§5.1 特征值与特征向量总结

一、特征值与特征向量的定义

二、特征值和特征向量的求法

三、特征值和特征向量的性质

1 特征值与特征向量的定义

总　结

·summary·

1 $Ax=\lambda x=\lambda Ex$，（$x\neq O$）

⟺ 非零向量 x 满足 $(A-\lambda E)x=O$

⟺ 齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=O$ 有非零解

⟺ 系数行列式 $|A-\lambda E|=0$ —— 特征方程

2 特征值 λ 是特征向量经过变换后长度伸缩的倍数.

特征向量 x 就是变换中不变的向量.

1 特征值与特征向量的计算

总　结

·summary·

1 特征值和特征向量的定义

$$Ax = \lambda x = \lambda E x \ (x \neq O)$$

$\Longleftrightarrow$ 方程组 $(A-\lambda E)\,x = O$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ $|A-\lambda E| = 0$

2 特征值和特征向量的计算

① 由特征方程 $|A-\lambda E| = 0$，得所有特征值；

② 解线性方程组 $(A-\lambda E)\,x = O$，得所有非零解，即特征向量.

3 定理：三角矩阵的特征值就是其主对角线上的元素.

1 特征值与特征向量的性质

总　结

·summary·

1 **性质1**　在复数范围内 n 阶方阵 A 有 n 个特征值.

2 **性质2**　设 n 阶方阵 A 的特征值为 λ_1, λ_2, …, λ_n, 则

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$$

$$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=|A|$$

3 **性质3**　n 阶方阵 A 和 A^T 有相同的特征多项式和特征值.

1 特征值与特征向量的性质

总　结

·summary·

4 性质4　设 λ 是方阵 A 的特征值，则

(1) $a+\lambda$ 是 $aE+A$ 的特征值；

(2) $k\lambda$ 是 kA 的特征值；

(3) λ^m 是 A^m 的特征值；

(4) 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值；

(5) 当 A 可逆时，$|A|/\lambda$ 是 A^* 的特征值；

(6) $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_m\lambda^m$

是 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\ldots+a_mA^m$ 的特征值 .

1 特征值与特征向量的性质

总　结

·summary·

1 性质5：设 p_1，p_2 都是方阵 A 的对应于特征值 λ 的特征向量，则非零线性组合 $k_1p_1+k_2p_2$ 也是对应于 λ 的特征向量.（k_1，k_2 不同时为零）

2 定理：A 的 属于不同特征值的特征向量是线性无关的 .

1 特征值与特征向量的性质

总　结

·summary·

1 定 理：设 λ 是方阵 A 的一个 k 重特征值，
对应于 λ 的线性无关的特征向量的最大个数为 l，则 $l \le k$.
即 特征值的几何维数不超过代数重数.

2 推论1：设 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，
则 A 有 n 个线性无关的特征向量.

3 推论2： n 阶方阵 A 至多有 n 个线性无关的特征向量.

§5.2 矩阵的相似对角化总结

一、相似矩阵概念与性质

二、矩阵的相似对角化

1 相似矩阵的概念与性质

总　结

·summary·

1 方阵 A 和 B 相似，则存在可逆阵 P ，使得$P^{-1}AP = B$.

2 方阵 A 和 B 相似，则

(1) $|A| = |B|$ ；

(2) $R(A) = R(B)$ ；

(3) A 和 B 具有相同的特征多项式和特征值；

(4) $tr(A) = tr(B)$.

3 方阵 A 和 B 相似，

则 A^k 和 B^k 相似，$\varphi(A)$ 和 $\varphi(B)$ 相似 .

4 方阵 A 与对角阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$相似，

则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是 A 的 n 个特征值 .

2 矩阵相似对角化

总　结

·summary·

1 定理：n 阶方阵 A 可对角化 $\Longleftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

2 推论：如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化.

3 推论：n 阶方阵 A 可对角化

$\Longleftrightarrow$ A 的每一个的 k 重特征值 λ，对应 k 个线性无关的特征向量 .

