

6.3 曲面与空间曲线

一、 曲面

二、 旋转曲面

三、 空间曲线



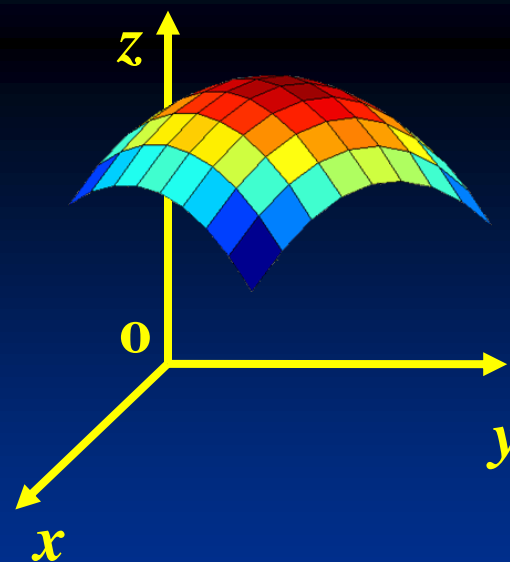
一、曲面

定义 空间点集

$$S = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$$

称为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的曲面.

- (1) S 上的点都满足 $F(x, y, z) = 0$;
- (2) 满足 $F(x, y, z) = 0$ 的点都在 S 上.



例 1 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点,

根据题意有 $\|MM_0\| = R$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

所求方程为 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

特殊地：球心在 origin 时方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



例2 设有点A(1, 2, 3)与B(2, -1, 4), 求线段AB的垂直平分面的方程.

解 设M(x, y, z)是空间的任一点, 那么有

$$|AM| = |BM|$$

$$\text{即 } \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}$$

化简得所求平面的方程为

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0$$



例3 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 表示怎样的曲面？

解 通过配方，原方程可以改写为

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 3^2$$

所以原方程表示球心在点 $M_0(1, -2, 0)$ 、半径为 $R = 3$ 的球面。



例4 方程 $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ 的图形是怎样的？

解 根据题意有 $z \geq -1$

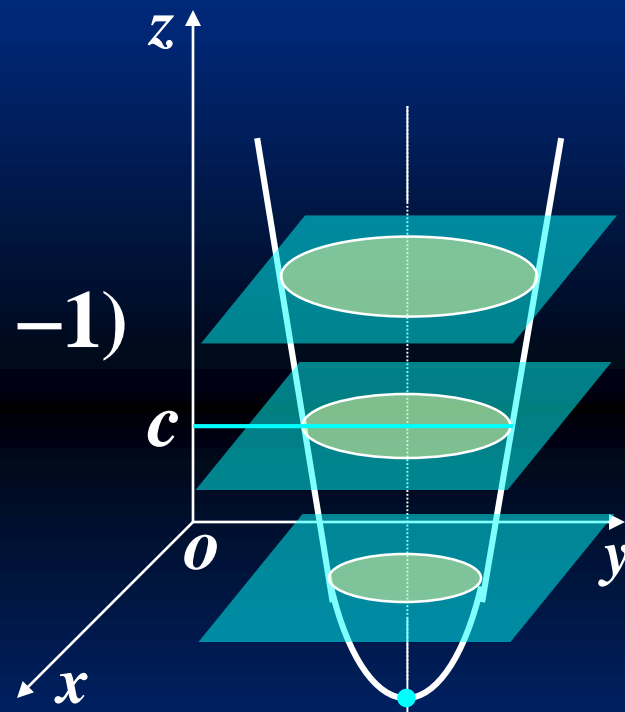
用平面 $z = c$ 去截图形得圆：

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面 $z = c$ 上下移动时，
得到一系列圆

圆心在 $(1, 2, c)$ ，半径为 $\sqrt{1+c}$

半径随 c 的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.



综上，曲面研究下列两个基本问题：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹，建立这曲面的方程.

(2) 已知一个关于变量 x, y, z 的方程，研究这方程所表示的曲面的几何性质.

