高等数学A(上)

第3章　一元函数积分学

本章重点

积分学

不定积分
定积分

微积分基本公式

揭示出定积分与不定积分之间的联系，给出定积分计算的有效而简便的方法

换元法和分部积分

计算定积分的常用方法

第一节 定积分的概念与性质

一、问题的提出

二、定积分的概念

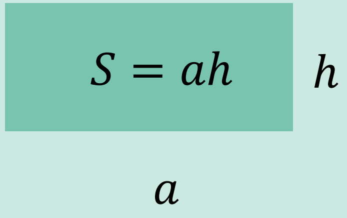
三、定积分的近似计算

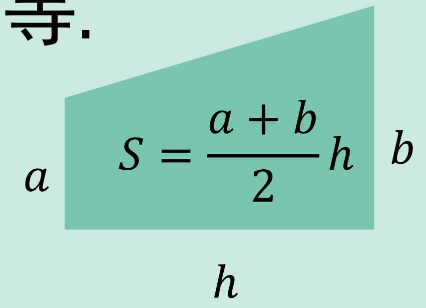
四、定积分的性质

一、问题的提出

中学已经学过直边图形的面积. 例如：矩形、梯形等.

问题： 如何求曲边图形的面积？





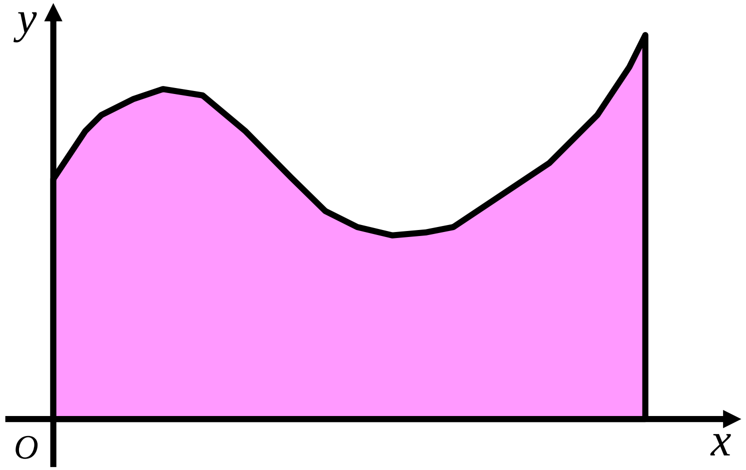
实例1 曲边梯形的面积

设$y = f(x)$在区间$[a, b]$上非负、连续.

