高等数学A(上)

第二章 一元函数微分学

本章重点

导　数 — 描述函数变化快慢
微　分 — 描述函数变化程度
微分学 — 基本概念是导数与微分

微分学
基本概念是导数与微分

导　数
描述函数变化快慢

微　分
描述函数变化程度

中值定理
罗尔、拉格朗日、柯西

应用一
研究函数性质及曲线性态

应用二
利用导数解决实际问题

第二章

目 录

CONTENTS

第三节 隐函数和参数方程求导相关变化率

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、由参数方程确定得函数的导数

四、相关变化率

一、隐函数的导数

定义

由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

由 $y=f(x)$ 表示的函数称为显函数.

例如: 方程 $x+y^3-1=0$ 可确定显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$.

方程 $xy-e^x+e^y=0$ 理论上可确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$,

但此隐函数不能显化.

问题 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则： 用复合函数求导法则直接对方程两边求导. 即

$$F(x,y)=0$$

两边对x求导　↓　注意 $y=y(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0$$ （含有导数y'的方程）

例1 求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$所确定的隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 方程两边对x求导, 得 $y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}.$

例2　求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对 x 求导,得

$$5y^4\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0\quad\therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2},$$

因当 $x=0$ 时, $y=0$, 故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

例3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程.

解 椭圆方程两边对x求导, 得

$$\frac{2x}{16}+\frac{1}{9}\cdot 2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{9x}{16y},\qquad \therefore\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)\ \text{即}\ \sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$

二、对数求导法

观察函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^{2}\mathrm{e}^{x}}$, $y=x^{\sin x}$.

方法:

先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

——对数求导法

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数$u(x)^{v(x)}$的情形.

例5　设$y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$，求$y'$.

$\ln ab=\ln a+\ln b$
$\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$
$\ln a^b=b\ln a$

解　等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上下两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right].$$

例6 设 $y = x^{\sin x}, (x>0)$, 求 y'.

解 等式两边取对数得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

另种写法

利用换底公式改写

$$y = x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$$

再用复合函数链式法则

$$y' = e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)'$$

$$= y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

一般地 $y=u(x)^{v(x)}\ (u(x)>0)$

殊途同归

取对数

$\because \ln y=v(x)\cdot\ln u(x)$

$\therefore \dfrac{y'}{y}=(v(x)\cdot\ln u(x))'$

$\therefore y'=y(v(x)\cdot\ln u(x))'$

换底

$\because y'=\mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln u(x)}$

$\therefore y'=\mathrm{e}^{v(x)\cdot\ln u(x)}(v(x)\cdot\ln u(x))'$

$\therefore y'=y(v(x)\cdot\ln u(x))'$

$$y'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$$

三、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系，称此为由参数方程所确定的函数.

例如: $\begin{cases} x=2t, \\ y=t^2, \end{cases} \xrightarrow{\text{消去参数}t} y=\dfrac{x^2}{4} \quad \therefore \ y'=\dfrac{1}{2}x$

摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，消参困难！

问题 消参困难或无法消参如何求导？

在方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$中,

① 设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$

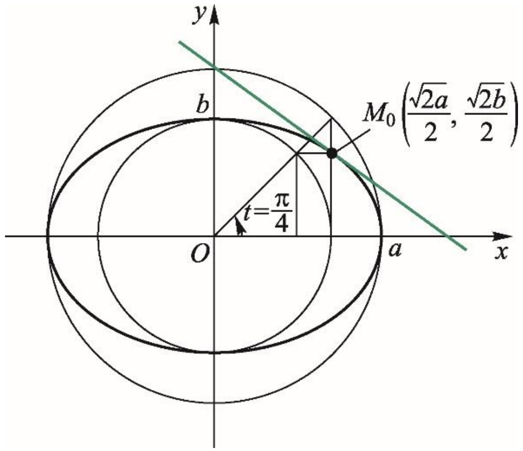
② 再设函数$x=\varphi(t), y=\psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t)\neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

例7 已知椭圆的参数方程$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$求椭圆在$t = \dfrac{\pi}{4}$相应点处的切线方程.



解 $\because \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t}$,

$\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{b}{a}$. 当$t = \dfrac{\pi}{4}$时, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$,

故所求切线方程为 $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

即　$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0.$

四、相关变化率

设$x = x(t)$及$y = y(t)$都是可导函数,

x与y之间存在某种关系 $\longrightarrow$ $\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \text{与} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{\text{称为相关变化率}}$之间也存在一定关系

相关变化率问题: 已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率?

解法:

找出相关变量的关系式

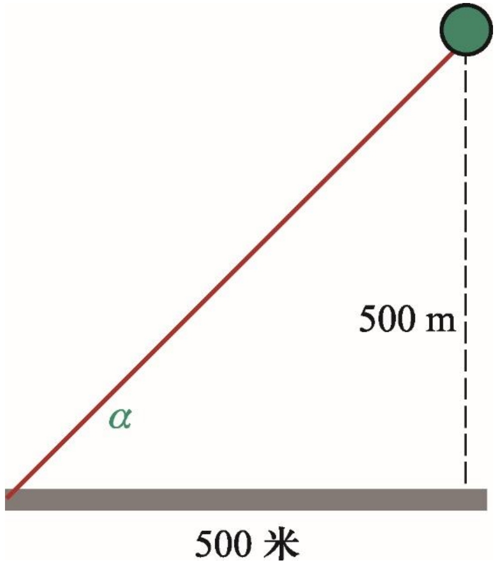
对 t 求导

得相关变化率之间的关系式

求出未知的相关变化率

例9　一气球从离开观察员500m处离地面铅直上升，当气球高度为500m时，其速率为140m/min，观察员视线的仰角增加率是多少？

解　设气球上升t s后，其高度为h m，观察员视线的仰角为α，则



$$\tan\alpha = \frac{h}{500} \xrightarrow{\text{两边对}t\text{求导}} \sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{500}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$\because \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 140\ \mathrm{m/min}$，当 $h = 500$m时，$\sec^2\alpha = 2$

$\therefore$ 仰角增加率为$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 0.14$(弧度/min).

$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha}$