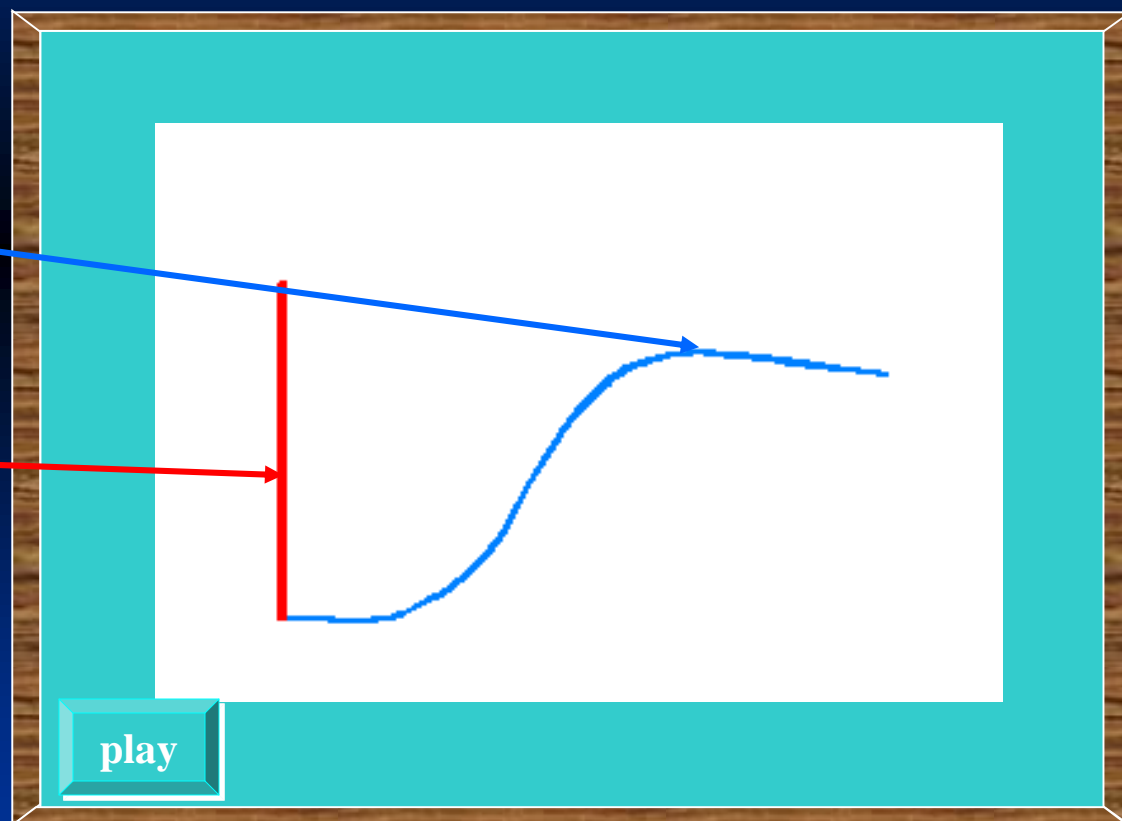


1. 柱面

定义 与定曲线 C 相交，与某一定直线平行的动直线 L 所形成的曲面称为**柱面**.

曲线 C 称为**准线**

L 称为**母线**



例5 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$

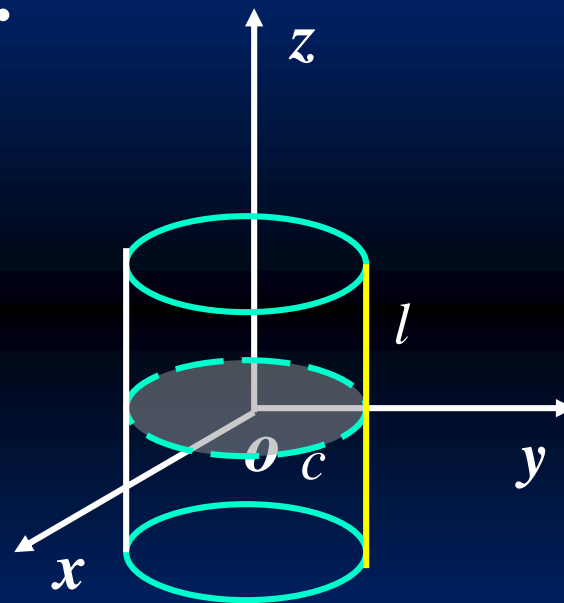
准线 C 是 xOy 平面上的椭圆.

母线 l 与 z 轴平行.

$$S = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

S : 椭圆柱面

$a = b$: 圆柱面



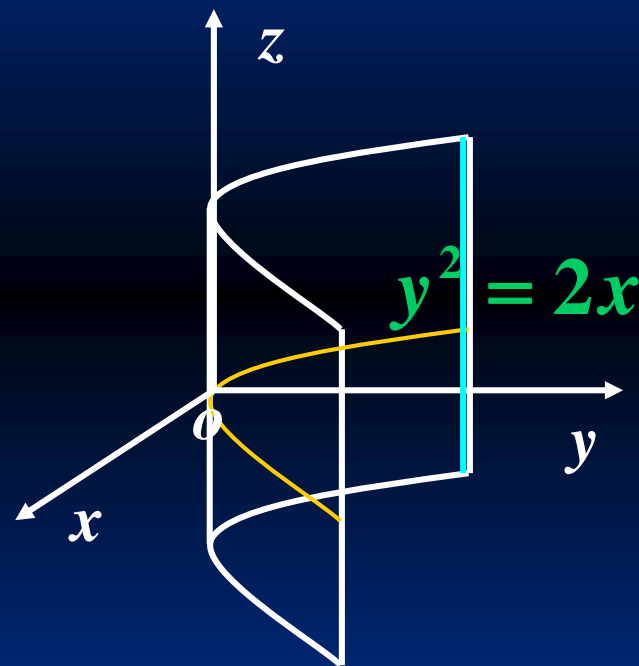
例6 $y^2 = 2x$

$$S = \{ (x, y, z) \mid y^2 = 2x \}$$

准线: xOy 平面上的抛物线
 $y^2 = 2x$.

