新时代大学数学系列教材

线性代数

高等教育出版社

第四章 n维向量空间

第二节　　向量组的线性相关性

目录

向量组：同维数的向量所组成的集合.

向量组与矩阵：

例如 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$有n个m维列向量

$$
A=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & & a_j & & a_n \end{array}\\
\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} &
\boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} &
\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} &
\boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}} &
\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} &
\boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$称为矩阵A的列向量组.

类似地,矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 又有m个n维行向量

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \\ a_i^T \\ \\ a_n^T \end{matrix}$$

向量组 $a_1^T, a_2^T, \ldots, a_m^T$ 称为矩阵A的行向量组.

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

一、向量组的线性组合

定义1 若存在数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则称向量β为向量组α_1，α_2，…，α_m的**线性组合**，

或称β可由α_1，α_2，…，α_m **线性表出**.

$L(\alpha_1,\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性组合的全体.

例1 零向量是任一向量组的线性组合.

$$0=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m.$$

例2 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$中任一向量都可由这个向量组线性表出.

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_m.$$

例3 $\mathbf{R}^3=L(\vec{i},\vec{j},\vec{k}),$

因为 $(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$

$\mathbf{R}^2=L(\vec{i},\vec{j}),$

$$\mathbf{R}^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n),$$

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即，任一n维向量均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$, 则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间

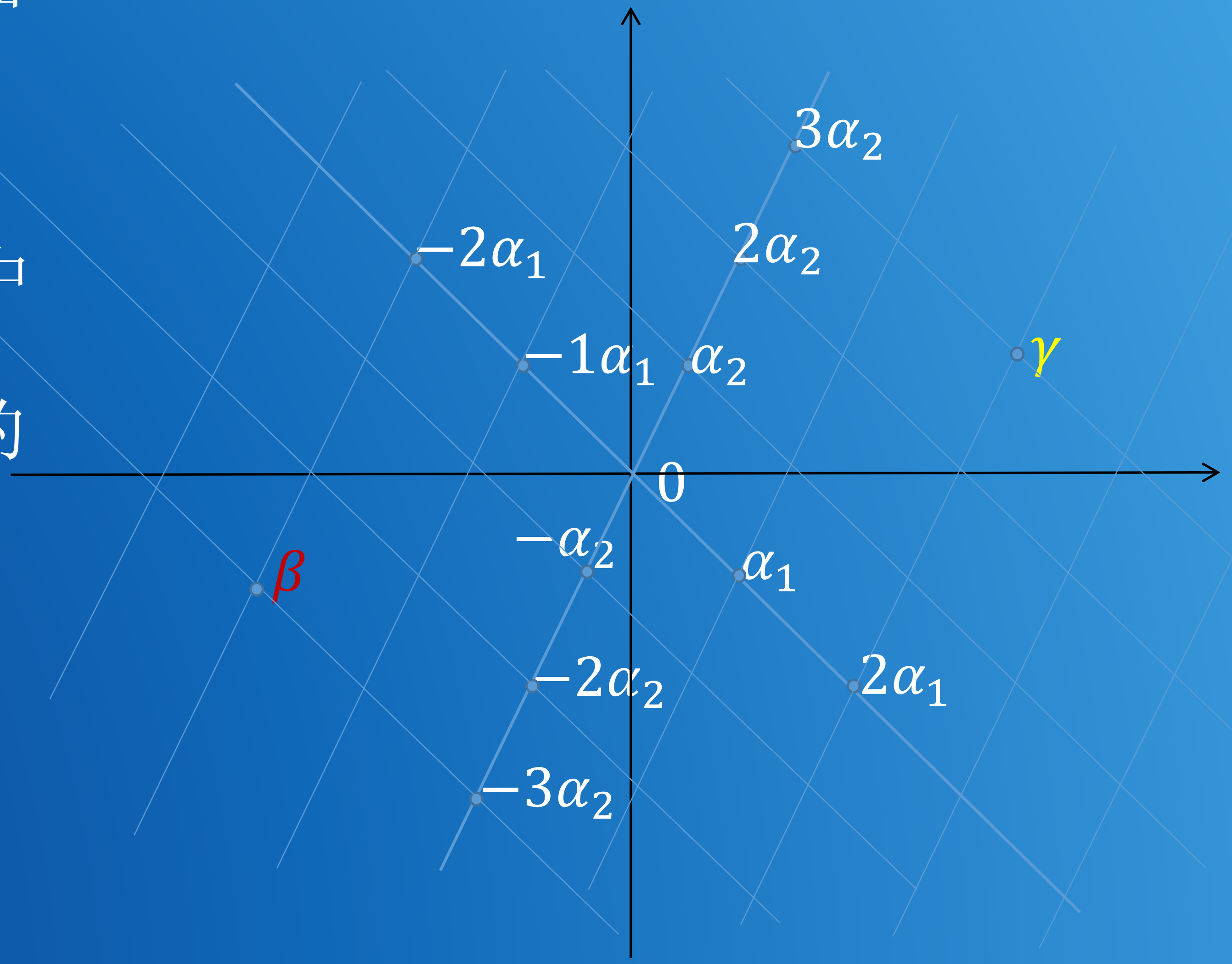
——由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 生成的子空间.

建立平面直角坐标系，那么平面上点就与$\mathbf{R}^2$中的向量一一对应.

令$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，右图中展示了部分由这两个向量构成的线性组合.

比如：$\beta=-2\alpha_1-3\alpha_2$，

$\gamma=2\alpha_1+3\alpha_2$



定理1 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

1° $b \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$;

2° $AX=b$有解;

3° $R(\overline{A})=R(A)$.

