



实验流体力学

第2讲 相似理论与误差理论

2021 春季

本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

相似与相似定理



- 实验研究包括现场实验和模型实验
 - 现场实验耗费人力物力，但最能反应机械设备的性能或自然现象的机理
 - 模型实验可实现相似现象或再现原本现象的本质
 - 并非所有现象都适合进行模型实验：生物学、医学等现象
 - 应用模型实验必须符合相似理论

模拟实验



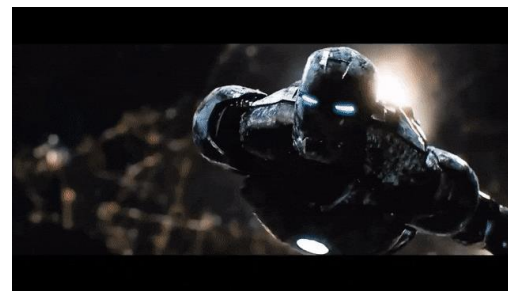
模拟实验



现场实验



现场实验(结冰)



Iron Man Mark II Suite Test

相似与相似定理

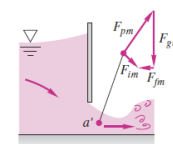
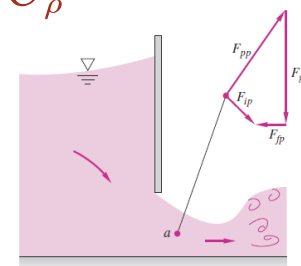
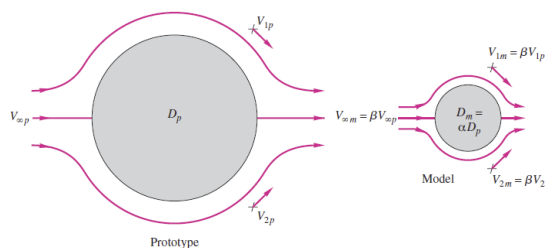
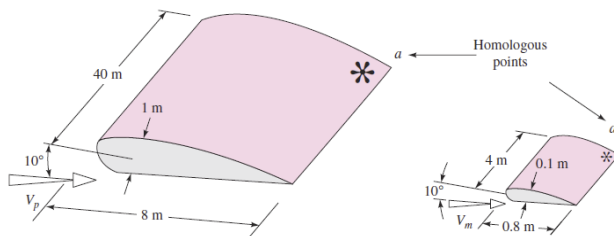


• 相似的基本概念

- 两个物理现象相似：在对应点上对应瞬时所有表征现象的相应物理量都保持各自固定的比例关系

• 两个流场相似

1. 几何相似：通过均匀变形（放大或缩小）能完全重合 $l/l' = C_l$
2. 运动相似：流场对应点的速度方向相同且大小比例固定 $v/v' = C_v$
3. 动力相似：流场对应点的力方向相同且大小比例固定 $F/F' = C_F$
4. 热力学相似：流场对应点的温度比例固定 $T/T' = C_T$
5. 质量相似：流场对应点的密度比例固定 $\rho/\rho' = C_\rho$



相似与相似定理



- 物理量

- 可以定性区别并能定量确定的现象或物体的属性

- 基本量

- 在力学中适当地选取三个量之后（长度L、质量M、时间T），可以根据物理定律将其他量导出，涉及热效应时需增加一个基本量，即温度 Θ

- 量纲

- 被测量物理量的种类称为该物理量的量纲。量纲可以是基本量纲的组合，如500m和5cm都是的量纲都是长度L，1km/h和5m/s的量纲都是长度/时间 $L \cdot T^{-1}$

