第七节　定积分的应用

本章重点

核心思想

微元法

典型应用

几何与物理

第七节
目 录
CONTENTS

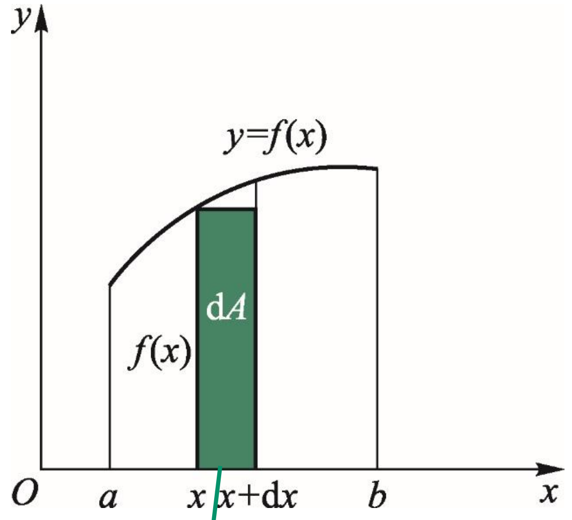
3.7.1 建立积分表达式的微分法(元素法)

一、问题的提出

二、微元法的条件和三步曲

一、问题的提出

回顾　曲边梯形求面积的问题



曲边梯形由连续曲线

$y = f(x)(f(x) \geq 0)$,

直线$x = a, x = b$

及x轴所围成.

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(1)分割　$[x, x + \Delta x]$　面积元素$\mathrm{d}A$

(2)以常代变　$\Delta A \approx \boxed{f(x)\mathrm{d}x}$

(3)求和　$A = \sum \Delta A$

(4)取极限　$A = \lim \sum f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

在工程技术中，有很多量的计算，都要用这种方法转化为定积分的计算.

例如: 平面图形的面积;体积;平面曲线的弧长;功;水压力;引力和平均值等.

因此对这种方法要进行研究和简化.

研究和简化的结果就产生了应用定积分解决问题的微元法.

二、微元法的条件和三步曲

1. 应用定积分解决问题的条件

(1)所求量U是与一个变量的变化区间$[a,b]$有关的量;

(2)所求量U对于区间$[a,b]$具有可加性,就是说,如果把区间$[a,b]$分成许多部分区间,则U相应地分成许多部分量,而U等于所有部分量之和.

(3)部分量ΔU_i的近似值可表示为$f(\xi_i)\Delta x_i$,就可以考虑用定积分来表达这个量U.

这种分析方法成为微元法(或微元分析法或元素法)

2. 微元法的三部曲

步骤1. 依据所求问题，选取适当的积分变量例如x，并确定其范围

$$x \in [a, b]$$

步骤2. 任取$x, x+\mathrm{d}x \in [a, b]$，考虑区间$[x, x+\mathrm{d}x]$上所求量$U$的表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\mathrm{d}x$$

称为U的微元表达式

步骤3. 以所求量U的微元为被积表达式，在区间$[a, b]$上作定积分

$$U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

得到所求量U的积分表达式

第二节 定积分的几何应用举例

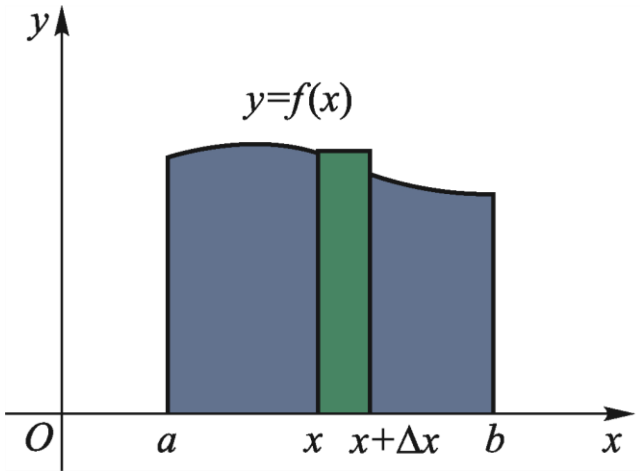
一、平面图形的面积

二、体 积

三、平面曲线的弧长

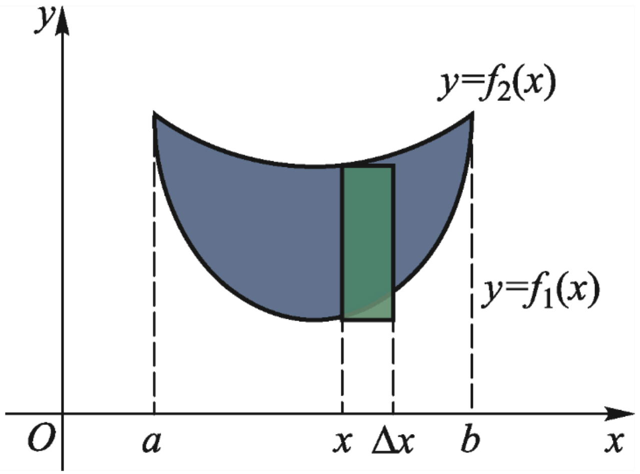
一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形



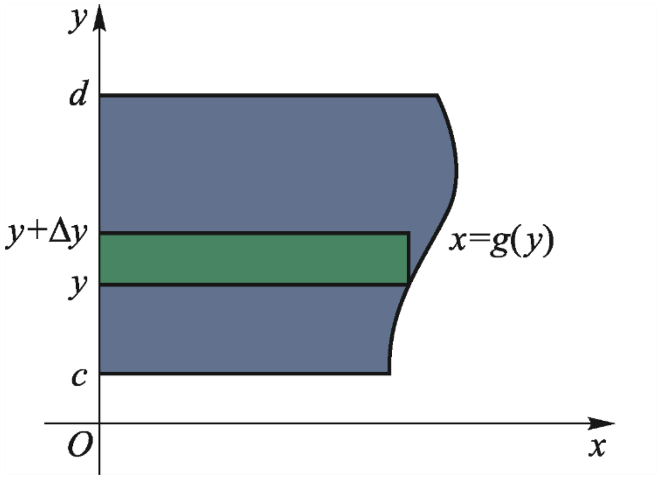
曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



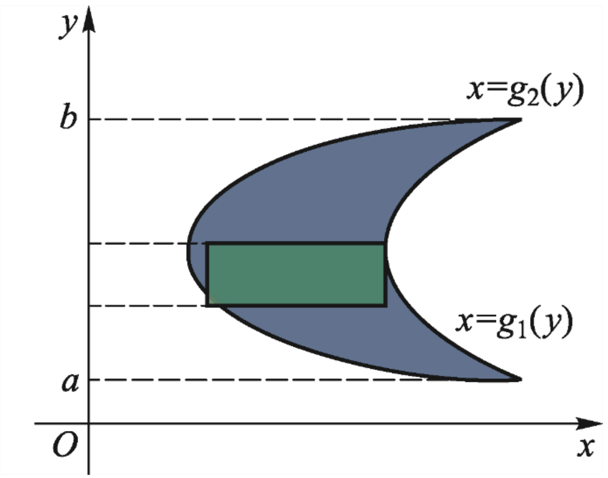
曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$



曲边梯形的面积

$$A=\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$$



曲边梯形的面积

$$A=\int_c^d [g_2(y)-g_1(y)]\mathrm{d}y$$

例1　计算两条抛物线$y^2=x, y=x^2$在第一象限所围图形的面积.

