§5.4 实对称矩阵的对角化

一、实对称矩阵的特征值与特征向量

二、实对称矩阵的相似对角化

一 实对称矩阵的特征值与特征向量

定理1　实对称矩阵的特征值都是实数.

进一步有：实对称矩阵的特征向量是实向量.

说明：本节所提到的对称矩阵,除非特别说明,均指实对称矩阵.

一 实对称矩阵的特征值与特征向量

定理2 设λ_1,λ_2是实对称矩阵A的两个特征值，p_1，p_2是对应的特征向量,若$\lambda_1 \neq \lambda_2$,则p_1与p_2正交.

一 实对称矩阵的特征值与特征向量

定理3　设A为n阶实对称矩阵,则必有正交矩阵P,使$P^{-1}AP=\Lambda$,其中Λ是以A的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

注：实对称矩阵A比可相似对角化.

推论　设 A为n阶对称矩阵,λ是A的特征方程的r重根,则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $R(A-\lambda E)=n-r$,从而对应特征值λ恰有r个线性无关的特征向量.

二 实对称矩阵的相似对角化

例1　对下列各实对称矩阵，分别求出正交矩阵P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

$$(1) A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\quad (2) A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

解　(1) 第一步　求 A 的特征值

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

得　$\lambda_1=4, \lambda_2=1, \lambda_3=-2.$

二 实对称矩阵的相似对角化

第二步 由$(A-\lambda_i E)x=0$,求出A的特征向量

对 $\lambda_1=4$,由$(A-4E)x=0$,得

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_2=1$,由$(A-E)x=0$,得

$$\begin{cases} -x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ 2x_2+x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

二 实对称矩阵的相似对角化

对 $\lambda_3=-2$,由$(A+2E)x=0$,得

$$\begin{cases} -4x_1+2x_2=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ 2x_2-2x_3=0 \end{cases}$$ 解之得基础解系 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

第三步　将特征向量正交化

由于ξ_1,ξ_2,ξ_3是属于A的3个不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的特征向量,故它们必两两正交.

第四步　将特征向量单位化

令　$P_i=\dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}$,　$i=1,2,3.$

二 实对称矩阵的相似对角化

得 $P_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

作 $P = (P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

则 $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

二 实对称矩阵的相似对角化

推论3 n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ 若 λ_i 是 A 的 k_i 重特征值，则 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的基础解系由 k_i 个解向量组成.

$\Leftrightarrow R(\lambda_i I - A) = n - k_i$.

$$(2)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)^2,$$

得特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$

对 $\lambda_1 = 2$,由$(A - 2E)x = 0$,得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$,由$(A - 4E)x = 0$,得基础解系

二 实对称矩阵的相似对角化

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$ ξ_2与ξ_3恰好正交，

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3两两正交.

再将 ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化,令$P_i=\dfrac{\xi_i}{\|\xi_i\|}(i=1,2,3)$得

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

二 实对称矩阵的相似对角化

于是得正交阵

$$P=\left(P_1,P_2,P_3\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

二 实对称矩阵的相似对角化

利用正交矩阵将对称矩阵化为对角矩阵的步骤为：

1. 求A的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;
2. 由$(A-\lambda_i E)x=0$,求出A的特征向量;
3. 将特征向量正交化;
4. 将特征向量单位化得 $P_1,P_2,\cdots,P_n$.
5. 写出正交阵 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$,

   则有 $P^{-1}AP=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

二 实对称矩阵的相似对角化

例2　设$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

解: 由$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$

得A的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=3.$

所以$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \Lambda^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$

二 实对称矩阵的相似对角化

对$\lambda_1=1$,由$A-E\sim\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$,得$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

对$\lambda_2=3$,由$A-3E\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

所以$P=(\xi_1\quad\xi_2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,$P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

所以$A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$

三 知识回顾及延伸

实对称矩阵A必可对角化, 即A与对角矩阵Λ相似.

即存在可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP=\Lambda$.

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

实对称矩阵A的不同特征值对应的特征向量正交.

三 知识回顾及延伸

例　设3阶实对称矩阵A的特征值分别为$\lambda_1=-2, \lambda_2=\lambda_3=1$,

对应于λ_1的特征向量为$p_1=(-1,-1,1)^T$,

(1)求对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量．(2)求A.

↓

实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交,求出p_2与p_3

↓

构造可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$

三 知识回顾及延伸

例　设3阶实对称矩阵A的特征值分别为$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$,

对应于λ_1的特征向量为$p_1=(-1,-1,1)^T$,

(1)求对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量.（2)求A.

↓

实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交,求出p_2与p_3

↓

构造可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$

感谢聆听