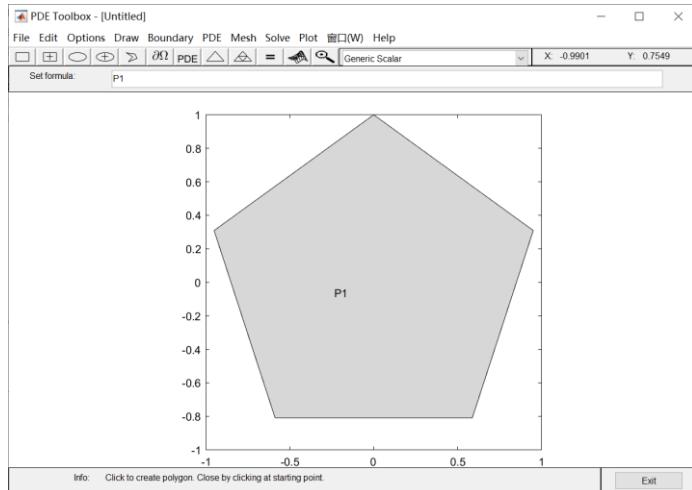


图 3 五边形定义域绘制

The figure shows a "Boundary Condition" dialog box. The title bar says "Boundary Condition". The "Boundary condition equation:" field contains $h^*u=r$. The "Condition type:" section has two options: "Neumann" (radio button not selected) and "Dirichlet" (radio button selected). For "Dirichlet", the "Coefficient" field is "g" with value "0", the "Value" field is "q" with value "0", the "Description" field is "h" with value "1", and the "Equation" field is "r" with value "1-(y-1)/-0.69098". At the bottom are "OK" and "Cancel" buttons.