$$\dim q = L^{C_1} M^{C_2} T^{C_3} \Theta^{C_4}$$

- 无量纲数即量纲指数 C_n 全为零的量。

相似与相似定理



- 物理方程的量纲一致性原理

- 在正确反映客观规律的物理方程中，各项的量纲是一致的。
- 可用于检查物理方程和经验公式的正确性。

- 相似准则（数）

- 能够表征或判定两个现象是否相似的无量纲的量的组合

$$\text{马赫数Ma} = \frac{V}{c} = \frac{\text{惯性力}}{\text{弹性力}}$$

$$\text{斯特劳哈尔数Sr} = \frac{l}{vt} = \frac{\text{非定常运动惯性力}}{\text{惯性力}}$$

$$\text{欧拉数Eu} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{\text{压力梯度}}{\text{惯性力}}$$

$$\text{雷诺数Re} = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}}$$

$$\text{弗劳德数Fr} = \frac{v^2}{lg} = \frac{\text{惯性力}}{\text{重力}}$$

$$\text{韦伯数Eu} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma} = \frac{\text{惯性力}}{\text{表面张力}}$$

$$\text{普朗特数Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\text{动量扩散}}{\text{热扩散}}$$

$$\text{努塞尔数Nu} = \frac{hl}{k} = \frac{\text{热对流}}{\text{热传导}}$$

$$\text{路易斯数Le} = \frac{\alpha}{D} = \frac{\text{热扩散}}{\text{质量扩散}}$$

相似与相似定理

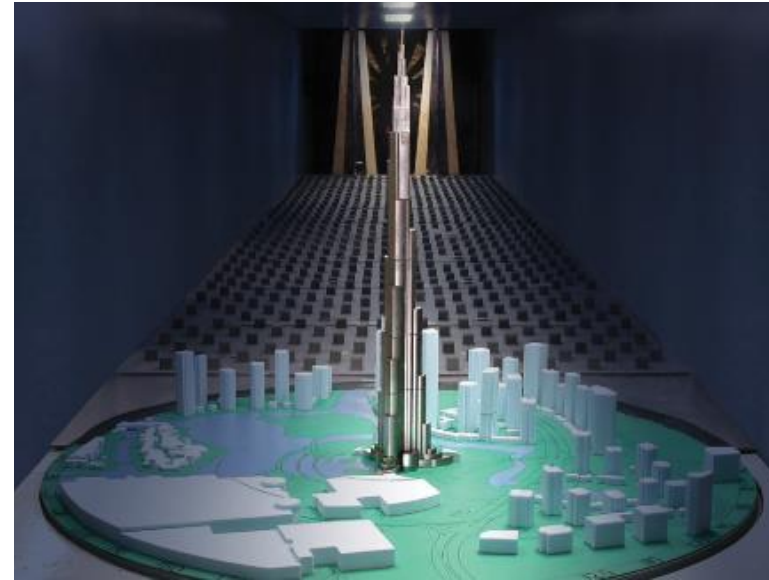


- 相似定理：相似的现象则（主要）同名相似准则数值相同
 - 要同时保证所有无量纲参数都相等几乎不可能
 - 只考虑保证Re相同也很难，如大型建筑物的风载，需研究Re的影响

$$Re = 10^8 \sim 10^{10}$$



$$Re = 10^4 \sim 10^6$$



Burj Khalifa Tower scale model in wind tunnel

本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

Π定理与量纲分析

• Π定理 (Buckingham Π Theorem, 1914)

- 假设某物理量 u 与其他有量纲物理量 x_1, x_2, \dots, x_N 之间存在函数关系

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_k (k < N)$ 为量纲相互独立的基本参量, 则这个函数关系可变化为无量纲形式

$$\pi_0 = \varphi(1, 1, \dots, 1, \pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \dots, \pi_n), \pi_m = \frac{x_m}{x_1^{\lambda_{1m}} x_2^{\lambda_{2m}} \dots x_k^{\lambda_{km}}}, m = 0, k+1, \dots, n$$

