高等数学A(上)

第四节 可降阶的高阶微分方程

一、$y^{(n)} = f(x)$型

二、$y'' = f(x, y')$型

三、$y'' = f(y, y')$型

一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程

特点: 方程 $y^{(n)}=f(x)$右端仅含自变量x.

解法: 方程两端积分,得 $\int y^{(n)}\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x$

即 $y^{(n-1)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1$

同理可得 $y^{(n-2)}=\int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x+C_1\right]\mathrm{d}x+C_2$

$$=\int\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+C_1x+C_2$$

依次通过n次积分,可得含n个任意常数的通解.

例1 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解

$$y'' = \int (e^{2x} - \cos x)\,dx + C_1'$$

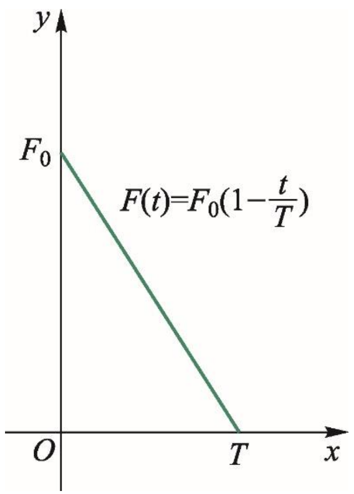
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1'x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

(此处 $C_1 = \frac{1}{2}C_1'$)

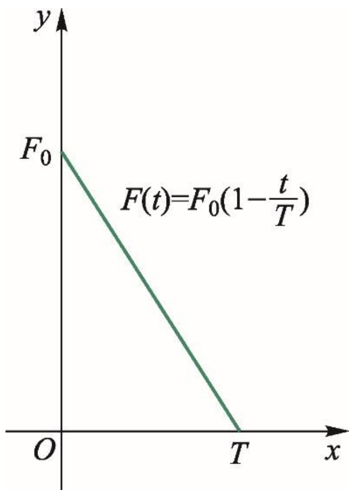
例2 质量为 m 的质点受力F的作用沿 Ox 轴作直线运动, 设力 F仅是时间 t 的函数: $F = F(t)$.在开始时刻 $t=0$ 时 $F(0)=F_0$, 随着时间的增大, 此力 F 均匀地减小, 直到 $t = T$ 时 $F(T) = 0$. 如果开始时质点在原点, 且初速度为0, 求质点的运动规律.



解 设运动规律为 $x = x(t)$.

根据牛顿第二定律, 可得初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{F_0}{m}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right), \\ x|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$



对方程两边积分, 得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right) + C_1.$$

利用初值条件 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ 得C_1=0, 于是

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right).$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)$$

上述方程两边积分, 得

$$x=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T}\right)+C_2\ .$$

由初始条件 $x|_{t=0}=0$ 得 $C_2=0$，于是所求运动规律为

$$x=\frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6T}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant T\ .$$

二、$y'' = f(x, y')$型的微分方程

特点: 方程 $y'' = f(x, y')$右端不显含未知函数y.

解法: 设 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p'$,

故方程化为 $p' = f(x, p)$.

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$,

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$,

再一次积分，得原方程的通解 $y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$.

例3 求微分方程$(1+x^2)y''=2xy'$满足初值条件

$y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=3$ 的特解.

解 令$y'=p$, 则$y''=p'$，原方程变形为

$$(1+x^2)p'=2xp, \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{1+x^2}p,$$

分离变量, 得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$

两边积分, 得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+C, \Longrightarrow p=y'=C_1(1+x^2)$.

上式再两边积分, 得 $y=C_1\left(x+\dfrac{1}{3}x^3\right)+C_2.$

由初值条件可求得特解为 $y=x^3+3x+1.$

三、$y'' = f(y, y')$型的微分方程

特点: 方程 $y'' = f(y, y')$右端不显含自变量x.

解法: 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得 $y' = \varphi(y, C_1)$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例5 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解 设 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, $\Longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$.

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, $\Longrightarrow$ $p = C_1 y$,

$\therefore \quad y' = C_1 y$ （一阶线性齐次方程）

故所求通解为 $y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$

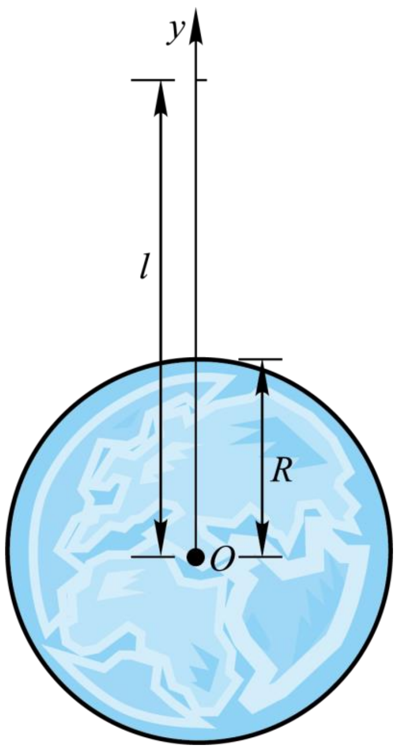
例6 一个离地面很高的物体, 受地球引力的作用由静止开始落向地面, 求它落到地面时的速度和所需时间(不计空气阻力).

解 建立如图所示的坐标系. 则有

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{GmM}{y^2}, \\ y|_{t=0} = l, \ \ y'|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

M: 地球质量

m : 物体质量



设 $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$.

代入方程得 $v\mathrm{d}v = -\dfrac{GM}{y^2}\mathrm{d}y$, 积分得 $v^2 = \dfrac{2GM}{y} + C_1$.

由条件　$v|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0,\ y|_{t=0} = l,$　　解得 $C_1 = -\dfrac{2GM}{l}.$

于是　　$v^2 = 2GM\left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{l}\right],$ ➡ $v = -\sqrt{\dfrac{2GM}{l}}\sqrt{\dfrac{l-y}{y}}.$

$$\because\ \ v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \therefore\ \ \mathrm{d}t = -\sqrt{\frac{l}{2GM}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}\,\mathrm{d}y.$$

两端积分得　$t = \sqrt{\dfrac{l}{2GM}}\left[\sqrt{ly-y^2} + l\arccos\sqrt{\dfrac{y}{l}}\right] + C_2.$

由 $y|_{t=0} = l,$ 得 $C_2 = 0$, 因此有

$$t = \sqrt{\frac{l}{2GM}}\left[\sqrt{ly-y^2} + l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right].$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{GmM}{y^2},\ v=-\sqrt{\frac{2GM}{l}}\sqrt{\frac{l-y}{y}}$$

$$t=\sqrt{\frac{l}{2GM}}\left[\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right]$$

由于 $y=R$ 时 $y''=-g$，由原方程可得 $k=\dfrac{gR^2}{M}$，

因此落到地面$(y=R)$时的速度和所需时间分别为

$$v\big|_{y=R}=-\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}},$$

$$t\big|_{y=R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left[\sqrt{lR-R^2}+l\arccos\sqrt{\frac{R}{l}}\right].$$