3.4　空间直线

一、点向式方程

二、参数式方程

三、一般式方程

四、直线与直线的位置关系

五、直线与平面的位置关系

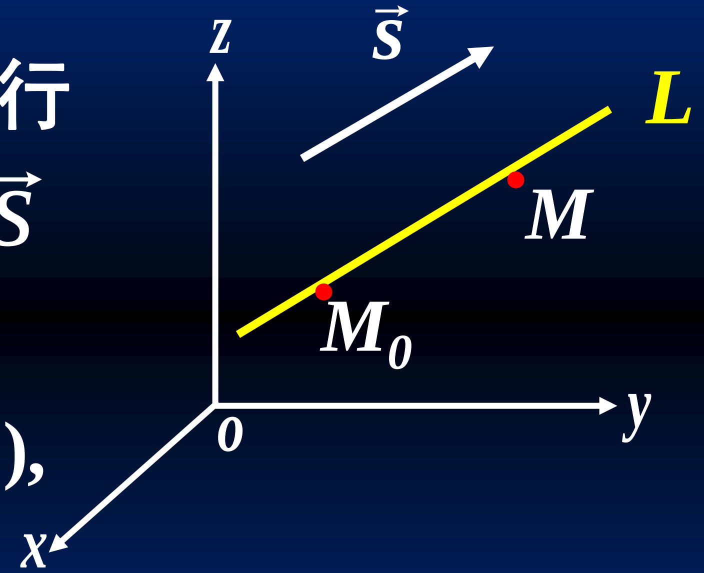
返回

3.4 空间直线

一、点向式方程

方向向量的定义：

如果一非零向量 $\vec{s}$ 平行于一条已知直线L，向量 $\vec{s}$ 称为直线L的**方向向量**.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\quad M(x, y, z)$,

$\forall\ M \in L$, $\quad \overrightarrow{M_0M} // \vec{s}$

$\vec{s} = (m, n, p)$, $\quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

返回

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的点向式方程

直线的一组**方向数**

返回

例1 求过空间两点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$的直线方程.

解 $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

例2 $$l: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{0} = z - 1.$$

说明:

(1) $\vec{s} = (2, 0, 1)$,

(2) $y - 2 = 0$, 即，l 在平面 $y=2$上.

例 3 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=$（2，0，4）

所求直线方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}$.

二、参数式方程

设直线 l 的方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

上式称为直线l 的参数方程，t 称为参数，不同的 t 对应于直线l 上不同的点.

例 4 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解 先作一过点M且与已知直线垂直的平面Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

返回

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\ \frac{6}{7},\ -\frac{24}{7}),$$

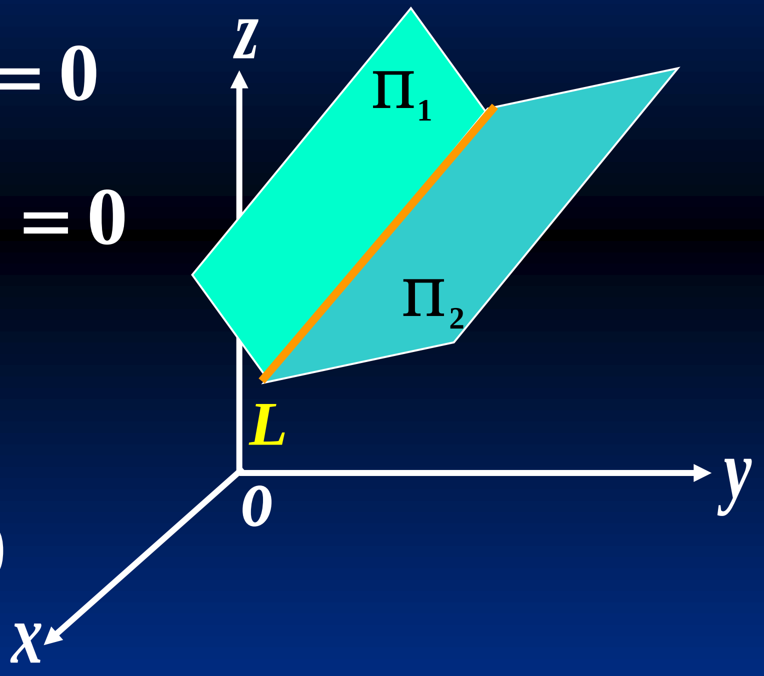
所求直线方程为 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