N个物理量
k个基本参量

Π定理



N-k个无量纲参数

II 定理与量纲分析

• Example 1

The drag force, F , on a smooth sphere depends on the relative speed, V , the sphere diameter, D , the fluid density, ρ , and the fluid viscosity, μ . Obtain a set of dimensionless groups that can be used to correlate experimental data.

$$F = f(\rho, V, D, \mu)$$

③通过 Π 无量纲参数进行量纲指数求解

①量纲分析和基本量纲选取

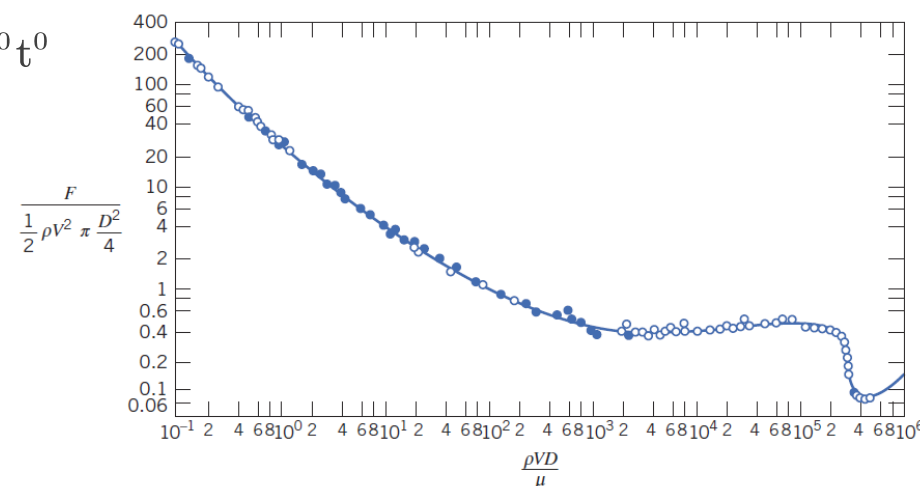
$$\begin{array}{ccccc} F & \rho & V & D & \mu \\ \frac{ML}{t^2} & \frac{M}{L^3} & \frac{L}{t} & L & \frac{M}{Lt} \end{array}$$

$$\Pi_0 = F \rho^a V^b D^c \quad \text{即} \quad \left(\frac{ML}{t^2} \right) \left(\frac{M}{L^3} \right)^a \left(\frac{L}{t} \right)^b L^c = M^0 L^0 t^0$$

$$\Pi_1 = \mu \rho^a V^b D^c$$

②选取基本物理量 ρ , V , D

$$\textcircled{4} \Pi_1 = f(\Pi_2) \Rightarrow \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$



本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

相似理论的应用



• Example 2

在风洞中用模型飞机模拟大气飞行的真实飞机。

已知某飞机在海平面标准大气情况下做等速直线飞行，速度为20m/s。用1/5缩尺模型在风洞中进行实验。求风洞来流速度。其中海平面的声速为340m/s，风洞来流的压力、密度和温度与海平面标准大气情况相同。

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\mu}, \text{Re}_1 = \text{Re}_2 \Rightarrow \frac{\rho_1 v_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\mu_2}$$

$$v_2 = \frac{v_1 l_1}{l_2} = 100 \text{ m/s}$$

本例中马赫数并不相等，但均可以看作不可压流动

相似理论的应用



- **Example 3**

- Free flight of **Boeing 747** at an altitude 11.6 km:

$$V_1 = 885 \text{ km/h}$$

$$p_1 = 20.713 \text{ kPa}$$

$$T_1 = 216.67 \text{ K}$$

- Scale model in wind tunnel:

Model size : 1/50 scale

$$T_2 = 238.89 \text{ K}$$

- Assume that both μ and α are proportional to $T^{1/2}$
 - **Find:** the required velocity and pressure of the test airstream in the wind tunnel such that the lift and drag coefficients measured for the wind-tunnel model are the same as for free flight.