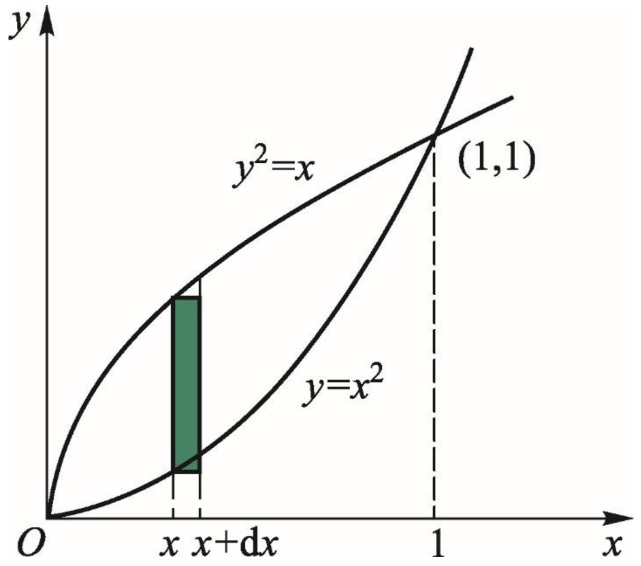
解　两曲线的交点(0,0)，(1,1)

选 x 为积分变量,则$x\in[0,1]$.

面积元素 $\mathrm{d}A=(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x$

$$\therefore A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}.$$



例2 计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围图形的面积.

解 两曲线的交点$(2,-2)$，$(8,4)$

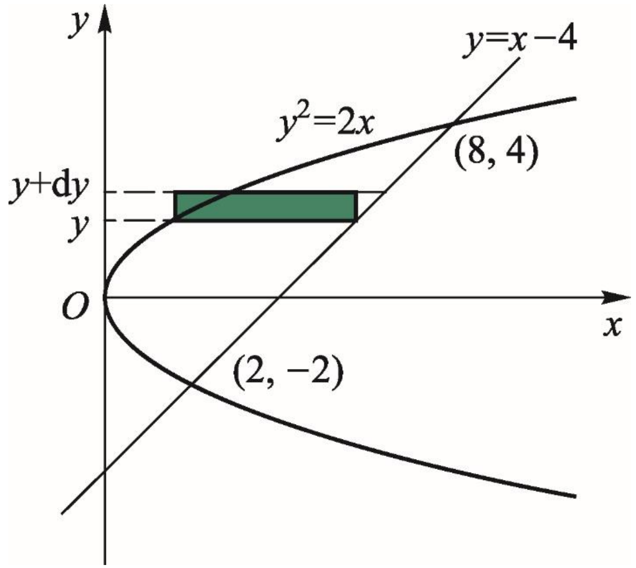
选取y作积分变量,

则$y\in[-2,4]$

面积元素 $\mathrm{d}A=(y+4-\frac{1}{2}y^2)\,\mathrm{d}y$

$$\therefore\ A=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{1}{2}y^2)\,\mathrm{d}y$$

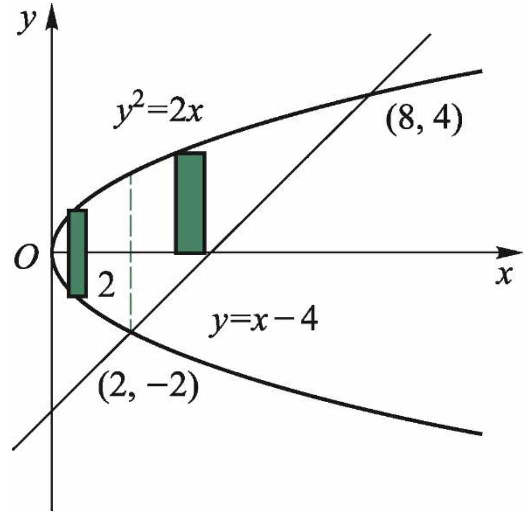
$$=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{4}=18.$$



课堂练习

计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围图形的面积.

在例2中,如果选取x为积分变量,则结果如何?



答案

当$x\in[0,2]$时,

面积元素 $\mathrm{d}A=(\sqrt{2x}-\sqrt{-2x})\,\mathrm{d}x$,

当$x\in[2,8]$时,

面积元素 $\mathrm{d}A=[\sqrt{2x}-(x-4)]\,\mathrm{d}x$.

$$\therefore\quad A=\int_0^2(\sqrt{2x}-\sqrt{-2x})\,\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\,\mathrm{d}x=\cdots$$

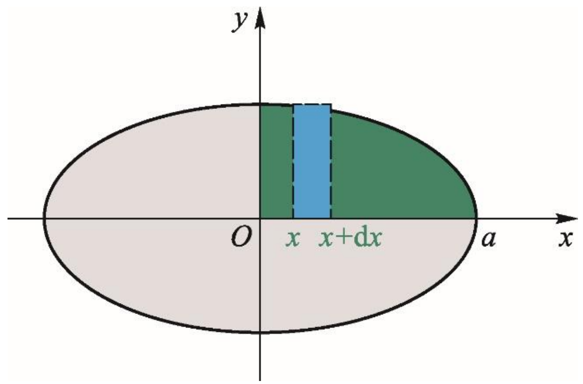
结论:积分变量选取恰当,可使计算简便

例3　求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围图形的面积.

解　利用对称性, 有$A=4A_1$ $\therefore A=4A_1=4\int_0^a y\mathrm{d}x$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$



应用定积分换元法得

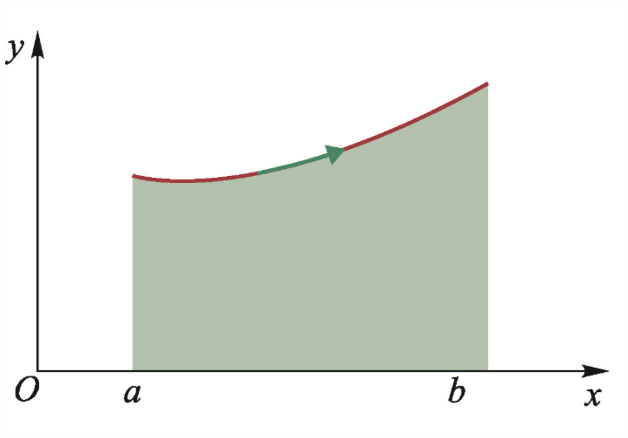
$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