图 4 边值条件输入

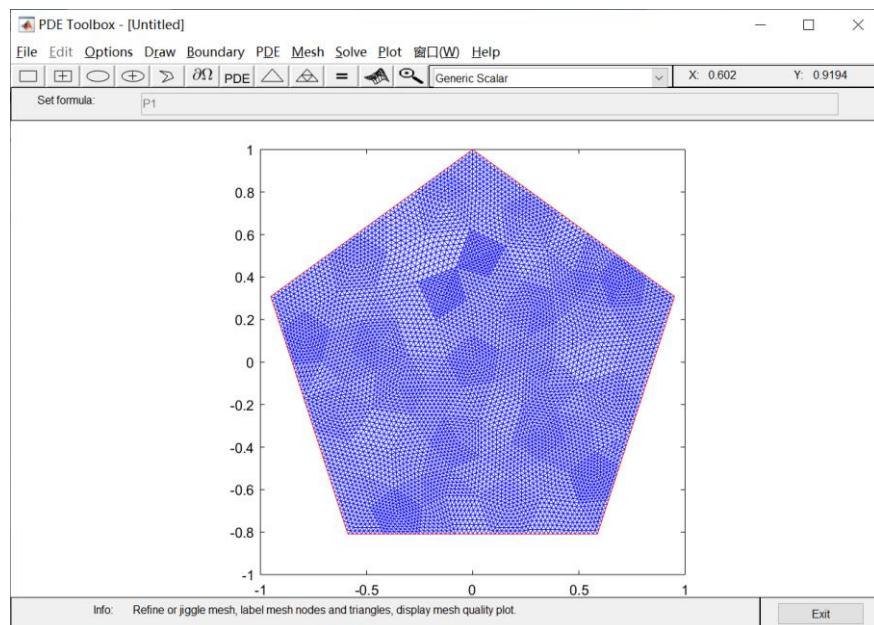


图 5 三角网格划分

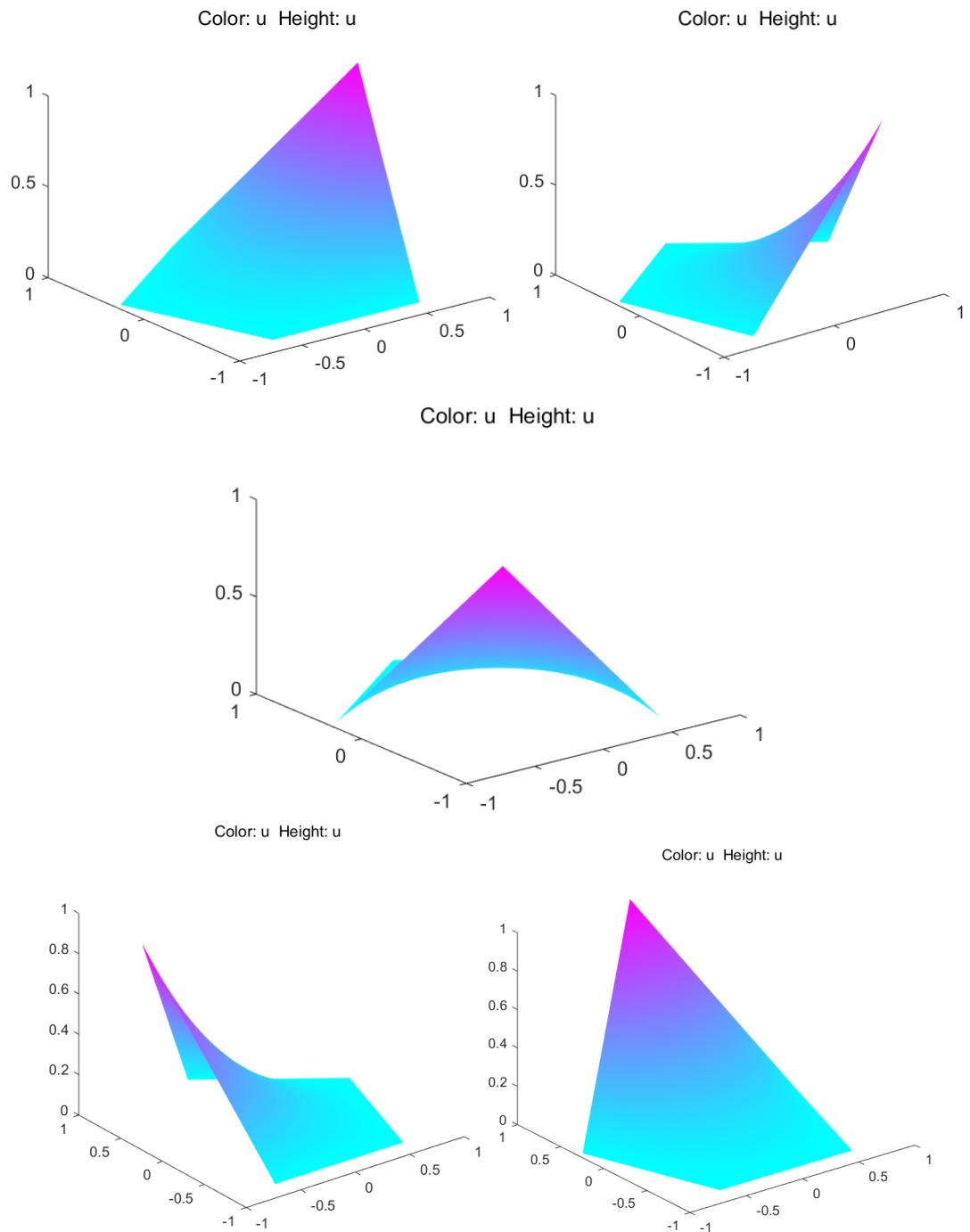


图 6 正五边形域上的 Harmonic 坐标

由附录 1.1 可知，我们采用的是 (u, v) 网格上的数据进行面片绘制，而利用 pdetool 工具所求的为其三角网格划分顶点上的 Harmonic 值，因此我们需要求解指定 (u, v) 网格上的 Harmonic 坐标。我们将 pdetool 求解的数据导入 mat 文件，对于 (u, v) 网格上的点，我们在 mat 文件中寻找离该点最近的 6 个点对应的 Harmonic 值，并以距离的倒数为权重加权求和作为该点的 Harmonic 坐标。其有关代码见附录 2.11。

1.3 离散高斯曲率

式(4-6)中, $N(x)$ 为以 x 为顶点的且用于计算的三角形个数, θ_j 为其三角形中 x 处的夹角, 如图 7 所示, $N(x)$ 为 4, θ_3 为角 v_3xv_4 。 A 为各三角形的部分面积 A_i 之和。其中 A_i 的计算需要考虑该三角形 $\Delta v_i xv_{i+1}$ 的各情况:

- (1) $\Delta v_i xv_{i+1}$ 为锐角三角形。则由 $\Delta v_i xv_{i+1}$ 的外心、边 xv_i 的中点、边 xv_{i+1} 的中点以及点 x 四点围成的区域的面积即为 A_i 。
- (2) $\Delta v_i xv_{i+1}$ 为钝角三角形。则需考虑两种情况:
 - (i) θ_i 为钝角, 则 A_i 为三角形 $\Delta v_i xv_{i+1}$ 面积的一半。
 - (ii) θ_i 不为钝角, 则 A_i 为三角形 $\Delta v_i xv_{i+1}$ 面积的四分之一。

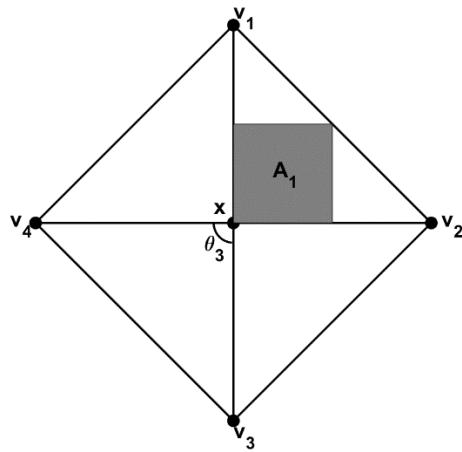


图 7 高斯曲率计算示意图

在 GB 面片的高斯曲率计算中, 对于非边界上的网格点, 则选取其左右两个、上下两个格点进行计算; 对于边界上的点, 则采用其左右相邻的格点的高斯曲率的均值作为该点的高斯曲率, 如图 8 展示了中间点的离散高斯曲率计算。

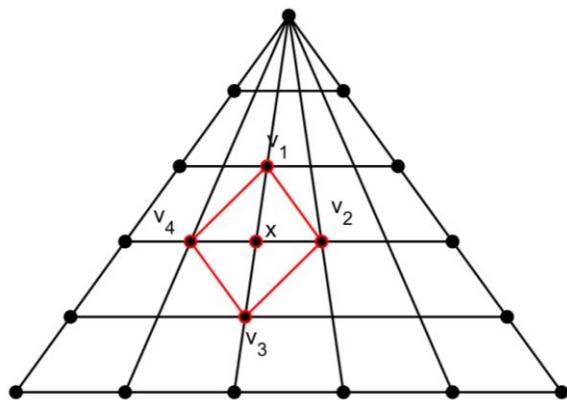


图 8 GB 面片点的高斯曲率计算

附录 2 部分 Matlab 代码

2.1 几何作图法

```

clc;
n = 3;
a1=6;
a2=2;
t = linspace(0,1);
b=[0,0.6,0.3,0.5];
V=zeros(n+1,2);
for i=0:1:n;
    V(i+1,:)=[i/n,b(i+1)];
end
plot((V(:,1))',(V(:,2))','-ko','MarkerFaceColor','k','markersize',a1,'linewidth',a2)
hold on
x=zeros(1,length(t));
y=zeros(1,length(t));
for k = 0:n
    B_i_n = nchoosek(n,k).*t.^k.*(1-t).^(n-k);
    x=x+V(k+1,1).*B_i_n;
    y=y+V(k+1,2).*B_i_n;
end;
plot(x,y,'k','linewidth',a2);
hold on
set(gca,'XTick',0:0.2:1,'YTick',0:0.2:1)
axis off
axis equal
move=[-0.05,-0.02;0,0.05;0,-0.05;0,0.05];
j=[3,1,2];
for i=0:1:n;
    text(V(i+1,1)+move(i+1,1),V(i+1,2)+move(i+1,2),['V_',num2str(i),'^0'],'fontsize',10,'fontweight','bold')
end
t0=1/3;
V1=zeros(n,2);
V2=zeros(n-1,2);
for i=1:1:n;
    V1(i,:)=(1-t0)*V(i,:)+t0*V(i+1,:);
end
plot((V1(:,1))',(V1(:,2))','-ko','MarkerFaceColor','k','markersize',a1,'linewidth',a2)

```

```

hold on
move1=[-0.1,0;0,0.05;0,-0.05];
for i=0:1:2;
text(V1(i+1,1)+move1(i+1,1),V1(i+1,2)+move1(i+1,2),['V_',num2str(i),'^1'],'fontsize'
,10,'fontweight','bold')
text(V1(i+1,1)+move1(i+1,1)+0.04,V1(i+1,2)+move1(i+1,2),'$$\frac{1}{3}$$','inte
rpreter','latex','fontsize',8,'fontweight','bold')
end
for i=1:1:2;
V2(i,:)=(1-t0)*V1(i,:)+t0*V1(i+1,:);
end
plot((V2(:,1))',(V2(:,2))','-ko','MarkerFaceColor','k','markersize',a1,'linewidth',a2)
hold on
move2=[-0.02,-0.05;0.01,0.05];
for i=0:1:1;
text(V2(i+1,1)+move2(i+1,1),V2(i+1,2)+move2(i+1,2),['V_',num2str(i),'^2'],'fontsize'
,10,'fontweight','bold')
text(V2(i+1,1)+move2(i+1,1)+0.04,V2(i+1,2)+move2(i+1,2),'$$\frac{1}{3}$$','inte
rpreter','latex','fontsize',8,'fontweight','bold')
end
p0=(1-t0)*V2(1,:)+t0*V2(2,:);
scatter(p0(1),p0(2),60,'k','filled')
text(p0(1),p0(2)-0.04,['V_0','^3'],'fontsize',10,'fontweight','bold')
text(p0(1)+0.04,p0(2)-
0.04,'$$\frac{1}{3}$$','interpreter','latex','fontsize',8,'fontweight','bold')