母线: 与 z 轴平行.

S : 抛物柱面

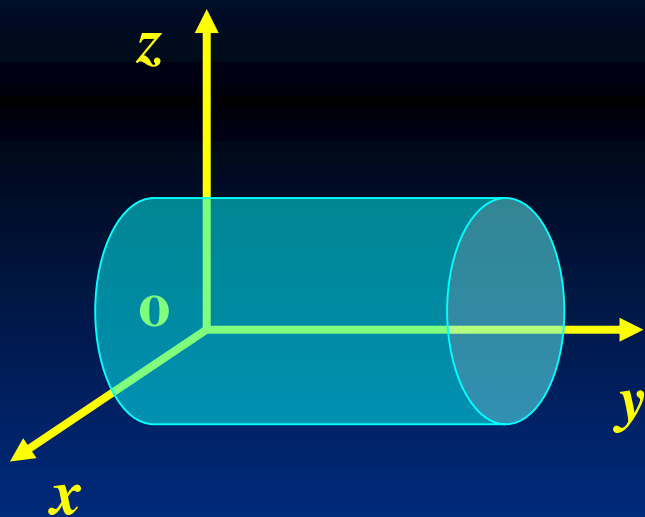


例7 圆柱面 $x^2 + z^2 = 1$

准线: xOz 平面上的圆

$$x^2 + z^2 = 1$$

母线: 平行于 y 轴



例8 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$

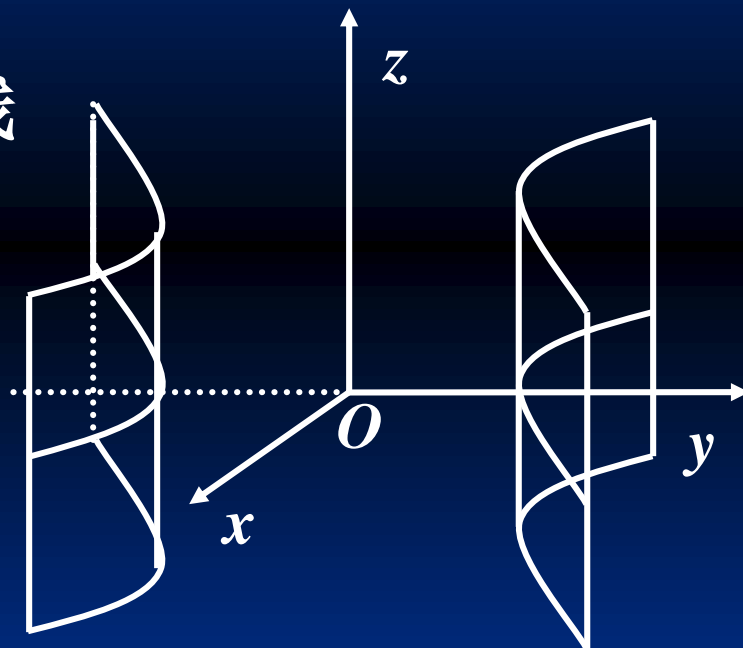
$$S = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

准线: xOy 平面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

母线: 与 z 轴平行.

S : 双曲柱面



2. 柱面方程的特征（母线平行于坐标轴）：

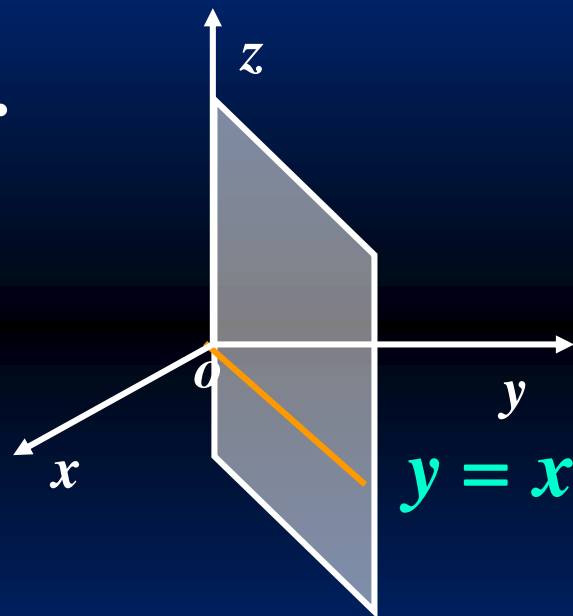
- (1) $F(x, y) = 0$: 准线是 xOy 平面上的曲线 $F(x, y) = 0$, 母线与 z 轴平行;
- (2) $G(x, z) = 0$: 准线是 xOz 平面上的曲线 $G(x, z) = 0$, 母线与 y 轴平行;
- (3) $H(y, z) = 0$: 准线是 yOz 平面上的曲线 $H(y, z) = 0$, 母线与 x 轴平行;



例9 $y = x$

在 xoy 平面上, $y = x$ 是一条直线.