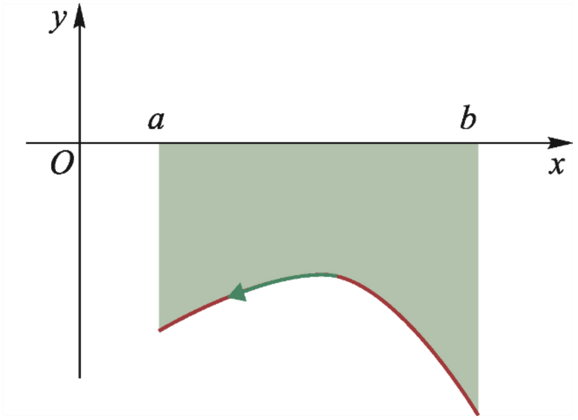
当$a=b$时得圆面积公式

一般地, 当曲边梯形的曲边由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 给出时,

按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1, t_2



(t_1 对应 $x = a$)



(t_1 对应 $x = b$)

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$

例4 求由摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$的一拱与x轴所围平面图形的面积.

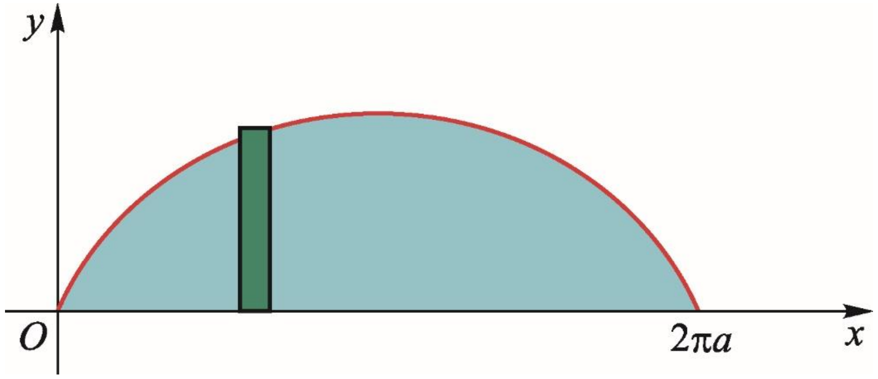
解

$$A = \int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\mathrm{d}[a(t-\sin t)]$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{令u=\frac{t}{2}}}\ 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\mathrm{d}u = 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u$$

$$= 16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2.$$



2. 极坐标情形

设$\varphi(\theta) \in C[\alpha,\beta]$, $\varphi(\theta) \geqslant 0$, 求由曲线$r = \varphi(\theta)$及射线 $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

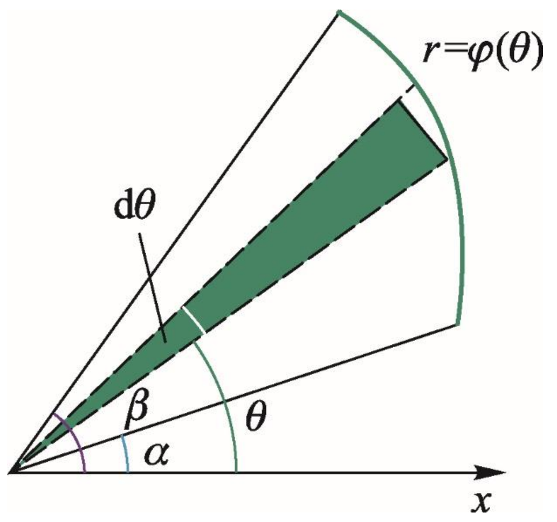
在区间 $[\alpha,\beta]$ 上任取小区间 $[\theta,\theta + \mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的

近似值为 $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$

所求曲边扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$



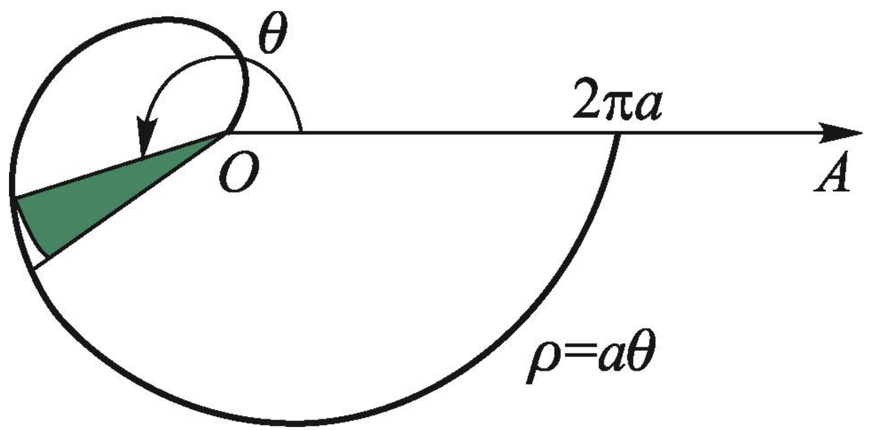
例5 计算阿基米德螺线$\rho = a\theta\ (a > 0)$上相应于θ从0变到2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

解

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$



例6　计算心形线$\rho = a(1+\cos\theta)(a>0)$所围图形的面积.

解

$$A = 2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\ \theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

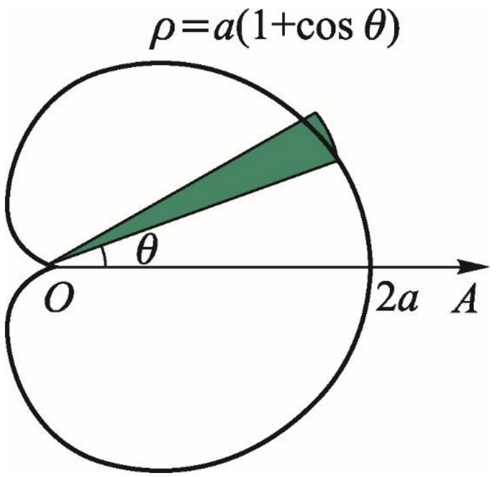
$$= a^2\int_0^{\pi}4\cos^4\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

