

6.4 二次曲面

一、 椭球面

二、 抛物面

三、 双曲面

四、 空间立体或曲面在坐标面上的
投影



二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

所表示的曲面称为二次曲面.

讨论二次曲面的性质使用截痕法:

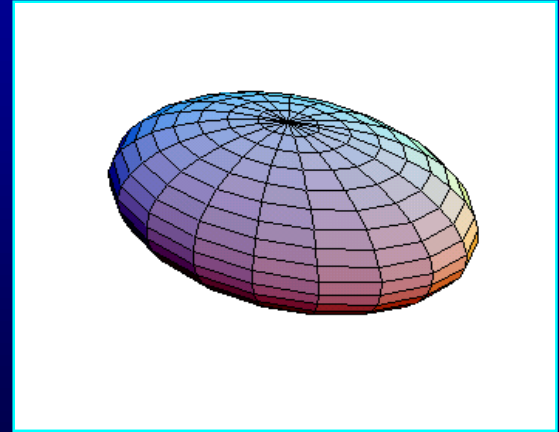
用坐标面或坐标面平行的平面与曲面相截,
考察所得交线(截痕)的形状, 通过截痕形状研究曲面的性状.



一、 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$(a > 0, b > 0, c > 0)$



1. 范围: $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$.

图形在 $x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c$ 所围成的长方体内.

2. 对称性: 图形关于三个坐标面、三个坐标轴及原点对称.



返回

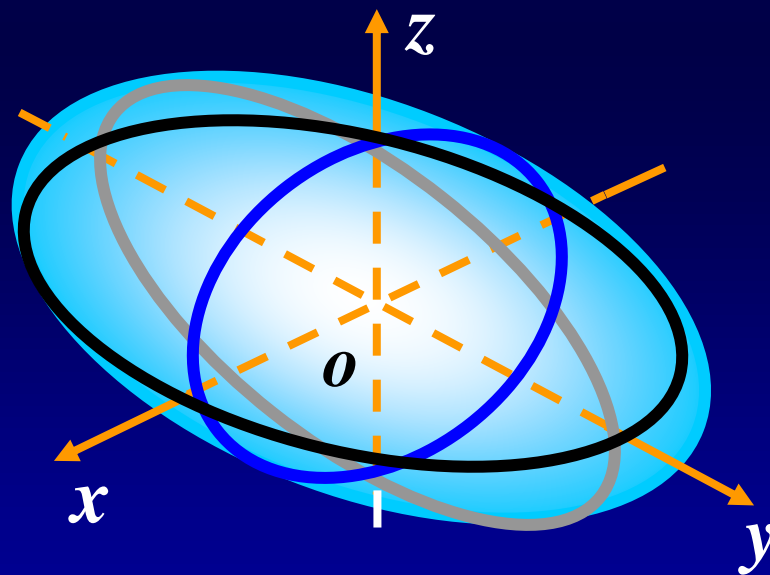
3. 截 痕

椭球面与
三个坐标面
的交线:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$



椭球面与平面 $z = z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \quad |z_1| < c \end{cases}$$

同理与平面 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 的交线也是椭圆。

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化。



椭球面的几种特殊情况：

(1) $a = b, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 旋转椭球面

由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转而成.

方程可写为 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

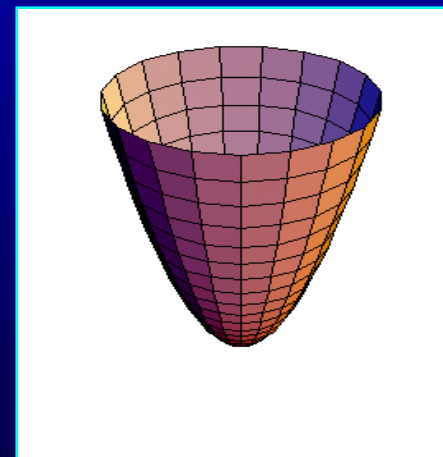
(2) $a = b = c, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ 球面

方程可写为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



二、 抛物面

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (p \text{ 与 } q \text{ 同号})$$



(1) 范围: 若 $p > 0$ 且 $q > 0$, 则

图形在 xOy 平面上方, 否则在 xOy 平面下方.

