高等数学A(上)

第三节 基本积分表和积分的简单计算

一、不定积分的基本积分表

二、不定积分的计算举例

一、不定积分的基本积分表

实例

$$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \Rightarrow \int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$$

$$(\mu \neq -1)$$

启示 能否根据求导公式得出积分公式?

结论 积分运算和微分运算是互逆的,

因此可以根据求导公式得出积分公式.

基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k 是常数）;

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;

说明: $x > 0, \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$,

$x < 0, \quad [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + C$,

$\therefore \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C;$$

(5) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C;$$

(6) $$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

(7) $$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C;$$

(8) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C;$$

(9) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C;$$

(10) $$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C;$$

(11) $$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C;$$

(12) $$\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C;$$

(13) $$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

(14) $$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C;$$

(15) $$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C.$$

例5 求 $\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

解 原式 $=\int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

积分公式 $\boxed{\int x^{\mu}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C}$

例6 求 $\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

解 原式 $=\int x^{-3}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{-2}x^{-2}+C.$$

例7 求 $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x.$

原式 $=\int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x$

$$=-3x^{-\frac{1}{3}}+C.$$

二、 不定积分的性质与计算举例

(1) $$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x;$$

证 $$\because\left[\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x\right]'$$

$$=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'\pm\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)\pm g(x).\ \therefore \text{等式成立.}$$

(2) $$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x.\ (k\text{是常数},k\neq 0)$$

推广: $$\int\sum_{k=1}^{s}c_kf_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{s}c_k\int f_k(x)\mathrm{d}x$$

线性性质

例8 求 $\int \sqrt{x}\,(x^2-5)\mathrm{d}x.$

解 原式 $=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-\int 5x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.$$

例9 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x.$

解 原式

$$=\int\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}x-\int 3\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

例10 求 $\int (e^x + 3\sin x)dx$

解 原式

$$= \int e^x\,dx + 3\int \sin x\,dx$$

$$= e^x - 3\cos x + C$$

符号！

注意 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

例11 求 $\int 2^x \cdot 3^x\,dx.$

解 原式 $= \int 6^x\,dx = \dfrac{6^x}{\ln 6} + C,$

例12 求 $\int \tan^2 x dx$

解 原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\,dx$

$$= \int \sec^2 x dx - \int 1\,dx$$

$$= \tan x - x + C.$$

例13 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x$.

解

$$原式 = \int \frac{1-\cos x}{2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1\mathrm{d}x - \int \cos x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

例14 求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \mathrm{d}x$,

解

$$原式 = \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} \mathrm{d}x$$

$$= 4\int \csc^2 x \mathrm{d}x$$

$$= -4\cot x + C.$$

例15　求 $\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{(2x^4+2x^2)-(x^2+1)+4}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(2x^2-1+\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int 2x^2\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - x + 4\arctan x + C$$

说明　以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形,才能使用基本积分表.

化积分为代数和的积分