令$t=\dfrac{\theta}{2}$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$$

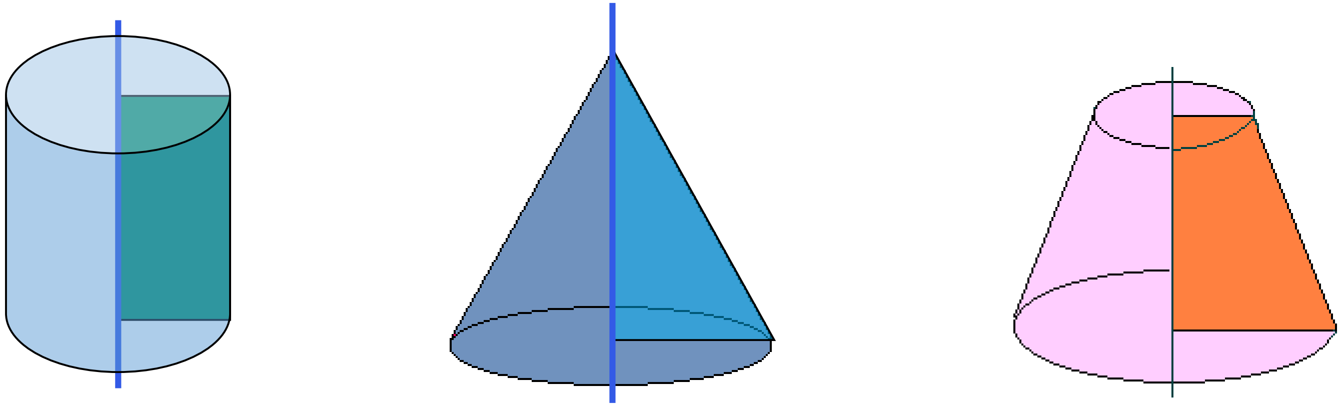
(利用对称性)



二、体积

1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体.这直线叫做旋转轴.



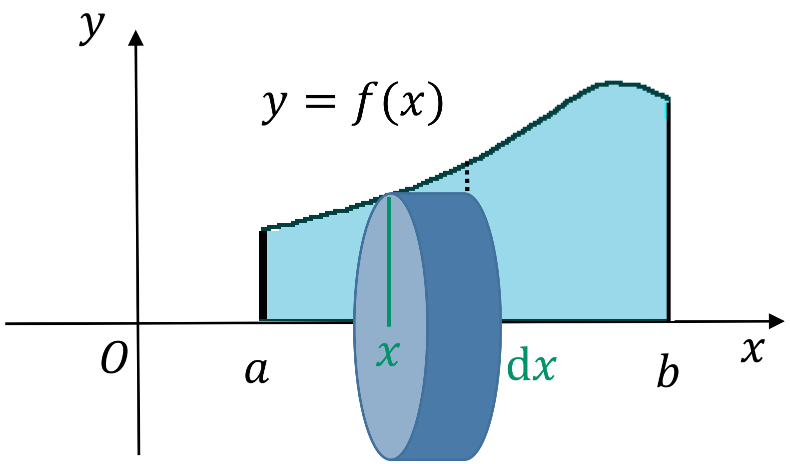
圆柱　　圆锥　　圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，那么它的体积为多少？

(1)取积分变量为x，则$x\in[a,b]$.

(2)在$[a,b]$上任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，取以$\mathrm{d}x$为底的窄边梯形绕x轴旋转而成的薄片的体积为体积元素，

$$\mathrm{d}V=\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$



(3)旋转体的体积为 $\boxed{V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x}$

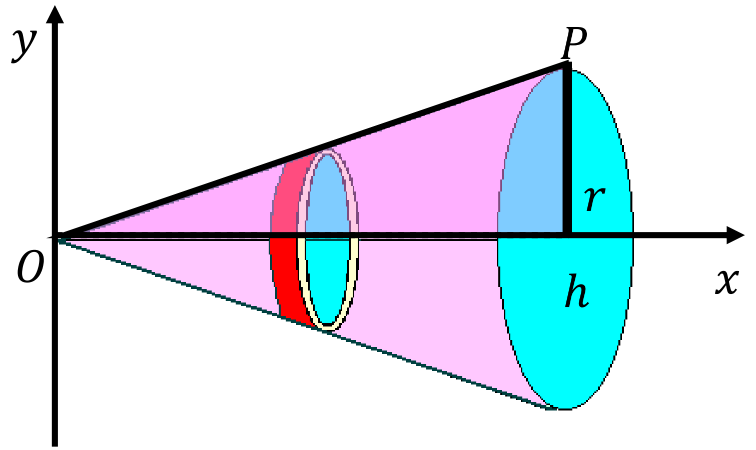
例7　连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形. 将它绕 x 轴旋转构成一个底半径为r,高为h的圆锥体.计算圆锥体的体积.

解　直线 OP 的方程为$y=\dfrac{r}{h}x$,

取x为积分变量,则

$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi h r^2}{3}.$$



思考: 如果旋转体是由连续曲线$x=g(y)$, 直线$y=c, y=d$及y轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的立体,体积为多少?

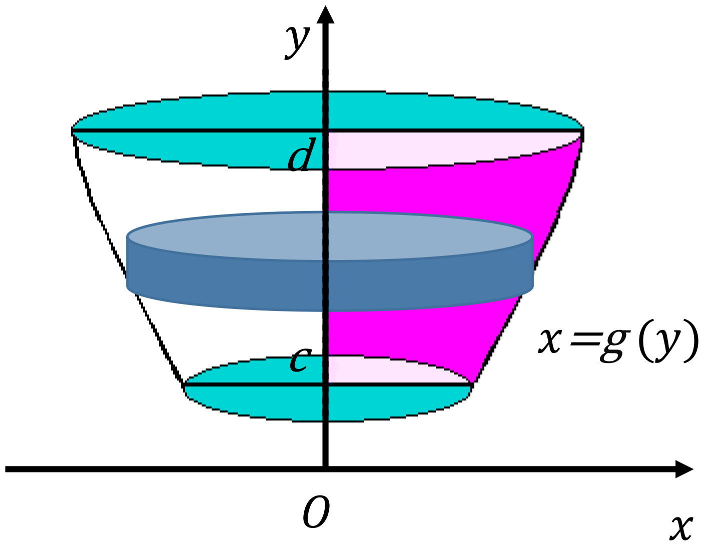
(1)取积分变量为y,则$y \in [c, d]$.

(2)在$[c, d]$上任取小区间$[y, y+\mathrm{d}y]$,

取以$\mathrm{d}y$为底的窄边梯形绕y轴旋转而成的薄片的体积为体积元素,

$$\mathrm{d}V = \pi[g(y)]^2\mathrm{d}y$$

(3)旋转体的体积为 $\boxed{V = \int_c^d \pi[g(y)]^2\mathrm{d}y}$



例8 计算由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围图形绕$y$轴旋转而成的椭球体的体积.

