

高等数学A(上)



一

微积分的产生

高等数学课程的主要内容是微积分。微积分是微分学和积分学的统称。它是以变量为研究对象，以极限为基本研究方法的自然科学，它的萌芽、产生与发展经历了漫长的时期。

从17世纪60年代牛顿、莱布尼茨创立微积分起，逐步形成了一门逻辑严密、系统完整的学科，它不仅成为其他许多数学分支的重要基础，而且在自然科学、工程技术、生命科学、社会科学、经济管理等众多领域都获得了十分广泛的应用。



一

微积分的产生

例如卫星成功驶进预定轨道，火车在弯道上飞驰而过，经济金融、天气预报和深海下潜，土木工程中打地基所做的功以及医药学等等都与高等数学有着深深的联系。

高等数学已成为大学理工类、经济管理以及许多其他专业最重要的数学基础课。



第一节 函数的概述

- 一、基本概念：变量与区间
- 二、函数的概念
- 三、函数的特性
- 四、反函数及其图形
- 五、基本初等函数
- 六、复合函数
- 七、初等函数



1. 集合(set)

具有某种特定性质的事物的全体叫做集合,

组成这个集合的事物称为该集合的元素.

事物 a 是集合 A 的元素, 记作 $a \in A$;

事物 a 不是集合 A 的元素, 记作 $a \notin A$.

集合元素具有特性: 1.确定性;

2.互异性;

3.无序性;



一

基本概念

空集：

不含任何元素的集合称为空集. (记作 \emptyset)

例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

规定 空集为任何集合的子集.

数集分类: N ----自然数集 Z ----整数集
 Q ----有理数集 R ----实数集

数集间的关系: $N \subset Z, Z \subset Q, Q \subset R$.

注: 若 M 为数集 $\begin{cases} M^* \text{ 表示 } M \text{ 中排除 } 0 \text{ 的数集;} \\ M^+ \text{ 表示 } M \text{ 中排除 } 0 \text{ 与负数的数集} \end{cases}$



2. 区间: (interval)

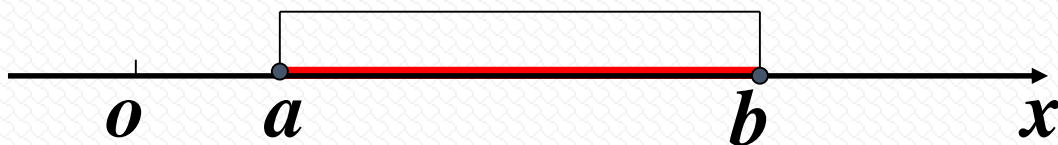
是指介于某两个实数之间的全体实数.
这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a, b \in R, \text{且 } a < b.$

$\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b)



$\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$



一

基本概念

$\{x|a \leq x < b\}$ 称为半开区间, 记作 $[a,b)$

$\{x|a < x \leq b\}$ 称为半开区间, 记作 $(a,b]$

有限区间

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.





基本概念

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b \text{ 且 } x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$$

以上三个区间称为无限区间

注意： $-\infty$, $+\infty$ 是记号，不是数.



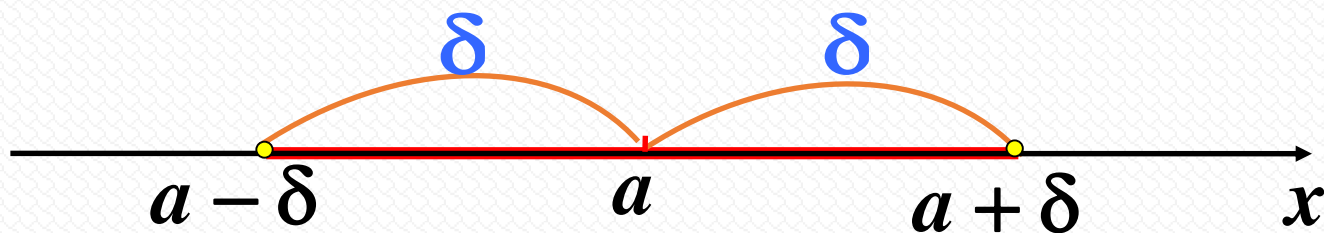
3. 邻域: (neighborhood)

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$,

数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$.

点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做这邻域的半径.

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$



点 a 的去心的 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$.

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

$$\text{即 } \dot{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta).$$



4. 绝对值: $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \quad (|a| \geq 0)$

运算性质: $|ab| = |a||b|;$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; \quad |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

绝对值不等式:

$$|x| \leq a \ (a > 0) \iff -a \leq x \leq a;$$

$$|x| \geq a \ (a > 0) \iff x \geq a \text{ 或 } x \leq -a;$$



二

函数的概念

1. 函数概念的产生：

笛卡尔最先提出了“变量”的概念,同时也引入了函数的思想。

伽利略研究物体的运动及自由落体运动时产生了如下函数。

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

莱布尼兹、傅里叶、柯西在不同时期给出了函数的定义。

函数概念从提出到完成，用了两百多年的时间，不断被精炼、深化、丰富，而我们现在使用的概念是黎曼给出的。





函数的概念

1. 常量与变量:

在某过程中数值保持不变的量称为常量,
而数值变化的量称为变量.

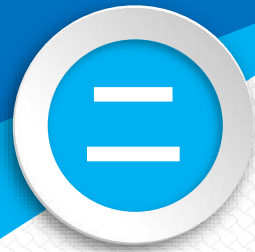
注意 常量与变量是相对“过程”而言的.

常量与变量的表示方法:

通常用字母 a, b, c 等表示常量,

用字母 x, y, t 等表示变量.





函数的概念

2、函数的定义

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

数集 D 叫做这个函数的定义域

因变量

自变量

函数的两要素: 定义域与对应法则.



二

函数的概念

当 $x_0 \in D$ 时,称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

函数值全体组成的数集

$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数的单值性:一个自变量的值只对应一个函数值.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,
对应的函数值总是只有一个, 这种函数叫做单
值函数, 否则叫做多值函数.

例如, $x^2 + y^2 = a^2$.



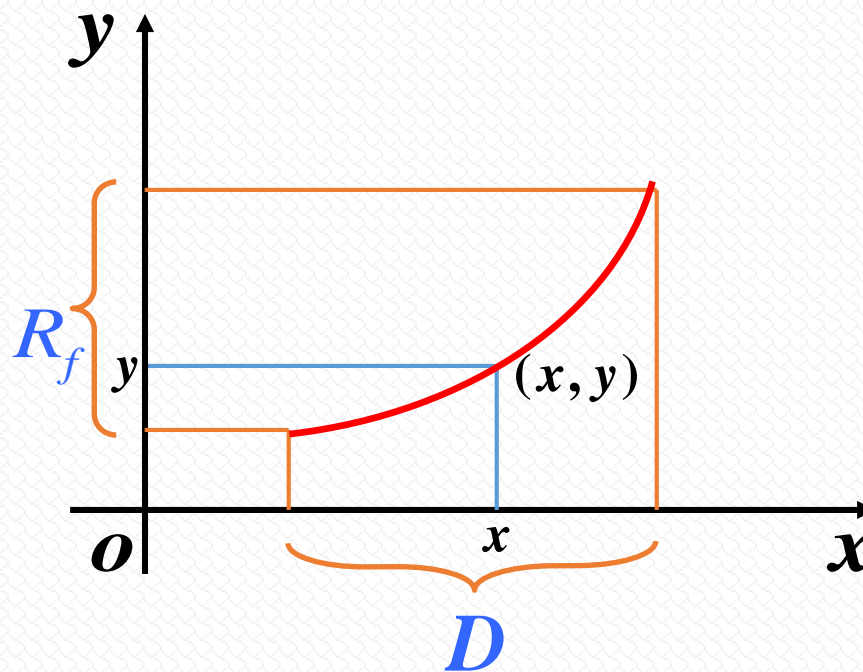
二

函数的概念

定义： 点集 $C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

函数表示法一般有：

1. 图像法;
2. 表格法;
3. 解析式.





函数的概念

约定： 定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. (若函数有实际意义，定义域由实际问题确定.)

例如, $y = \sqrt{1-x^2}$ $D: [-1,1]$

例如, $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D: (-1,1)$





函数的概念

例1 判断下面函数是否相同, 并说明理由.

(1) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

是

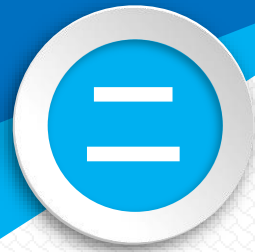
(2) $y = \frac{x}{x}$ 与 $y = 1$;

不是

(3) $y = e^{x^2}$ 与 $y = (e^x)^2$.

不是





函数的概念

例2 求 $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域.

解: 要使函数有意义, x 必须满足

$$\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq -2 \text{ 且 } x \neq \pm 1$$

故 $D_f = [-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$





函数的概念

注：函数符号 $f(x)$ 的使用：

$f(x)$ 表示将规则 f 施用于 x ，即 f 施用于括号内的数值或字母或数学式子。

例3 设 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ，求 $f(3)$, $f(x+2)$, $f[f(x)]$

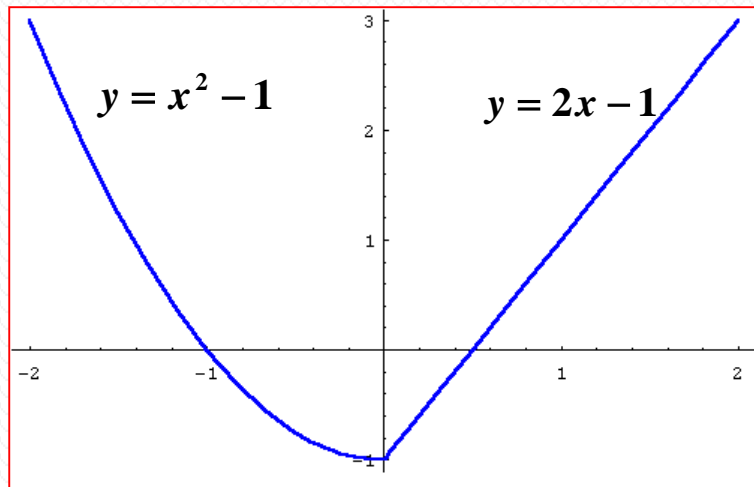


二

函数的概念

在自变量的不同变化范围中， 对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

例如,
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ x^2 - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$



注：分段函数是一个函数，定义域是各段定义域的并集.