本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理



误差理论基本概念

- 真值

- 一个量被观测时，该量本身所具有的真实大小。

- 误差

- 绝对误差 = 测量结果 - 真值
- 相对误差(%) = 绝对误差/真值 \approx 绝对误差/测量结果

例4.一块电压表的等级是0.5级，说明它的误差为0.5%。如果它有5V，10V两档，那么测量4.5V左右的电压该选用哪一档？

例5.某1.0级电流表量程为100 μ A。求测量值分别为100 μ A，80 μ A，50 μ A时的绝对误差和相对误差？

误差理论基本概念



- **系统误差**

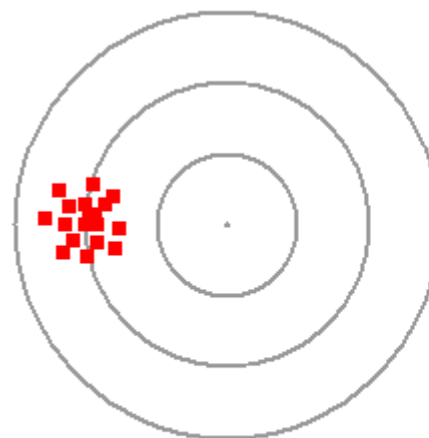
- 同一条件下多次测量同一量值时，误差的绝对值和正负号保持不变；或条件改变时按一定规律变化的误差。

