高等数学A(上)

第二节 一阶微分方程

一、一阶微分方程

二、一阶线性微分方程

一、一阶微分方程概念及解法

1.定义

如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含y的函数和$\mathrm{d}y$，另一端只含x的函数和$\mathrm{d}x$，那么原方程就称为**可分离变量的微分方程.**

例如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \longrightarrow \mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2 \longrightarrow \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$$

2. 解法

步骤1 分离变量

将 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1(x)f_2(y)$ 或 $M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x+N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0$

转化为 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$

步骤2 两边积分

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$$

则 $G(y)=F(x)+C$是微分方程的通解，

其中函数$G(y)$和$F(x)$依次是$g(y)$和$f(x)$的原函数.

3. 典型例题

例1 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\mathrm{d}x$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$ 或 $\ln|y|=x^3+\ln|C|$

即 $y=\pm\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$

令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，则 $y=C\mathrm{e}^{x^3}$ (C为任意常数)

(此式含分离变量时丢失的解$y=0$)

说明： 在求解过程中每一步不一定是同解变形，因此可能增、减解.

例2　已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变铀原子的含量M成正比，已知$t=0$时铀的含量为M_0，求在衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t的变化规律.

λ前置负号？

解　根据题意，有
$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M|_{t=0} = M_0 \end{cases}$$

其中：

$\dfrac{dM}{dt}$为衰变速度

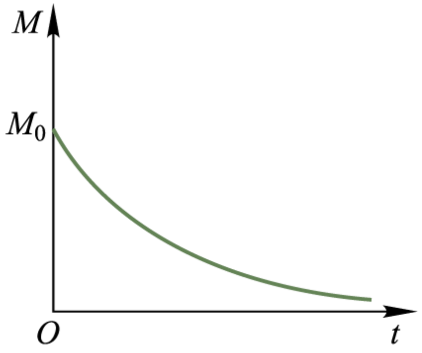
λ为衰变系数

对方程分离变量，然后积分

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$，即$M = Ce^{-\lambda t}$

利用初值条件，得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0 e^{-\lambda t}$.



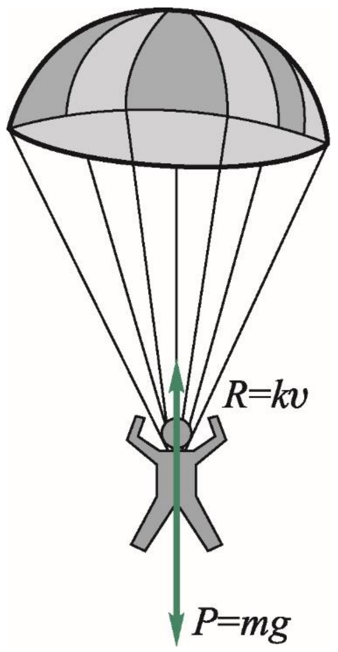
例3 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$)速度为0，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv,$

初值条件为 $v|_{t=0}=0.$

分离变量，得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\dfrac{\mathrm{d}t}{m},$

两边积分，得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C.$



$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C\text{，}\ v|_{t=0}=0.$$

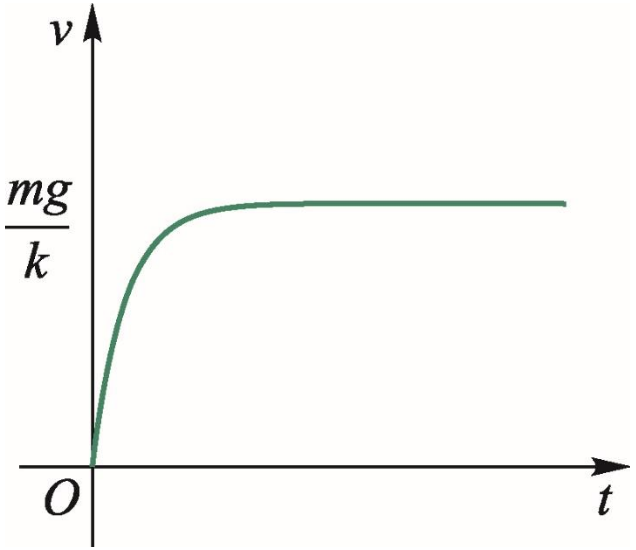
利用初值条件,得 $C=-\frac{1}{k}\ln(mg)$.