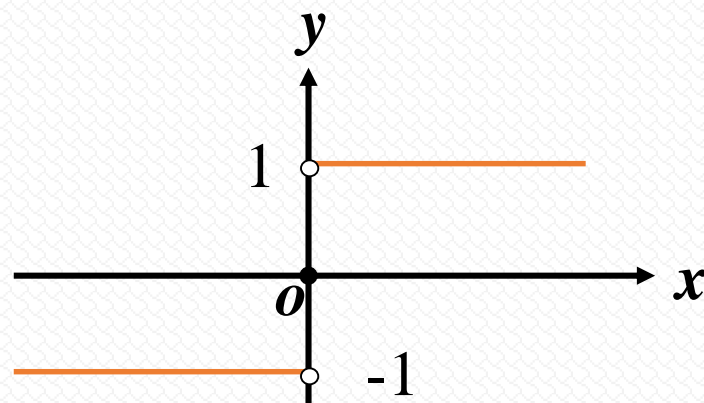


函数的概念

几个特殊的分段函数举例：

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

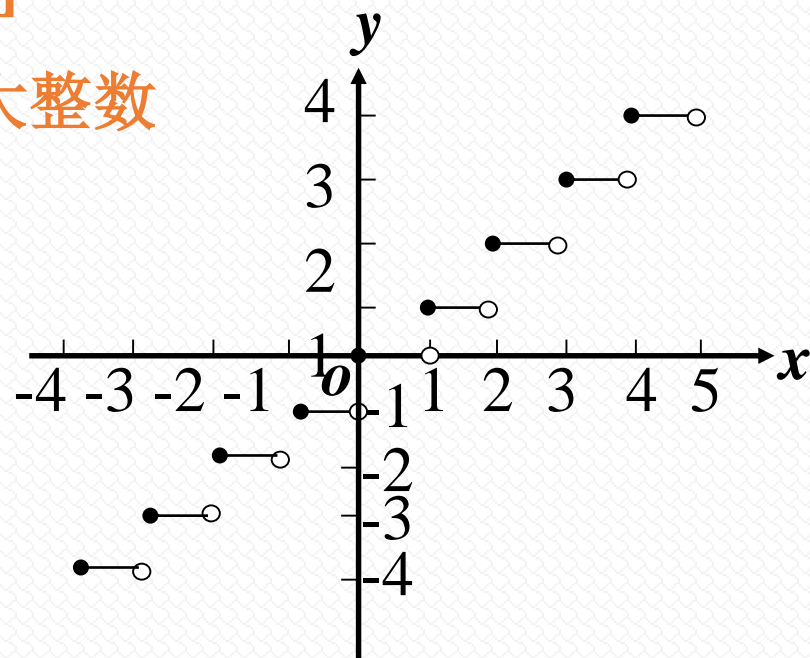




函数的概念

(2) 取整函数 $y=[x]$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数



阶梯曲线

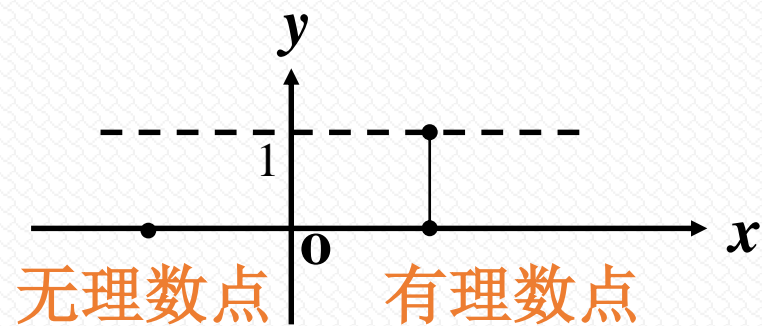




函数的概念

(3) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数时} \end{cases}$$

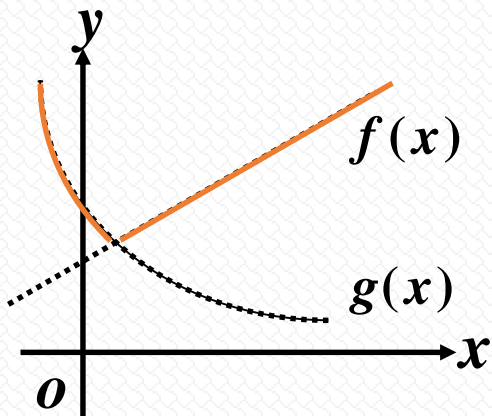




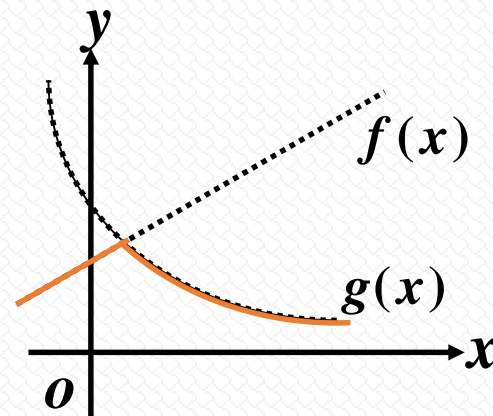
函数的概念

(4) 取最值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$



$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



二

函数的概念

例4 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解 $\because f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$\therefore f(x+3) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x+3 \leq 1 \\ -2 & 1 < x+3 \leq 2 \end{cases}$$

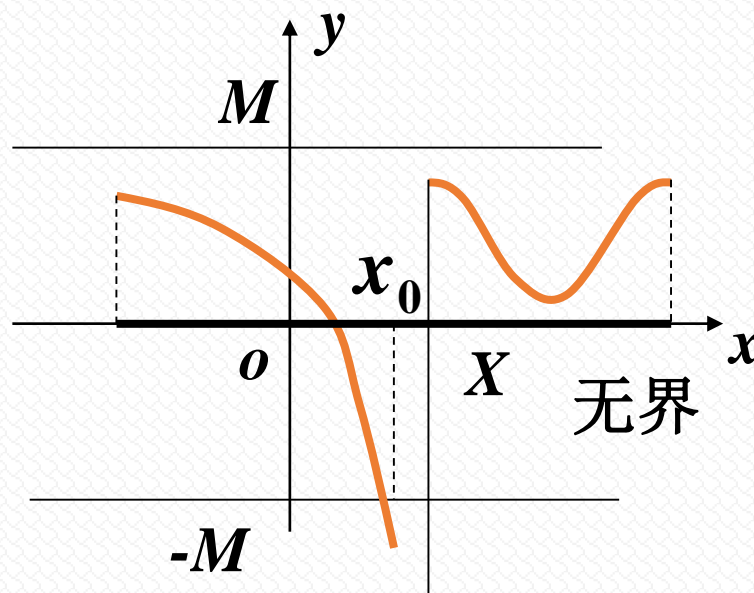
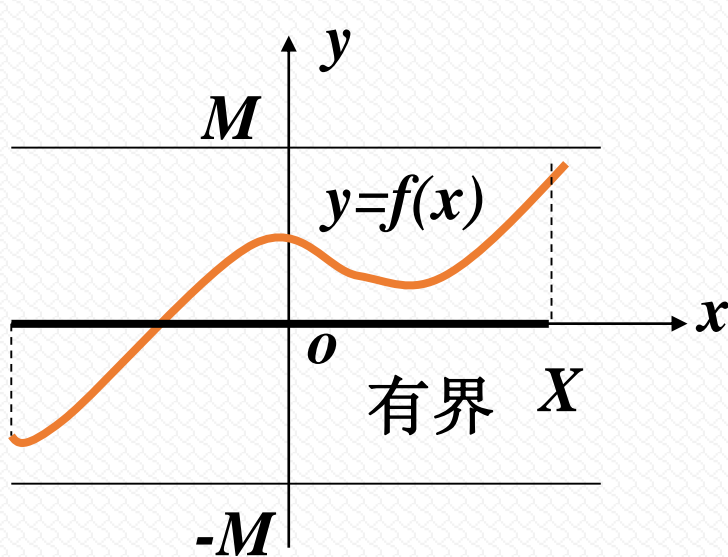
$$= \begin{cases} 1 & -3 \leq x \leq -2 \\ -2 & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

故 $D_f : [-3, -1]$



1. 函数的有界性:

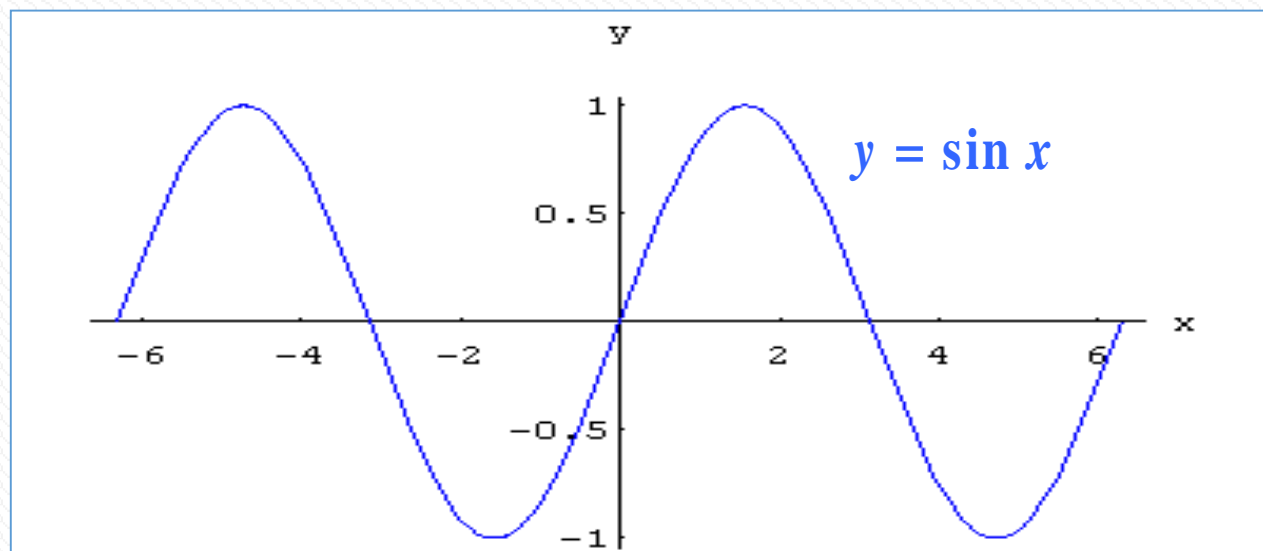
若 $X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立,
则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 否则称无界.



三

函数的特性

正弦函数 $y = \sin x$



函数有界的另一种定义:

设 $f(x)$ 在 X 内有定义, 若 $\exists M_1$ 和 M_2 使 $x \in X$, 都有 $M_1 < f(x) < M_2$, 则称 $f(x)$ 在 X 内有界, 而 M_1 和 M_2 称为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界和一个上界.

在 X 上的全体有界函数构成的集合记为 $B(X)$.

$f(x)$ 在 X 上有界可表示为 $f \in B(X)$.



三

函数的特性

若 $X \subset D$, $\exists M > 0$, $\forall x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立,

若 $X \subset D$, 对 $\forall M > 0$, $\exists x \in X$, 有 $|f(x)| > M$ 成立,

则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

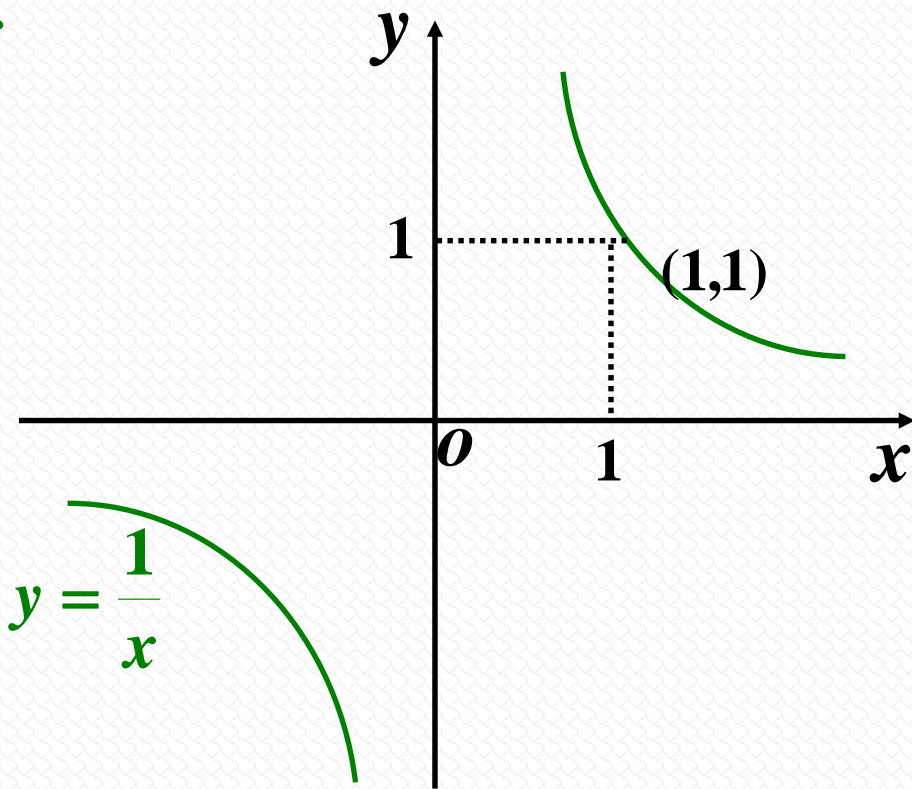
例5 证明函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 上有界, 在 $(0, 1)$ 上无界.