```

2.2 S 面片控制网格

```

clear all;
clc;
a1=10;
a2=2;
for i=1:1:2;
if i==1
    subplot(1,2,i)
    t=linspace(0,2*pi,4);
    k=t(1:length(t)-1);
    x=[sin(k),sin(k(1))];
    y=[cos(k),cos(k(1))];
    plot(x,y,'-o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
    hold on
    for j=1:1:2;
        p1=[x(j),y(j)]/3+[x(j+1),y(j+1)]*2/3;

```

```

p2=[x(j+2),y(j+2)]/3+[x(j+1),y(j+1)]*2/3;
x1=[0,p1(1),p2(1),0];
y1=[0,p1(2),p2(2),0];
plot(x1,y1,'-
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
end
p1=[x(3),y(3)]/3+[x(1),y(1)]*2/3;
p2=[x(2),y(2)]/3+[x(1),y(1)]*2/3;
x1=[0,p1(1),p2(1),0];
y1=[0,p1(2),p2(2),0];
plot(x1,y1,'-
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
text(0.1,0.1,'V_{111}','FontWeight','bold')
for t=3:(-1):1;
    stre1=['V_',num2str(t),'_0_',num2str(3-t)];
    stre2=['V_','0_',num2str(3-t),'_',num2str(t)];
    stre3=['V_',num2str(3-t),'_',num2str(t),'_0'];
    text(x(1)*t/3+x(2)*(3-t)/3+0.1,y(1)*t/3+y(2)*(3-
t)/3,stre1,'FontWeight','bold')
    text(x(2)*t/3+x(3)*(3-t)/3,y(2)*t/3+y(3)*(3-t)/3-
0.15,stre2,'FontWeight','bold')
    if t<3
        text(x(3)*t/3+x(1)*(3-t)/3-0.4,y(3)*t/3+y(1)*(3-
t)/3,stre3,'FontWeight','bold')
    else
        text(x(3)*t/3+x(1)*(3-t)/3,y(3)*t/3+y(1)*(3-t)/3-
0.15,stre3,'FontWeight','bold')
    end
end
axis off
axis equal
else
subplot(1,2,i)
t=linspace(0,2*pi,6);
k=t(1:length(t)-1);
x=[sin(k),sin(k(1))];
y=[cos(k),cos(k(1))];
plot(x,y,'-o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
x1=x/3;

```

```

y1=y/3;
x3=[x1(5),x1(2),x1(4),x1(1),x1(3),x1(5)];
y3=[y1(5),y1(2),y1(4),y1(1),y1(3),y1(5)];
plot(x3,y3,'-
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
P=zeros(5,2);
for j=1:1:5;
    p0=([x(j),y(j)]+[x(j+1),y(j+1)])/2;
    P(j,1)=p0(1);
    P(j,2)=p0(2);
end
x4=zeros(1,11);
y4=zeros(1,11);
for j=1:1:5;
    x4(2*j-1)=x1(j);
    x4(2*j)=P(j,1);
    y4(2*j-1)=y1(j);
    y4(2*j)=P(j,2);
end
x4(11)=x1(1);
y4(11)=y1(1);
plot(x4,y4,'-
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
for t=2:(-1):1;
    stre1=['V_','0_0_0',num2str(2-t),'_',num2str(t),'_0'];
    stre2=['V_','0_0',num2str(2-t),'_',num2str(t),'_0_0'];
    stre3=['V_0',num2str(2-t),'_0',num2str(t),'_0_0_0'];
    stre4=['V_0_0',num2str(t),'_0_0_0',num2str(2-t)];
    stre5=['V_0_0_0',num2str(2-t),'_0',num2str(t)];
    text(x(1)*t/2+x(2)*(2-t)/2+0.1,y(1)*t/2+y(2)*(2-
t)/t,stre1,'FontWeight','bold')
    text(x(2)*t/2+x(3)*(2-t)/2+0.1,y(2)*t/2+y(3)*(2-
t)/2,stre2,'FontWeight','bold')
    text(x(3)*t/2+x(4)*(2-t)/2,y(3)*t/2+y(4)*(2-t)/2-
0.15,stre3,'FontWeight','bold')
    if t<2
        text(x(4)*t/2+x(5)*(2-t)/2-0.5,y(4)*t/2+y(5)*(2-
t)/2,stre4,'FontWeight','bold')
    else
        text(x(4)*t/2+x(5)*(2-t)/2,y(4)*t/2+y(5)*(2-t)/2-

```

```

0.15,stre4,'FontWeight','bold')
    end
    text(x(5)*t/2+x(1)*(2-t)/2-0.5,y(5)*t/2+y(1)*(2-
t)/2,stre5,'FontWeight','bold')
    end
    text(x1(1)-0.15,y1(1)+0.25,'V_{00101}','FontWeight','bold')
    text(x1(2)+0.15,y1(2),'V_{01010}','FontWeight','bold')
    text(x1(3)+0.12,y1(3)-0.1,'V_{10100}','FontWeight','bold')
    text(x1(4)-0.33,y1(4)-0.2,'V_{01001}','FontWeight','bold')
    text(x1(5)-0.46,y1(5)+0.1,'V_{10010}','FontWeight','bold')
axis off
axis equal
end
end

```

2.3 五边二次 S 面片

```

clear all;
clc;
t=linspace(0,-2*pi,6);
b=t(1:length(t)-1);
x=[sin(b),sin(b(1))];
y=[cos(b),cos(b(1))];
%控制点
V=zeros(15,3);
for i=1:1:5;
    V(2*i-1,1)=x(i);
    V(2*i-1,2)=y(i);
    V(2*i-1,3)=0;
    V(2*i,1)=0.8*(x(i)+x(i+1))/2;
    V(2*i,2)=0.8*(y(i)+y(i+1))/2;
    V(2*i,3)=0.7;
end
for i=11:1:15;
    V(i,1)=x(i-10)/3;
    V(i,2)=y(i-10)/3;
    V(i,3)=1.4;
end
%画图
U=0:0.05:1;

