高等数学A(上)

第二节 原函数与微积分基本公式

一、原函数与不定积分的概念

二、变限的定积分

三、微积分基本公式

一、原函数与不定积分的概念

1. 原函数的定义

定义1

如果在区间I上，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即对任一$x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

则称$F(x)$为$f(x)$或$f(x)\mathrm{d}x$在区间I上的一个原函数.

例　$\because (\sin x)' = \cos x$，$\therefore \sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

$\because (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$，$\therefore \ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0, +\infty)$内的一个原函数.

问题：

1. 在什么条件下，一个函数的原函数存在？
2. 若原函数存在，它如何表示？

定理1 若函数$f(x)$在区间 I上连续,则$f(x)$在I上存在原函数.

(下章证明)

初等函数在定义区间上连续

$\Downarrow$

初等函数在定义区间上有原函数

定理2 若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数,则$f(x)$的所有原函数都在函数族 $F(x)+C$(C为任意常数)内.

证 $\because\ (F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$,

$\therefore\ F(x)+C$是 $f(x)$的原函数.

原函数不唯一

设$\Phi(x)$是$f(x)$的任一原函数, 即$\Phi'(x)=f(x)$.

则 $\because\ [\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$,

$\therefore\ \Phi(x)-F(x)=C_0$($C_0$为某个常数),

原函数间的关系

即 $\Phi(x)=F(x)+C_0$ 属于函数族$F(x)+C$.

2. 不定积分的定义

定义2　设$F(x)$是$f(x)$在区间I上的任一原函数，则$f(x)$的全部原函数的一般表达形式 $F(x)+C$ 称为$f(x)$在区间I上的不定积分.

记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　积分常数

不可丢

例1 求 $\int x^5\,\mathrm{d}x$.

解 $\because \left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = x^5$, $\therefore \int x^5\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^6}{6} + C$.

例2 求 $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 $\because (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\therefore \int \dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$.

由不定积分的定义，可知

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$;　　(2) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$;　　(4) $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$.

结论: 微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

$$F(x) \xrightleftharpoons[\text{求导逆过程}]{\text{求导}} f(x)$$

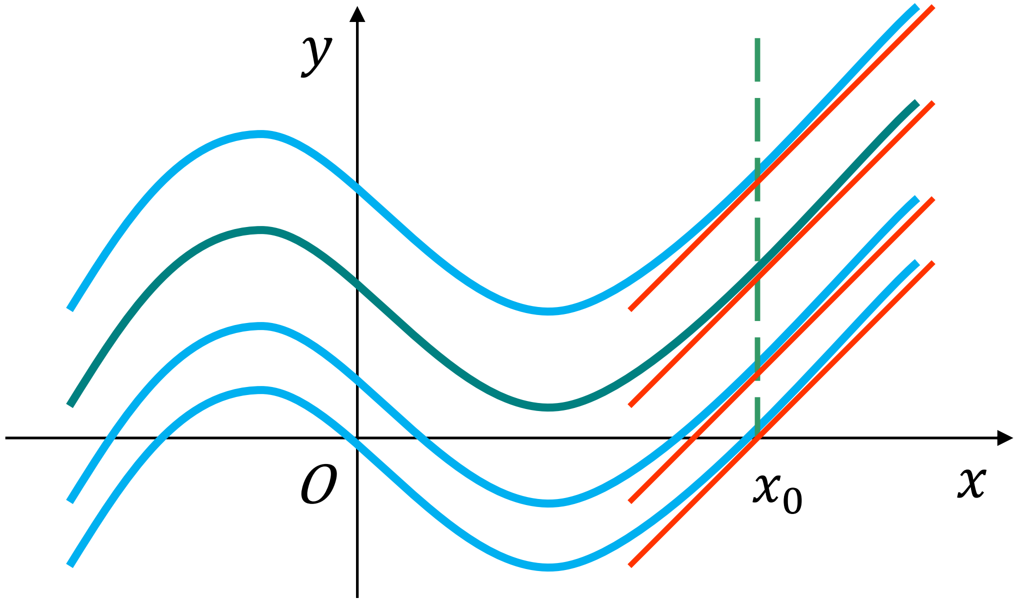
不定积分过程

3.不定积分的几何意义

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

显然，求不定积分得到一积分曲线族.