三

函数的特性

$$y = \frac{1}{x}$$



$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 上有界, 在 $(0, 1)$ 上无界.



三

函数的特性

若 $X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立,

例6 证明函数 $f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证明 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 有

$$|f(x)| = \left| 1 + \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 + \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 2$$

所以函数 $f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

注: $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.



三

函数的特性

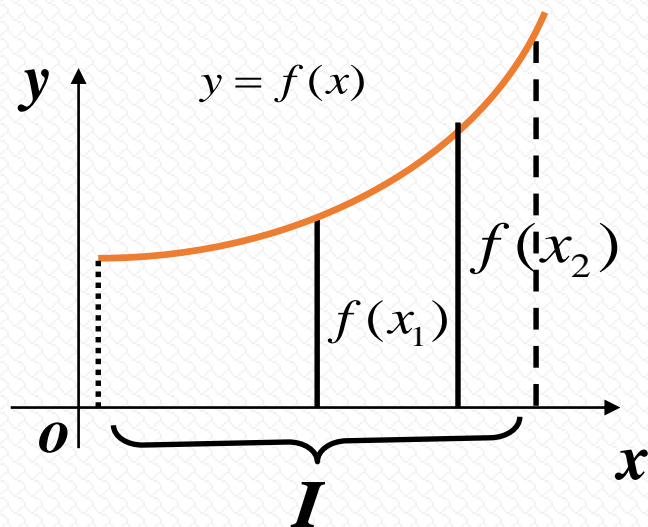
2. 函数的单调性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,

恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$,

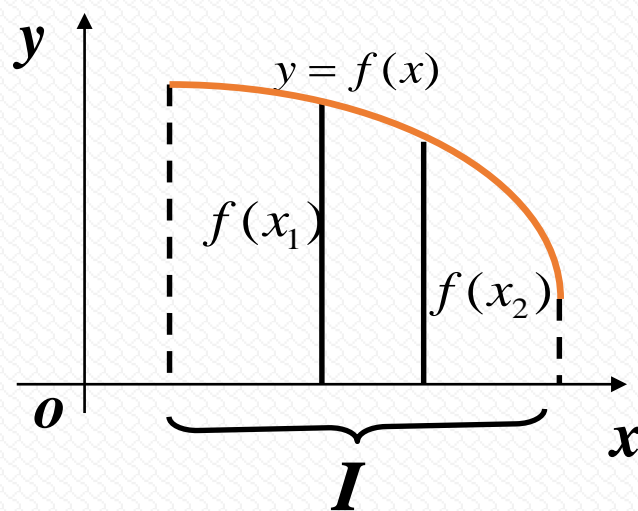
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;



三

函数的特性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$,
如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,
恒有 (2) $f(x_1) > f(x_2)$,
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的;



单调增加或减少的函数称为单调函数.
(monotonic function)



三

函数的特性

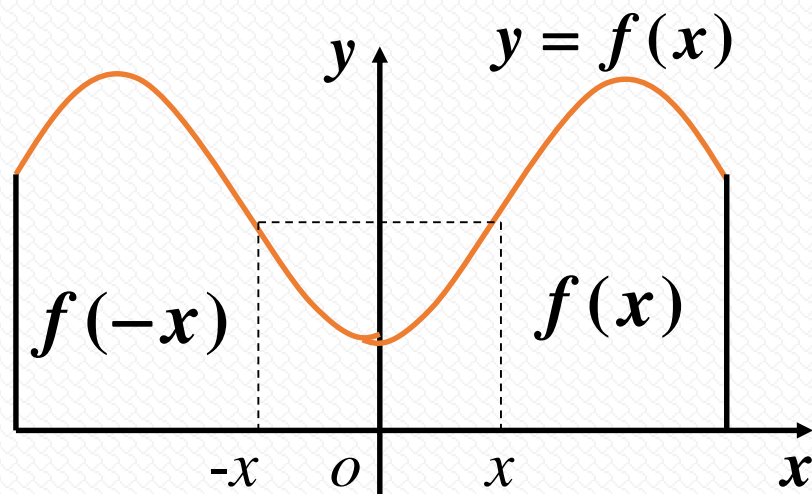
3. 函数的奇偶性:

设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x)$$

称 $f(x)$ 为偶函数(even function).

偶函数的图形关于 y 轴对称.



偶函数



三

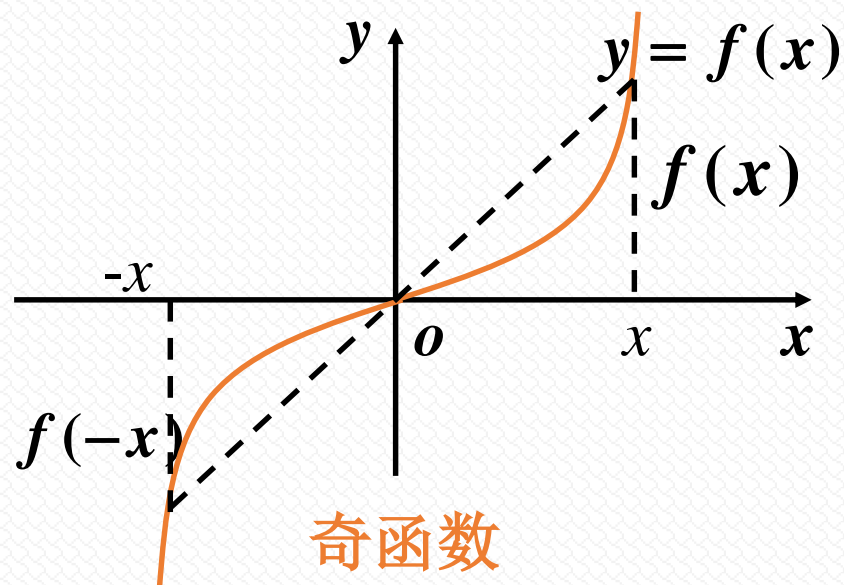
函数的特性

设 D 关于原点对称, 对于 $\forall x \in D$, 有

$$f(-x) = -f(x)$$

称 $f(x)$ 为奇函数(odd function).

奇函数的图形关于原点对称.



三

函数的特性

思考： 判断函数 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(-1, 2)$ 内是否为奇函数.

注意 奇(偶)函数 $f(x)$ 的定义域 D 应为关于原点对称的区间 .



例7 设函数 $f(x)$ 在 $(-l, +l)$ 上有定义, 令

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

证明: $\varphi(x)$ 是偶函数, $\psi(x)$ 是奇函数.

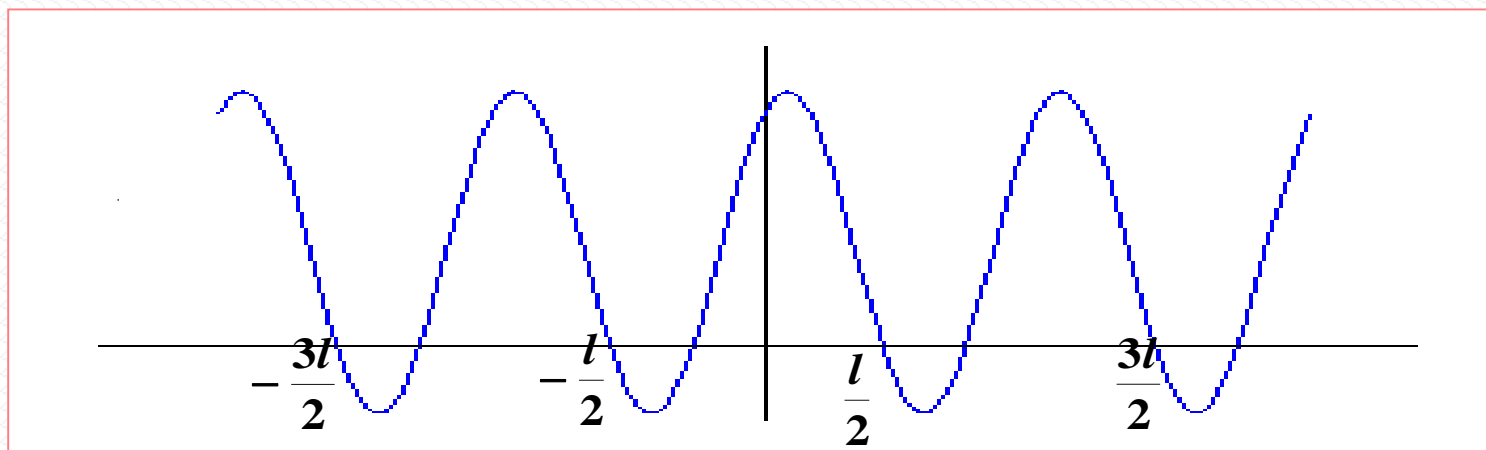
定理 定义在关于原点对称的区间 D 上的任一个非奇非偶函数 $f(x)$ 能表为一个奇函数与一个偶函数之和.



4. 函数的周期性:

设 $f(x)$ 的定义域为 D , 若 $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$ 且有 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.

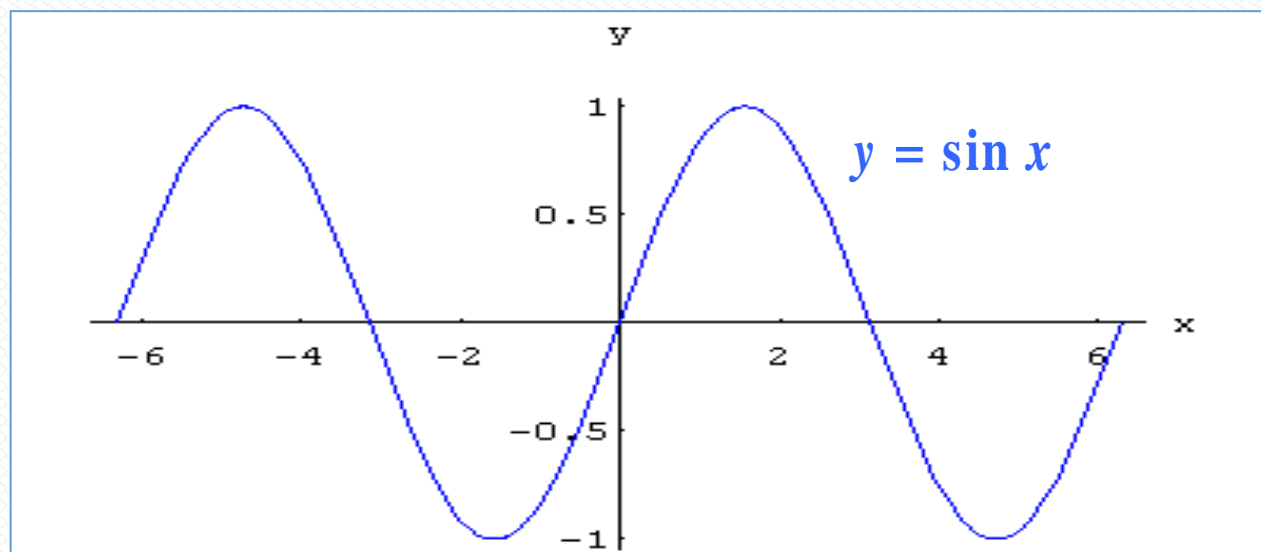
(通常说周期函数的周期是指其最小正周期)



三

函数的特性

正弦函数 $y = \sin x$



三

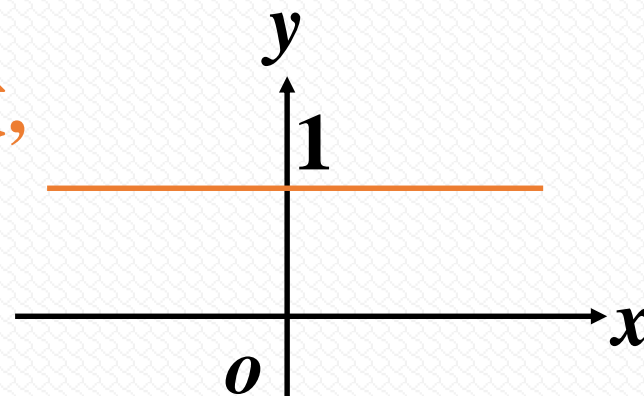
函数的特性

例8 设 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in \bar{Q} \end{cases},$

求 $D(-\frac{7}{5}), D(2\sqrt{2})$. 并讨论 $D(x)$ 的性质.