三、一般式方程

空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

空间直线的一般式方程

例5　用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解一　在直线上任取一点$M_0\,(x_0,y_0,z_0)$

取 $x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$

解得 $y_0=0,\quad z_0=-2$

M_0点的坐标 $(1,0,-2)$,

返回

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3),$$

点向式方程 $$\frac{x-1}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{-3},$$

参数方程 $$\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}.$$

返回

解二 由解法一已得直线上点M_0的坐标(1, 0, -2),

取 x_1 =0, 则

$$\begin{cases} y_1 + z_1 + 1 = 0 \\ -y_1 + 3z_1 + 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $y_1 = \frac{1}{4}, z_1 = -\frac{5}{4}$,得点$M_1$的坐标$(0, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}),$$

取直线的方向向量为$\vec{s}$ =(4, -1, -3),

得直线方程为 $$\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3},$$

返回

解三 由直线方程 $\begin{cases} x+y+z+1=0 & (1) \\ 2x-y+3z+4=0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2): $3x + 4z + 5 = 0 \Longrightarrow z = \dfrac{-3x-5}{4}$,

(1)×2-(2): $3y - z - 2 = 0 \Longrightarrow z = 3y - 2$

$$\frac{-3x-5}{4} = \frac{3y-2}{1} = \frac{z}{1}, \text{即} \ \frac{x+\frac{5}{3}}{4} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-1} = \frac{z}{-3}. \qquad (3)$$

方程(3)的方向向量(-4,1,3)与(4,-1,-3)平行，且点 $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ 在解法一、二所确定的直线上，故方程(3)与解法一、二所得的方程表示的为同一直线.

返回

解四（用高斯消元法——行初等变换）

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x=1-4y \\ z=-2+3y \end{cases}$$

参数式: $\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

点向式: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

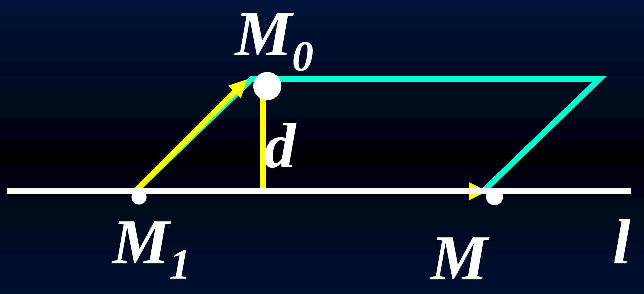
例6 确定直线l外一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到l的距离，

直线l的方程为 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$.

解：设$M_1(x_1, y_1, z_1)$是直线l上任意一确定的点，

M是l上另一点，且

$\overrightarrow{M_1M}=\vec{s}=(m, n, p)$,



如图所示平行四边形面积

$$S=\|\overrightarrow{M_1M_0}\times\overrightarrow{M_1M}\|=\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\|=d\,\|\vec{s}\|$$

$$d=\frac{\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|}.$$

返回

例7 求点$M_0(1,2,1)$到直线

$$l:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$

的距离.

解 取 $z=0$, 得 $x=1$, $y=-1$, $M_1(1,-1,0)\in l$.

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(0,3,1).$$

$$d=\frac{\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|}=\cdots=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

四、直线与直线的位置关系

1. 两直线的夹角

两直线L_1与L_2的方向向量 $\vec{s}_1$与$\vec{s}_2$的夹角称为L_1与L_2的夹角，记为$< L_1, L_2 >$.

直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$,

直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$,

$$\cos(L_1, L_2)=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}+p_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}+p_2^{\ 2}}}$$

由此公式可计算两条直线的夹角.

返回

2. 两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0,$

(2) $L_1 /\!/ \ L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2},$

参看书本P114

例 8 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

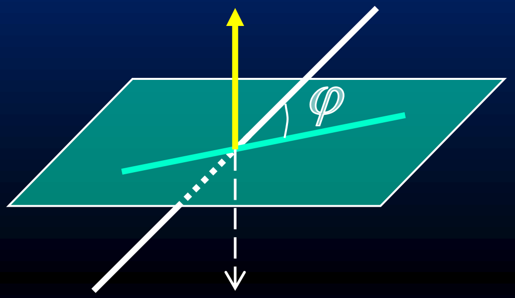
取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

五、直线与平面的位置关系

1、直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.