- **随机误差**

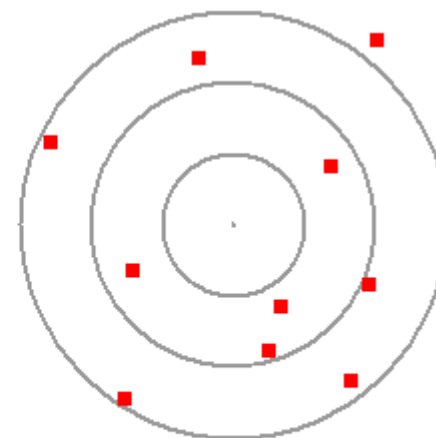
- 同一条件下多次测量同一量值时，误差的绝对值和正负号随机变化。

- **粗大误差**

- 超出规定条件下预期的误差。
- 设备缺陷、非正常工作或人为操作导致



Systematic Error



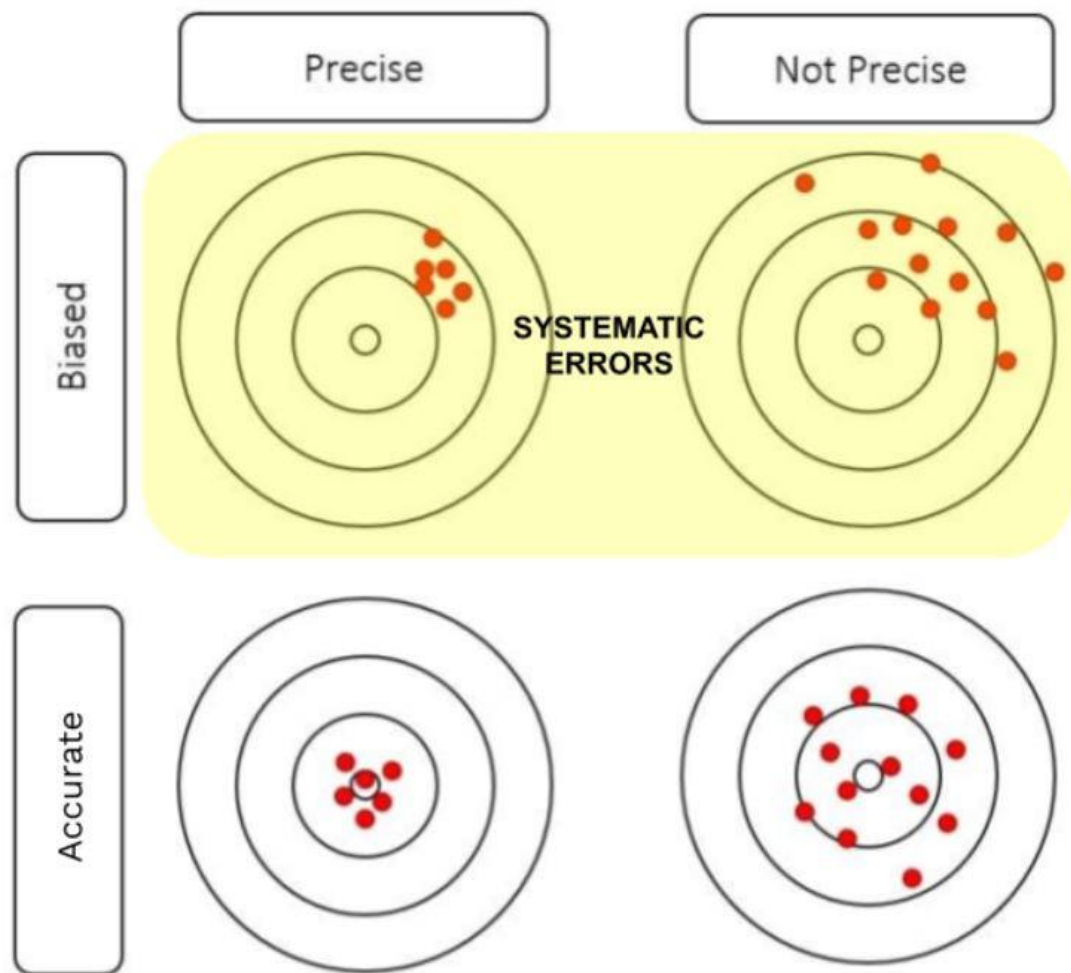
Random Error

误差理论基本概念



- 准确度(Accuracy)
 - 测量结果与被测量真值之间的一致程度，表征系统误差的大小
- 精确度(Precision)
 - 多次测量结果之间的符合程度，表征随机误差的大小

准确度和精确度越高，测量结果越接近真值



本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

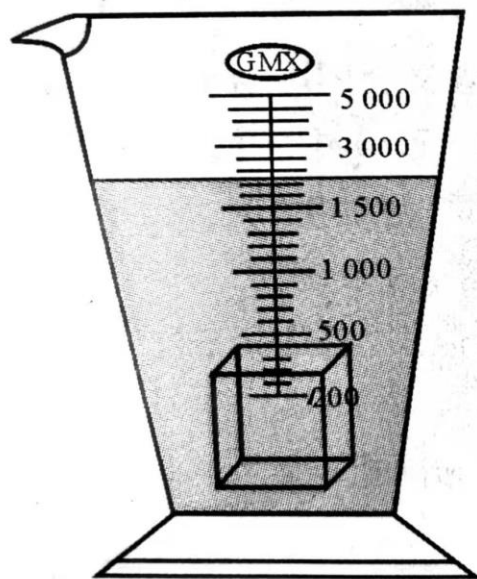
- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

直接测量误差的处理



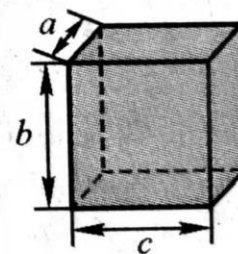
- 直接测量

- 无须对被测的量与其他实测的量进行函数关系的辅助计算



直接测量

VS



间接测量



直接测量误差的处理

一、系统误差的处理

- 系统误差的起因比较复杂，即使增加测量次数也不会减小或消除
- 系统误差的变化规律大致分为不变、线性变化和非线性变化的系统误差
- 可采用变换实验条件或修正的方式来减小系统误差
- 修正表格、修正曲线或修正公式