解 方法1 利用直角坐标方程

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\ (-b\leqslant x\leqslant b)$$

则 $V=2\int_0^b \pi x^2\,\mathrm{d}y=2\pi\dfrac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2-y^2)\,\mathrm{d}y$

$$=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left[b^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

(利用对称性)

方法2 利用椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则 $V = 2\int_0^b \pi x^2\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 b\cos^3 t\,\mathrm{d}t$

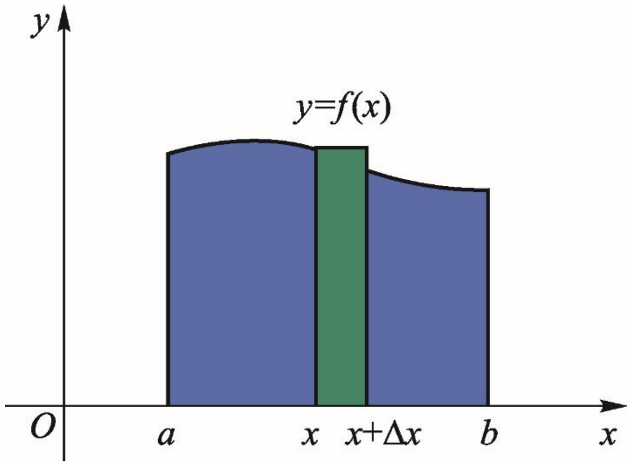
$$= 2\pi a^2 b\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

特别当$b = a$时,就得半径为a的球体的体积$\frac{4}{3}\pi a^3$.

例9　证明：由平面图形$0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)$绕$y$轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$



证明　(1)取积分变量为x，则$x \in [a, b]$，

(2)在$[a, b]$上任取小区间$[x, x + \mathrm{d}x]$.

$\because$ 以$\mathrm{d}x$为底的窄边梯形绕y轴旋转而成的薄片的体积为

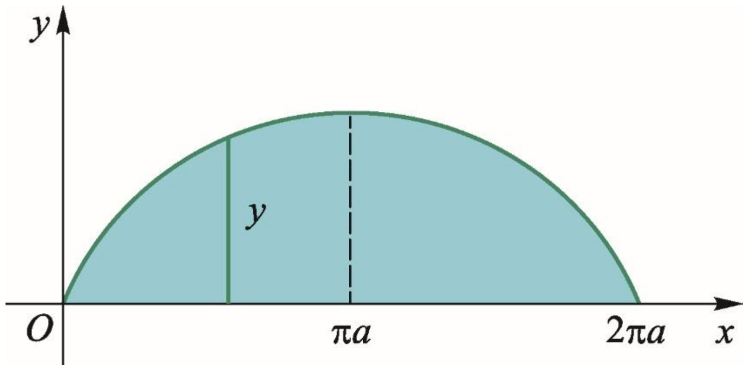
$$\Delta V = \pi(x + \Delta x)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) = 2\pi x f(x)\Delta x + (\Delta x)^2 f(x)$$

$$\therefore \mathrm{d}V = 2\pi x f(x) \mathrm{d}x$$

(3)旋转体的体积为 $\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x}$

例10　计算摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $(a > 0)$的一拱与$y = 0$所围成的图形分别绕x轴, y轴旋转而成的立体体积.

解　(1)绕x轴旋转而成的体积为



$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) \, dt$$

利用对称性

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} \, dt \left(令u = \frac{t}{2}\right)$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u du = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$

(2)绕y轴旋转而成的体积.

方法1. 选y为积分变量

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a > 0)$$

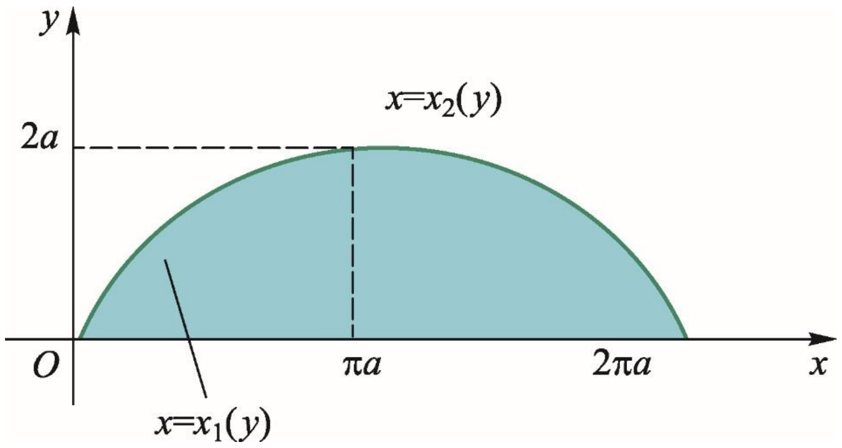
$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$$

注意上下限!

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$-\pi \int_0^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t$$



$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t^2 \sin t - 2t \sin^2 t + \sin^3 t)\,\mathrm{d}t \qquad (\text{令} u = t - \pi)$$

$$= -\pi a^3 \int_{-\pi}^{\pi} [-(\cancel{u^2} + 2\pi u + \cancel{\pi^2}) \sin u - 2(\cancel{u} + \pi) \sin^2 u - \cancel{\sin^3 u}\,]\mathrm{d}u$$

$$= 4\pi^2 a^3 (\underbrace{\int_0^{\pi} u \sin u \mathrm{d}u}_{\text{分部积分}} + \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 u \mathrm{d}u}_{\text{关于}\frac{\pi}{2}\text{对称}}) \quad (\text{利用“奇零偶倍”})$$

$$= 4\pi^2 a^3 (\pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\,\mathrm{d}u) = 4\pi^2 a^3 (\pi + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) = 6\pi^3 a^3$$

方法2. 选x为积分变量　　$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

利用上例的结果可得

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} x f(x) \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a(1 - \cos t) \mathrm{d}[a(t - \sin t)]$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 \mathrm{d}t = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin^4 \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{\text{令} u = \frac{t}{2}}}\ 16\pi a^3 \int_0^{\pi} (2u - \sin 2u) \sin^4 u \mathrm{d}u$$ (利用“奇零偶倍”)

$$\underline{\underline{\text{令} v = u - \frac{\pi}{2}}}\ 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2v + \pi + \sin 2v) \cos^4 v \mathrm{d}v = 6\pi^3 a^3$$

2. 平行截面面积为已知的立体的体积

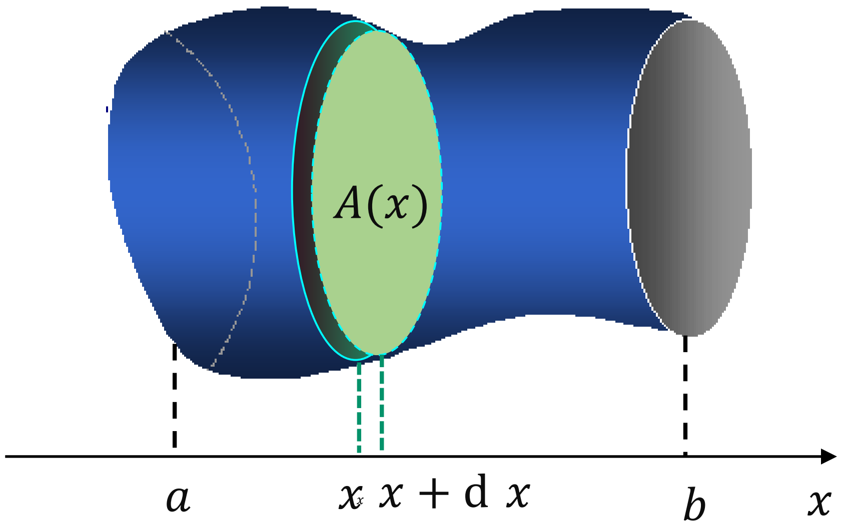
如果一个立体不是旋转体, 但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积, 那么, 这个立体的体积也可用定积分来计算.

