目 录

CONTENTS

第二节 导数与微分的运算性质

一、函数的和、差、积、商的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导法则与导数公式

思路:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$ （构造性定义）

本节内容

求导法则

$$\left.\begin{cases}(c)'=0\\ (\sin x)'=\cos x\\ (\ln x)'=\dfrac{1}{x}\end{cases}\right\}$$ 证明中利用了两个重要极限

其他基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理1 如果函数$u(x),v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x)\neq 0).$$

下面只给出(3)的证明, (1)和(2)的证明略.

证　(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$

设$f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x)}{v(x+h)v(x)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x+h) - v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)h}$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2},$$

$\therefore$ $f(x)$ 在x处可导. 证毕

推论

(1) $[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_s(x)]'=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_s'(x)$;

(2) $[Cf(x)]'=Cf'(x)$;

(3) $[f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)]'=f_1'(x)f_2(x)\cdots f_s(x)+$

$f_1(x)f_2'(x)\cdots f_s(x)+$

$\cdots\cdots+$

$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s'(x)$.

例1 求$y=2x^3-5x^2+3x-7$的导数.

解 $y'=6x^2-10x+3.$

例2 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 $f'(x)=3x^2-4\sin x,$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi^2-4.$$

例3 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求y'.

解 $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x.$

例4 求$y=\tan x$的导数.

解 $$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x.$ 同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例5　求 $y = \sec x$的导数.

解　$y' = (\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{1' \cdot (\cos x) - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x,$

即　$(\sec x)' = \sec x \tan x.$

同理可得　$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$

二、反函数的导数

定理2　如果函数$x=f(y)$在某区间I_y内单调、可导且$f'(y)\neq 0$，

则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在区间$I_x=\{x|x=f(y),y\in I\}$

内也可导，且有

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{ 或 }\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证　由定理条件可知,

反函数 $y=f^{-1}(x)$存在且在I_x内单调、连续.

任取$x\in I_x$, 给x以增量$\Delta x\neq 0$, 则$\Delta y\neq 0$, 且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

$$\therefore\ [f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

证毕

即　反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例6　求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$\because$ $x=\sin y$ 在$I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导, 且$(\sin y)'=\cos y>0$,

$\therefore$ 在 $I_x=(-1,1)$内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理可得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

例7　求函数 $y=\arctan x$的导数.

解　$\because\ x=\tan y$ 在$I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调、可导,

且$(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0$, $\therefore$ 在$I_x=(-\infty,+\infty)$内有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

即　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

同理可得　$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

例8　求函数 $y = \log_a x$的导数.

解　$\because\ x = a^y$在I_y=(−∞,+∞)内单调、可导,

且$(a^y)' = a^y \ln a \neq 0$, $\therefore$ 在I_x=(0,+∞)内有,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x\ln a}.$$

即 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;　　特别地 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

三、复合函数的求导法则

定理3 如果函数$u=g(x)$在点x可导, 而 $y=f(u)$在点$u=g(x)$可导,那么复合函数 $y=f[g(x)]$在点x可导, 且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x).$$

证 $\because y=f(u)$在点u可导, $\therefore \lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u).$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha \quad (\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$, 于是$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u,$

故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x).$ 证毕

链式法则

$y=f[g(x)]: y=f(u), u=g(x)$

y —— u —— x

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)$$

推广

$y=f(g[(h(x)]): y=f(u), u=g(v), v=h(x).$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)\cdot h'(x)$$

y — u — v — x

因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.

关键:搞清复合函数结构,由外向内逐层求导.

例9 设$y=e^{x^3}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\because y=e^u, u=x^3$. $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}$.

例10 设 $y=(x^2+1)^{100}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\because y=u^{100}, u=x^2+1$.

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=100\cdot u^{99}\cdot(2x)=200x(x^2+1)^{99}$.

例11　设 $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\because\ y=\sin u, u=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u,\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

课堂练习

设$y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

答　案 $\because y=\sqrt[3]{u}=u^{\frac{1}{3}}, u=1-2x^2$.

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{3}\cdot u^{-\frac{2}{3}}\cdot(-4x)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-4x)$$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

熟悉后，不写出中间变量

解 $\because y=\sqrt[3]{1-2x^2}=(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}$,

$$\therefore y'=\frac{1}{3}\cdot(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-4x)$$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

例12 设$y = \ln\cos(\sin x)$，求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 $\because y = \ln u\,, u = \cos v, v = \sin x,$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot\cos x$$

$$= \frac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\cos x.$$

$$= -\tan(\sin x)\cdot\cos x.$$

熟悉后，不写出中间变量

解 $\because y = \ln\cos(\sin x)$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{\cos(\sin x)}\cdot(\cos(\sin x))'$$

$$= \frac{1}{\cos(\sin x)}(-\sin(\sin x))\cdot(\sin x)'$$

$$= -\tan(\sin x)\cdot\cos x.$$

例13 设$y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\because\ y=\mathrm{e}^{u},\ u=\sin v,\ v=\frac{1}{x},$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$=\mathrm{e}^{u}\cdot\cos v\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