$$\text{修正值} = - \text{系统误差}$$

例如：电流表零点漂移了+0.2mA，所测到的值需要减去0.2mA的修正值。

直接测量误差的处理



二、随机误差的处理

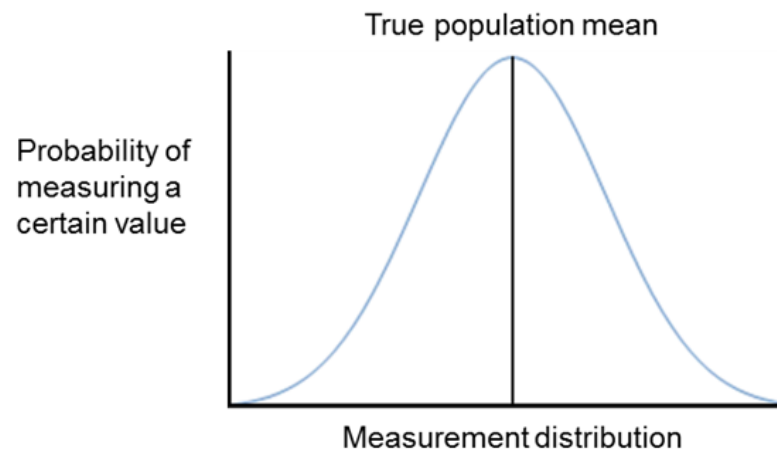
• 相同的测量条件下，误差大小和符号随机变化，主要特性如下：

1. 单峰性：绝对值小的误差出现次数比绝对值大的出现次数多
2. 对称性：正负误差出现次数相等
3. 有界性：绝对值很大的误差出现次数极少
4. 抵偿性：误差的算术平均随着测量次数增加趋于零

• 随机误差服从正态分布

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$

σ 为标准差,
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2}$$



直接测量误差的处理



二、随机误差的处理

- 等精度有限次测量的标准差估算， n 一般取10以下的值

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}$$

- 不确定度**：由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度。
- 单次测量的不确定度一般取 $\pm 3\sigma$
- 算数平均值的不确定度取 $\pm 3\sigma_r$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{n}} \sigma$$

Confidence interval	Proportion within	Proportion without	
	Percentage	Percentage	Fraction
0.318 639 σ	25%	75%	3 / 4
0.674 490 σ	50%	50%	1 / 2
0.977 925 σ	66.6667%	33.3333%	1 / 3
0.994 458 σ	68%	32%	1 / 3.125
1 σ	68.268 9492%	31.731 0508%	1 / 3.151 4872
1.281 552 σ	80%	20%	1 / 5
1.644 854 σ	90%	10%	1 / 10
1.959 964 σ	95%	5%	1 / 20
2 σ	95.449 9736%	4.550 0264%	1 / 21.977 895
2.575 829 σ	99%	1%	1 / 100
3 σ	99.730 0204%	0.269 9796%	1 / 370.398
3.290 527 σ	99.9%	0.1%	1 / 1000
3.890 592 σ	99.99%	0.01%	1 / 10 000
4 σ	99.993 666%	0.006 334%	1 / 15 787
4.417 173 σ	99.999%	0.001%	1 / 100 000
4.5 σ	99.999 320 465 3751%	0.000 679 534 6249%	1 / 147 159.5358 6.8 / 1 000 000
4.891 638 σ	99.9999%	0.0001%	1 / 1 000 000
5 σ	99.999 942 6697%	0.000 057 3303%	1 / 1 744 278
5.326 724 σ	99.999 99%	0.000 01%	1 / 10 000 000
5.730 729 σ	99.999 999%	0.000 001%	1 / 100 000 000
6 σ	99.999 999 8027%	0.000 000 1973%	1 / 506 797 346
6.109 410 σ	99.999 9999%	0.000 0001%	1 / 1 000 000 000
6.466 951 σ	99.999 999 99%	0.000 000 01%	1 / 10 000 000 000
6.806 502 σ	99.999 999 999%	0.000 000 001%	1 / 100 000 000 000
7 σ	99.999 999 999 7440%	0.000 000 000 256%	1 / 390 682 215 445