(2) 对称性: 图形关于 z 轴、 yOz 平面、 xOz 平面对称.



(3) 截 痕

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad \text{设 } p > 0, q > 0$$

1⁰ 用坐标面 xOy ($z = 0$) 与曲面相截

截得一点, 即坐标原点 $O(0,0,0)$

原点也叫椭圆抛物面的**顶点**.



与平面 $z = z_1$ ($z_1 > 0$) 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2pz_1} + \frac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时, 这种椭圆的中心都在 z 轴上.

与平面 $z = z_1$ ($z_1 < 0$) 不相交.

2⁰ 用坐标面 xOz ($y = 0$) 与曲面相截

截得抛物线
$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$$



与平面 $y = y_1$ 的交线为抛物线.

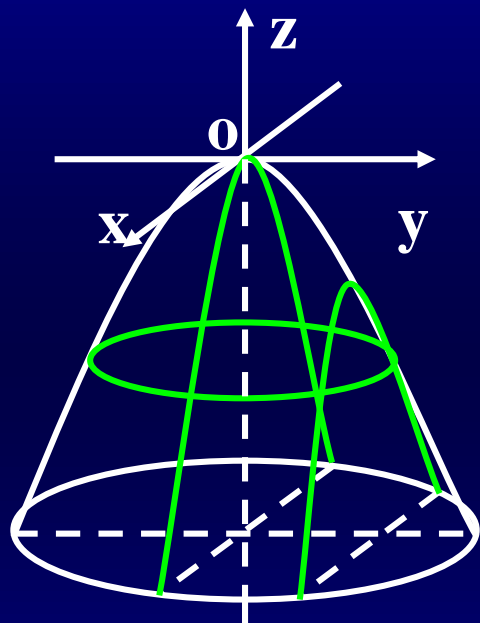
$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \frac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{它的轴平行于 } z \text{ 轴} \\ \text{顶点 } \left(0, y_1, \frac{y_1^2}{2q}\right) \end{array}$$

3⁰ 用坐标面 yOz ($x = 0$), $x = x_1$ 与曲面相截
均可得抛物线.

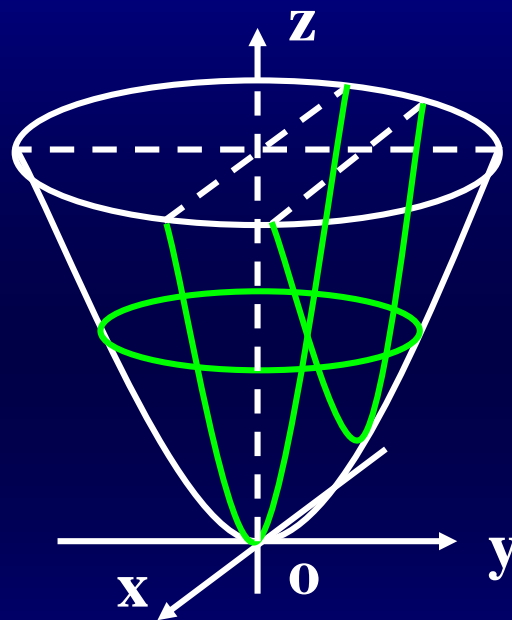
同理当 $p < 0$, $q < 0$ 时可类似讨论.



椭圆抛物面的图形如下：



$$p < 0, \quad q < 0$$



$$p > 0, \quad q > 0$$



特殊地：当 $p = q$ 时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z \quad (p > 0) \quad \text{旋转抛物面}$$

（由 xOz 面上的抛物线 $x^2 = 2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

与平面 $z = z_1$ ($z_1 > 0$) 的交线为圆.