证 $1^{\circ} \Leftrightarrow 2^{\circ}$:

$b \in L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $\Leftrightarrow$ 有数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b$,

$$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=b, \Leftrightarrow AX=b\text{有解}X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$2^{o} \Leftrightarrow 3^{o}$: 设 $\mathrm{R}(A) = r$,

$$\overline{A} \xrightarrow{\text{行初等变换}} \left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & & d_{r+1} \\ & & O & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{array}\right) = (B, d),$$

$AX = b$与$BX = d$ 同解. 所以

$AX = b$有解 $\Leftrightarrow$ $d_{r+1} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{R}(B, d) = \mathrm{R}(B) = r$ $\Leftrightarrow$ $R(\overline{A}) = R(A)$.

例1 将 $\beta=(1,0,-4)^{\mathrm{T}}$ 用 $\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 线性表出.

解

$$\overline{A}=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}},\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-4\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-4\\0&1&1&1\\0&0&1&\dfrac{5}{2}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{5}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{5}{2}\end{array}\right)$$

所以，$\beta=-\dfrac{5}{2}\alpha_1-\dfrac{3}{2}\alpha_2+\dfrac{5}{2}\alpha_3$.

定义2 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$,

(II): $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$,

若组(I) 中每一个向量都可由(II)中的向量线性表出，

则称组(I)可由(II)线性表出.

若组(I)与组(II)可以互相线性表出，则称组(I)与组(II)**等价**.

等价关系有性质：

(1) **反身性**：每一向量组都与自身等价；

(2) **对称性**： (I)与(II)等价，则(II)与(I)等价；

(3) **传递性**： (I)与(II)等价，(II)与(III)等价,则 (I)与(III)等价.

二、向量组的线性相关性

定义 若存在不全为零的数$x_1, x_2, \ldots, x_m$使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0 \qquad (*)$$

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关；否则，称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性无关.

特殊情形：

(1) 一个向量α:

α线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$ (线性无关 $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$);

(2) 两个向量α_1, α_2 :

α_1, α_2线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ 它们的对应分量(不)成比例.

例1 n维单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证 考察 $x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=0,$

$$\Leftrightarrow\ x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.\quad\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

即只有 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0.$

例2 含有零向量的向量组线性相关.

证 $1\,\mathbf{0}+0\alpha_1+\ldots+0\alpha_m=\mathbf{0}$

定理2 设有m维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1° $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

2° $AX=0$有非零解;

3° $R(A)<n$

证 $1^{\circ} \Leftrightarrow 2^{\circ}$： $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关

$\Updownarrow$

有不全为零的数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$,

$$\Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0, \Leftrightarrow AX=0\text{有非零解}X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$2^{\mathrm{o}} \Leftrightarrow 3^{\mathrm{o}}$： 设 $R(A) = r$,

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} \\ & O & & & \end{pmatrix} = B.$$

$AX = 0$与$BX = 0$ 同解.

$BX = 0$有非零解$\Leftrightarrow r < n$

故，$AX = 0$有非零解 $\Leftrightarrow r < n$.

向量个数 = 向量维数：

推论1 设有n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$，$A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$，则下列命题等价：

1^o $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性相关；

2^o $AX=0$有非零解；

3^o $\det A = 0$.

几何意义：

在R^2, R^3中， α_1, α_2线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 // \alpha_2$(或共线).

在 R^3中， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$共面.

推论2 向量个数 >向量维数 的向量组必线性相关.

证 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)_{m\times n}$, $n>m$, 则

$$\mathrm{R}(A)\le m<n,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性相关.

在 $\mathbf{R}^n$ 中，任 $n+1$个向量必线性相关.

例3 判断向量组 $\alpha_1=(0,1,1),\ \alpha_2=(1,0,1),\ \alpha_3=(1,1,0)$ 的线性相关性.

解1

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

解2

$$A=(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}(A)=3$, 所以, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

例4 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，

证 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1$线性无关.

证 设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0,$

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+x_3(\alpha_3+\alpha_1)=0.$

即 $(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0.$

因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以只有

$$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} \quad (*) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以(*)只有零解. 故$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

线性相关性的基本定理

定理3 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性相关.

证 由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$线性相关，知有不全为零的数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m = 0.$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_m\alpha_m + 0\alpha_{m+1} + \ldots + 0\alpha_n = 0.$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0$ 不全为零，故$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关.

“部分相关，则整体相关.”
“整体无关，则部分无关.”

定理4 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m \geq 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

证 充分性 不妨设 α_1 可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，

即有数 $x_2, \ldots, x_m$ 使得 $\alpha_1 = x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$,

$$(-1)\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0,$$

因 $-1, x_2, \ldots, x_m$ 不全为零，故 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关.

必要性 有不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0$.

因 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 不全为零，不妨设 $k_1 \neq 0$，则

$$\alpha_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\alpha_m,$$ α_1 可由 $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出.

即“$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 其中任一向量都不能由其余向量线性表出.”

定理5 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关， $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$，$\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，且表式惟一.

证 有不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m + k\beta = 0.$$

若 $k = 0$，则

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0.$$

而 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 不全为零,与 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关矛盾.

所以 $k \neq 0$， $\beta = (-\frac{k_1}{k})\alpha_1 + (-\frac{k_2}{k})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{k_m}{k})\alpha_m,$

下证 β 由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表出的表式惟一：

设
$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$
$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m,$$

所以
$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0,$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关，所以
$$k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \cdots = k_m - l_m = 0,$$

即 $k_1 = l_1, \cdots, k_m = l_m$. 故表式惟一.

谢谢