设所给立体垂直于x轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



例11　一平面经过半径为R的圆柱体的底圆中心，并与底面交成α角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积．

解　取坐标系如图，则圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$

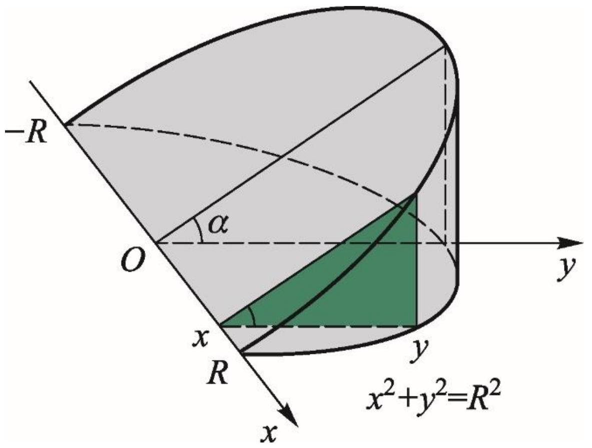
垂直于x轴的截面是直角三角形，

其面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\ (-R\leqslant x\leqslant R)$$

于是所求体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha\,.$$



思考

可否选择y作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

如何用定积分表示体积？

提示:

$$A(y)=2x\cdot y\tan\alpha$$

$$=2\tan\alpha\cdot y\sqrt{R^2-y^2}$$

$$V=2\tan\alpha\cdot\int_0^R y\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

例12 求以半径为R的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h的正劈锥体的体积.

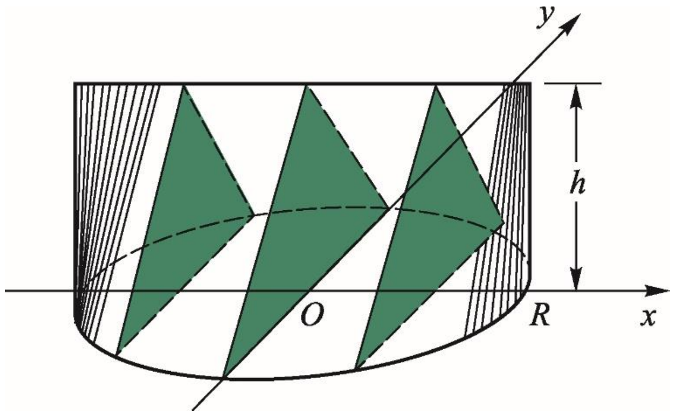
解 取坐标系如图,

则底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$.

垂直于 x 轴的截面为等腰三角形,

其面积为

$$A(x)=h\cdot y=h\sqrt{R^2-x^2}.$$



于是所求体积为

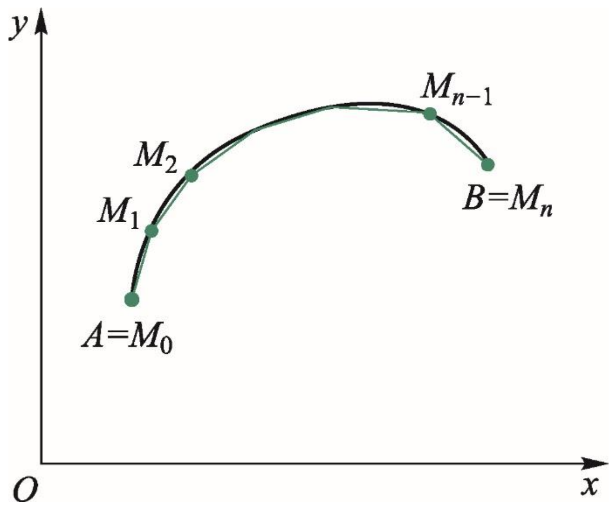
$$V=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

三、平面曲线的弧长

定义

若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda \to 0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|$$



并称此曲线弧为可求长的.

定理：任意光滑曲线弧都是可求长的.

(证明略)

(1)曲线弧由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

弧长元素(弧微分):

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(2) 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

令$x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$,则得

弧长元素(弧微分):

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

例13　求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 的弧长.

解　$\because\ \cos x\geqslant 0,\ \therefore\ -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4$$

例14 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 一拱 $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的弧长.

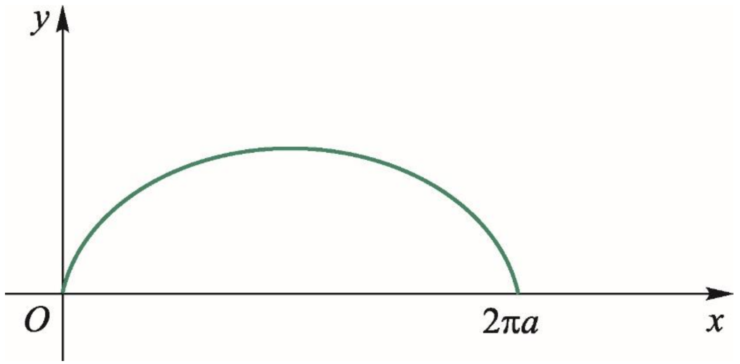
解

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$



$$\therefore s = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

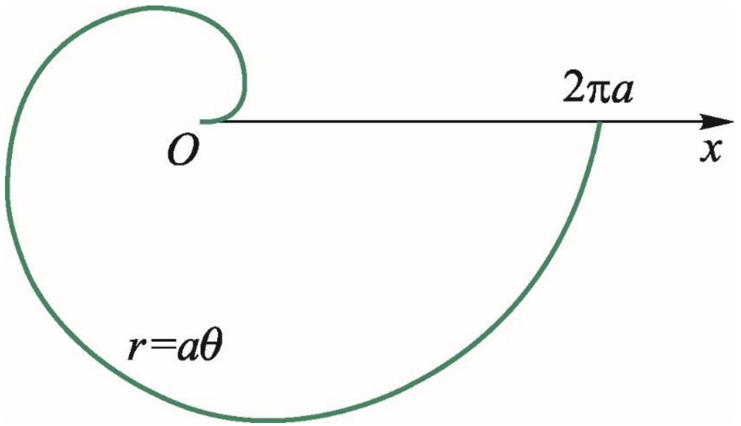
例15 求阿基米德螺线 $r = a\theta\ (a > 0)$ 相应于 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 一段的弧长.