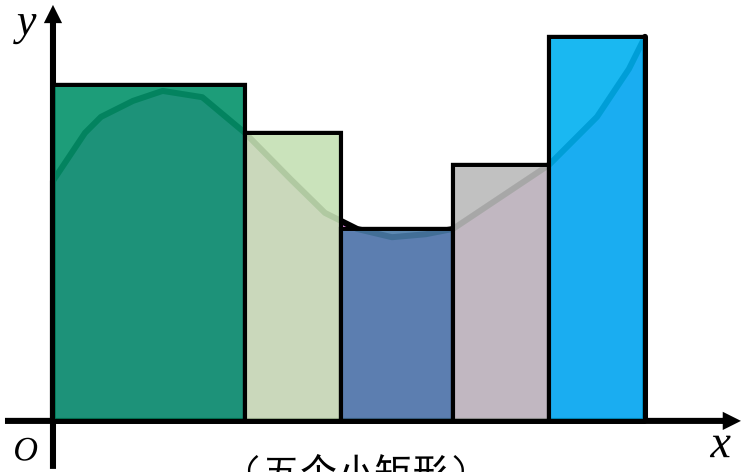
由直线$x = a, x = b, y = 0$

及曲线$y = f(x)$所围成

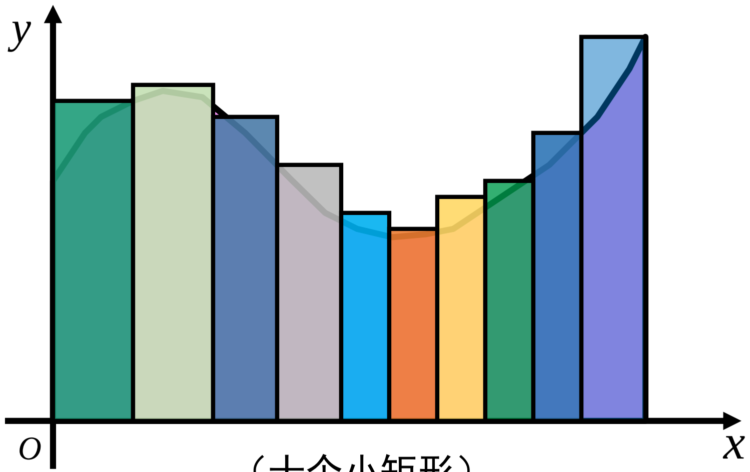
的图形称为**曲边梯形**. 求其面积 S.



观察发现：小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.



（五个小矩形）



（十个小矩形）

解决思路：用矩形面积近似取代曲边梯形面积

思想：以直代曲

解决步骤： 采取下列四个步骤来求面积A.

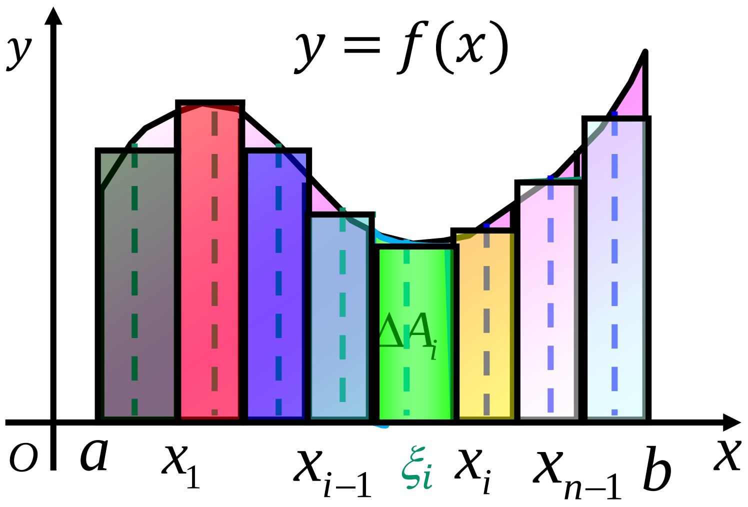
（1）分割

在区间$[a,b]$中任意插入$n-1$个分点

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,

把区间 $[a,b]$ 分成 n个小区间 $[x_{i-1},x_i]$,

长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.



（2）以不变代变

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$上任取一点ξ_i, 以 $[x_{i-1},x_i]$为底,$f(\xi_i)$为高的小矩形面积近似代替ΔA_i, 即$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i, i=1,2,\cdots,2n$.

（3）求和

这些小矩形面积之和可作为曲边梯形面积A的近似值.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

（4）取极限

当分割无限加细，即小区间的最大长度$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda\to 0)$ 时，取极限，极限值就是曲边梯形的面积:

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

实例2　变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geqslant 0$．求在运动时间内物体所经过的路程s.

解决步骤:

$$t_0=T_1\quad t_1\quad \cdots\quad t_{i-1}\ \tau_i\ t_i\quad \cdots\quad T_2=t_n$$

（1）分割:$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$,短时段 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$

（2）以常代变:　短时段上路程的近似值 $\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i, i=1,2,\cdots,n$

（3）求和:　路程的近似值 $s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）取极限:路程的精确值$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$,其中$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant 1}\{\Delta t_i\}$

$$面积A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$路程s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

上述两个问题的**共性:**

- 解决问题的方法步骤相同：分割, 以常代变, 求和, 取极限
- 所求量极限结构式相同：特殊乘积和式的极限

类似的问题有许多: 收益问题, 变力沿直线所做的功等

二、定积分的概念

1. 定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界, 在$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间,

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0\ ,\cdots,\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\ ,\cdots,\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

在每个小区间上任取一点$\xi_i \in [x_i,\ x_{i-1}]$, 作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i = 1,\cdots,n)$,

并作和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点$\xi_i$怎样的取法，只要当$\lambda\to 0$时，和$S_n$总趋于确定的极限$I$,即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

则称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分,记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即