直接测量误差的处理

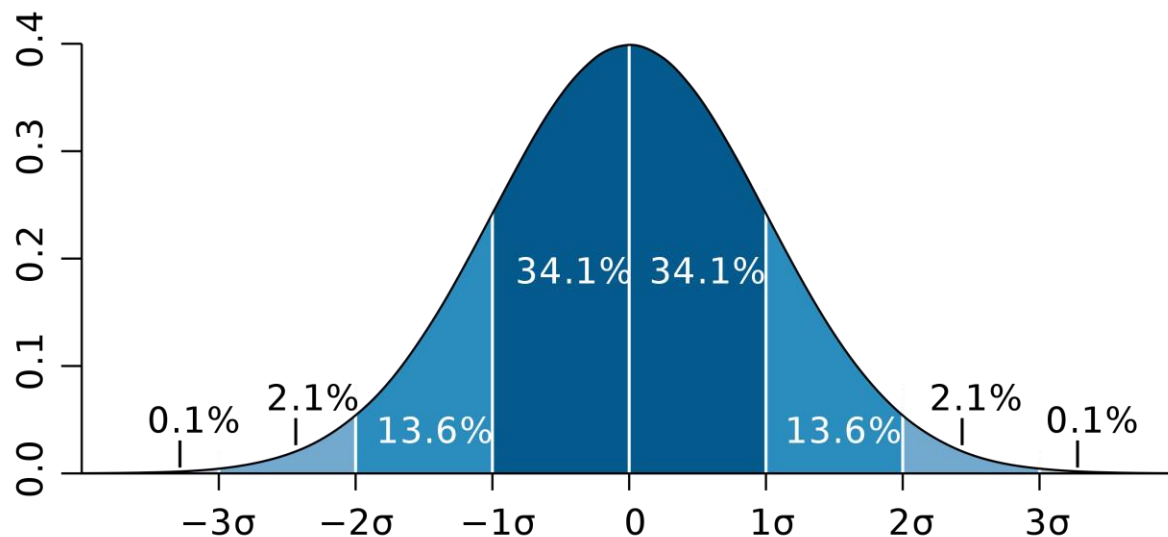


三、粗大误差的处理

- 在等精度有限次测量中，若发现某一个测得值 a_i 的残差大于 3σ ，即

$$|a_i - \bar{a}| > 3\sigma$$

则可认为该测得值含有粗大误差，可予以剔除（通常只能剔除一次）



直接测量误差的处理



四、等精度直接测量的数据处理

- ① 修正或消除系统误差 -0.04mm
- ② 求测量数据的算术平均值 15.25mm
- ③ 求测量数据的标准差 0.055mm
- ④ 判断是否存在粗大误差 第4次测量
- ⑤ 求算术平均的标准差 0.005mm
- ⑥ 求测量结果的不确定度 $\approx 0.02\text{mm}$
- ⑦ 写出测量结果 $15.23 \pm 0.02\text{mm}$

例6：根据15次重复测量结果求圆柱直径，已知读数系统误差为 $+0.04\text{mm}$ 。

序号	测量值 mm	序号	测量值 mm
1	15.26	9	15.28
2	15.28	10	15.27
3	15.27	11	15.26
4	15.48	12	15.28
5	15.24	13	15.31
6	15.28	14	15.29
7	15.29	15	15.28
8	15.26		