在同一横坐标$x = x_0$处, 任一曲线的切线有相同的斜率



例3 设曲线通过点(1,2), 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解

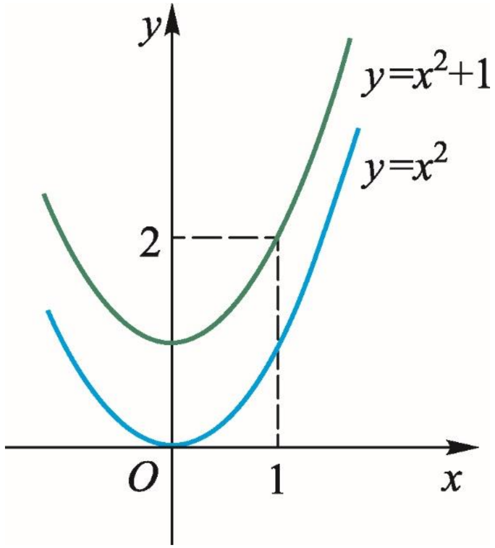
$\because \quad y' = 2x$

$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$

所求曲线过点(1,2), 故有

$2 = 1^2 + C \qquad \therefore C = 1.$

因此所求曲线为 $y = x^2 + 1.$



$y' = 2x$的积分曲线族

例4 质点在距地面x_0处以初速v_0铅直上抛,不计阻力,求其运动规律.

解　取质点运动轨迹为坐标轴,原点在地面,指向朝上,

质点抛出时刻为$t=0$, 此时质点位置为x_0, 初速为v_0.

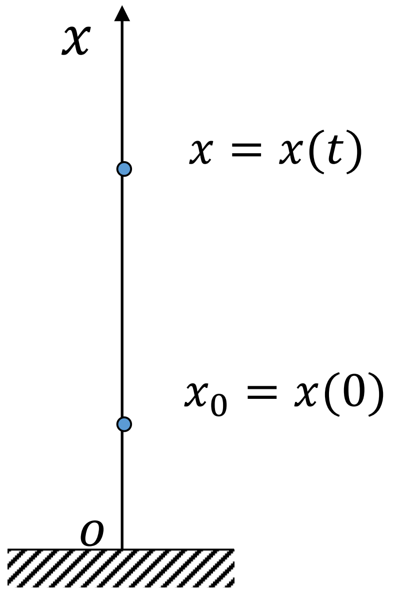
设时刻t质点所在位置为$x=x(t)$, 则

运动速度　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(t)$　且$x(0)=x_0$　①

加速度　$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g$　且$v(0)=v_0$　②

先由②求出$v(t)$ 再由①求出$x(t)$.

于是所求运动规律为　$x(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$



二、积分上限函数及其导数

寻求一个计算定积分的有效简便的方法.

引例 设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geqslant 0$. 求在运动时间内物体所经过路程s.

解 设$s=s(t)$是位置函数,则 $s=s(T_2)-s(T_1)$.

又由定积分的定义可知 $s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t=s(T_2)-s(T_1),\ \ s'(t)=v(t)$$

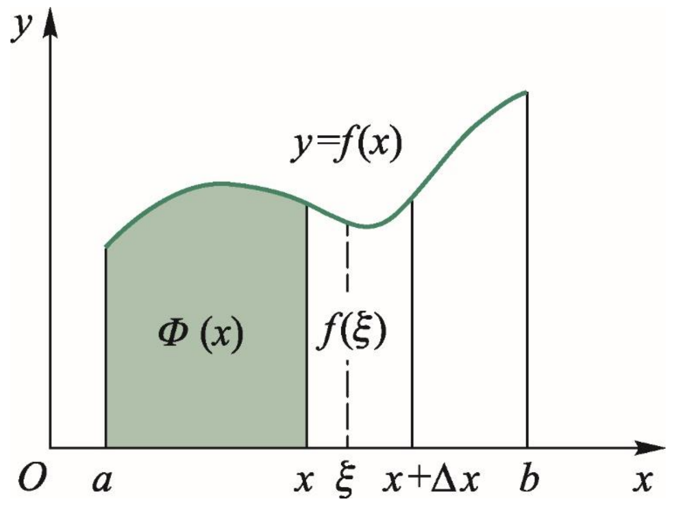
二、积分上限函数及其导数

1. 积分上限函数的定义

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且设x为$[a,b]$上的一点，

考察定积分 $\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{记为}} \Phi(x)$　积分上限函数

如果上限x在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的x值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数.



这个函数的几何意义是如图阴影部分的面积函数.

2. 积分上限函数的性质

定理1　如果$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上可导, 并且它的导数

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$$

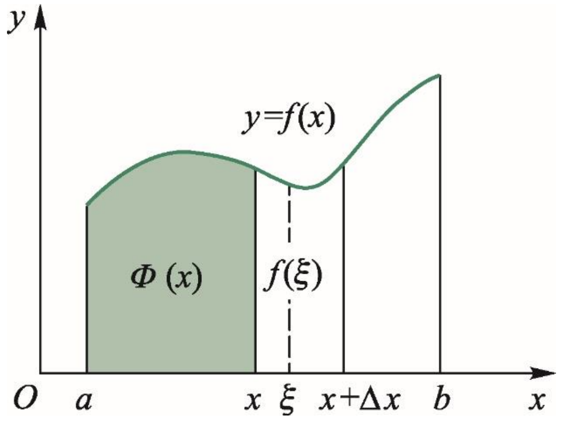
即$\Phi(x)$是$f(x)$在$[a,\ b]$上的一个原函数.

