新时代大学数学系列教材

线性代数

高等教育出版社

第二章 行列式

第三节　　拉普拉斯定理

目录

一 拉普拉斯展开定理

k阶子式：

矩阵A中任取k行、k列，位于这k行、k列交点上的k^2个元按原来的相对位置组成的k阶行列式S, 称为A的一个k阶子式.

S的余子式:

在A中划去S所在的k行、k列，余下的元按原来的相对位置组成的n-k阶行列式M, 称为S的余子式.

S的代数余子式:

设S的各行位于A中第$i_1,\ldots,i_k$, S的各列位于A中第$j_1,\ldots,j_k$列，称

$$A=(-1)^{(i_1+\cdots i_k)+(j_1+\cdots j_k)}M$$

为S的代数余子式.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&0&1&0&2\\1&0&-1&0&1\\0&1&-1&2&1\\0&2&-2&1&2\\0&1&-1&1&1\end{vmatrix}$$

$$S_1=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}$$

$$M_1=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}$$

$$A_1=(-1)^{1+3+2+3}M_1=-M_1,$$

$$S_2=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&-1&1\\2&-2&2\end{vmatrix}\qquad M_2=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\qquad A_2=(-1)^{1+3+4+2+3+5}M_2=M_2.$$

例如，5阶行列式det$A$中，取子式

$$S=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

则其代数余子式为

$$(-1)^{(2+5)+(2+4)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

拉普拉斯定理 在行列式D中任取$k(1\leq k\leq n-1)$行（列），由这k行（列）元所组成的一切k阶子式分别与它们的代数余子式的乘积之和，等于行列式D.

例1（基本结论）

$$\det\begin{pmatrix} A_{m\times m} & O \\ * & B_{n\times n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{m\times m} & * \\ O & B_{n\times n} \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} = (\det A_1)\cdots(\det A_t),\ (A_i\text{为方阵})$$

例2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 按1，2行展开，不为零的二阶子式为

$$S_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},\quad S_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1=(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\qquad A_2=(-1)^{1+2+3+5}\begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{vmatrix}=0$$

所以，$\boldsymbol{D=0}$.

例3 设A, B为n阶可逆矩阵，证明如下矩阵可逆，并求其逆：

$$D=\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}.$$

为什么 ？

解

$$\det D=(-1)^{n\times n}(\det A)(\det B)\neq 0,\text{所以可逆.}$$

$$\text{设}D^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}.$$

$$DD^{-1}=\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} CX_1+AX_3 & CX_2+AX_4 \\ BX_1 & BX_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} CX_1+AX_3=I \\ CX_2+AX_4=O \\ BX_1=O \\ BX_2=I \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} X_3=A^{-1} \\ X_4=-A^{-1}CB^{-1} \\ X_1=O \\ X_2=B^{-1} \end{cases}\qquad D^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\det D=(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)}(\det A)(\det B)$$

$$=(-1)^{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\times n}(\det A)(\det B)$$

$$=(-1)^{n\times n}(\det A)(\det B)$$

回忆（要非常熟悉）：

$$\det\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix} = (\det A_1)\cdots(\det A_t),\ (A_i\text{为方阵})$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_tB_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & A_t^k \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix}$ 可逆的充要条件是 $A_1,\cdots,A_t$ 可逆（A_i 为方阵）

设 $A_1,\cdots,A_t$ 可逆

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_t^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_t & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_t^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$$

谢谢