$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{s} = (m, n, p),$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = (A, B, C),$$

$$<\vec{s}, \vec{n}> = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad <\vec{s}, \vec{n}> = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

返回

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

2. 直线与平面的位置关系： 参看书本P116

(1) $L \perp \Pi \iff \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}.$

(2) $L // \Pi \iff Am+Bn+Cp=0.$

例 9 设直线$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=(1,-1,2)$, $\vec{s}=(2,-1,2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

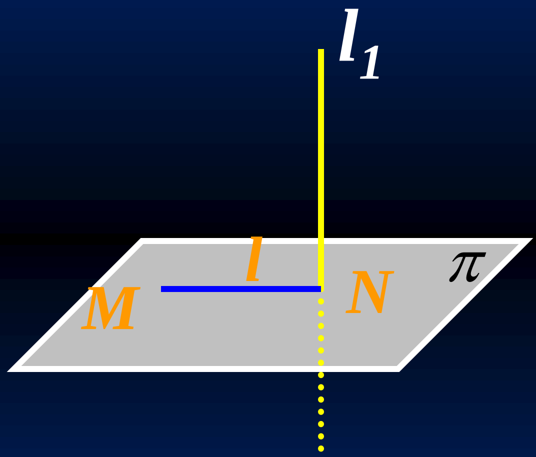
$$=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore\quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

例10 直线l 过点$M(2,5,-2)$且与直线

$$l_1:\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z \quad =0 \end{cases}$$

垂直相交，求l 的方程.



解 只需求出交点N的坐标即可.

过M作平面π 与l_1 垂直，

π 与l_1的交点即N.

$$l_1 \text{ 的方向向量 } \vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}.$$

过$M(2,5,-2)$且与l垂直的平面

π: $-9(x-2)+5(y-5)+7(z+2)=0.$

$$9x-5y-7z-7=0.$$

将直线l_1与π的方程联立：

$$\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \\ 9x-y-7z-7=0 \end{cases}$$

解得：$x=1,\ y=-1,\ z=1.$

这就是l_1与π的交点N的坐标$(1,-1,1)$.

直线l的方向向量

$$\vec{s} = \overrightarrow{MN} = (-1, -6, 3).$$

l的方程

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+2}{3}.$$

返回

3. 平面束

设直线l的方程是

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$$

除方程(2)所表示的平面外，经过直线l的所有平面都可由下式表示：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (3)$$

经过直线l的平面全体称为过l的**平面束**.

方程(3)称为过直线l的**平面束方程**.

例11 求直线

$$l: \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

在平面

$$\pi: \ 2x + 2y + z - 11 = 0$$

上的投影直线.

解 过直线l作一平面π'与π垂直，则

π'与π的交线l'就是l在π上的投影.

返回

将l的方程改写为一般式

$$\begin{cases} x+4y-24=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}$$

过l的平面束方程为

$$x + 4y - 24 + \lambda(3y + z - 17) = 0$$

即

$$x + (4 + 3\lambda)y + \lambda z - (24 + 17\lambda) = 0$$

其法向量为

$$\vec{n}' = (1, 4 + 3\lambda, \lambda),$$

由π’⊥π 可得

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=2\cdot 1+2(4+3\lambda)+1\cdot\lambda=7\lambda+10=0$$

$$\lambda=-\frac{10}{7},$$

π’的方程为

$$x+(4-\frac{30}{7})y-\frac{10}{7}z-(24-\frac{170}{7})=0,$$

即

$$7x-2y-10z+2=0$$

直线l 在π 上的投影为

$$l':\begin{cases}7x-2y-10z+2=0\\ 2x+2y+z-11=0\end{cases}$$

例12 判定$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$与$\pi: x+4y-z-1=0$的位置关系. 若相交，则求出交点与夹角.

解 $\vec{s}=(1,-2,2)$, $\quad \vec{n}=(1,4,-1)$,

$\vec{s}\cdot\vec{n}=-9\neq 0$, 所以$l$与$\pi$相交.

$$l:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \\ z=2t \end{cases}.$$ 代入π, 得 $t=-\dfrac{8}{9}$

所以l与π交点 $\left(\dfrac{1}{9},-\dfrac{2}{9},-\dfrac{16}{9}\right)$

$$\therefore \varphi=\arcsin\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{n}\|\|\vec{s}\|}=\arcsin\frac{|1-8-2|}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$