本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

间接测量误差的处理

- 间接误差

- 由直接误差经函数计算传递导致。

假设物理量与直接测量结果之间的关系为 $y = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$

则间接测量误差的基本计算公式为

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} dx_m$$

- 间接测量系统误差

$$\Delta y = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \Delta x_m$$

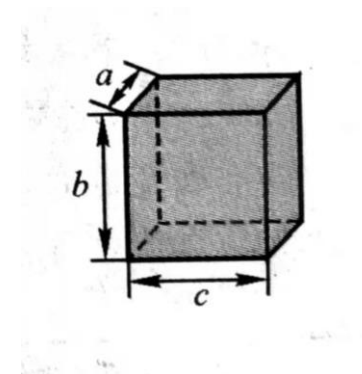
- 间接测量随机误差

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2}$$

间接测量误差的处理



例7：用测量立方体三个边长的方法测量其体积。计算公式为 $V=abc$. 已知 $a=900\text{mm}$, $\sigma_a=1.0\text{mm}$; $b=45.2\text{mm}$, $\sigma_b=0.1\text{mm}$; $c=30.5\text{mm}$, $\sigma_c=0.1\text{mm}$ 。请写出测量结果。



$$V_0 = abc = 1240740 \text{ mm}^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = bc = 1378.6 \text{ mm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = ac = 27450 \text{ mm}^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = ab = 40680 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2} \approx 5097 \text{ mm}^3$$

$$V = 1240740 \pm 15292$$

$$= (1.241 \pm 0.015) \times 10^6 \text{ mm}^3$$

本次课内容



- 第三章 相似理论

- 相似与相似定理
- Π 定理与量纲分析
- 相似理论的应用与实验模拟

- 第四章 误差理论

- 基本概念
- 直接测量误差的处理
- 间接测量误差的处理
- 实验数据处理

实验数据处理



- 有效数字

- 从左边第一个不为零的数字算起至右边最末一位数字都称为有效数字。
- 最后一位有效数字是可疑数字。

- 实验结果的表示

- 列表法
- 作图法
- 公式法

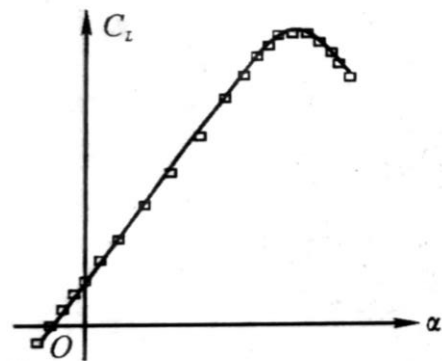


图 4-5 飞机升力特性实验结果示意图

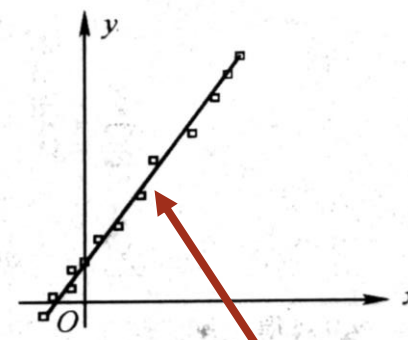
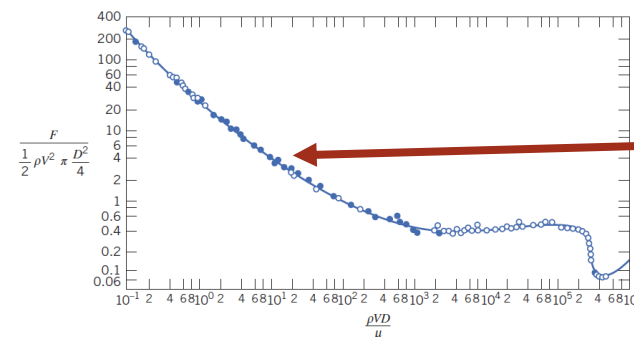


图 4-6 最佳直线示意图

表 4-3 某翼型实验数据

迎角 / (°)	-2	0	2	4	6	8	10	12	14
升力系数	-0.028 7	0.102 2	0.290 0	0.437 7	0.637 0	0.840 1	0.944 7	1.037 3	1.885
备 注	$Re = 4.9 \times 10^5$								



可回归拟合公式
用于后续研发