积分上限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

积分变量

被积表达式

$[a,b]$积分区间

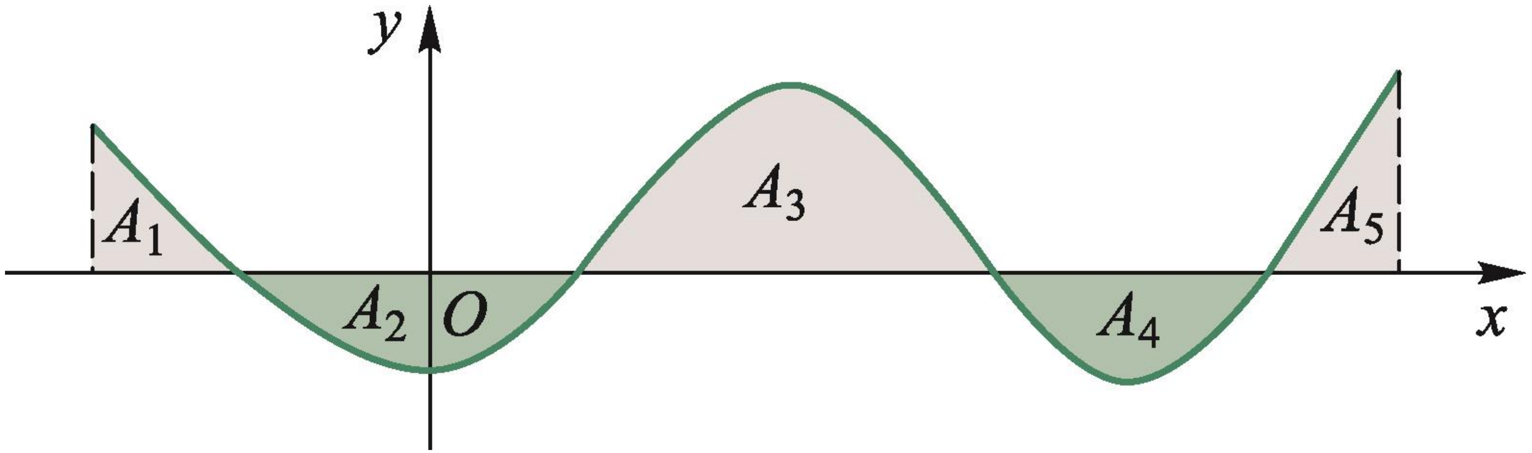
注 定积分是一个数,其数值只依赖于被积函数$f(x)$的结构和上下限,而与积分变量的记号无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

2. 定积分的几何意义

$f(x) > 0,\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x) < 0,\quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值

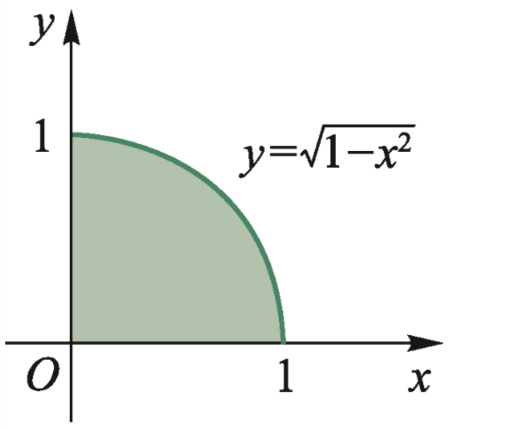


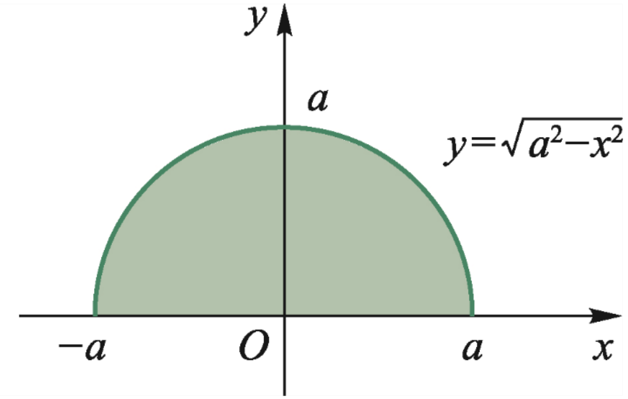
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$ 各部分面积的代数和

根据定积分的几何意义，求 (1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;　(2) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

答案

(1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$　　(2) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{2}$





3.存在定理

若$f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上可积.

