新时代大学数学系列教材

线性代数

高等教育出版社

第二章 行列式

第一节 n 阶行列式的定义

目录

一、n 阶行列式的定义

一阶行列式：$|a_{11}| = a_{11}$

如，行列式 $|-5| = -5$，$|3| = 3$

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

如，$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式计算式的记忆法

例如 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8+6+4=18$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

例1 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times2\times(-2)+(-4)\times(-2)\times4+2\times1\times(-3)$$
$$-(-4)\times2\times(-3)-2\times(-2)\times(-2)-1\times1\times4$$

例2 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$
$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得

$x = 2$ 或 $x = 3.$

三阶行列式计算式规律的观察：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{12}(-1)a_{21} \quad = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}|,\ A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

称 $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ 分别为 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式.

定义 定义n阶矩阵A的行列式 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(1) 当$n = 1$时，$\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$;

(2) 当$n \geq 2$时，

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$, M_{1j}为划去A的第1行第j列后所得的$n-1$阶行列式，A_{1j}称为a_{1j}的代数余子式。

记号 $\det A$, $|A|$

行列式与矩阵的区别与联系 ：

(1) $D_{n\times n}$， $A_{m\times n}$；

(2) 数， 数表；

(3) $| \quad |$， $(\ )$， $[\ ]$；

(4) $A_{n\times n} \to |A| = \det A$.

例3 求$\det A$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=(8+21)+3(4-9)+7(14+12)=196$$

例4 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，$\det(\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$$\boxed{\det \boldsymbol{I} = 1, \qquad \det(k\boldsymbol{I}_n) = k^n}$$

例5 计算斜下三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & a_n \\ & \unicode{x22F0} & \\ a_2 & & \\ a_1 & * & \end{vmatrix}$$

$$D_n = a_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & & a_{n-1} \\ & \unicode{x22F0} & \\ a_2 & & \\ a_1 & * & \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_nD_{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2} = \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_na_{n-1}\cdots a_1$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$$

同理，$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & a_n \\ & \begin{matrix} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ a_2 & \end{matrix} & \\ a_1 & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$

谢谢