```

```

W=0:0.05:1;
[u,v]=meshgrid(U,W);
d=length(u);
G=zeros(d^2,5);
X=zeros(d,d);
Y=zeros(d,d);
Z=zeros(d,d);
for i=1:1:5;
    m=(u*x(i)+(1-u)*x(i+1)).*v;
    n=(u*y(i)+(1-u)*y(i+1)).*v;
    for j=1:1:d;
        for k=1:1:d;
            if j<d
                G1=GBC(m(j,k),n(j,k),x,y,[1,0,0]);
            else
                G1=GBC(m(j,k),n(j,k),x,y,[0,i,(k-1)*0.05]);
            end
            G((j-1)*d+k,:)=G1;
        end
    end
    for j=1:1:d^2;
        a=zeros(1,3);
        for k=1:1:5;
            if k==1
                a=a+V(2*k-
1,:)*G(j,k)+2*(V(2*k,:)*G(j,k)*G(j,k+1)+V(k+10,:)*G(j,2)*G(j,5));
            else
                a=a+V(2*k-
1,:)*G(j,k)+2*(V(2*k,:)*G(j,k)*G(j,mod(k,5)+1)+V(k+10,:)*G(j,mod(k,5)+1)*G(j,k-
1));
            end
        end
        if mod(j,d)
            X(ceil(j/d),mod(j,d))=a(1);
            Y(ceil(j/d),mod(j,d))=a(2);
            Z(ceil(j/d),mod(j,d))=a(3);
        else
            X(ceil(j/d),d)=a(1);
        end
    end
end

```

```

Y(ceil(j/d),d)=a(2);
Z(ceil(j/d),d)=a(3);
end
end
subplot(2,2,1),title('三维视图'),view(45,15)
surf(X,Y,Z)
hold on
axis equal
subplot(2,2,2),title('侧视图'),view(90,0)
surf(X,Y,Z)
hold on
axis equal
subplot(2,2,3),title('正视图'),view(0,0)
surf(X,Y,Z)
hold on
axis equal
subplot(2,2,4),title('俯视图'),view(0,90)
surf(X,Y,Z)
axis equal
hold on
end

```

2.4 三边和四边 Toric 面片

```

clc;
clear all;
subplot(1,2,2)
[xs,ys]=meshgrid(0:1:4,0:1:3);
zs=[0,0.5,1,0.5,0;
    0.4,0.8,1.2,0.8,0.4;
    0.4,0.8,1.2,0.8,0.4;
    0,0.5,1,0.5,0];
%画图
U=0:0.05:1;V=0:0.05:1;      %步长改变
[u,v]=meshgrid(U,V);
d=length(u);
Bv0=(1-v).^4;   Bv1=4*(1-v).^3.*v;     Bv2=6*(1-v).^2.*v.^2;   Bv3=4*(1-v).*v.^3;
Bv4=v.^4;

```

```
Bu0=(1-u).^3; Bu1=3.*u.*(1-u).^2; Bu2=3*u.^2.*(1-u); Bu3=u.^3;
X=zeros(d);Y=zeros(d);Z=zeros(d);
Bv=[Bv0;Bv1;Bv2;Bv3;Bv4]; Bu=[Bu0;Bu1;Bu2;Bu3];
for i=0:1:3;
    for j=0:1:4;
        nj=d*j+1;
        ni=d*i+1;
        X=X+x(i+1,j+1).*Bv(nj:nj+(d-1),:).*Bu(ni:ni+(d-1),:);
        Y=Y+y(i+1,j+1).*Bv(nj:nj+(d-1),:).*Bu(ni:ni+(d-1),:);
        Z=Z+z(i+1,j+1).*Bv(nj:nj+(d-1),:).*Bu(ni:ni+(d-1),:);
    end
end
surf(X,Y,Z)
view(45,45)
axis equal
subplot(1,2,1)
V=[3,0,1; 2,1,1.5;
    1,2,1.5;
    0,3,1;
    0,2,1.5;
    0,1,1.5;
    0,0,1;
    1,0,1.5;
    2,0,1.5;
    1,1,2];
C=[3,0,0;
    2,1,0;
    1,2,0;
    0,3,0;
    0,2,1;
    0,1,2;
    0,0,3;
    1,0,2;
    2,0,1;
    1,1,1];
U=0:0.05:1;
W=0:0.05:1;
```

```

[u,v]=meshgrid(U,W);
d=length(u);
G=zeros(d^2,3);
X=zeros(d,d);
Y=zeros(d,d);
Z=zeros(d,d);
m=u.*3.*v;
n=(1-u).*3.*v;
for i=1:d;
    for j=1:d;
        G((i-1)*d+j,:)=tri(m(i,j),n(i,j),3);
    end
end
for i=1:d^2;
    s=zeros(1,3);
    for j=1:10;
        a=C(j,:);
        h=factorial(a);
        s=s+V(j,:)*6*G(i,1)^a(1)*G(i,2)^a(2)*G(i,3)^a(3)/(h(1)*h(2)*h(3));
    end
    if mod(i,d)
        X(ceil(i/d),mod(i,d))=s(1);
        Y(ceil(i/d),mod(i,d))=s(2);
        Z(ceil(i/d),mod(i,d))=s(3);
    else
        X(ceil(i/d),d)=s(1);
        Y(ceil(i/d),d)=s(2);
        Z(ceil(i/d),d)=s(3);
    end
end
surf(X,Y,Z)
axis equal

```

2.5 Base point 方法得到面片

```

clear all;
clc
p002=[-0.1,-0.1,0];
p101=[1,0,1];

```

```

p011=[0,1,1];
p200=[1.6,0.6,0.2];
p110=[0,0,1];
p020=[0,2,0.4];
subplot(1,2,1)
w002=0.5;
f1=@(u,v) (w002*p002(1)*(1-u)^2+(p101(1)*(1-v)+p011(1)*v)*(2*u*(1-u))+(p200(1)*(1-v)^2+p110(1)*2*(1-v)*v+p020(1)*v^2)*u^2)/(w002*(1-u)^2+2*u-u^2);
f2=@(u,v) (w002*p002(2)*(1-u)^2+(p101(2)*(1-v)+p011(2)*v)*(2*u*(1-u))+(p200(2)*(1-v)^2+p110(2)*2*(1-v)*v+p020(2)*v^2)*u^2)/(w002*(1-u)^2+2*u-u^2);
f3=@(u,v) (w002*p002(3)*(1-u)^2+(p101(3)*(1-v)+p011(3)*v)*(2*u*(1-u))+(p200(3)*(1-v)^2+p110(3)*2*(1-v)*v+p020(3)*v^2)*u^2)/(w002*(1-u)^2+2*u-u^2);
fsurf(f1,f2,f3,[0 1 0 1])
axis equal
hold on
subplot(1,2,2)
f4=@(u,v) ((p101(1)*(1-v)+p011(1)*v)*2*(1-u)+(p200(1)*(1-v)^2+p110(1)*2*(1-v)*v+p020(1)*v^2)*u)/(2-u);
f5=@(u,v) ((p101(2)*(1-v)+p011(2)*v)*2*(1-u)+(p200(2)*(1-v)^2+p110(2)*2*(1-v)*v+p020(2)*v^2)*u)/(2-u);
f6=@(u,v) ((p101(3)*(1-v)+p011(3)*v)*2*(1-u)+(p200(3)*(1-v)^2+p110(3)*2*(1-v)*v+p020(3)*v^2)*u)/(2-u);
fsurf(f4,f5,f6,[0 1 0 1])
axis equal
hold on