解

$$ds = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$= \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,d\theta$$

$$= a\sqrt{1 + \theta^2}\,d\theta$$



$$\therefore s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + \theta^2}\,d\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$= a\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$$

第三节 定积分的物理应用举例

一、变力沿直线所作的功

二、水压力

三、引 力

四、转动惯量

一、变力沿直线所作的功

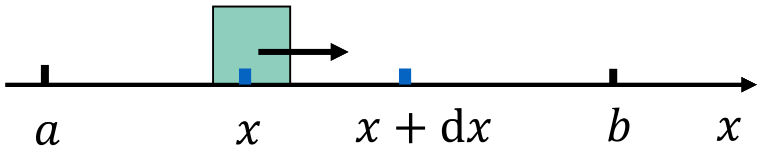
回顾： 常力沿直线所做的功 $W = F \cdot s.$

问题： 设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x = a$ 移动到 $x = b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功．

解决方法：微元法

在 $[a, b]$ 上任取子区间 $[x, x + \mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$$

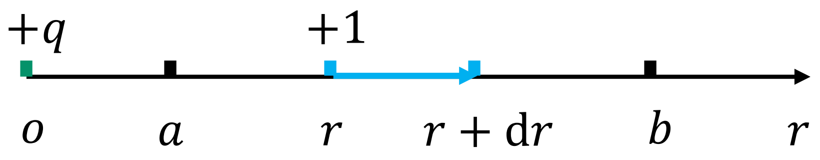


因此变力 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上所作的功为 $W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$

例1 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a<b)$，求电场力所作的功.

解 当单位正电荷距离原点 r 时，由库仑定律电场力为

$$F=k\frac{q}{r^2}$$



则功的元素为 $\mathrm{d}W=\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r$

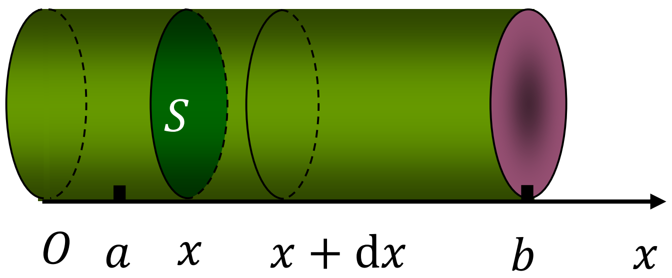
所求功为 $$W=\int_a^b\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

注 电场在 $r=a$ 处的电势为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{kq}{a}$

例2　在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体，由于气体的膨胀，把容器中的一个面积为S的活塞从点a处移动到点b处，求移动过程中气体压力所作的功 .

解　建立坐标系如图. 由物理学知压强

p与体积 V成反比，即 $p=\dfrac{k}{V}=\dfrac{k}{xS}$，故作用在活塞上的



力为　$F=p\cdot S=\dfrac{k}{x}$

功元素为　$\mathrm{d}W=F\,\mathrm{d}x=\dfrac{k}{x}\mathrm{d}x$

所求功为　$W=\displaystyle\int_a^b\frac{k}{x}\mathrm{d}x=k[\ln x]_a^b=k\ln\frac{b}{a}$

例3　一蓄满水的圆柱形水桶高为5m ,底圆半径为3m , 桶内盛满了水,试问要把桶中的水全部吸出需作多少功？（设水的密度为ρ)

解　建立坐标系如图. 取x为积分变量,则$x \in [0,3]$.

在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的

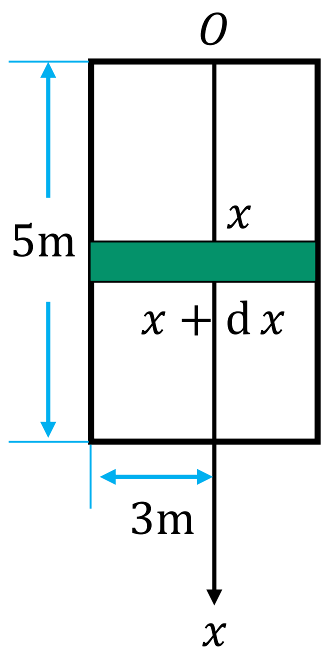
一薄层水的重力为 $g \cdot \rho \cdot \pi 3^2 \mathrm{d}x$ (kN)

这薄层水吸出桶外所作的功(功元素) 为

$$\mathrm{d}W = 9\pi g\rho x \mathrm{d}x$$

故所求功为

$$W = \int_0^5 9\pi g\rho x \mathrm{d}x = 9\pi g\rho \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5 = 112.5\pi g\rho \text{ (kJ)}$$



二、水压力

回顾:

液体的压强等于液体的比重乘以液体的深度，即 $p = \rho g \cdot h$

当平板与水面平行时,平板一侧所受的压力为 $P = pA$

问题:

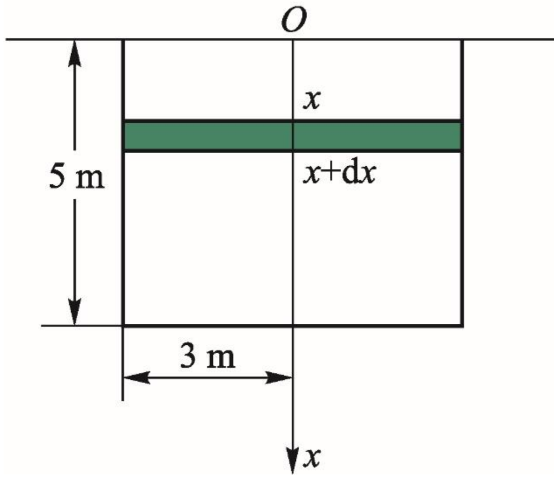
当平板铅直放置在水中时，求平板所受的压力（侧压力）.

解决方法:微元法

例4　一水平横放的半径为R的圆桶,内盛半桶密度为ρ的液体,求桶的一个端面所受的侧压力.

解　建立坐标系如图. 所讨论半圆的方程为

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant R)$$



利用对称性,侧压力元素

$$dP=2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

端面所受侧压力为

$$P=\int_0^R 2g\rho x\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{2g\rho}{3}R^3$$

注 当桶内充满液体时, 小窄条上的压强为 $g\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}P = 2g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

故端面所受侧压力为

$$P = \int_{-R}^{R} 2g\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

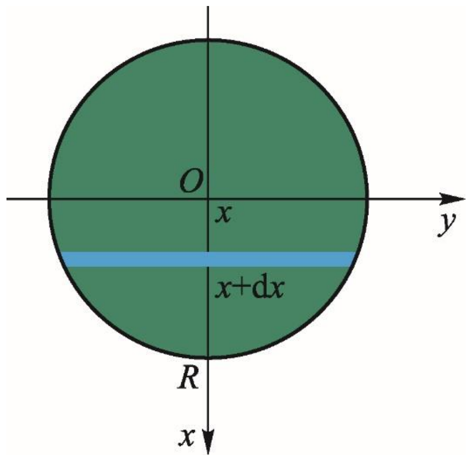
奇函数

$$= 4Rg\rho\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

定积分的几何意义

$$= 4Rg\rho\cdot\frac{1}{4}\pi R^2$$

$$= \pi g\rho R^3$$

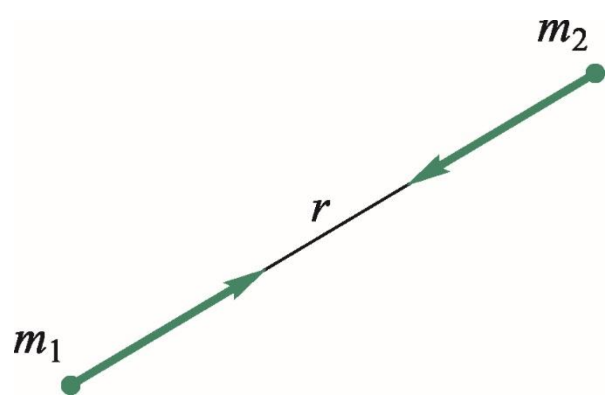


三、引力

回顾: 质量分别为m_1 ,m_2的质点,相距r.二者间的引力:

大小: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向: 沿两质点的连线



问题: 求物体对质点的引力.