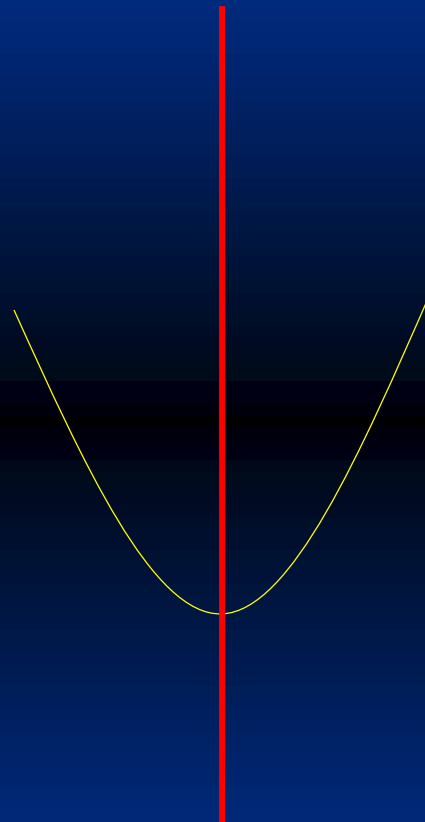
在空间直角坐标系 $O - xyz$ 中, $y = x$ 是一张平面. 它也可以看成是以 xy 平面上的直线 $y = x$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.



二、旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕该平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



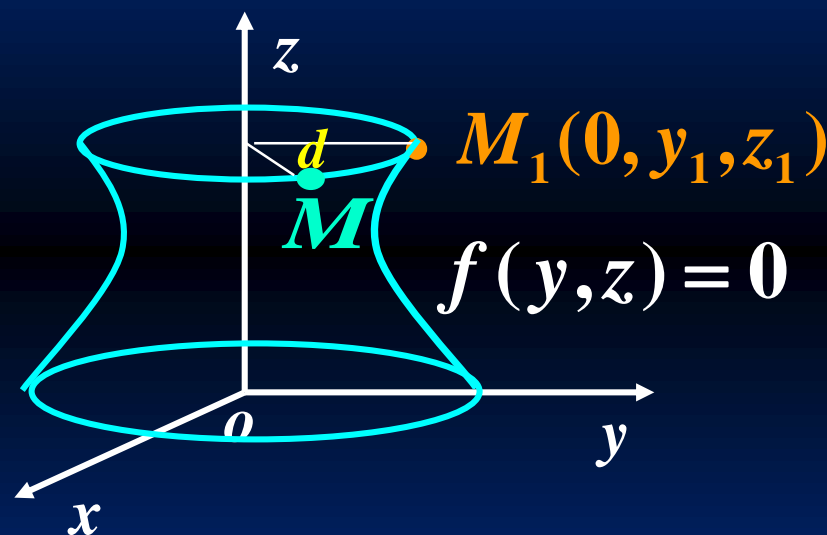
例10 求 yOz 平面上的曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周所得空间曲面的方程.

解 设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 是曲线 $f(y, z) = 0$ 上的一个点, $M(x, y, z)$ 是 M_1 在旋转过程中所产生的任一点, 则有

(1) $z = z_1$

(2) 点 M 到 z 轴的距离

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$$



将 $z = z_1$, $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 $f(y_1, z_1) = 0$

得方程 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$,

是 yOz 坐标面上的已知曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程.

同理: yOz 坐标面上的已知曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转一周的旋转曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$



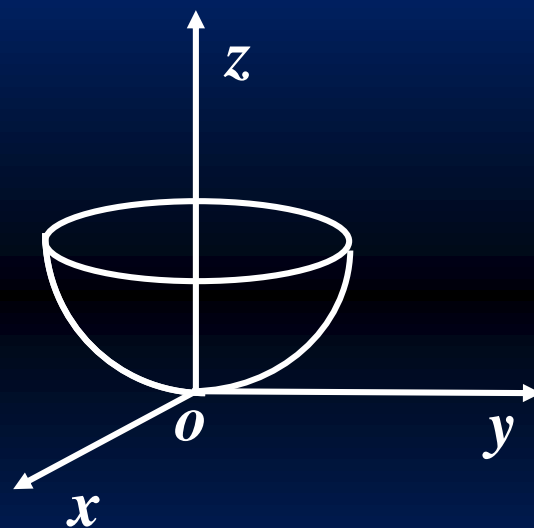
例11 方程 $z = x^2 + y^2$ 表示什么曲面？

解 $z = x^2 + y^2 = (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2$
即，曲面 $z = x^2 + y^2$ 可以看作
是：

xOz 平面上的抛物线 $z = x^2$ 绕 z
轴旋转一周所得到的**旋转抛物**
面.

这个也可看作是：

yOz 平面上的抛物线 $z = y^2$ 绕 z
轴旋转一周所产生的.