```

2.6 Zheng 等人方法的控制网格

```

clear all;
clc;
a1=5;
a2=1.6;
j=1;
for n=[3,5,6];
    subplot(1,3,j)
    t=linspace(0,2*pi,n+1);
    k=t(1:length(t)-1);
    if n<6
        x=2*[sin(k),sin(k(1))];
        y=2*[cos(k),cos(k(1))];
    end
end

```

```

else
    y=2*[sin(k),sin(k(1))];
    x=2*[cos(k),cos(k(1))];
end
plot(x,y,'o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
x1=x/2;
y1=y/2;
plot(x1,y1,'o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
p1=[x(n),y(n)]/4+3*[x(1),y(1)]/4;
p2=[x(2),y(2)]/4+3*[x(1),y(1)]/4;
plot([p1(1),x1(1),p2(1)],[p1(2),y1(1),p2(2)],'-'
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
hold on
for i=2:1:n;
    p1=[x(i-1),y(i-1)]/4+3*[x(i),y(i)]/4;
    p2=[x(i+1),y(i+1)]/4+3*[x(i),y(i)]/4;
    plot([p1(1),x1(i),p2(1)],[p1(2),y1(i),p2(2)],'-'
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
    hold on
end
for i=1:1:n;
    p1=([x(i+1),y(i+1)]+[x(i),y(i)])/2;
    p2=([x1(i+1),y1(i+1)]+[x1(i),y1(i)])/2;
    plot([0,p2(1),p1(1)],[0,p2(2),p1(2)],'-'
o','color','k','LineWidth',a2,'MarkerFaceColor','k','MarkerSize',a1)
    hold on
    axis off
    axis equal
end
j=j+1;
end

```

2.7 Zheng 等人方法生成的三边四次面片

```

clear all;
clc;
t=linspace(0,-2*pi,4);
b=t(1:length(t)-1);
x=[sin(b),sin(b(1))];
y=[cos(b),cos(b(1))];
Bern=@(s,h,j,k) nchoosek(4,j)*nchoosek(4,k)*s^j*(1-s)^(4-j)*h^k*(1-h)^(4-k);

```

```
V1=[0,0,0;
    1,0,0.4;
    2,0,0.8;
    3,0,0.4;
    4,0,0;
    0,1,0.4;
    0.75,1,0.8;
    1.5,1,1.2;
    2.25,1,0.8;
    3,1,0.4];
V2=[4,0,0;
    3,1,0.4;
    2,2,0.8;
    1,3,0.4;
    0,4,0;
    3,0,0.4;
    2.25,1,0.8;
    1.5,2,1.2;
    1,2.5,0.8;
    0,3,0.4];
V3=[0,4,0;
    0,3,0.4;
    0,2,0.8;
    0,1,0.4;
    0,0,0;
    1,3,0.4;
    1,2.5,0.8;
    1,2,1.2;
    1,1,0.8;
    1,0,0.4];
V=[V1;V2;V3];%控制点
V0=[2,2,0.8];
U=0:0.05:1;
W=0:0.05:1;
[u,v]=meshgrid(U,W);
d=length(u);
G1=zeros(d^2,3);
X=zeros(d,d);
Y=zeros(d,d);
Z=zeros(d,d);
m=u.*4.*v;
n=(1-u).*4.*v;
```

```

%计算 G1
for i=1:1:d;
    for j=1:1:d;
        G1((i-1)*d+j,:)=tri(m(i,j),n(i,j),4);
    end
end
%计算 bezier 带
for p=1:1:d^2;
    s2=0;
    s1=zeros(1,3);
    for i=1:1:3;
        G2=local1(G1(p,:),i);
        locals=G2(1);
        localh=G2(2);
        for j=0:1:4;
            if j<2
                weight=G2(3);
            else
                if j==2
                    weight=1;
                else
                    weight=G2(4);
                end
            end
            for k=0:1:1;
                s3=weight*Bern(locals,localh,j,k);
                s2=s2+s3;
                s1=s1+s3*V((i-1)*10+k*5+j+1,:);
            end
        end
    end
    point=s1+(1-s2)*V0;
    X(ceil(p/d),mod(p-1,d)+1)=point(1);
    Y(ceil(p/d),mod(p-1,d)+1)=point(2);
    Z(ceil(p/d),mod(p-1,d)+1)=point(3);
end
surf(X,Y,Z)
axis equal

```

2.8 五边五次 GB 面片控制网格

```

clear all;
clc;

```

```
size=130;
t=linspace(0,2*pi,6);
k=t(1:length(t)-1);
x1=[sin(k),sin(k(1))];
y1=[cos(k),cos(k(1))];
plot(x1,y1,'LineWidth',1.6)
hold on
x3=x1/3;
y3=y1/3;
plot(x3,y3,'y','LineWidth',1.6)
scatter(x3,y3,size,'y','filled')
scatter(0,0,size,[0,0,0.8],'filled')
for i=1:1:5;
    plot([0,x3(i)],[0,y3(i)],'color',[0,0,0.8],'LineWidth',1.6)
end
hold on
for i=1:1:4;
    for j=0:1:4;
        s=[x1(i),y1(i)]*j/5+[x1(i+1),y1(i+1)]*(5-j)/5;
        if j<=1 || j==4
            scatter(s(1),s(2),size,'r','filled')
        else
            scatter(s(1),s(2),size,'g','filled')
        end
    end
end
for j=0:1:4;
    s=[x1(5),y1(5)]*j/5+[x1(1),y1(1)]*(5-j)/5;
    if j<=1 || j==4
        scatter(s(1),s(2),size,'r','filled')
    else
        scatter(s(1),s(2),size,'g','filled')
    end
end
x2=3*x1/4;
y2=3*y1/4;
plot(x2,y2,'g','LineWidth',1.6)
hold on
for i=1:1:4;
```

```

for j=0:1:3;
    s=[x2(i),y2(i)]*j/3+[x2(i+1),y2(i+1)]*(3-j)/3;
    c=[x1(i),y1(i)]*(j+1)/5+[x1(i+1),y1(i+1)]*(4-j)/5;
    if j==0 || j==3
        scatter(s(1),s(2),size,'r','filled')
        plot([s(1),c(1)],[s(2),c(2)],'r','linewidth',1.6)
    else
        scatter(s(1),s(2),size,'g','filled')
        plot([s(1),c(1)],[s(2),c(2)],'g','linewidth',1.6)
        if j==1
            plot([s(1),x3(i+1)],[s(2),y3(i+1)],'y','linewidth',1.6)
        else
            plot([s(1),x3(i)],[s(2),y3(i)],'y','linewidth',1.6)
        end
    end
end
for j=0:1:3;
    s=[x2(5),y2(5)]*j/3+[x2(1),y2(1)]*(3-j)/3;
    c=[x1(5),y1(5)]*(j+1)/5+[x1(1),y1(1)]*(4-j)/5;
    if j==0 || j==3
        scatter(s(1),s(2),size,'r','filled')
        plot([s(1),c(1)],[s(2),c(2)],'r','linewidth',1.6)
    else
        scatter(s(1),s(2),size,'g','filled')
        plot([s(1),c(1)],[s(2),c(2)],'g','linewidth',1.6)
        if j==1
            plot([s(1),x3(1)],[s(2),y3(1)],'y','linewidth',1.6)
        else
            plot([s(1),x3(5)],[s(2),y3(5)],'y','linewidth',1.6)
        end
    end
axis off
axis equal;