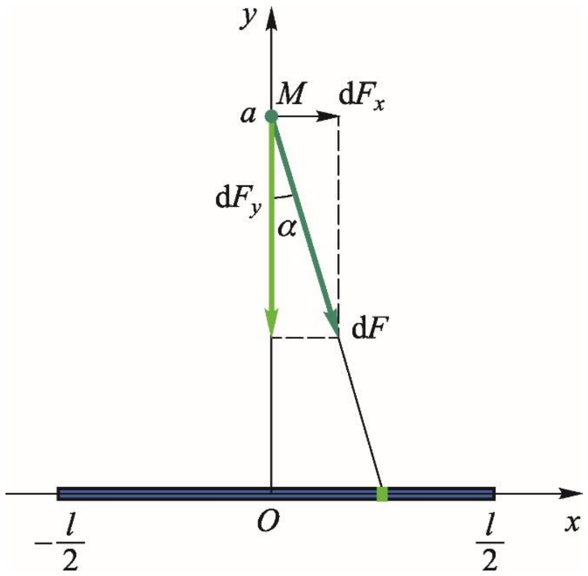
解决方法:微元法

例5 设有一长度为 l ,线密度为 μ 的均匀细直棒, 在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试计算该棒对质点的引力.

解 建立坐标系如图. 细棒上小段

$[x, x+\mathrm{d}x]$ 对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$



故垂直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cos\alpha$$

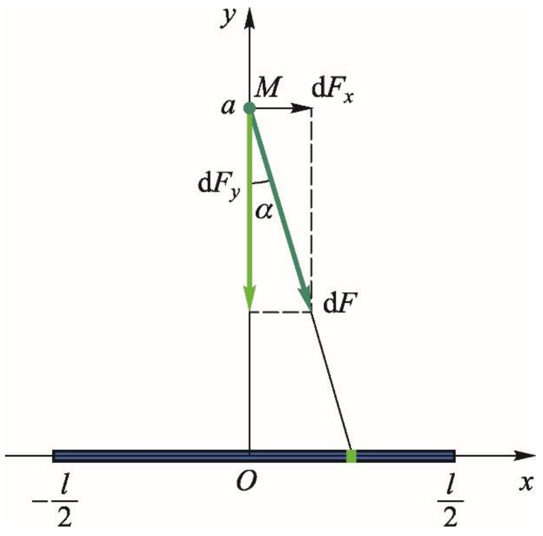
$$= -G\frac{m\mu\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -Gm\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的垂直分力为

$$F_y = -2Gm\mu a \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -Gm\mu a \left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= -\frac{2Gm\mu l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$



利用对称性

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0$.

故棒对质点的引力大小为 $F = \dfrac{2Gm\mu l}{a}\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

注 （1） 当细棒很长时，可视 l 为无穷大，

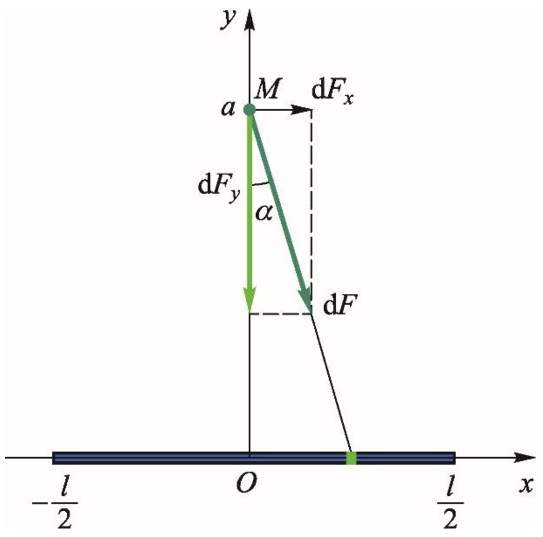
此时引力大小为 $\dfrac{2Gm\mu}{a}$

方向与细棒垂直且指向细棒.

（2） 若考虑质点克服引力沿 y轴从 a 处移到 $b\,(a<b)$ 处时克服引力作的功，则有

$$\mathrm{d}W=-\frac{2Gm\mu l}{y}\frac{1}{\sqrt{4y^2+l^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$W=-2Gm\mu l\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2+l^2}}$$



（3）当质点位于棒的左端点垂线上时,

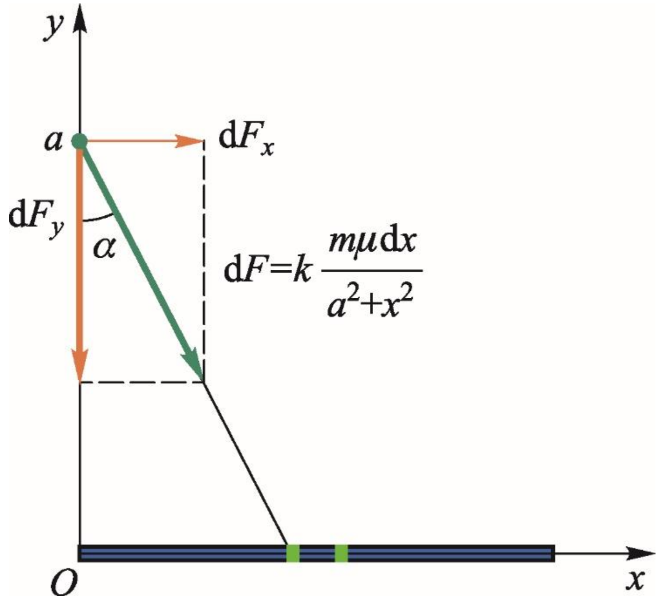
$$dF_y = -dF\cdot\cos\alpha = -Gm\mu a\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

注意正负号

$$dF_x = dF\cdot\sin\alpha = Gm\mu\frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\quad F_y = -Gm\mu a\int_0^l\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$F_x = Gm\mu\int_0^l\frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$



引力大小为 $F=\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}}$