解 $D(-\frac{7}{5}) = 1, \quad D(2\sqrt{2}) = 0,$

$D(x)$ 的性质: 单值函数, 有界函数,
偶函数, 不是单调函数,
周期函数(无最小正周期)



四

反函数

设 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 对 $y \in W$ 总有确定的 $x \in D$ 使得 $f(x) = y$, 把 y 看作自变量, 则 x 是 y 的函数, 称之为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = \varphi(y)$.

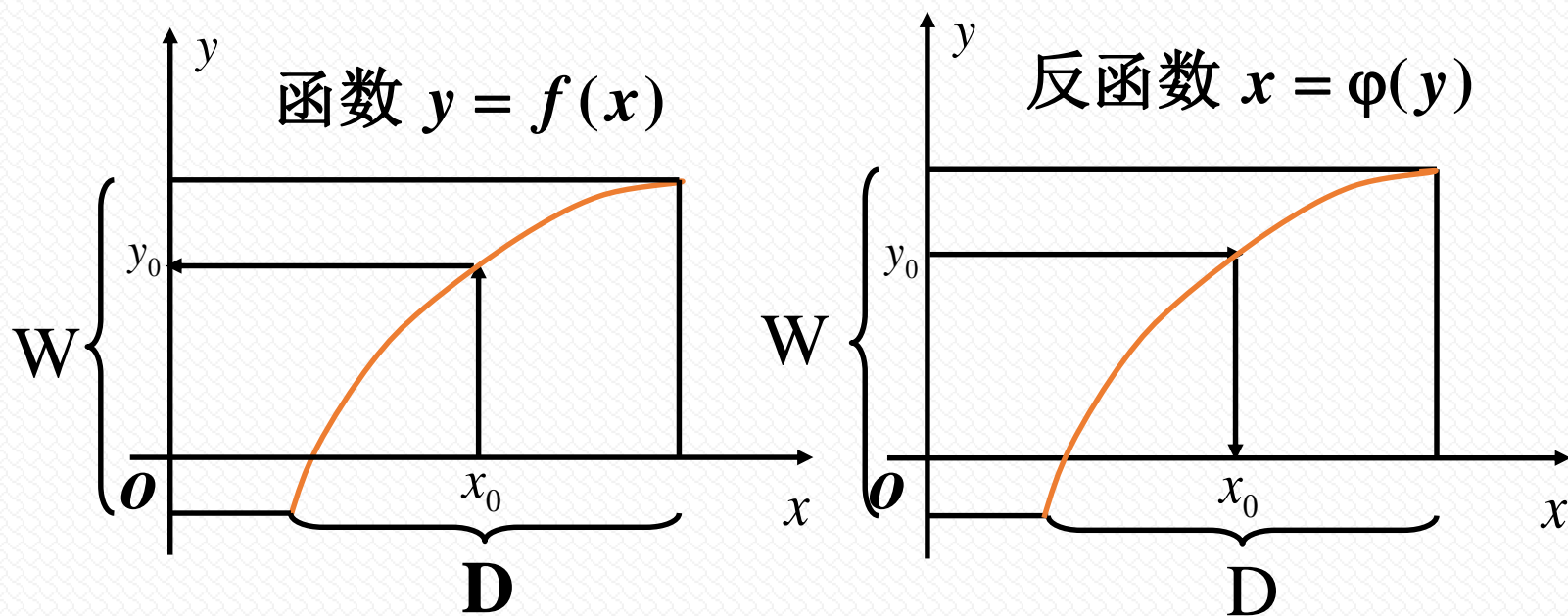
习惯上用 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = \varphi(x)$, 而 $y = f(x)$ 称为直接函数.

反函数的图形与直接函数的图形关于 $y = x$ 对称.



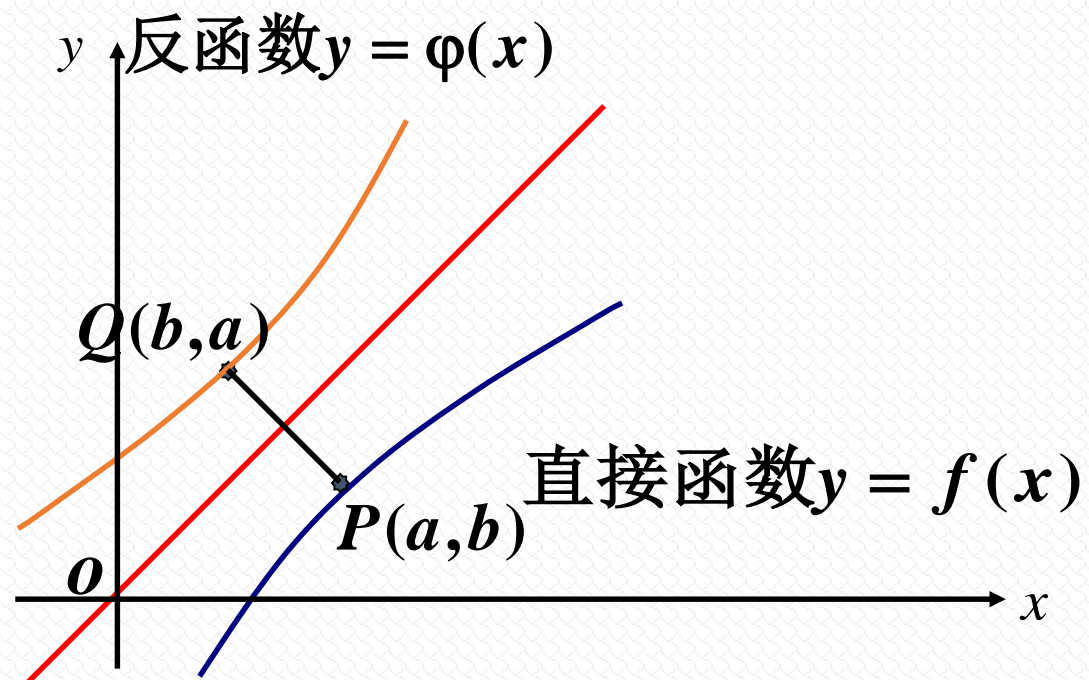
四

反函数



四

反函数



直接函数与反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.



四

反函数

求反函数的方法：

Step1 从方程 $y = f(x)$ 中解出 x 得 $x = \varphi(y)$,

Step2 再把 x, y 记号对换得 $y = \varphi(x)$,

Step3 反函数的定义域就是直接函数的值域.

反函数的存在性：

设 $y = f(x)$ 在区间 I 内单调，则其反函数 $y = \varphi(x)$ 在对应区间内存在且单调。



四

反函数

例9 求 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数.

解 由 $y = \frac{2^x}{2^x + 1} \Rightarrow x = \log_2 \frac{y}{1-y} \Rightarrow y = \log_2 \frac{x}{1-x}$

例9 求 $y = 2x - 3$ 的反函数.

解 由 $y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow y = \frac{x+3}{2}$



五

基本初等函数

1. 幂函数 (power function)

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha \text{ 是常数})$$

2. 指数函数 (exponential function)

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = e^x$$

3. 对数函数 (logarithmic function)

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = \ln x$$



五

基本初等函数

4.三角函数 (trigonometric function)

正弦函数 $y = \sin x$

余弦函数 $y = \cos x$

正切函数 $y = \tan x$

余切函数 $y = \cot x$

正割函数 $y = \sec x$

余割函数 $y = \csc x$



五

基本初等函数

5.反三角函数 (inverse trigonometric function)

反正弦函数 $y = \arcsin x$

反余弦函数 $y = \arccos x$

反正切函数 $y = \arctan x$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

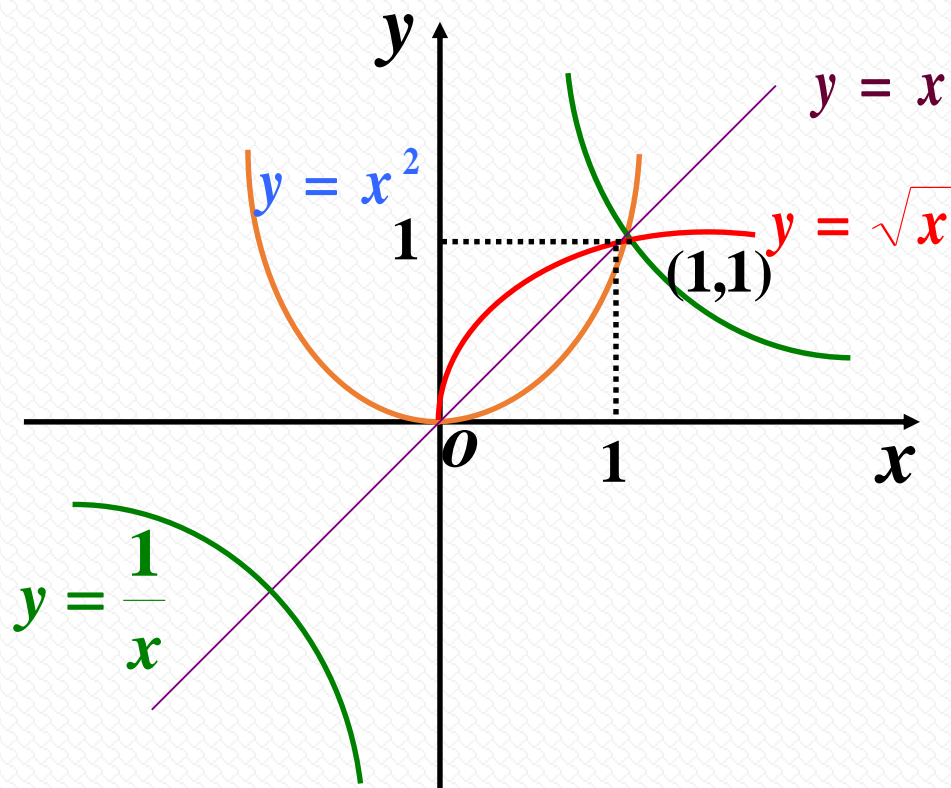


五

基本初等函数

1. 幂函数 (power function)