```

2.9 五边五次 GB 面片

```

%GB1.m
%定义域 x,y 和控制点 V,中心控制点 V0 生成

```

```

% x=[];
% y=[];
c0=[mean(x(1:5)),mean(y(1:5))];
x1=2*x/3+c0(1)/3;
y1=2*y/3+c0(2)/3;
x2=x/3+2*c0(1)/3;
y2=y/3+2*c0(2)/3;
V=zeros(90,3);
for i=1:1:5;
    for j=1:1:6;
        V((i-1)*18+j,1:2)=(6-j)*[x(i),y(i)]/5+(j-1)*[x(i+1),y(i+1)]/5;
        V((i-1)*18+j,3)=min(j-1,6-j)*0.4;
    end
end
for i=1:1:5;
    if i<5
        V(i*18+7,:)=V((i-1)*18+5,:);
    else
        V(7,:)=V((i-1)*18+5,:);
    end
    if i>1
        V((i-2)*18+12,:)=V((i-1)*18+2,:);
    else
        V(4*18+12,:)=V((i-1)*18+2,:);
    end
    for j=1:1:4;
        V((i-1)*18+7+j,1:2)=(4-j)*[x1(i),y1(i)]/3+(j-1)*[x1(i+1),y1(i+1)]/3;
        V((i-1)*18+7+j,3)=0.8+min(j-1,4-j)*0.4;
    end
    V((i-1)*18+15,:)=[x2(i),y2(i),1.6];
    V((i-1)*18+16,:)=[x2(i+1),y2(i+1),1.6];
end
for i=1:1:5;
    if i<5
        V(i*18+13,:)=V((i-1)*18+4,:);
        V(i*18+14,:)=V((i-1)*18+10,:);
    else

```

```

V(13,:)=V((i-1)*18+4,:);
V(14,:)=V((i-1)*18+10,:);
end
if i>1
    V((i-1)*18,:)=V((i-1)*18+3,:);
    V((i-1)*18-1,:)=V((i-1)*18+9,:);
else
    V(5*18,:)=V((i-1)*18+3,:);
    V(5*18-1,:)=V((i-1)*18+9,:);
end
end
V0=[c0(1),c0(2),1.6];
scatter3((V(:,1))',(V(:,2))',(V(:,3))')
axis equal
%GB2.m
%wachspress 坐标 Gw 和 meanvalue 坐标 Gm 和 harmonic 坐标生成
clc;
U=0:0.05:1;
W=0:0.05:1;
[u,v]=meshgrid(U,W);
d=length(u);
% Gm=zeros(5*d^2,5);
% Gw=zeros(5*d^2,5);
Gh=zeros(5*d^2,5);
for si=1:1:5;
    m=((u*x(si)+(1-u)*x(si+1))-c0(1)).*v+c0(1);
    n=((u*y(si)+(1-u)*y(si+1))-c0(2)).*v+c0(2);
    for j=1:1:d;
        for k=1:1:d;
            % Gw((j-1)*d+k+(si-1)*d^2,:)=wachspress(m(j,k),n(j,k),x,y);%
计算 wachspress 坐标
            if j<d
                G1=har(m(j,k),n(j,k),pde3,1);
            else
                G1=har(m(j,k),n(j,k),pde3,[0,si,(k-1)*0.05]);
            end
            Gh((j-1)*d+k+(si-1)*d^2,:)=G1;
        end
    end
end

```

```

% if j<d
% G1=mean_value(m(j,k),n(j,k),x,y,1);
%
% else
% G1=mean_value(m(j,k),n(j,k),x,y,[0,si,(k-1)*0.05]);
%
% end
% Gm((j-1)*d+k+(si-1)*d^2,:)=G1;
%
% end
end

%GB3.m
%画图, 生成 Wachspress 对应图和 Meanvalue 对应图
clc;

Bern=@(s,h,j,k) nchoosek(5,j)*nchoosek(5,k)*s^j*(1-s)^(5-j)*h^k*(1-h)^(5-k);
V(:,3)=V(:,3)/8;
U=0:0.05:1;
W=0:0.05:1;
[u,v]=meshgrid(U,W);
d=length(u);
X1=zeros(d,d);
Y1=zeros(d,d);
Z1=zeros(d,d);
Z2=zeros(d,d);
Z3=zeros(d,d);
Z4=zeros(d,d);
Xw=zeros(5*d,d);
Yw=zeros(5*d,d);
Xm=zeros(5*d,d);
Ym=zeros(5*d,d);
Zw1=zeros(5*d,d);
Zm1=zeros(5*d,d);
Zw2=zeros(5*d,d);
Zm2=zeros(5*d,d);
Zw3=zeros(5*d,d);
Zm3=zeros(5*d,d);
Zw4=zeros(5*d,d);
Zm4=zeros(5*d,d);
V00=[V0(1:2),0.25;V0(1:2),0.4;V0(1:2),0.15;V0(1:2),0.05];

```

```

for coordinate=1:1:1;
    subplot(1,2,coordinate)
    for si=1:1:1;
        for point=1:1:d^2;
            if coordinate==1
                GBC=Gw(point+(si-1)*d^2,:);
            else
                GBC=Gm(point+(si-1)*d^2,:);
            end
            ribbon=zeros(1,3);
            center=0;
            for i=1:1:5;
                wei=cof(GBC,i);
                s=wei(1);
                h=wei(2);
                for j=0:1:5;
                    for k=0:1:2;
                        if k==2
                            weight=floor(min(j,5-j)/2)*0.5;
                        else
                            if j<2
                                weight=wei(3);
                            else
                                if j>3
                                    weight=wei(4);
                                else
                                    weight=1;
                                end
                            end
                        end
                        ce=weight*Bern(s,h,j,k);
                        center=center+ce;
                        ribbon=ribbon+ce*V(18*(i-1)+6*k+j+1,:);
                    end
                end
            end
            po=repmat(ribbon,4,1)+(1-center)*V00;