证 $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}$ $\quad\because \Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}\quad \therefore \Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}$$

ξ在x与$x+\Delta x$之间



$$=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$$

即$\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$

证毕

定理2 （原函数存在定理）

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是$f(x)$在 $[a,b]$上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

注 如果$f(x)$连续，$a(x), b(x)$可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

证 $\because \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a(x)}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t$

$$= \int_{0}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{a(x)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\therefore \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)_x' = f[b(x)]\cdot b'(x) - f[a(x)]\cdot a'(x)$$

提问 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t = ?$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = ?$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = ?$

例1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$. $\dfrac{0}{0}$型

解 $\because \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{1}^{\cos x}e^{-t^2}\mathrm{d}t = -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)'$

$$= \sin x\cdot e^{-\cos^2 x},$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

例2 设$f(x)$在内连续, 且$f(x)>0$. 证明函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

证

$$F'(x)=\frac{xf(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$\because f(x)>0,\quad (x>0)$

$(x-t)f(t)>0,\ (0<t<x)$

$\therefore \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0$

故$f(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

三、牛顿-莱布尼茨公式

定理3 （微积分基本定理）

如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证 $\because$ 由已知和定理2，$F(x)$和$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$都是$f(x)$的原函数，

$\therefore$ $\Phi(x)-F(x)=C,\quad x\in[a,b].$

令$x=a$得，$C=\Phi(a)-F(a)=\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x - F(a) = -F(a),$

$\therefore$ $\Phi(x)=F(x)+C=F(x)-F(a).$

令$x=b$得，$\Phi(b)=F(b)-F(a)$，即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$ 证毕

注

（1）当$a > b$时，牛顿–莱布尼茨公式或者微积分基本公式仍成立.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

（2）一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

（3）求定积分问题转化为求原函数的问题.为方便，记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

或 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

例3　计算 $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　$\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi.$$

例4　计算 $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　$\because$ 当$x<0$时，$\dfrac{1}{x}$的一个原函数是$\ln|x|$,

$\therefore \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

例5　设$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 5, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

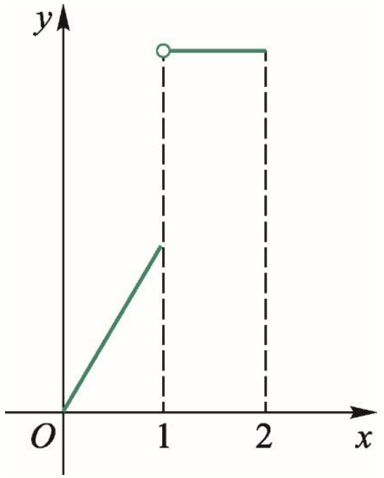
解　$\because \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

在[1,2]上规定当$x=1$时, $f(x)=5$.

$\therefore$ 原式$=\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_1^2 5x\mathrm{d}x$

$=x^2\Big|_0^1+5x\Big|_1^2$

$=6.$

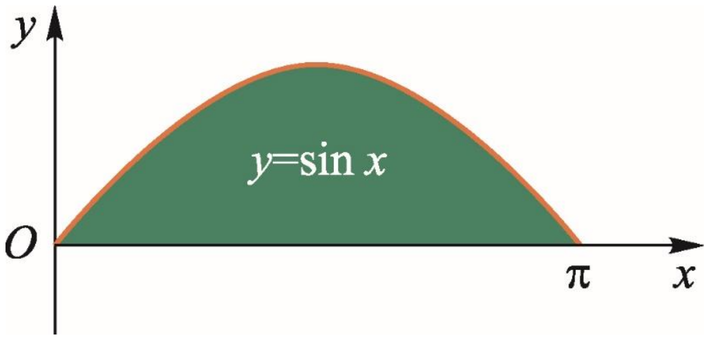


例6　计算正弦曲线$y=\sin x$在$[0,\pi]$上与x轴所围成平面图形的面积.

解

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(-1-1)=2$$



例7 汽车以每小时36km的速度行驶，到某处需要减速停车.设汽车以等加速度$a=-5\mathrm{m/s^2}$刹车.问从开始刹车到停车走了多少距离?

解 设开始刹车时刻为$t=0$，则此时刻汽车速度

$$v_0=36\mathrm{km/h}=\frac{36\times1000}{3600}\mathrm{m/s}=10\mathrm{m/s}$$

刹车后汽车减速行驶，其速度为

$$v(t)=v_0+at=10-5t$$

当汽车停住时，$v(t)=0$，即$10-5t=0$,得$t=2(\mathrm{s})$

故在这段时间内汽车所走的距离为

$$s=\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2(10-5t)\,\mathrm{d}t=\left[10t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^2=10(\mathrm{m})$$

例8 证明积分中值定理：

如果$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证 设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}\,t$，则$F(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的原函数.

$\because$ $F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内可导，

$\therefore$ 应用微分中值定理，得到，

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \text{其中} a<\xi<b$$

故 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f'(\xi)(b-a)$，其中$a<\xi<b$.