代入上式后化简, 得特解 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

由此可以看出,随着时间的增加,

速度逐渐接近于常数 $\frac{mg}{k}$,

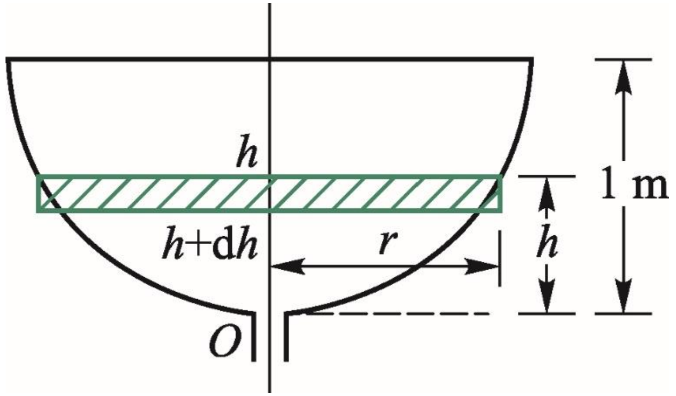
如图所示.



例4　有高1m的半球形容器,水从它的底部小孔流出,小孔横截面面积$S=1\,\text{cm}^2$.开始时容器内盛满了水,求水从小孔流出过程中,容器里水面的高度h随时间t的变化规律.

解　由力学知,水从孔口流出的流量为

$$Q=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\underbrace{k}_{\text{流量系数}}\;\underbrace{S}_{\text{孔口截面面积}}\;\underbrace{\sqrt{2g}}_{\text{重力加速度}}\,h$$



即　$\mathrm{d}V=kS\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$

其中$k=0.62,\ S=1\text{cm}=10^{-4}\text{m},\ g=9.8\text{m/s}^2.$

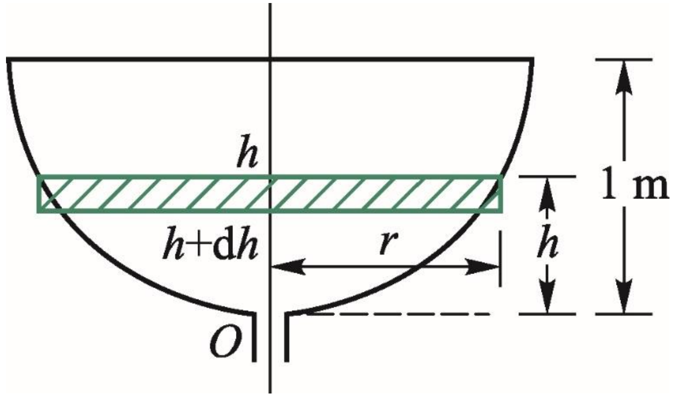
设在$[t,\ t+\mathrm{d}t]$内，水面高度由h降到$h+\mathrm{d}h\ (\mathrm{d}h<0)$，

对应下降体积

$$\mathrm{d}V=-\pi r^2\mathrm{d}h$$

$$r=\sqrt{1^2-(1-h)^2}=\sqrt{2h-h^2}$$

$$\mathrm{d}V=-\pi(2h-h^2)\mathrm{d}h$$



因此得微分方程初值问题

$$\begin{cases} kS\sqrt{2gh}\mathrm{d}t=-\pi(h-h^2)\mathrm{d}h \\ h|_{t=0}=1 \end{cases}$$

微小量分析法

$$kS\sqrt{2gh}\mathrm{d}t = -\pi(h - h^2)\mathrm{d}h,\ h|_{t=0} = 1.$$

将方程分离变量 $\mathrm{d}t = -\dfrac{\pi}{kS\sqrt{2g}}(2h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}h$