如下定理给出了可积的充分条件.

不作深入讨论

定理1 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理2 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

四、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b k\,f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 为常数)

4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

推广 $\int_a^b [k_1 f_1(x) + \cdots + k_s f_s(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \cdots + k_s\int_a^b f_s(x)\mathrm{d}x$

5. $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

证 (1)当$a < c < b$时

$\because f(x)$在$[a,b]$上可积,

$\therefore$ 在分割区间时,可以永远取c为分点. 于是

$$\sum_{[a,\,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,\,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,\,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

令$\lambda \to 0$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2)当a, b, c的相对位置任意时, 例如 $a < b < c$,

则有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

定积分对于积分区间具有可加性

6. 若在$[a,b]$上$f(x)\geqslant 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

证 $\because$ $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0$

$\therefore$ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0$

极限的保号性

推论1 若在$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

推论2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (a<b)$

想一想： $f(x)$在区间$[a,b]$上可积 $\longrightarrow$ $|f(x)|$在$[a,b]$上可积？

7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$，$m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$ ，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)\quad(a<b)$$

证 $\because\ m\leqslant f(x)\leqslant M$,

$$\therefore\ \int_a^b m\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M\mathrm{d}x,$$

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

此性质可用于估计积分值的大致范围

例1 估计积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} \mathrm{d}x$ 的值.

解 $f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x}, \forall\, x\in[0,\ \pi].$

$\because\ 0\leqslant \sin^3 x\leqslant 1,\quad \therefore\ \frac{1}{4}\leqslant \frac{1}{3+\sin^3 x}\leqslant \frac{1}{3},$

$\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\leqslant \int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant \int_0^{\pi}\frac{1}{3}\mathrm{d}x,$

$\therefore\ \frac{\pi}{4}\leqslant \int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}\mathrm{d}x\leqslant \frac{\pi}{3}.$

例2 试证: $1 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

证 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$\because f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$= \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$

$\therefore f(x)$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

$\because \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(0) = 1$.

$\therefore \frac{2}{\pi} < f(x) < 1$.

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, \mathrm{d}x$.

故 $1 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}$. 证毕

8. 定积分中值定理

如果 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证 设$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值分别为 m,M，

则由性质7可得 $m\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$

根据闭区间上连续函数介值定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使

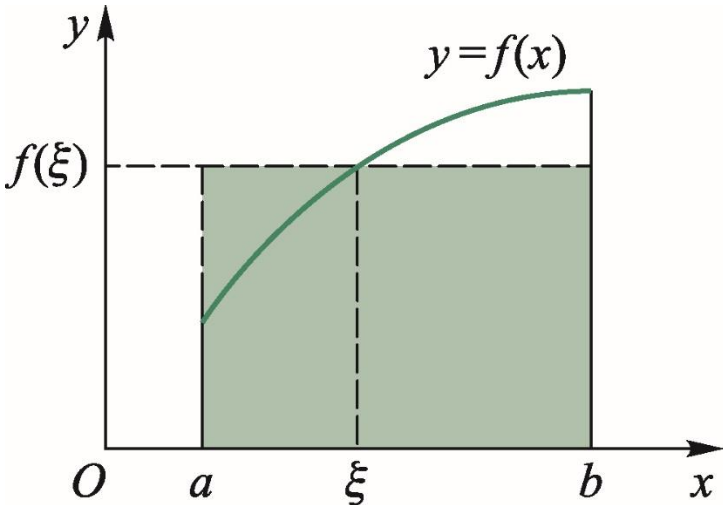
$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证毕