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha \text{ 是常数})$$

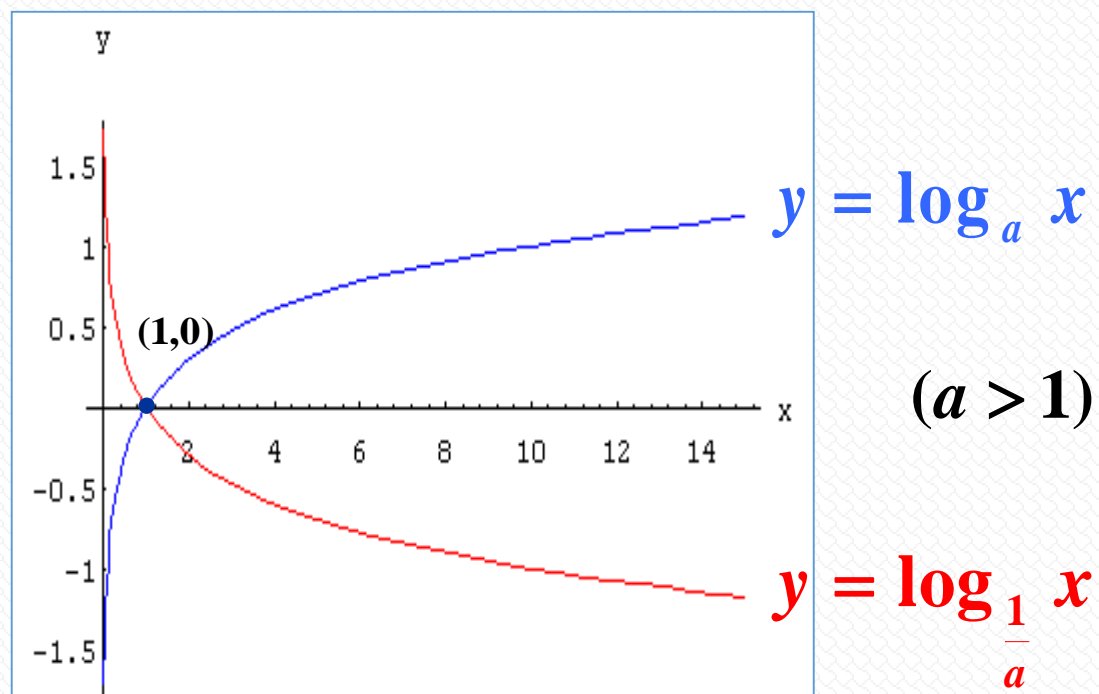


五

基本初等函数

3.对数函数 (logarithmic function)

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = \ln x$$

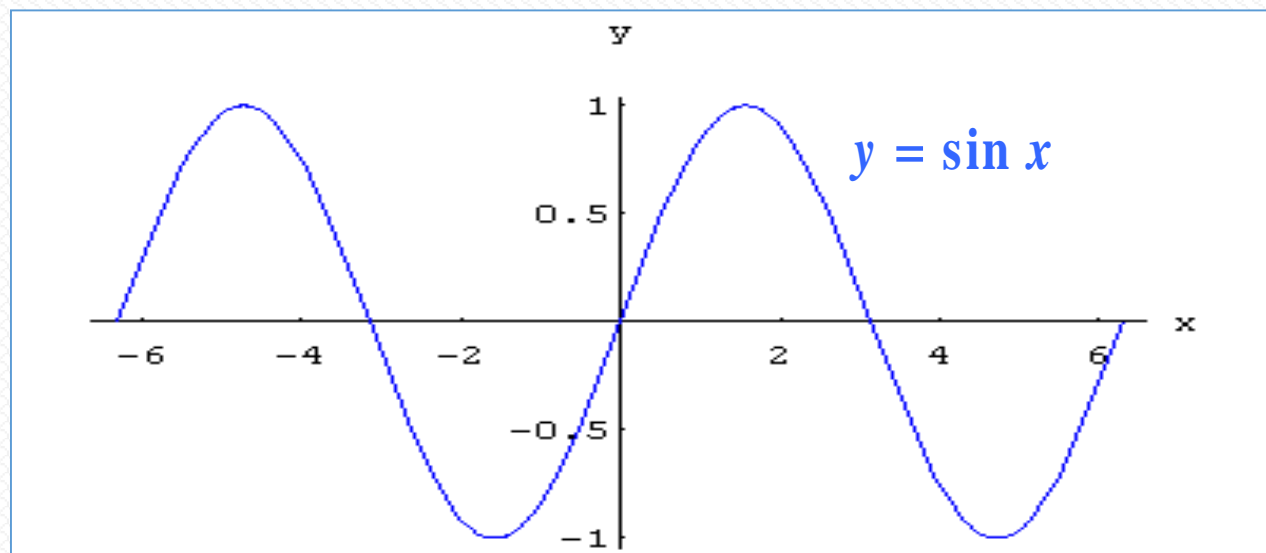


五

基本初等函数

4. 三角函数 (trigonometric function)

正弦函数 $y = \sin x$



$y = \sin x$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[-1, 1]$. 奇函数,
以 2π 为周期的周期函数, 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

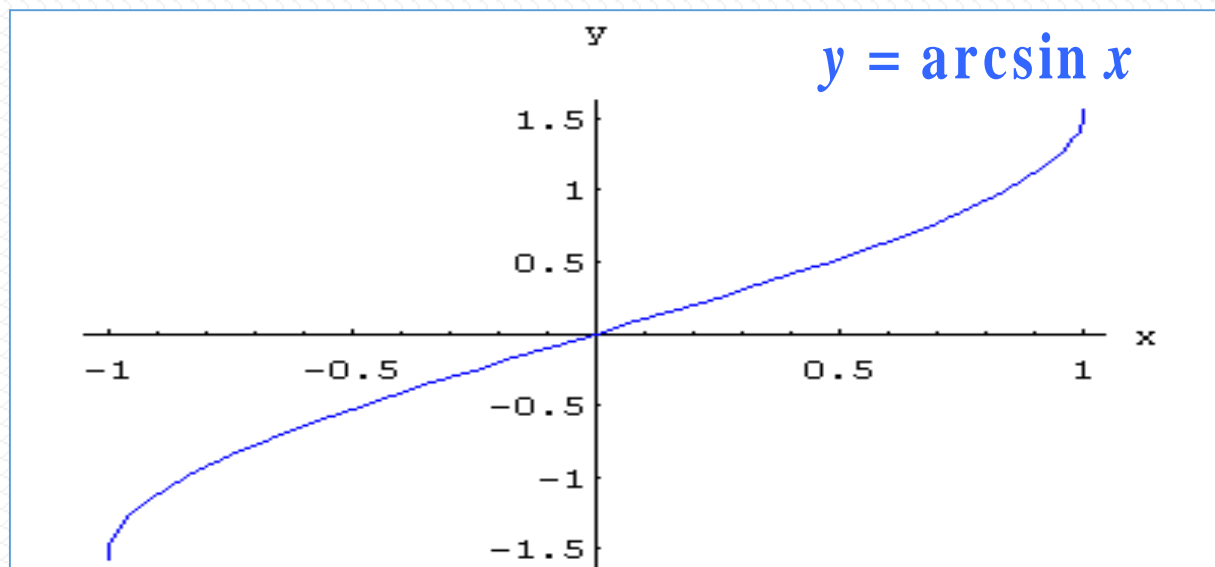


五

基本初等函数

5.反三角函数 (inverse trigonometric function)

反正弦函数(主值) $y = \arcsin x$



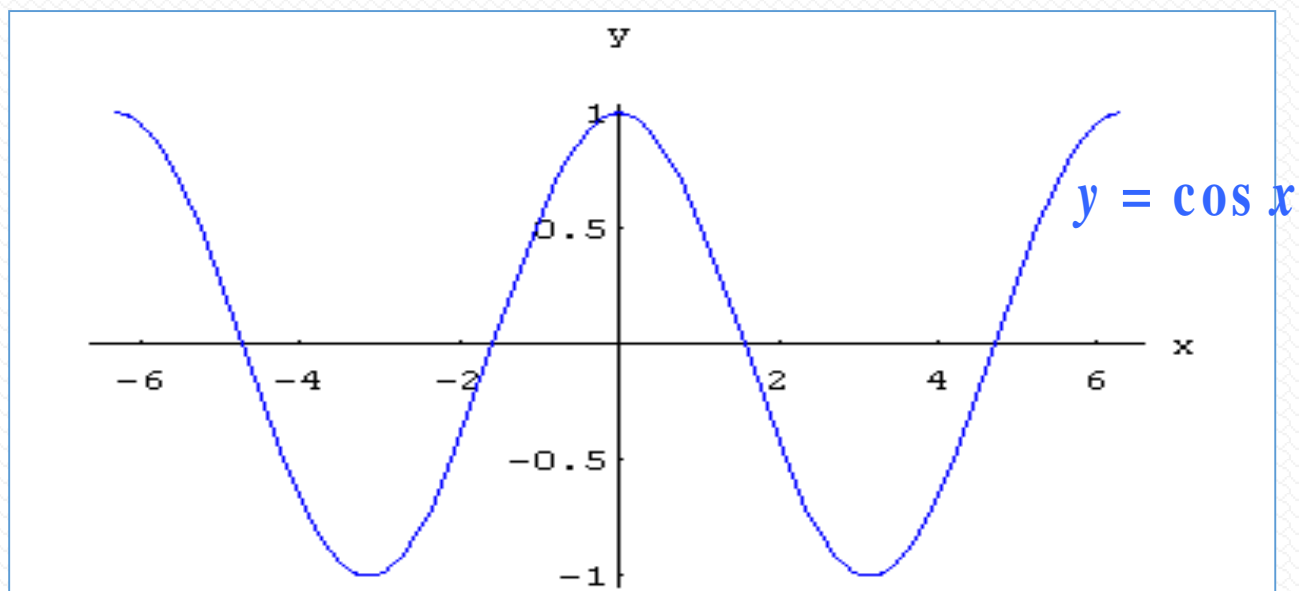
$y = \arcsin x$ 的定义域 $[-1,1]$,值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 奇函数,
在定义域上单调递增.



五

基本初等函数

余弦函数 $y = \cos x$



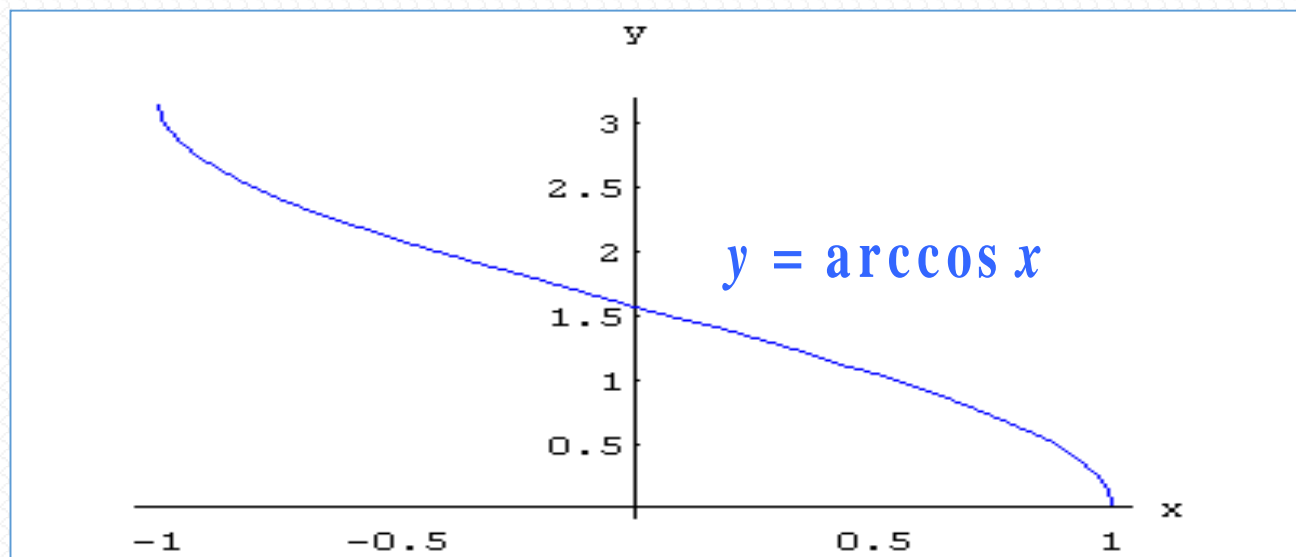
$y = \cos x$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $[-1, 1]$. 偶函数, 以 2π 为周期的周期函数, 在 $[0, \pi]$ 上单调减少.