```

```

X1(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(1,1);
Y1(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(1,2);
Z1(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(1,3);
Z2(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(2,3);
Z3(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(3,3);
Z4(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(4,3);

end
if coordinate==1;
    Xw((si-1)*d+1:si*d,:)=X1;
    Yw((si-1)*d+1:si*d,:)=Y1;
    Zw1((si-1)*d+1:si*d,:)=Z1;
    Zw2((si-1)*d+1:si*d,:)=Z2;
    Zw3((si-1)*d+1:si*d,:)=Z3;
    Zw4((si-1)*d+1:si*d,:)=Z4;
else
    Xm((si-1)*d+1:si*d,:)=X1;
    Ym((si-1)*d+1:si*d,:)=Y1;
    Zm1((si-1)*d+1:si*d,:)=Z1;
    Zm2((si-1)*d+1:si*d,:)=Z2;
    Zm3((si-1)*d+1:si*d,:)=Z3;
    Zm4((si-1)*d+1:si*d,:)=Z4;
end
surf(X,Y,Z)
axis equal
axis square
hold on
end
end
%GB4.m
%画图, 生成 harmonic 对应图
clc;
V(:,3)=V(:,3)/8;
Bern=@(s,h,j,k) nchoosek(5,j)*nchoosek(5,k)*s^j*(1-s)^(5-j)*h^k*(1-h)^(5-k);
U=0:0.05:1;
W=0:0.05:1;
[u,v]=meshgrid(U,W);
d=length(u);

```

```
X=zeros(d,d);
Y=zeros(d,d);
Z=zeros(d,d);
Z1=zeros(d,d);
Z2=zeros(d,d);
Z3=zeros(d,d);
Z4=zeros(d,d);
Z5=zeros(d,d);
Xh=zeros(5*d,d);
Yh=zeros(5*d,d);
Zh=zeros(5*d,d);
Zh1=zeros(5*d,d);
Zh2=zeros(5*d,d);
Zh3=zeros(5*d,d);
Zh4=zeros(5*d,d);
V00=[V0;V0(1:2),0.25;V0(1:2),0.4;V0(1:2),0.15;V0(1:2),0.05];
for si=1:1:5;
    for point=1:1:d^2;
        GBC=Gh(point+(si-1)*d^2,:);
        ribbon=zeros(1,3);
        center=0;
        for i=1:1:5;
            wei=cof(GBC,i);
            s=wei(1);
            h=wei(2);
            for j=0:1:5;
                for k=0:1:2;
                    if k==2
                        weight=floor(min(j,5-j)/2)*0.5;
                    else
                        if j<2
                            weight=wei(3);
                        else
                            if j>3
                                weight=wei(4);
                            else
                                weight=1;
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```

```

        end
    end
    ce=weight*Bern(s,h,j,k);
    center=center+ce;
    ribbon=ribbon+ce*V(18*(i-1)+6*k+j+1,:);
end
end
po=repmat(ribbon,5,1)+(1-center)*V00;
X(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(1,1);
Y(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(1,2);
Z(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(1,3);
Z1(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(2,3);
Z2(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(3,3);
Z3(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(4,3);
Z4(ceil(point/d),mod(point-1,d)+1)=po(5,3);
end
Xh((si-1)*d+1:si*d,:)=X;
Yh((si-1)*d+1:si*d,:)=Y;
Zh((si-1)*d+1:si*d,:)=Z;
Zh1((si-1)*d+1:si*d,:)=Z1;
Zh2((si-1)*d+1:si*d,:)=Z2;
Zh3((si-1)*d+1:si*d,:)=Z3;
Zh4((si-1)*d+1:si*d,:)=Z4;
% surf(X,Y,Z)
% axis equal
% axis square
% hold on
end
%GB5
clc;
aa=Zw1-Zw;
bb=Zm1-Zm;
cc=Zh1-Zh;
subplot(1,2,1);
fsize=15;

```

```
for i=1:5;
    patc=(i-1)*21+1:i*21;
    surf(Xm(patc,:),Ym(patc,:),bb(patc,:),'facecolor','g')
    axis equal
    hold on
    surf(Xh(patc,:),Yh(patc,:),cc(patc,:),'facecolor','b')
    axis equal
    hold on
end
title('Mean Value 坐标(绿)与 Harmonic 坐标(蓝)比较','fontsize',fsiz)
view(0,90);
subplot(1,2,2);
for i=1:5;
    patc=(i-1)*21+1:i*21;
    surf(Xw(patc,:),Yw(patc,:),aa(patc,:),'facecolor','r')
    axis equal
    hold on
    surf(Xh(patc,:),Yh(patc,:),cc(patc,:),'facecolor','b')
    axis equal
    hold on
end
title('Harmonic 坐标(蓝)与 Wachspress 坐标(红)比较','fontsize',fsiz)
view(0,90);
%GB6
clc;
% 等高线绘制
bb=0:0.2:2.6;
for i=1:1:5;
    ax1=subplot(1,3,1);
    aa=(i-1)*21+1:i*21;
    cc='off';
    contourf(Xw(aa,:),Yw(aa,:),Zw2(aa,:),bb,'showtext',cc)
    colormap(ax1,spring)
    if i==5;
        title('Wachspress')
    end
    axis equal
```

```
hold on
ax2=subplot(1,3,2);
contourf(Xm(aa,:),Ym(aa,:),Zm2(aa,:),bb,'showtext',cc)
colormap(ax2,summer)
if i==5;
    title('Mean Value')
end
axis equal
hold on
ax3=subplot(1,3,3);
contourf(Xh(aa,:),Yh(aa,:),Zh2(aa,:),bb,'showtext',cc)
colormap(ax3,winter)
if i==5;
    title('Harmonic')
end
axis equal
hold on
end
subplot(1,3,1)
text(-1.2,0.5,'\Delta t=4.4','fontsize',20)
%cof.m
function wei=cof(coordinate,i)
wei=zeros(1,4);
wei(1:2)=local(coordinate,i);
if i==1
    h1=local(coordinate,5);
else
    h1=local(coordinate,i-1);
end
h1=h1(2);
if i==5
    h3=local(coordinate,1);
else
    h3=local(coordinate,i+1);
end
h3=h3(2);
if h1+wei(2)==0
```

```
wei(3)=0.5;
else
    wei(3)=h1/(h1+wei(2));
end
if h3+wei(2)==0
    wei(4)=0.5;
else
    wei(4)=h3/(h3+wei(2));
end
%local.m
function G2=local(coordinate,i)
if i==1
    G2(2)=1-coordinate(5)-coordinate(1);
else
    G2(2)=1-coordinate(i-1)-coordinate(i);
end
if G2(2)==1
    G2(1)=1/2;
else
    G2(1)=coordinate(i)/(1-G2(2));
end
%mean_value.m
function z=mean_value(x0,y0,x,y,i)
if i(1)==0
    z=zeros(1,5);
    z(i(2))=i(3);
    if i(2)==5
        z(1)=1-i(3);
    else
        z(i(2)+1)=1-i(3);
    end
else
    w=zeros(1,5);
    a=[x(5),y(5)]-[x0,y0];
    b=[x(1),y(1)]-[x0,y0];
    c=[x(2),y(2)]-[x0,y0];
    d=norm(b);
```