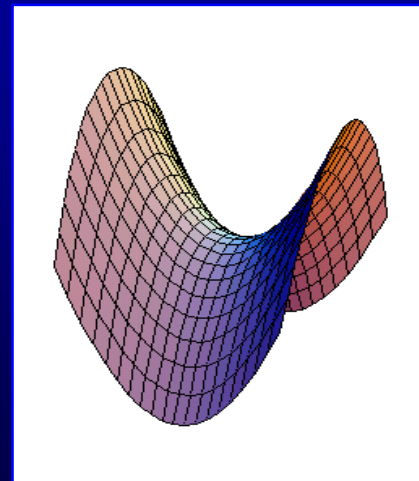
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2pz_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种圆的中心都在 z 轴上.



2. 双曲抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \quad (pq > 0)$$



(1) 范围: $x, y, z \in \mathbf{R}$, 曲面可向各方向无限延伸.

(2) 对称性: 图形关于 z 轴、 yOz 平面、 xOz 平面对称.



3) 截痕 (设 $p < 0, q < 0$)

用平面 $z = z_0$ ($z_0 \neq 0$)截曲面所得截痕为双曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2pz_0} - \frac{y^2}{2qz_0} = 1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

用平面 $x = x_0$ 与 $y = y_0$ 截曲面所得截痕为

$$\begin{cases} z = \frac{x_0^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \\ x = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2q} \\ y = y_0 \end{cases}$$

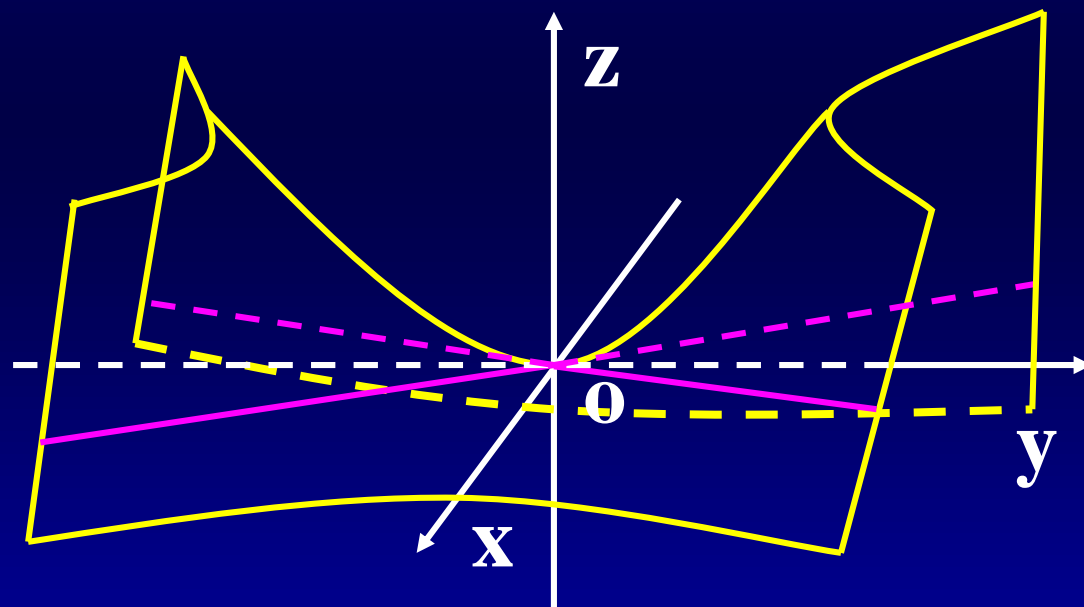
这是两条抛物线.



双曲抛物面

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \quad (p < 0, q < 0)$$

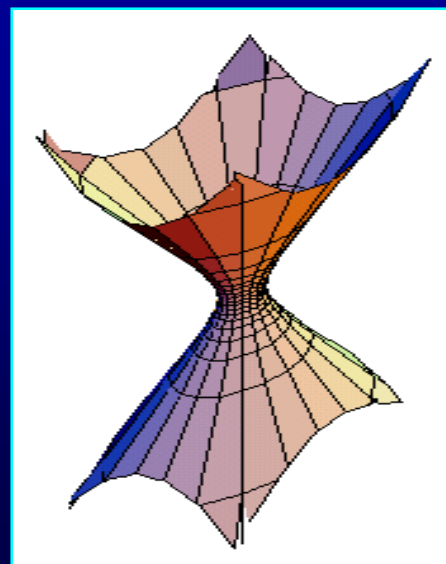
图形如下：



三、 双曲面

1. 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



(1) 范围:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

故曲面在椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的外部;

(2) 对称性: 图形关于三个坐标轴、三个坐标面以及原点都对称.



