高等数学A(上)

第二章 一元函数微分学

本章重点

导　数 — 描述函数变化快慢
微　分 — 描述函数变化程度
微分学 — 基本概念是导数与微分

微分学	导　数	微　分
基本概念是导数与微分	描述函数变化快慢	描述函数变化程度

中值定理	应用一	应用二
罗尔、拉格朗日、柯西	研究函数性质及曲线性态	利用导数解决实际问题

第二章
目 录
CONTENTS

第三节 高阶导数

一、高阶导数的概念

二、高阶导数求导法则举例

一、高阶导数的概念

1. 问题: 变速直线运动的加速度

位置函数　$s = s(t)$,

速度　$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$　或　$v = s'$

加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \overset{\text{记作}}{=\!=} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$

或　$a = v' = (s')' \overset{\text{记作}}{=\!=} s''$

叫做 s 对 t 的二阶导数

所以直线运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

2. 高阶导数的定义

定义

如果函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$可导，则称$f'(x)$的导数为$f(x)$的二阶导数. 记作 $f''(x), y'', \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数，$f'''(x), y''', \dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数，$f^{(4)}(x), y^{(4)}, \dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$.

一般地，函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数，

即 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$.

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

注 相应于高阶导数, $f(x)$称为零阶导数, $f'(x)$称为一阶导数.

例1 设 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 求$y^{(n)}$.

解

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1},$$

$$y'' = 2\cdot1a_2 + 3\cdot2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2},$$

$$y''' = 3\cdot2\cdot1a_3 + 4\cdot3\cdot2a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3},$$

依次类推, 可得 $y^{(n)} = n!\,a_n$.

思考 设$y = x^{\mu}$ (μ为任意常数), 问 $y^{(n)} = ?$

答案: $(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$

当$\mu = n$时, $(x^n)^{(n)} = n!$, $(x^n)^{(n+k)} = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

例2 证明：函数$y=\sqrt{2x-x^2}$满足关系式$y^3y''+1=0$.

解

$$y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},$$

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}=\frac{-(2x-x^2)-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{1}{y^3}.$$

于是 $y^3y''+1=0$. 得证

例3　设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解　$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

……

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

即 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

同理可得　$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

例4 设 $y = \mathrm{e}^{ax}$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = a\mathrm{e}^{ax}$,

$y'' = a^2\mathrm{e}^{ax}$,

$y''' = a^3\mathrm{e}^{ax}$,

……

$y^{(n)} = a^n\mathrm{e}^{ax}$,

$(\mathrm{e}^{ax})^{(n)} = a^n\mathrm{e}^{ax}$

特别有$(\mathrm{e}^{x})^{(n)} = \mathrm{e}^{x}$

例5 设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x}$, $y'' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$,

$y''' = \dfrac{2!}{(1+x)^3}$, $y^{(4)} = -\dfrac{3!}{(1+x)^4}$,

……

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geqslant 1,\ 0! = 1)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geqslant 1,\ 0! = 1)$$

由例5的结果

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,(n \geqslant 1,\ 0! = 1)$$

容易得到

$$[\ln(1-x)]^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\quad(n \geqslant 1,\ 0! = 1)$$

进一步还可得到

$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(a+x)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}.$$

二、高阶导数求导公式和法则

1. 常用高阶导数公式 建议记忆

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a\ (a>0)$　　$(e^{ax})^{(n)}=a^n e^x$　　$(e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\ x^{\mu-n}$

(5) $[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\ (n\geqslant1)$　$\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}.$

2. 高阶导数的运算法则

设函数$u=u(x)$, $v=v(x)$具有n阶导数, 则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$(C 是常数)

(3) $$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

简记为$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

莱布尼茨公式

3. 高阶导数求导举例

例6 设 $y=x^2e^{2x}$，求$y^{(20)}$.

解 设 $u=e^{2x}$，$v=x^2$.

$\because u^{(k)}=2^k e^{2x}\quad (k=1,2,\cdots,20)$

$v^{(k)}=0\quad (k=3,\cdots,20)$

代入莱布尼茨公式

$$y^{(20)}=(e^{2x})^{(20)}\cdot x^2+20(e^{2x})^{(19)}\cdot(x^2)'+\frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)}\cdot(x^2)''+0$$

$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

例7　求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数 y''.

解　方程两边对 x 求导, 得 $1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$.

$$\therefore\ y'=\frac{2}{2-\cos y}.$$

上式两端再对 x 求导, 得

$$\therefore\ y''=\frac{-2\sin y\cdot y'}{(2-\cos y)^2}=\frac{-2\sin y\cdot\dfrac{2}{2-\cos y}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

三、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系，称此为由参数方程所确定的函数.

例如: $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \xrightarrow{\text{消去参数}t} y = \dfrac{x^2}{4} \quad \therefore \; y' = \dfrac{1}{2}x$

摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 消参困难！

问题 消参困难或无法消参如何求导？

在方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$中,

① 设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$

② 再设函数$x=\varphi(t), y=\psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t)\neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

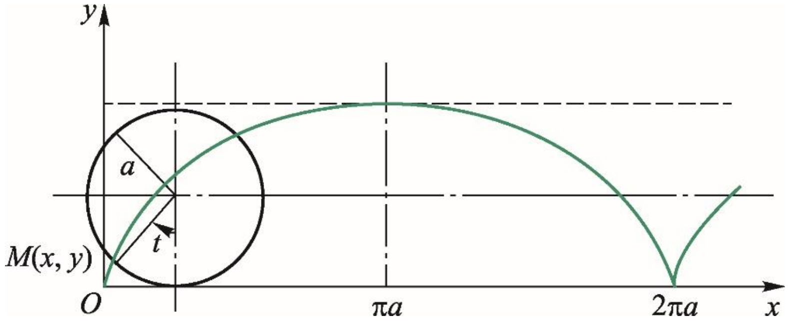
③ 若函数$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$二阶可导，且$\varphi'(t)\neq 0$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}}{\varphi'^3(t)}$$

例8　求摆线方程 $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\because \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{a \sin t}{a - a\cos t} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$



$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1-\cos t)^2} \cdot \frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$