五

基本初等函数

反余弦函数(主值) $y = \arccos x$



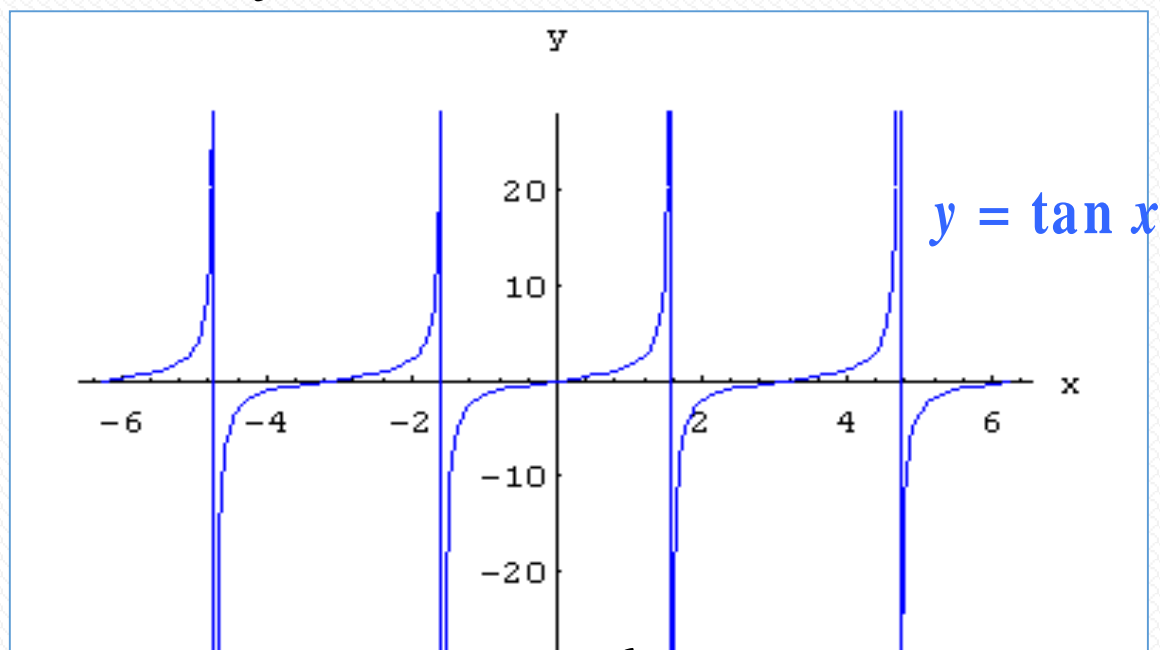
$y = \arccos x$ 的定义域 $[-1, 1]$,值域是 $[0, \pi]$.
在定义域上单调减少.



五

基本初等函数

正切函数 $y = \tan x$



$y = \tan x$ 的定义域 $D_f = \left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \dots \right\}$,

值域是 $(-\infty, +\infty)$. 奇函数, 以 π 为周期的周期函数,

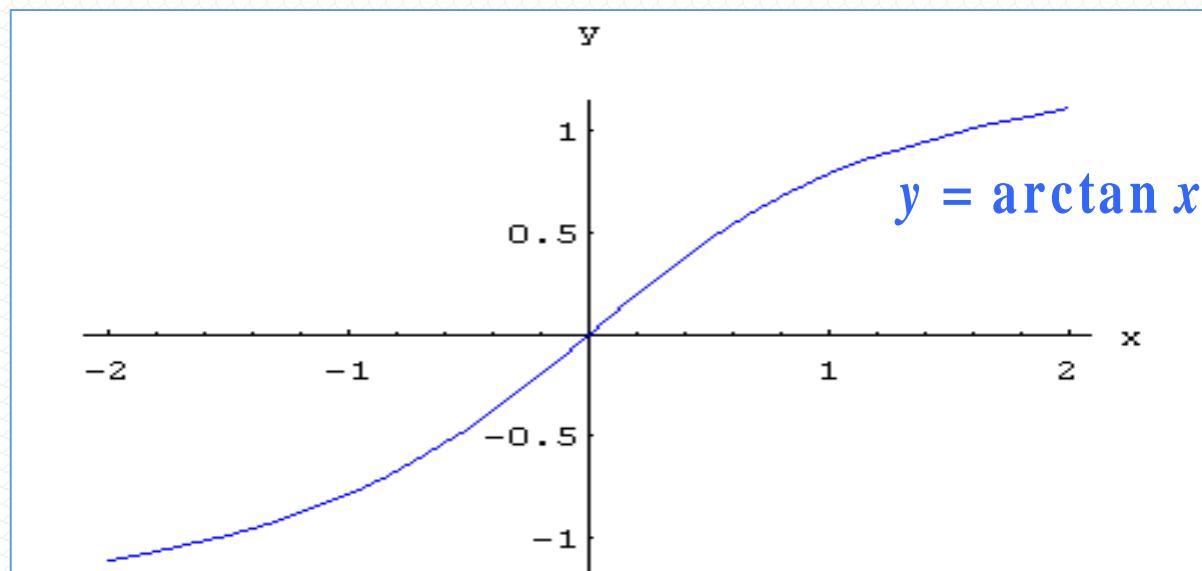
在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调增加.



五

基本初等函数

反正切函数(主值) $y = \arctan x$



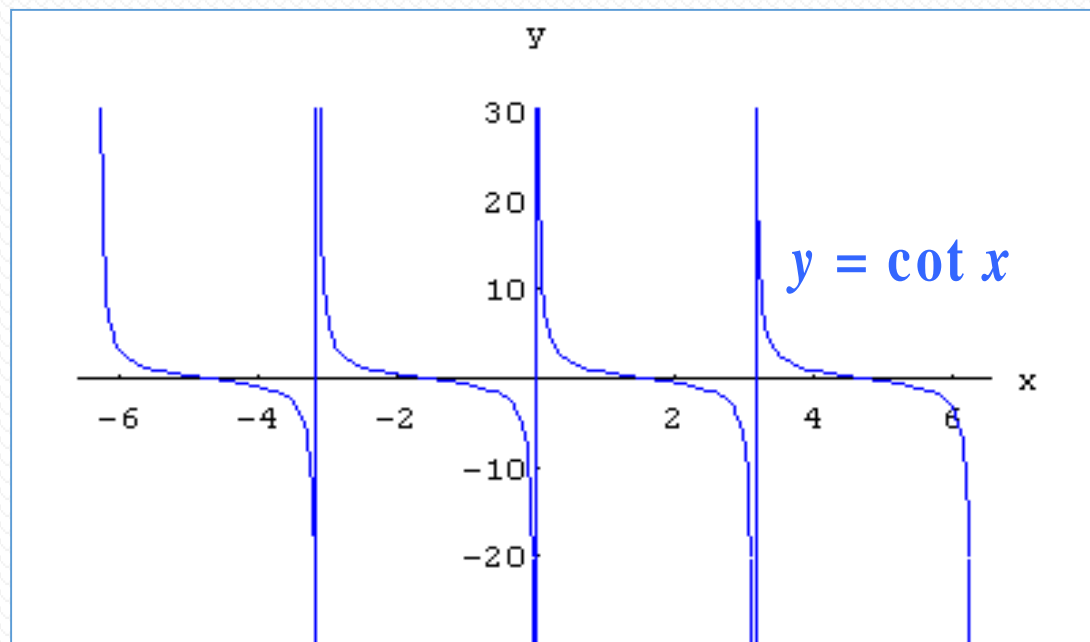
$y = \arctan x$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 奇函数,
在定义域上单调递增.



五

基本初等函数

余切函数 $y = \cot x$



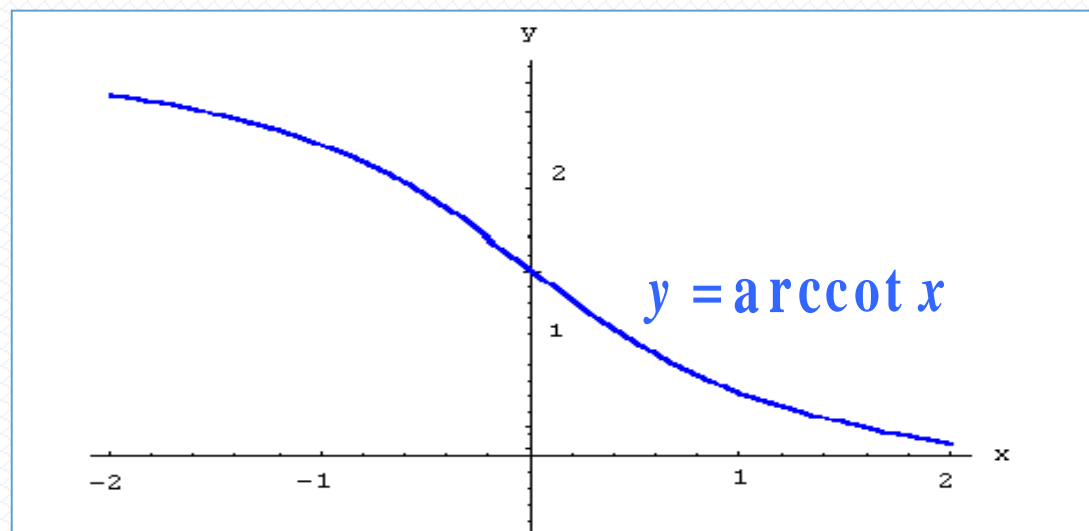
$y = \cot x$ 的定义域 $D_f = \{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \dots\}$,
值域是 $(-\infty, +\infty)$. 奇函数, 以 π 为周期的周期函数,
在 $(0, \pi)$ 上单调减少.



五

基本初等函数

反余切函数(主值) $y = \operatorname{arccot} x$



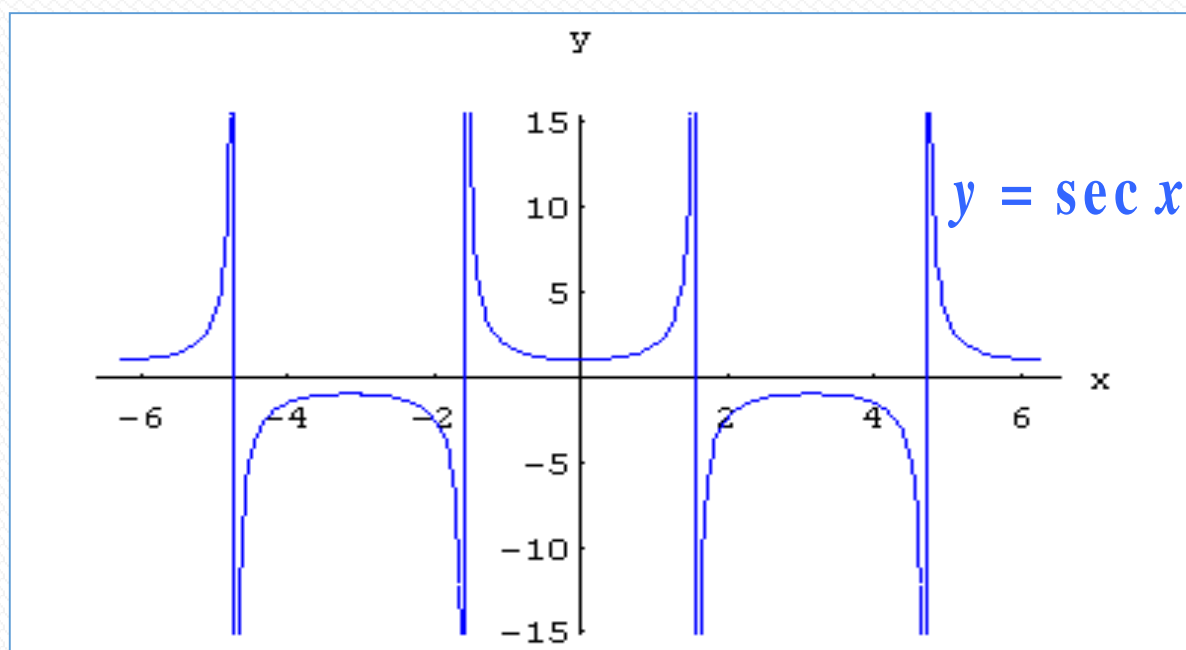
$y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域是 $(0, \pi)$.
在定义域上单调减少.