熟悉后，不写出中间变量

解 $\because\ y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}},$

$$\therefore\ y'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

四、初等函数的求导问题——初等函数的导数仍为初等函数

1. 常数和基本初等函数的导数公式 –熟练记忆

(1) $(c)'=0$

(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$

$(a>0, a\neq 1)$

(10) $(e^x)'=e^x$

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

$(a>0, a\neq 1)$

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

(16) $(\text{arccot}\ x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x)$, $v=v(x)$都可导, 则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;　　(2) $(Cu(x))'=Cu'(x)$(C是常数);

(3) $(uv)'=u'v+uv'$;　　(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

3. 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$, 而$u=g(x)$ 且$f(u)$及$g(x)$都可导,

则复合函数 $y=f[g(x)]$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \text{或 } y'(x)=f'(u)\cdot g'(x).$$

4. 反函数的求导法则

如果函数$x=f(y)$在某区间I_y内单调、可导且$f'(y)\neq 0$,

则它的反函数$y=f^{-1}(x)$在区间$I_x=\{x|x=f(y),y\in I\}$

内也可导，且有

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \text{或} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

利用上述公式及法则初等函数求导问题可完全解决.

5. 初等函数求导举例

例14 设 $y = \sin nx \cdot \sin^n x$（$n$为常数），求$y'$.

解 $y' = (\sin nx \cdot \sin^n x)'$

$= (\sin nx)' \cdot \sin^n x + (\sin nx) \cdot (\sin^n x)'$

$= (n \cdot \cos nx) \cdot \sin^n x + (\sin n x) \cdot (n \sin^{n-1} x \cdot \cos x)$

$= n \sin^{n-1} x (\cos nx \cdot \sin x + \sin nx \cdot \cos x)$

$= n \sin^{n-1} x \sin(n+1) x.$

例15　设函数$f(x)$和$g(x)$可导，且$f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数

$y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$的导数.

解

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left(f^2(x)+g^2(x)\right)'$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}\cdot\left(2f(x)\cdot f'(x)+2g(x)\cdot g'(x)\right)$$

$$=\frac{f(x)\cdot f'(x)+g(x)\cdot g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

例16　设函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求y'.

解

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'$$

$$(\sqrt{1+x^2})'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

*例17 证明下列双曲函数及反双曲函数的导数公式

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}.$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

四、微分公式与微分运算法则

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

求法： 计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1. 基本初等函数的微分公式

$$\mathrm{d}(C) = 0 \qquad \mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sec x) = \sec x\tan x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\csc x) = -\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(a^x) = a^x \ln a \, \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

例2 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$，求dy.

解 $\because\ y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$， $\therefore\ dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx$.

例3 设 $y=e^{1-3x}\cos x$，求dy.

解 $dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$.

$\because\ (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x}$， $(\cos x)'=-\sin x$.

$\therefore\ dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$

$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx$.

3. 复合函数的微分法则

设函数$y=f(x)$有导数$f'(x)$,

(1)当x是自变量时,$\underline{dy=f'(x)dx;}$

(2)当x是中间变量，即另一变量t的可微函数$x=\varphi(t)$时,

$$dy=f'(x)\varphi'(t)dt$$

$$\because \varphi'(t)dt=dx, \therefore \underline{dy=f'(x)dx.}$$

结论：无论x是自变量还是中间变量,函数$y=f(x)$的微分形式总是 $dy=f'(x)dx$

微分形式的不变性

例4 设 $y=\sin(2x+1)$，求$\mathrm{d}y$.

解 方法1.

按微分形式不变性求.

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\sin(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2\mathrm{d}x$$

$$=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

方法2.

按$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$求.

$$\because y'=\cos(2x+1)\cdot 2$$

$$\therefore \mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$$

$$=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x.$$

例5 设 $y=\mathrm{e}^{-ax}\sin bx$，求$\mathrm{d}y$.

解 方法1.

$$\mathrm{d}y=\sin bx\cdot \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax})+\mathrm{e}^{-ax}\cdot \mathrm{d}(\sin bx)$$

$$=\sin bx\cdot \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}(-ax)+\mathrm{e}^{-ax}\cdot \cos bx\mathrm{d}(bx)$$

$$=\sin bx\cdot \mathrm{e}^{-ax}(-a)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-ax}\cdot b\cos bx\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)\mathrm{d}x.$$

方法2.

$$\because\ y'=(\mathrm{e}^{-ax})'\sin bx+\mathrm{e}^{-ax}(\sin bx)'$$

$$=-a\mathrm{e}^{-ax}\cdot \sin bx+\mathrm{e}^{-ax}\cdot b\cos bx$$

$$=\mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx),$$

$$\therefore \mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)\mathrm{d}x.$$

例6 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad\quad) = \cos\omega t\mathrm{d}t$;　(2) $\mathrm{d}(\sin x^2) = (\quad\quad)\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

解 (1) $\because \mathrm{d}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t\mathrm{d}t$,

$$\therefore \cos\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin\omega t) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$\therefore \mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C\right) = \cos\omega t\mathrm{d}t.$$

(2) $$\because \frac{\mathrm{d}(\sin x^2)}{\mathrm{d}(\sqrt{x})} = \frac{2x\cos x^2\mathrm{d}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore \mathrm{d}(\sin x^2) = (4x\sqrt{x}\cos x^2)\mathrm{d}(\sqrt{x}).$$