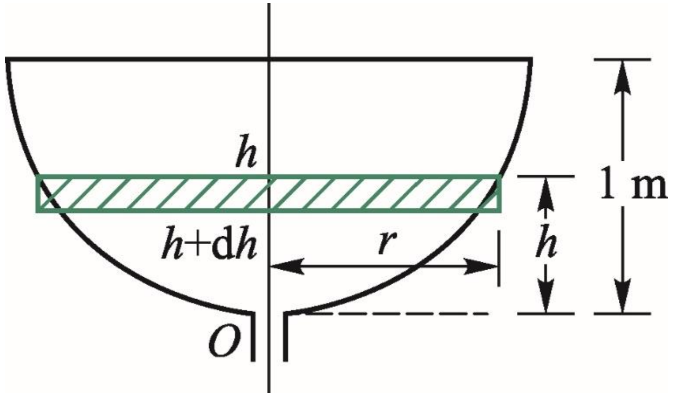
两端积分，得 $t = -\dfrac{\pi}{kS\sqrt{2g}}\left(\dfrac{4}{3}h^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + C\right)$

利用初值条件 $h|_{t=0} = 1$得 $C = -\dfrac{14}{15}$

$$\therefore t=\frac{14\pi}{15kS\sqrt{2g}}\left(1-\frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}}\right)$$

将 $k=0.62$, $S=10^{-4}\mathrm{m}^2$, $g=0.98\mathrm{m}/s^2$代入上式并计算得

$$t=1.068\times10^4\left(1-\frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}}\right)$$



即为容器里水面的高度h随时间t的变化规律.

当$h=1$时, $t=1.068\times10^4\mathrm{s}=2\mathrm{h}58\mathrm{min}$.

容器中水流完所需的时间

二、一阶线性微分方程

1.定义

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

的方程，称为一阶线性微分方程.

若$Q(x)\equiv 0$，则称为齐次方程，若$Q(x)\neq 0$，则称为非齐次方程.

例如: $y'+y\cos x=0$ 为一阶齐次线性微分方程.

$y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$ 为一阶非齐次线性微分方程.

2. 解法

步骤1 解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

步骤2 解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**：

将齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

通解$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$中的$C$换成$x$的函数$u(x)$.

$\downarrow$

即做变换 $y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，从而待定出$u(x)$.

设 $y = u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x},$$

代入非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$,得

$$u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

即 $u'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$, $\Rightarrow$ $u'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$,

两边积分，得 $u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$

于是非齐次线性方程的通解为 通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

$$y=\underbrace{C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}.$$

3. 典型例题

例1 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

解 先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$ ，即 $y=C(x+1)^2$

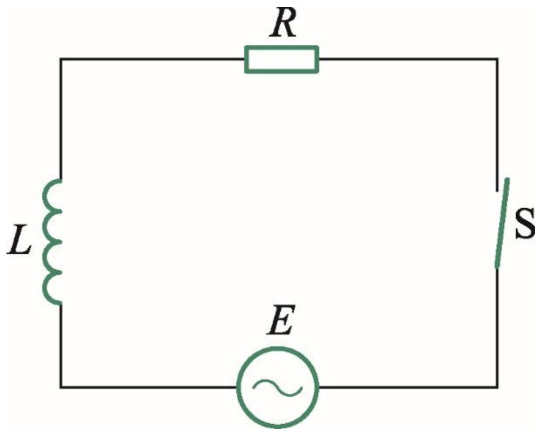
用常数变易法.

令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$，则 $y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 解得 $u=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$

例2 有一电路如图所示，其中电源电动势为 $E=E_m\sin\omega t$，电阻R和电感L都是常量，求电流$i(t)$．



解 （1）列方程.

由回路电压定律：

在闭合回路中，所有支路上的电压降为 0

已知经过电阻R的电压降为R_i，经过L的电压降为$L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，

因此有 $E-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-Ri=0$，即

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m\sin\omega t}{L}.$$ 初值条件：$i|_{t=0}=0$.