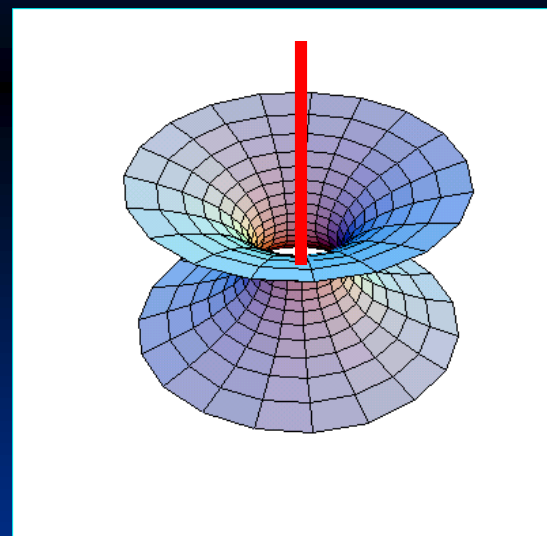


例12 将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程。

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴；

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

旋转双曲面.



返回

(2) 椭圆 $\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴和 z 轴;

绕 y 轴旋转

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

绕 z 轴旋转

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

旋转椭球面



一般地, 设有平面曲线 $L: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(1) 曲线 L 绕 x 轴旋转所成的旋转曲面方程为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$$

(2) 曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$$

同样可讨论平面曲线 $L': \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

绕 x 轴或 z 轴旋转所成的曲面方程.

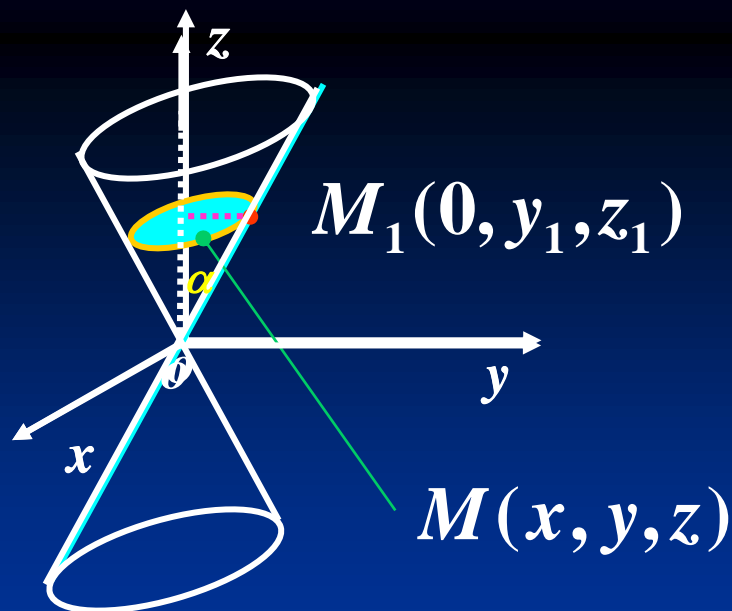


例 13 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫**圆锥面**．两直线的交点叫圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 叫圆锥面的**半顶角**．试建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程．

解 yOz 面上直线方程为
$$z = y \cot \alpha$$

圆锥面方程

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$



如果半顶角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\cot \alpha = 1$.

圆锥面方程为

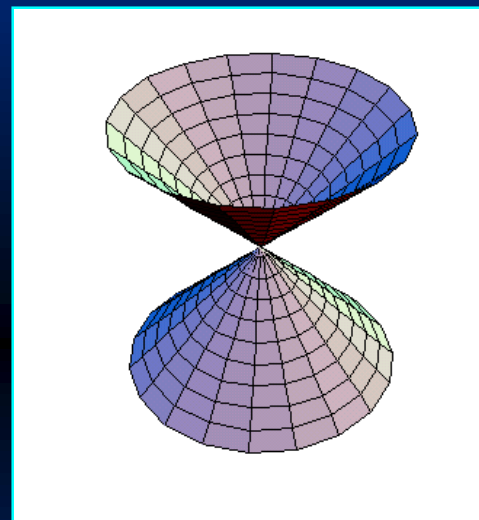
$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

或 $z^2 = x^2 + y^2$.

注意区别:

(1) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 圆锥面

(2) $z = x^2 + y^2$, 旋转抛物面.



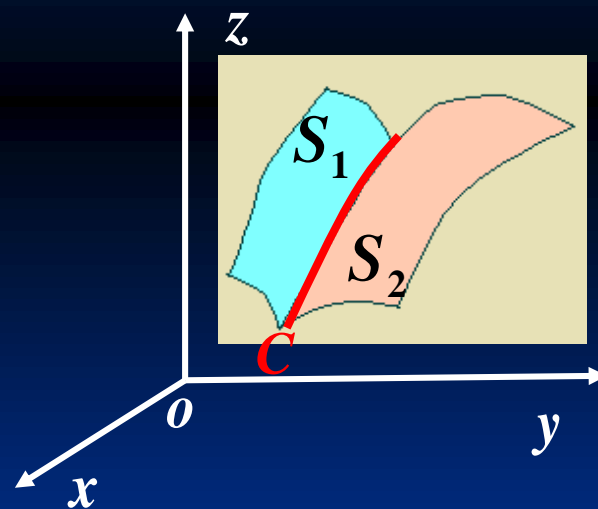
三、 空间曲线

1. 一般方程

空间曲线 C 可看作空间两曲面的交线.