五

基本初等函数

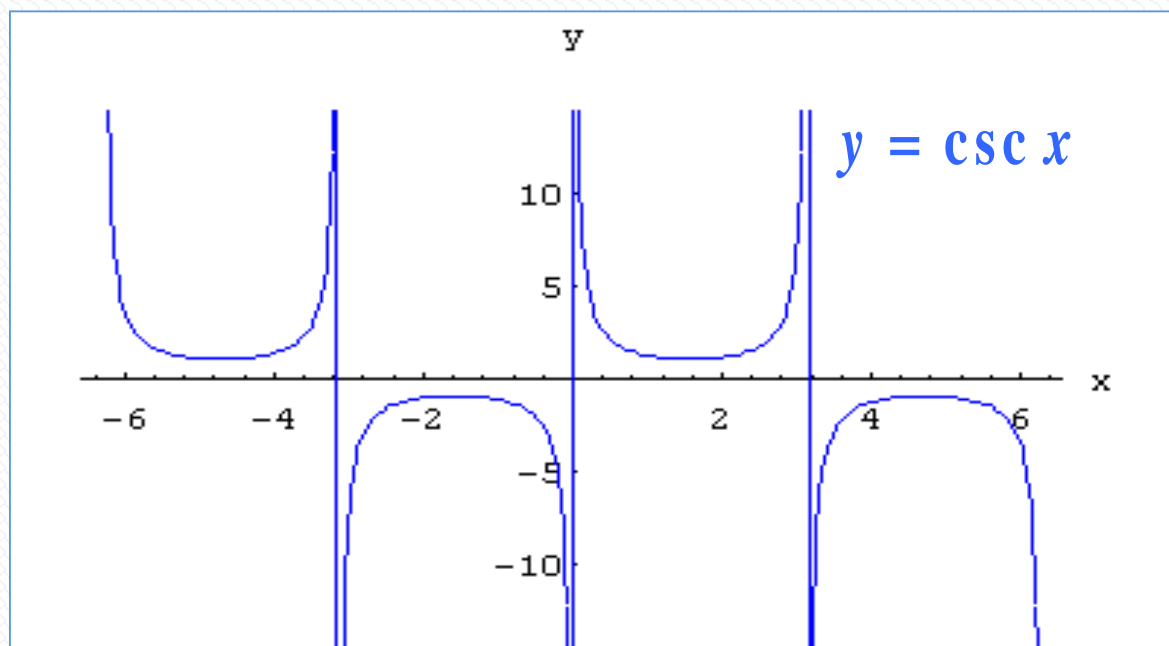
正割函数 $y = \sec x$



五

基本初等函数

余割函数 $y = \csc x$



五

基本初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.



六

复合函数

定义： 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f ，而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ ，若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$ ，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数。

$x \leftarrow$ 自变量， $u \leftarrow$ 中间变量， $y \leftarrow$ 因变量，

设 $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$, $\longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$



六

复合函数

注意:

1. 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y = \arcsin u, \quad u = 2 + x^2;$

$$y \neq \arcsin(2 + x^2)$$

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 由 $y = \sqrt{u}, \quad u = \cot v, \quad v = \frac{x}{2}$

可复合成 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}.$



六

复合函数

经常会遇到把一个复杂函数分解为若干个简单函数的复合，例如： $y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}$

例10 将下列复合函数分解成简单函数.

$$(1) \quad y = e^{\arctan 2x^2}; \quad (2) \quad y = \cos^2 \ln(2 + \sqrt{1+x^2}).$$

$$(3) \quad y = \sqrt{\ln \sin^2 4x};$$

$$(y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = w^2, w = \sin t, t = 4x)$$

注意:由外到内逐层分解，分解到基本初等函数或基本初等函数与常数的和、差、积、商为止.



六

复合函数

例11 设 $f(x-2) = x^2 - 2x + 3$, 求 $f(x)$.

例12 设 $f(\cos \frac{x}{2}) = 1 - \cos x$, 求 $f(\sin \frac{x}{2})$.

此类题型: 已知 $f[\varphi(x)] = h(x)$, 求 $f(x)$.

基本上有两种解法, 一是将等式右端表达式变形为关于 $\varphi(x)$ 的一个式子, 再令 $u = \varphi(x)$, 得到 $f(u)$ 的表达式. 另一种解法是令 $u = \varphi(x)$, 解出 $x = g(u)$, 代入右端表达式, 从而得出 $f(u)$ 的表达式, 有了 $f(u)$ 的表达式, 就能求得结果.



六

复合函数

例13 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, 求 $f[f(x)]$.

解: $f[f(x)] = \begin{cases} e^{f(x)}, & f(x) < 1 \\ f(x), & f(x) \geq 1 \end{cases}$ 所以, $f[f(x)] = \begin{cases} e^{e^x}, & x < 0 \\ e^x, & 0 \leq x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

(1) 当 $f(x) < 1$ 时, 若 $x < 1$, 则 $f(x) = e^x < 1 \Rightarrow x < 0$.

所以, 当 $x < 0$ 时, $f[f(x)] = e^{e^x}$.

(2) 当 $f(x) \geq 1$ 时, 若 $x < 1$, 由 $f(x) = e^x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$.

所以, 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f[f(x)] = e^x$.

若 $x \geq 1$, 则 $f(x) = x \geq 1$, 所以, 当 $x \geq 1$ 时, $f[f(x)] = x$.



六

复合函数

思考题二 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$,
求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

1⁰ 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x+2 < 1$, $\longrightarrow x < -1$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2-1 < 1$, $\longrightarrow 0 \leq x < \sqrt{2}$;



六

复合函数

2⁰ 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, $\longrightarrow -1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, $\longrightarrow x \geq \sqrt{2}$;

综上所述

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$



七

函数运算

函数的和 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

函数的差 $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

函数的积 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

函数的商 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

函数的线性组合 $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

(其中 α, β 为实数)



七

函数运算

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数 (elementary function).

注：一般地分段函数不是初等函数，形式上分段但可化为一个解析表达式的函数可能是初等函数.

$$\text{如: } y = \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

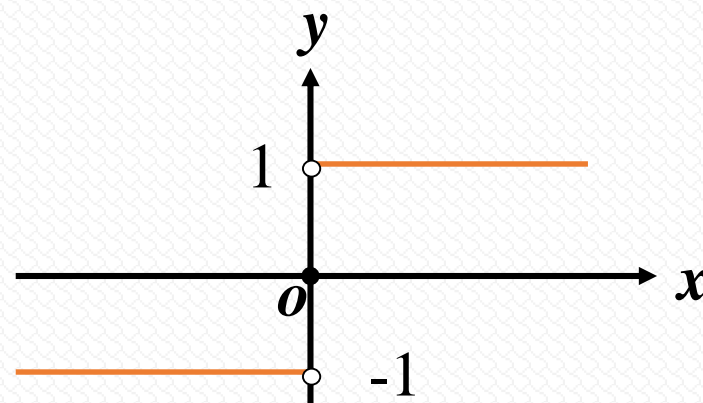


七

函数运算

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$



七

函数运算

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算而得到的初等函数，称为简单函数 (elementary function).

常用的简单函数：

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

——有理函数多项式

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_n} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

——有理分式函数



七

函数运算

双曲函数与反双曲函数

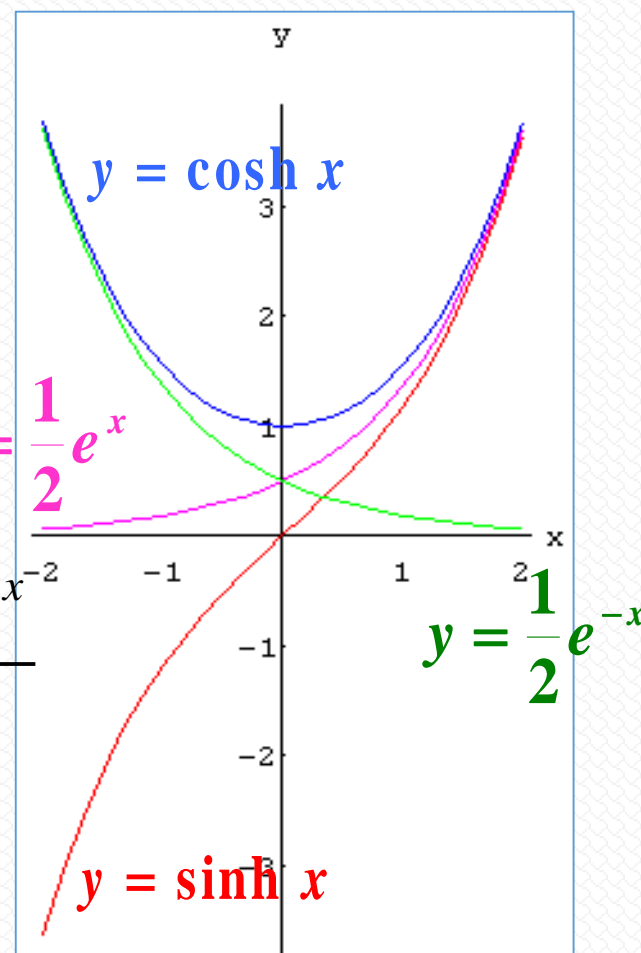
双曲余弦函数图像是悬链线

1. 双曲函数

$$\text{双曲正弦 } \sinh x = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

 $D: (-\infty, +\infty),$ 奇函数.

$$\text{双曲余弦 } \cosh x = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

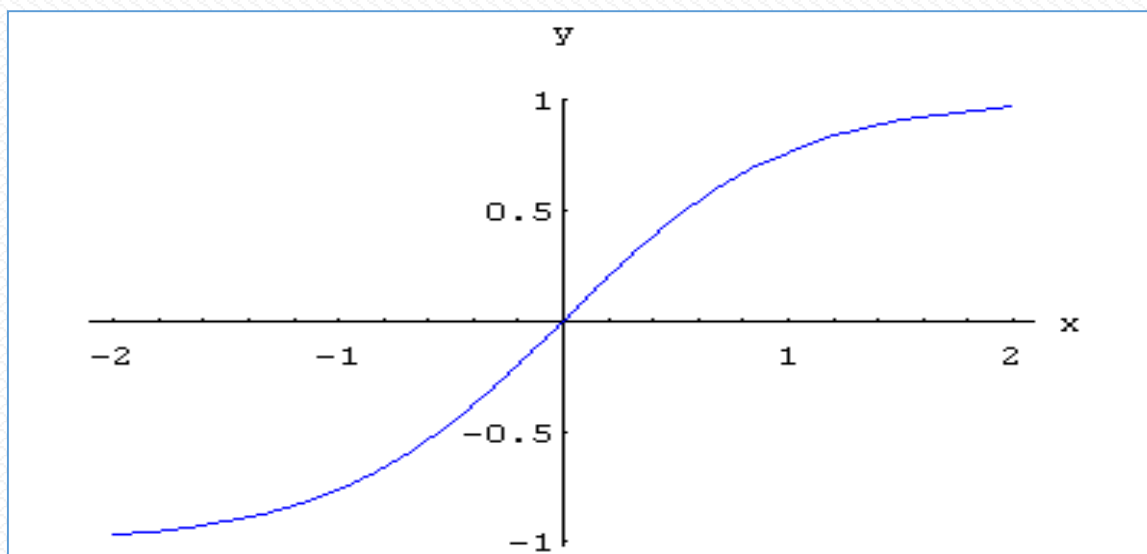
 $D: (-\infty, +\infty),$ 偶函数.