即得到初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R}{L}i=\dfrac{E_m \sin\omega t}{L} \\ i|_{t=0}=0 \end{cases}$

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

（2）解方程 利用一阶线性方程解的公式可得

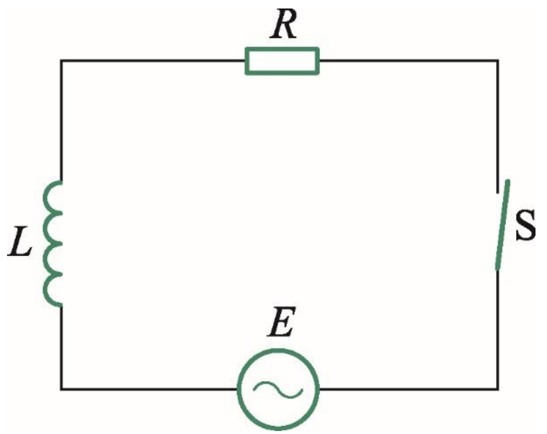
$$i(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\left[\int\frac{E_m}{L}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]$$

$$=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

由初值条件：$i|_{t=0}=0$ 得 $C=\dfrac{\omega L E_m}{R^2+\omega^2L^2}$

因此所求电流函数为

$$i(t)=\frac{\omega L E_m}{R^2+\omega^2L^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$



解的意义:

令 $\varphi=\arctan\dfrac{\omega L}{R}$,则

$$i(t)=\underbrace{\frac{\omega L E_m}{R^2+\omega^2L^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{暂态电流}}+\underbrace{\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)}_{\text{稳态电流}}$$

例3 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$.

解 方法1. 变成一阶线性方程

方程变形，得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x+y$, $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$,

这是一个以 y 为自变量，以 x 为函数的一阶线性方程，

由通解公式，得 $x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y,$$

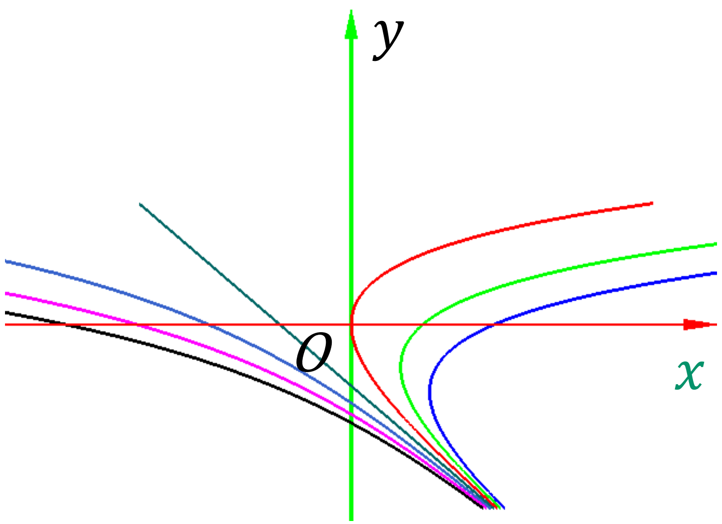
$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}y}\left(\int y\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{y}\left(\int y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{y}(-y\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-y}+C)$$

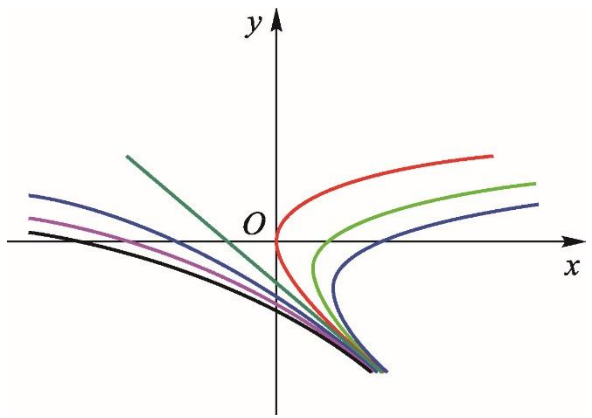
$$=C\mathrm{e}^{y}-y-1\,.$$



方法2. 作变量替换

令$u = x + y$，则$y = u - x$，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} - 1$，于是方程变为

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u}, \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}.$$



分离变量，得 $\dfrac{u}{u+1}du = dx$，

两边积分，得 $u - \ln|u+1| = x + C$.

代回原变量并化简得通解为 $x = Ce^{y} - y - 1$.