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A-\lambda E$ 的秩等于 $n-k$.

2 矩阵相似对角化

总　结

·summary·

1 方阵 A 对角化的步骤：

1. 求出所有的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$（按重数计算）；

2. 对每个特征值 λ_i，求方程组 $(A-\lambda_i E)x=O$ 的基础解系；

3. 若 A 有 n 个线性无关的特征向量，则可构成可逆阵 P，

令 $$P=(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

有 $$P^{-1}AP=\Lambda\ .$$

2 注：Λ 中对角元与 P 的列向量的排列次序相对应.

3 正交矩阵

总 结

·summary·

1 向量的内积 —— 对称性、线性性质、施瓦兹不等式

$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = x^T y$$

2 向量的长度——非负性、齐次性、三角不等式

$$\|x\| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$$

3 向量的夹角 $\theta = \arccos \dfrac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0, \pi]$

4 向量的正交性 $[x, y] = 0$ 或 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

总 结

·summary·

1 正交向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ —— 两两正交的非零向量组

—— 必线性无关

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [a_i, a_j] = 0, i \neq j \\ [a_i, a_i] > 0, i = 1, \ldots, r \end{cases}$$

2 标准正交向量组 $e_1, e_2, \ldots, e_r$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [e_i, e_j] = 0, i \neq j \\ [e_i, e_i] = 1, i = 1, \ldots, r \end{cases}$$

3 正交矩阵

总　结

·summary·

1 求标准正交基的方法

（1）正交化——施密特正交化

（2）单位化

2 基 $\xrightarrow{\text{正交化}}$ 正交基 $\xrightarrow{\text{单位化}}$ 标准正交基

3 正交矩阵

总　结

·summary·

1 方阵 A 为正交阵

$\Leftrightarrow$ $A^TA=E$

$\Leftrightarrow$ $A^{-1}=A^T$

$\Leftrightarrow$ A 的列向量组为标准正交向量组．

$\Leftrightarrow$ A 的行向量组为标准正交向量组．

2 正交变换

线性变换 $y=Px$，P 是正交阵 —— 保持长度不变.

4 实对称矩阵的相似对角化

总　结

·summary·

1 定理：实对称阵 A 的不同特征值对应的特征向量正交．

2 定理：设 A 为 n 阶实对称阵，则必有正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$$

3 推论：实对称阵 A 一定可对角化．

4 推论：实对称阵 A 的 k 重特征根 λ，

一定有 k 个线性无关的特征向量与其对应，

且 $R(A-\lambda E) = n-k$．

4 实对称矩阵的相似对角化

总　结

·summary·

5 实对称阵 A 对角化的步骤为：

1. 求出所有的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_s，重根按重数计算；

2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求方程组 $(A-\lambda_i E)x=O$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量．
把这 k_i 个线性无关的特征向量正交化、单位化；

3. 由这 n 个两两正交的单位特征向量构造正交阵 P，有

$$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda \ .$$

4 实对称矩阵的相似对角化

总　结

·summary·

1 定理：实对称阵 A 的不同特征值对应的特征向量正交．

2 推论：实对称阵 A 一定可对角化．

3 实对称矩阵 A 对角化的步骤：

1. 求出所有的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$（按重数计算）；

2. 对每个特征值 λ_i，求方程组 $(A-\lambda_i E)x = O$ 的基础解系；

3. 若 A 有 n 个线性无关的特征向量，则可构成可逆阵 P，

令 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

有 $P^{-1}AP = \Lambda$．

4 实对称矩阵的相似对角化

实对称矩阵A必可对角化, 即A与对角矩阵 Λ相似.

即存在可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP=\Lambda$.

$$A=P\Lambda P^{-1}$$

$$A^n=P\Lambda^n P^{-1}$$

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$$

实对称矩阵A的不同特征值对应的特征向量正交.

感谢聆听