七

函数运算

双曲正切 $\tanh x = thx = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$D : (-\infty, +\infty)$ 奇函数, 有界函数,



七

函数运算

双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y ;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y ;$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 ;$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x ;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x .$$



七

函数运算

2.反双曲函数

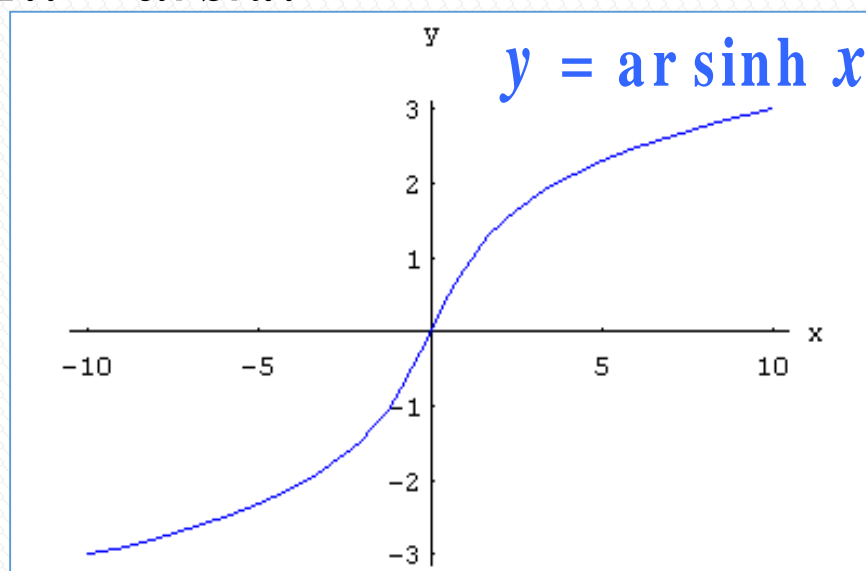
反双曲正弦: $y = \operatorname{ar sinh} x = \operatorname{arsh} x$

$$y = \operatorname{arsinh} x \\ = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$D : (-\infty, +\infty)$$

奇函数,

在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.



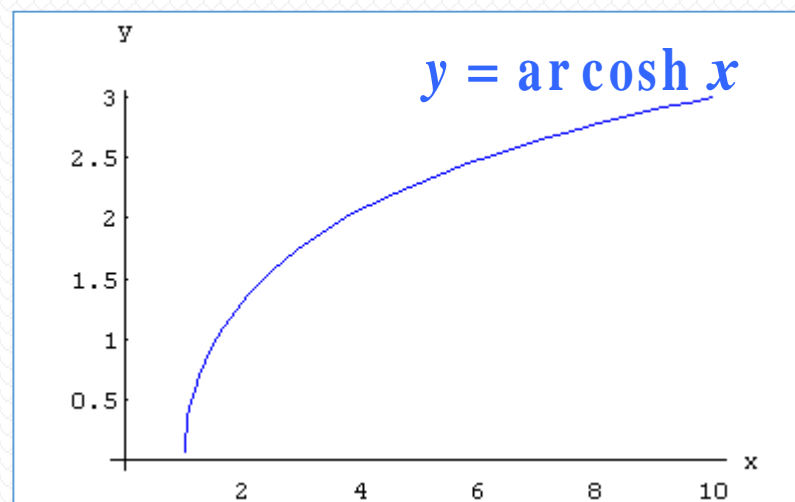
七

函数运算

反双曲余弦: $y = \operatorname{ar} \cosh x = \operatorname{arch} x (x \geq 1)$

$$y = \operatorname{arcosh} x \\ = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$D : [1, +\infty)$$



在 $[1, +\infty)$ 内单调增加.



八

函数关系的建立

为解决实际应用问题，首先要将该问题量化，从而建立起该问题的数学模型，即建立函数关系。

step1 明确因变量、自变量；

step2 建立等式，即函数关系式；

step3 写出定义域（除解析式外还要考虑实际意义）。



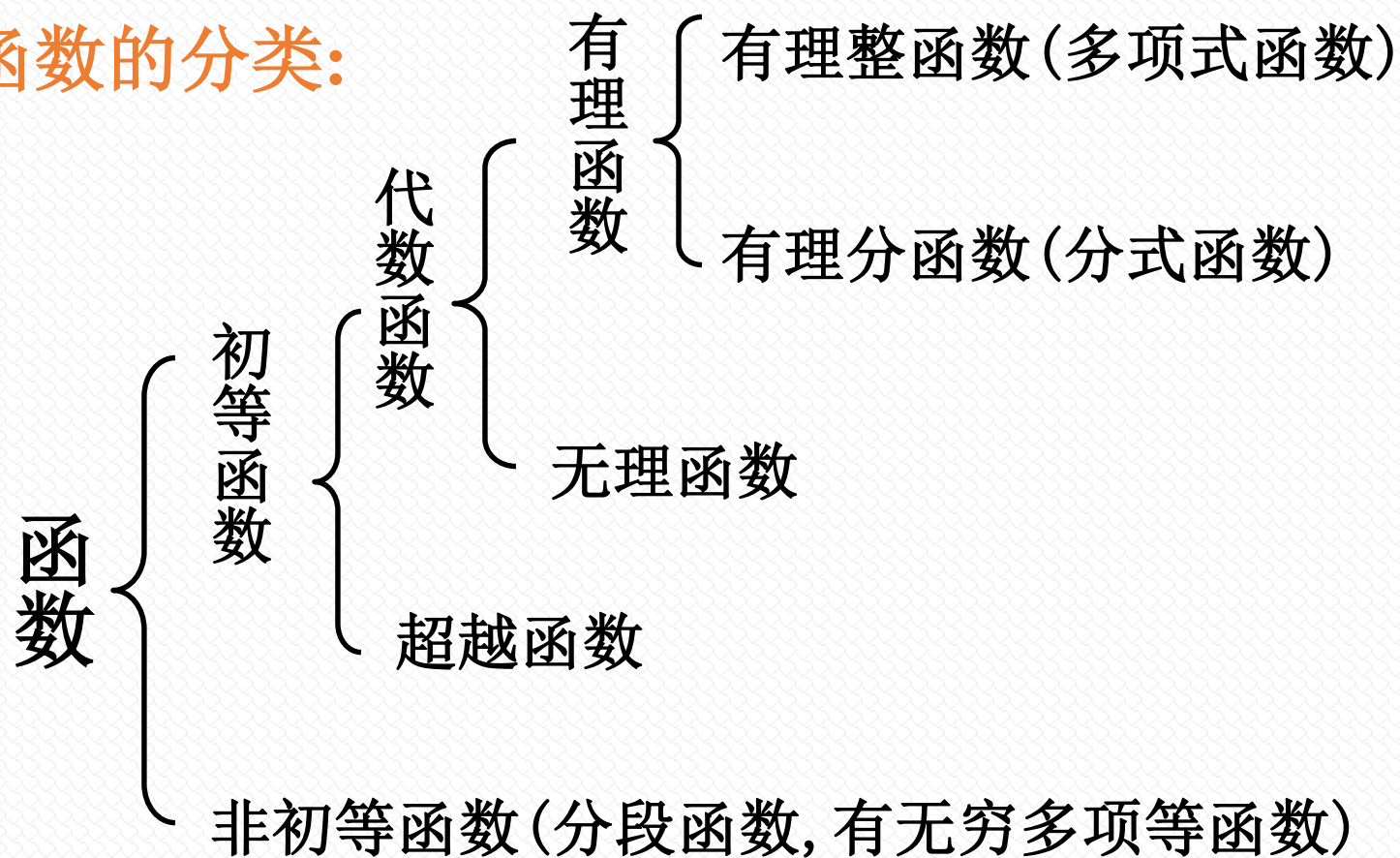
八小结

1. 理解函数概念，会求函数定义域，会计算函数值.
2. 掌握函数记号的应用，会求函数的复合与分解，会求反函数.
3. 掌握函数的特性.
4. 会建立函数关系.
5. 作函数草图.



八小结

函数的分类:



八小结

例7

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求

函数 $f(x+3)$ 的表达式及定义域.

(2) 设 $f(x+3) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求

函数 $f(x)$ 的表达式及定义域.



八小结

例8

设 $f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x \leq 0 \\ x+1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的反函数.



八 小结

思考题

1、 设 $\forall x > 0$ ，函数值 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ，

求函数 $y = f(x)$ ($x > 0$) 的解析表达式.

2、 下列函数能否复合为函数

$y = f[g(x)]$ ，若能，写出其解析式、定义域、值域.

$$(1) \quad y = f(u) = \sqrt{u}, \quad u = g(x) = x - x^2$$

$$(2) \quad y = f(u) = \ln u, \quad u = g(x) = \sin x - 1$$



思考题解答

1. 设 $\frac{1}{x} = u$

则 $f(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u},$

故 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}. \quad (x > 0)$



八 小结

2.

$$(1) \quad y = f[g(x)] = \sqrt{x - x^2}$$

$$x \in D = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad f(D) = [0, \frac{1}{2}]$$

$$(2) \quad \text{不能.} \quad \because \quad g(x) = \sin x - 1 \leq 0$$

$g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域之交集是空集.



练习题一

一、填空题:

1、若 $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{5}{t} + 2t^2$, 则 $f(t) =$ _____,
 $f(t^2 + 1) =$ _____.

2、若 $\phi(t) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{\pi}{3} \\ |\sin x|, & |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$,

则 $\phi\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ _____, $\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ _____.

3、不等式 $|x - 5| < 1$ 的区间表示法是 _____.

4、设 $y = x^2$, 要使 $x \in U(0, \delta)$ 时, $y \in U(0, 2)$,
须 δ _____.



八 小结

二、证明 $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

三、设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数,

且 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 试在 $(-\infty, +\infty)$ 上绘出

$f(x)$ 的图形.

四、证明: 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

五、证明函数 $y = \frac{ax - b}{cx - a}$ 的反函数是其本身.

六、求 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 的反函数, 并指出其定义域.



练习题答案

- 一、 1、 $5t + \frac{2}{t^2}$, $5(t^2 + 1) + \frac{2}{(t^2 + 1)^2}$; 2、 1, 1;
3、 (4, 6); 4. $\in (0, \sqrt{2}]$.
七、 $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, (-1, 1).



练习题二

一、填空题:

- 1、幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数统称_____.
- 2、函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3]$, 则函数 $f(\ln x)$ 的定义域为_____.
- 3、由函数 $y = e^u$, $u = x^2$ 复合而成的函数为_____.
- 4、函数 $y = \sin \ln 2x$ 由_____复合而成.
- 5、若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域为_____, $f(\sin x)$ 的定义域为_____, $f(x+a)$ ($a > 0$) 的定义域为_____, $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域为_____.



八 小结

二、应用图形的“叠加”作函数 $y = x + \sin x$ 的图形.

三、设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$,

求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, 并作出它们的图形.

四、火车站行李收费规定如下: 20 千克以下不计费, 20~50 千克每千克收费 0.20 元, 超出 50 千克超出部分每千克 0.30 元, 试建立行李收费 $f(x)$ (元) 于行李重量 x (千克) 之间的函数关系, 并作出图形.



练习题答案

一、1、基本初等函数； 2、 $[e, e^3]$ ；

3、 $y = e^{x^2}$ ； 4、 $y = \sin u, u = \ln v, v = 2x$ ；

5、 $[-1, 1], [2k\pi, 2k\pi + \pi], [-a, 1-a],$

$$\begin{cases} [a, 1-a] & 0 < a \leq \frac{1}{2} \\ \phi & a > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{三、 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x > 1 \end{cases} ; \quad g[f(x)] = \begin{cases} e, |x| < 1 \\ 1, |x| = 1 \\ \frac{1}{e}, |x| > 1 \end{cases}.$$

$$\text{四、 } y = \begin{cases} 0 & x < 20 \\ 0.2x, 20 \leq x \leq 50 \\ 10 + 0.3(x - 50), x > 50 \end{cases}$$