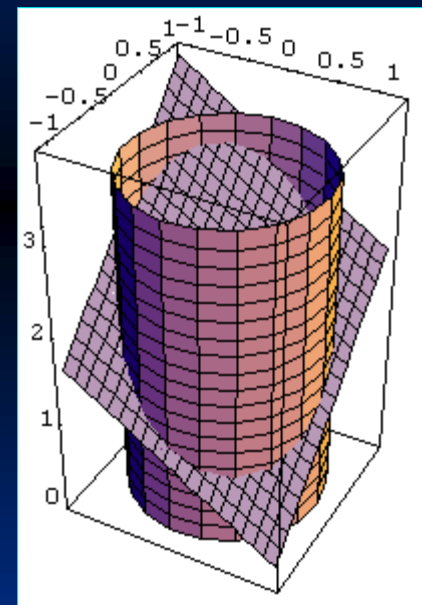
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

上式称为空间曲线的一般方程.



例12 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱面,
 $2x + 3y + 3z = 6$ 表示平面,
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$
交线为椭圆.



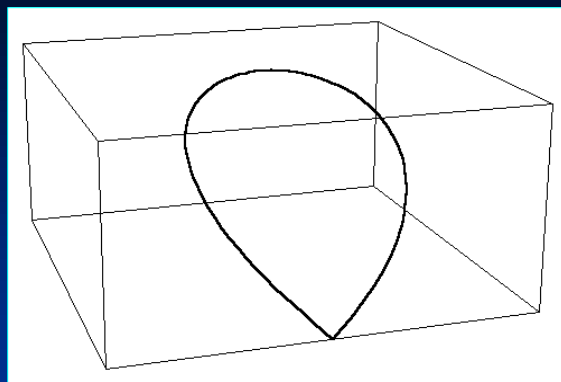
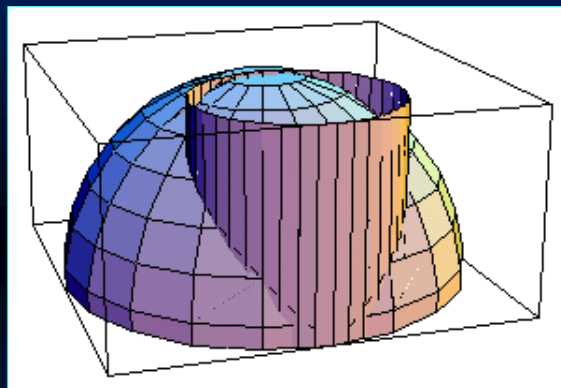
例13 方程组
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$$
 表示怎样的曲线?

解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.



返回

2. 参数方程

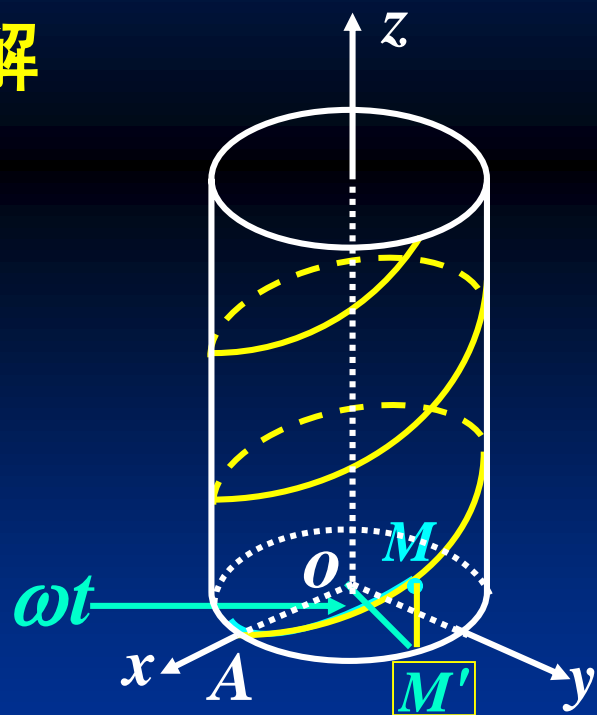
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{称为空间曲线的参数方程.}$$

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ，当 t 取遍允许取的全部值时，就得到曲线上的所有点。



例 14 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω 、 v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做**螺旋线**。试建立其参数方程。