积分中值公式的几何解释：

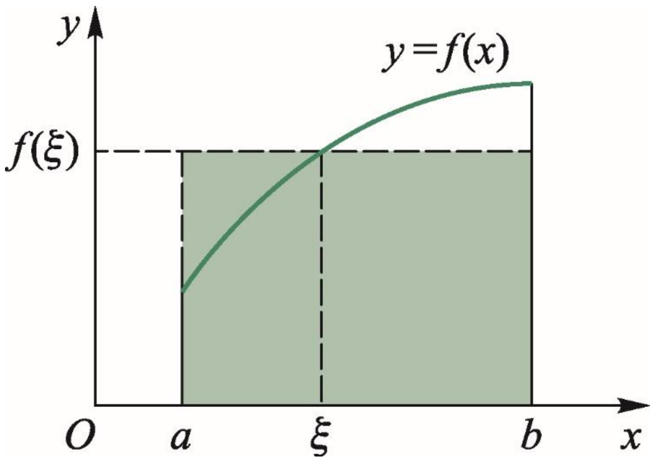
在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{曲边梯形的面积}} = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{矩形的面积}}$$



注 积分中值定理对$a < b$或$a > b$都成立.

可把 $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi)$



理解为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.

例3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}\mathrm{d}x$

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[n,n+2]$,

使 $\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx=\frac{\xi^2}{e^{\xi^2}}(n+2-n)$,

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+2}\frac{x^2}{e^{x^2}}dx=2\lim_{\xi\to+\infty}\frac{\xi^2}{e^{\xi^2}}=2\lim_{\xi\to+\infty}\frac{2\xi}{2\xi e^{\xi^2}}=0\,.$$

例4 设 $f(x)$可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x, x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

例5 设 $f'(x)$在 $U(0,\delta)$内连续，

求 $\lim\limits_{a\to 0+0}\dfrac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(x+a)-f(x-a)]dx$

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[-a,a]$,

使 $\int_{-a}^{a}[f(x+a)-f(x-a)]dx$

$$=2a[f(\xi+a)-f(\xi-a)]$$

$$\therefore\quad \lim_{a\to 0+0}\frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a}[f(x+a)-f(x-a)]dx$$

$$=\lim_{a\to 0+0}\frac{2a}{a^2}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]$$

$$=\lim_{a\to 0+0}4f'(\eta)\quad(\text{其中 }\eta\in(\xi-a,\xi+a))$$

$$=4f'(0).$$

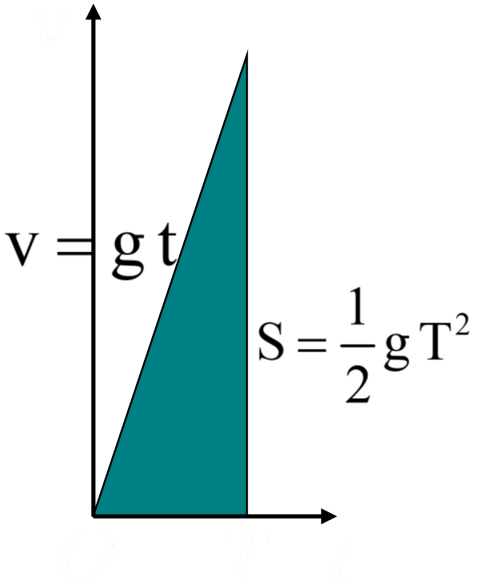
例6. 计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

解: 已知自由落体速度为 $v = gt$

故所求平均速度

$$\bar{v} = \frac{1}{T-0}\int_0^T g t\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2} g T^2 = \frac{gT}{2}$$



利用定积分的定义表示极限

例7 利用定积分表示下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$

极限可看成 $f(x)=2^x$ 在 [0,1] 区间上的一个积分和，

分割是将 [0,1] n 等分， 分点为 $x_i=\dfrac{i}{n},(i=1,2,\cdots,n)$

$\because\ f(x)=2^x\in C[0,1],\ f(x)>0,\ \therefore\ f(x)\in R[0,1],$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{\boxed{\frac{i}{n}}}\cdot\boxed{\frac{1}{n}}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x.$$

ξ_i Δx_i

例 8 设函数 $f(x)$在区间[0,1]上连续，且取正值.

试证 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}.$$

证明 利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$=e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

极限运算与对数运算换序得

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

指数上可理解为：$\ln f(x)$在$[0,1]$区间上的一个积分和．分割是将$[0,1]$ n等分

分点为$x_i=\dfrac{i}{n}$，（$i=1,2,\cdots,n$）

因为 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，且 $f(x)>0$

所以 $\ln f(x)$ 在[0,1]上有意义且可积，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)dx$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$

$$=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}.$$