用平面 $z = z_0$ 截曲面所得截痕为椭圆:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

用平面 $x = x_0, y = y_0$ 截曲面所得截痕为:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} \\ x = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2} \\ y = y_0 \end{cases}$$

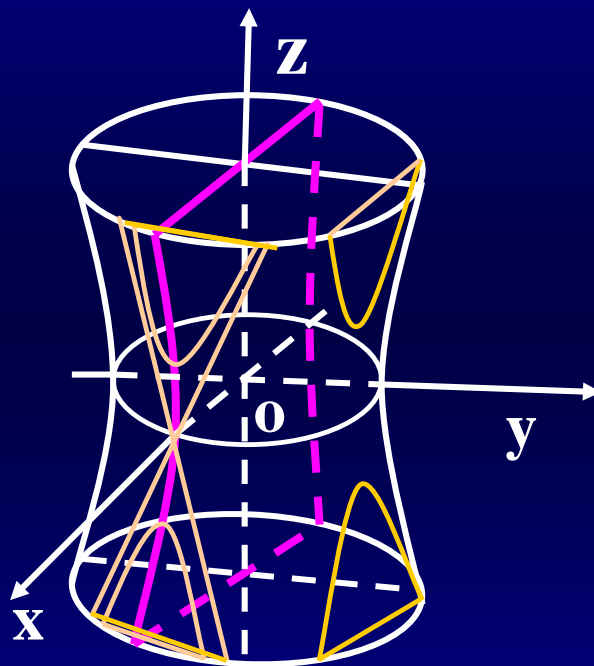
这是两条双曲线.



单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的图形如下:



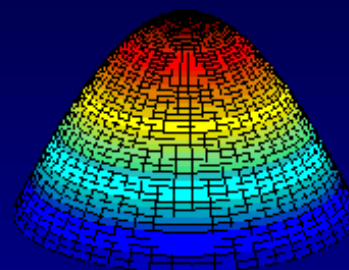
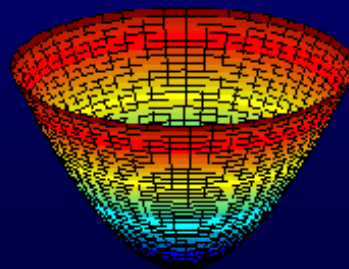
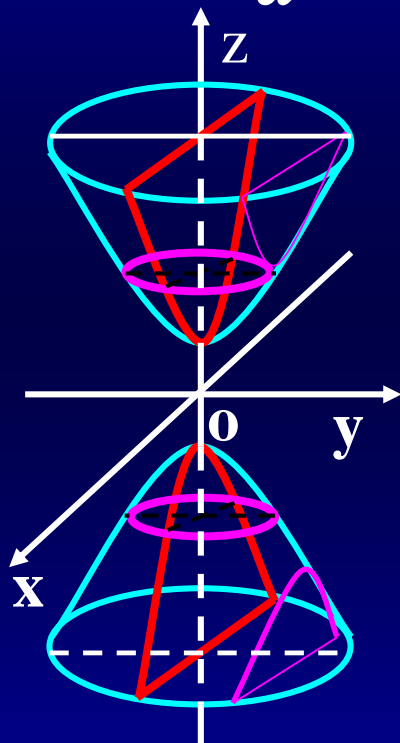
思考题:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 的形状如何?}$$



2. 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



思考题: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ 的图形怎样?



例 $z = f(x, y) = xy$ 表示什么曲面?

解

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

存在正交变换 $X = CY$ 使

$$z = f = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$z = xy$ 为**双曲抛物面**.



例4 设 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 为实二次型, 则
 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 为椭球面 $\Leftrightarrow A$ 为正定矩阵.

证 将 $f(X) = X^T A X$ 用正交变换 $X = CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

则 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ 为椭球面

$\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全为正数

$\Leftrightarrow A$ 为正定矩阵.