解



取时间 t 为参数，动点从 A 点出发，经过 t 时间，运动到 M 点
 M 在 xOy 面的投影 $M'(x, y, 0)$

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = a \sin \omega t$$

$$z = vt$$

螺旋线的参数方程



螺旋线的参数方程还可以写为

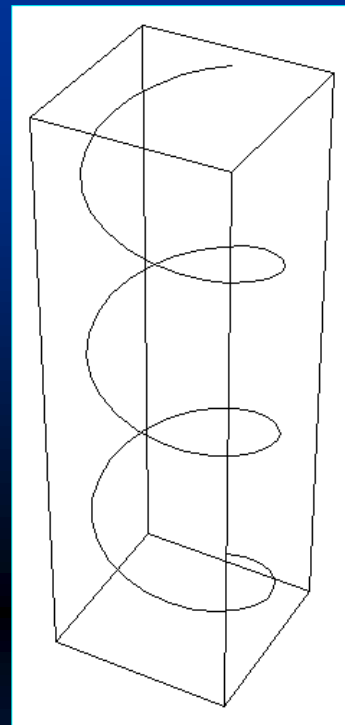
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b \theta \end{cases} \quad (\theta = \omega t, \quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质：

上升的高度与转过的角度成正比。

即 $\theta: \theta_0 \rightarrow \theta_0 + \alpha, \quad z: b\theta_0 \rightarrow b\theta_0 + b\alpha,$

$\alpha = 2\pi,$ 上升的高度 $h = 2b\pi$ 螺距

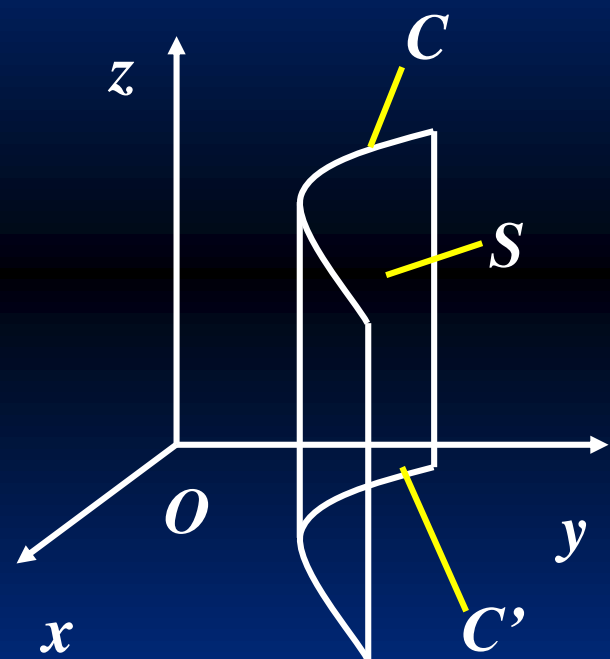


3. 空间曲线在坐标面上的投影

C : 空间曲线

S : 以 C 为准线, 母线与 z 轴平行的曲面, 称为**投影柱面**.

C' : C 在 xOy 平面上的**投影**.



设空间曲线的一般方程:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

确定 C 在 xOy 平面上的投影的一般过程为:

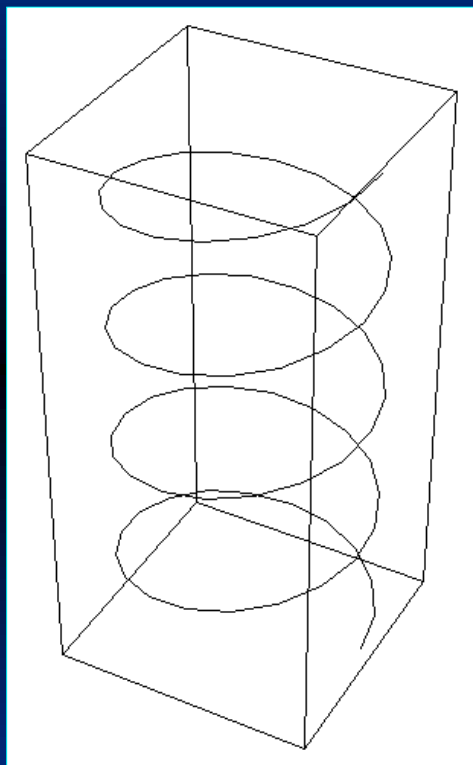
(1) 在(*)式中消去 z , 得投影柱面方程

$$H(x, y) = 0$$

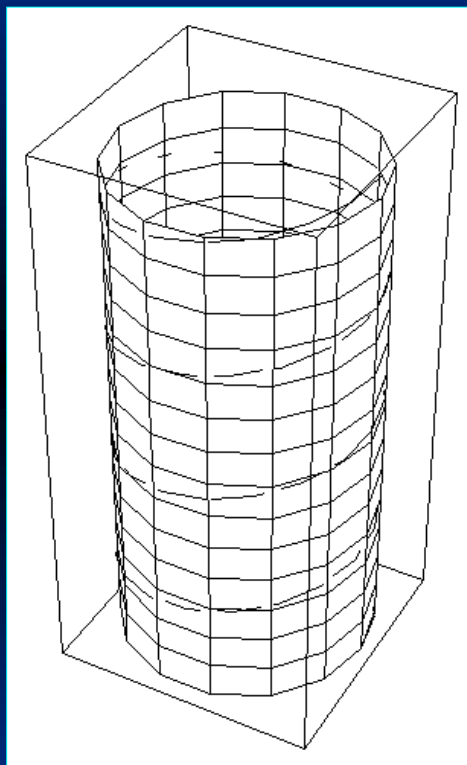
(2) $C': \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 就是 C 在 xOy 平面上的投影方程.