```

cos1=dot(a,b)/(norm(a)*d);
cos2=dot(c,b)/(norm(c)*d);
w(1)=(sqrt(1-cos1^2)/(1+cos1)+sqrt(1-cos2^2)/(1+cos2))/d;
for i=2:1:5;
    b=[x(i),y(i)]-[x0,y0];
    c=[x(i+1),y(i+1)]-[x0,y0];
    d=norm(b);
    cos1=cos2;
    cos2=dot(c,b)/(norm(c)*d);
    w(i)=(sqrt(1-cos1^2)/(1+cos1)+sqrt(1-cos2^2)/(1+cos2))/d;
end
z=w/sum(w);
end
%wachspress.m
function z=wachspress(x0,y0,x,y)
w=ones(1,5);
for i=1:1:5;
    if i==1;
        k=setdiff(1:1:5,[5,1]);
    else
        k=setdiff(1:1:5,[i-1,i]);
    end
    for j=k;
        w(i)=polyarea([x0,x(j),x(j+1)],[y0,y(j),y(j+1)])*w(i);
    end
end
z=w./sum(w);

```

2.10 离散高斯曲率计算

```

function K=Gcurvature(XX,YY,ZZ)
d=21;
ci=5;
K=zeros(ci*d,d);
%中心点高斯曲率
v0=[XX(1,1),YY(1,1),ZZ(1,1)]; %中心点
Area0=0;
Angle0=0;

```

```

for si=1:1:ci;
    X=XX((si-1)*d+1:si*d,:);
    Y=YY((si-1)*d+1:si*d,:);
    Z=ZZ((si-1)*d+1:si*d,:);
    a=[X(2,1),X(2,21)];
    b=[Y(2,1),Y(2,21)];
    c=[Z(2,1),Z(2,21)];
    S=Voronoi(v0,[a(1),b(1),c(1)],[a(2),b(2),c(2)]);
    Area0=Area0+S(1);
    Angle0=Angle0+S(2);
    for i=2:1:20;
        for j=2:1:20;
            Area=zeros(1,4);
            Angle=zeros(1,4);
            a1=[X(i-1,j),Y(i-1,j),Z(i-1,j)];
            a2=[X(i,j+1),Y(i,j+1),Z(i,j+1)];
            a3=[X(i+1,j),Y(i+1,j),Z(i+1,j)];
            a4=[X(i,j-1),Y(i,j-1),Z(i,j-1)];
            a=[a1;a2;a3;a4;a1];
            for k=1:1:4;
                S=Voronoi([X(i,j),Y(i,j),Z(i,j)],a(k,:),a(k+1,:));
                Area(1,k)=S(1);
                Angle(1,k)=S(2);
            end
            K(i+(si-1)*d,j)=(2*pi*sum(Angle))/sum(Area);
        end
    end
    %对角线高斯曲率
end
%对角线赋值
for si=1:1:ci;
    for i=2:1:20;
        if si==1
            K(i,d)=(K(i+(ci-1)*d,2)+K(i,d-1))/2;
        else
            K(i+(si-1)*d,d)=(K(i+(si-2)*d,2)+K(i+(si-1)*d,d-1))/2;
        end
    end

```

```

if si==5;
    K(i+(si-1)*d,1)=(K(i+(si-1)*d,2)+K(i,d-1))/2;
else
    K(i+(si-1)*d,1)=(K(i+si*d,d-1)+K(i+(si-1)*d,2))/2;
end

end
%边的高斯曲率
a1=K(20+(si-1)*d,1);
a3=K(20+(si-1)*d,2);
if si==5
    a2=K(20,d-1);
else
    a2=K(20+si*d,d-1);
end
K(si*d,1)=(a1+a2+a3)/3;
a1=K(20+(si-1)*d,d);
a3=K(20+(si-1)*d,d-1);
if si==1
    a2=K(20+(ci-1)*d,2);
else
    a2=K(20+(si-2)*d,2);
end
K(si*d,d)=(a1+a2+a3)/3;
for j=2:1:20;
    a1=K(20+(si-1)*d,j);
    a2=K(si*d,j-1);
    K(si*d,j)=(a1+a2)/2;
end
end
%中心点赋值
K0=(2*pi-Angle0)/Area0;
for ii=1:1:ci;
    K((ii-1)*d+1,:)=K0*ones(1,21);
end
% Voronoi.m
function S=Voronoi(a,b,c)
S=zeros(1,2);

```

```

n1=norm(b-a);
n2=norm(c-a);
cosangle=dot(b-a,c-a)/(n1*n2);
angle=acos(cosangle);
S(2)=angle;
if angle>pi/2
    S(1)=n1*n2*sin(angle)/4;
else
    if dot(a-b,c-b)<0 || dot(a-c,b-c)<0
        S(1)=n1*n2*sin(angle)/8;
    else
        TR=triangulation([1,2,3],[a(1),b(1),c(1)]',[a(2),b(2),c(2)]',[a(3),b(3),c(3)]');
        [d,r]=circumcenter(TR);
        a1=acos(2*dot((b-a)/2,d-a)/(r*n1));
        a2=acos(2*dot((c-a)/2,d-a)/(r*n2));
        S(1)=(n1*r*sin(a1)+n2*r*sin(a2))/4;
    end
end

```

2.11 网格上 Harmonic 坐标求解

```

function z=har(x,y,pde,ii)
z=zeros(1,5);
if ii(1)==0
    z(ii(2))=ii(3);
    if ii(2)==5
        z(1)=1-ii(3);
    else
        z(ii(2)+1)=1-ii(3);
    end
else
    for i=1:1:5;
        A=pde(:,[1,2,i+2]);
        b1= find(A(:,1)<x+0.03 & A(:,1)>x-0.03);
        %length(b1)
        B=A(b1,:);
        b2=find(B(:,2)<y+0.06 & B(:,2)>y-0.06);
        %length(b2)
    end
end

```

```
if isempty(b2)
    C=abs(B(:,2)-y);
    c=find(C==min(C));
    z(i)=B(c(1),3);
else
    B=B(b2,:);
    a=size(B);
    distance=zeros(a(1),1);
    for j=1:1:a(1);
        distance(j)=1/sqrt((x-B(j,1))^2+(y-B(j,2))^2);
    end
    distance=distance/sum(distance);
    z(i)=sum(B(:,3).*distance);
end
end
```