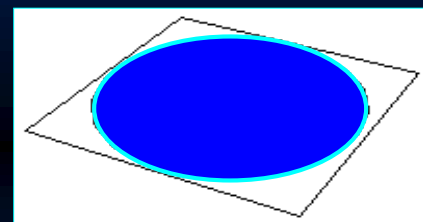
投影曲线的研究过程可用下面的几何图形表示：



空间曲线



投影柱面



投影曲线



例15 求曲线
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

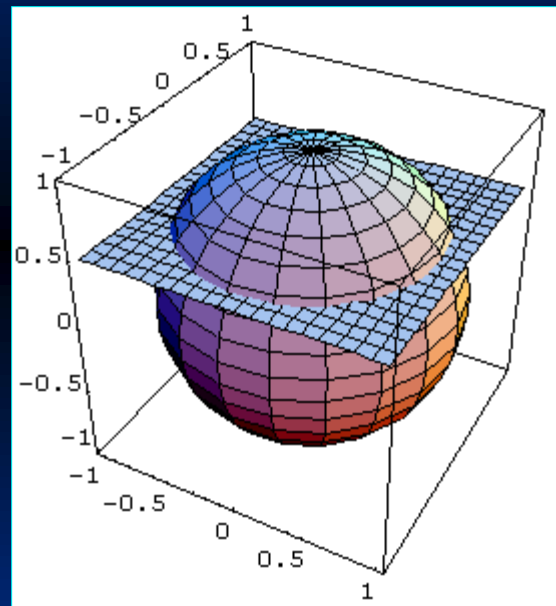
在坐标面上的投影.

解 (1) 消去变量 z 后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4}, \\ z = 0 \end{cases}$$



(2) 因为曲线在平面 $z = \frac{1}{2}$ 上,
所以在 xOz 面上的投影为线段.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, & |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ y = 0 \end{cases}$$

(3) 同理在 yOz 面上的投影也为线段.

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, & |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ x = 0 \end{cases}$$

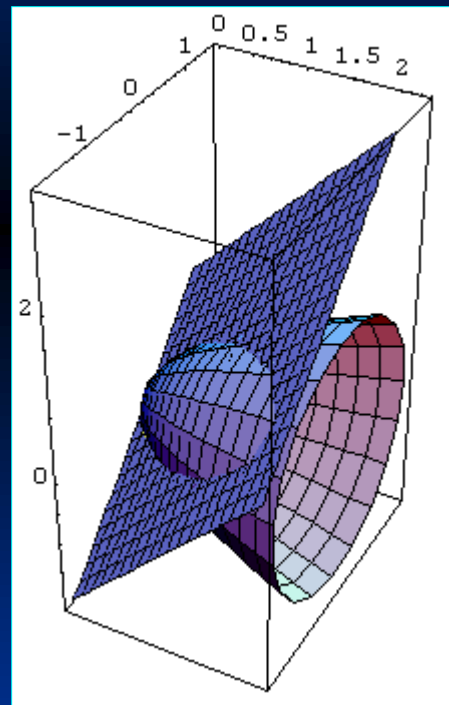


例 16 求抛物面 $y^2 + z^2 = x$ 与平面 $x + 2y - z = 0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 截线方程为

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

如图,



返回

(1) 消去 z 得投影 $\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy - x = 0 \\ z = 0 \end{cases},$

(2) 消去 y 得投影 $\begin{cases} x^2 + 5z^2 - 2xz - 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$

(3) 消去 x 得投影 $\begin{cases} y^2 + z^2 + 2y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$

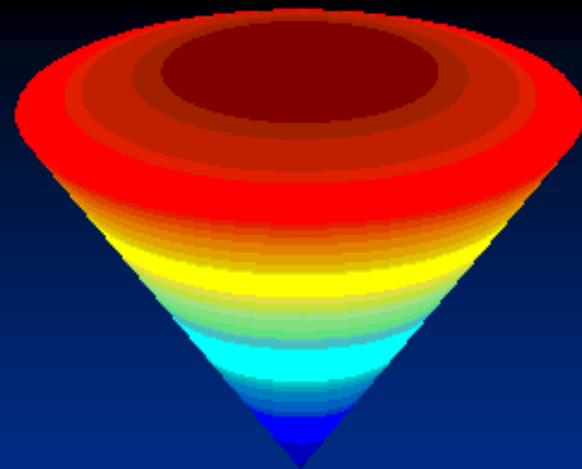


例17 设一个立体由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

与锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成，求它在 xOy 面上的投影。

解 半球面与锥面的交线

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases}$$



消去变量，得投影柱面方程 $x^2 + y^2 = 1$

投影曲线方程
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

所求立体在 xOy 面上的投影就是该圆在 xOy 面上

所围成的区域

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

