新时代大学数学系列教材

线性代数

高等教育出版社

第三章 几何空间

第一节 空间直角坐标系

3.1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

二、向量的概念

三、向量的线性运算

四、向量在轴上的投影

五、线性运算的几何意义

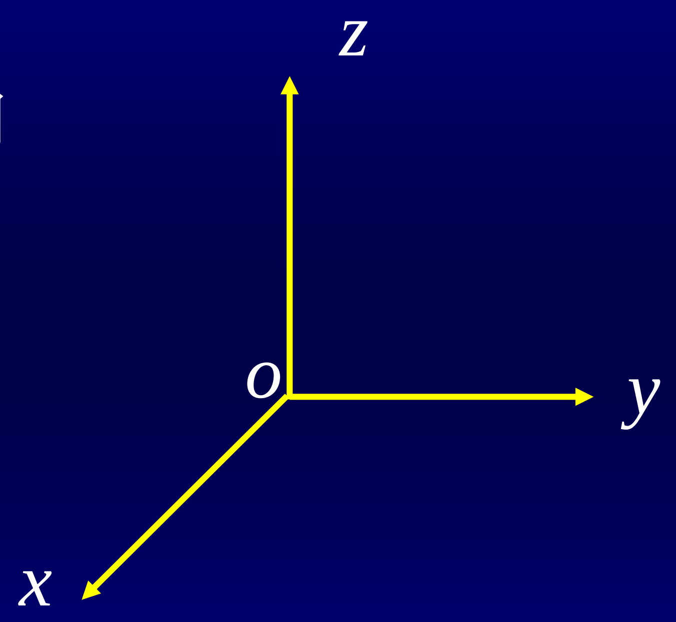
六、向量的模与方向余弦

返回 返回

3.1 空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

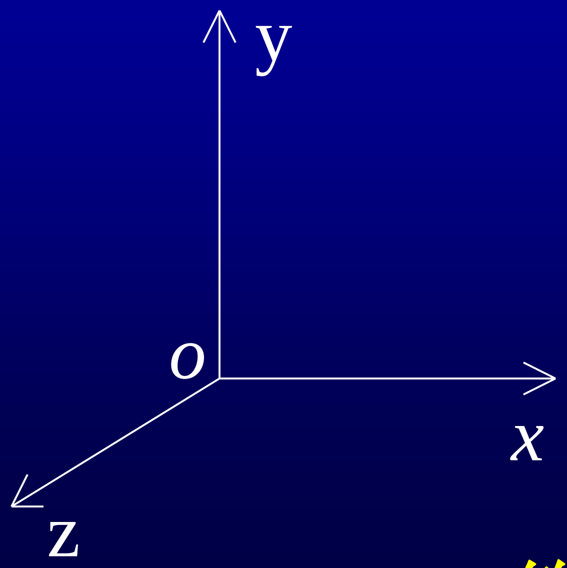
三个坐标轴的正方向符合右手系.

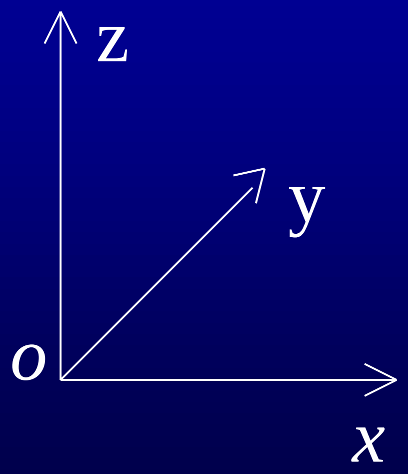


即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.

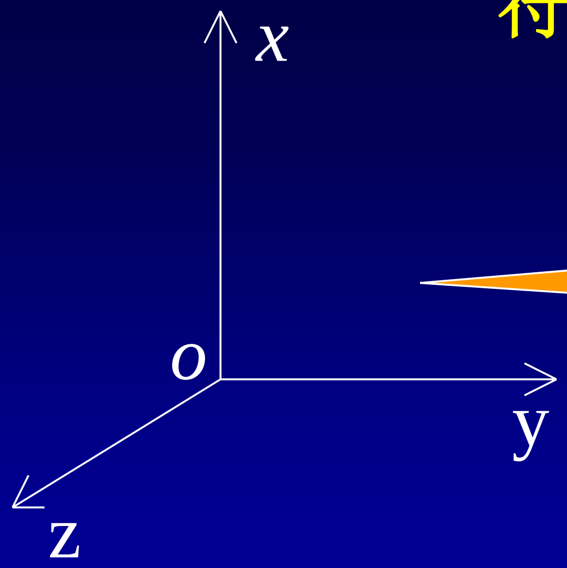
x轴: 横轴；y轴： 纵轴；z轴： 竖轴

返回

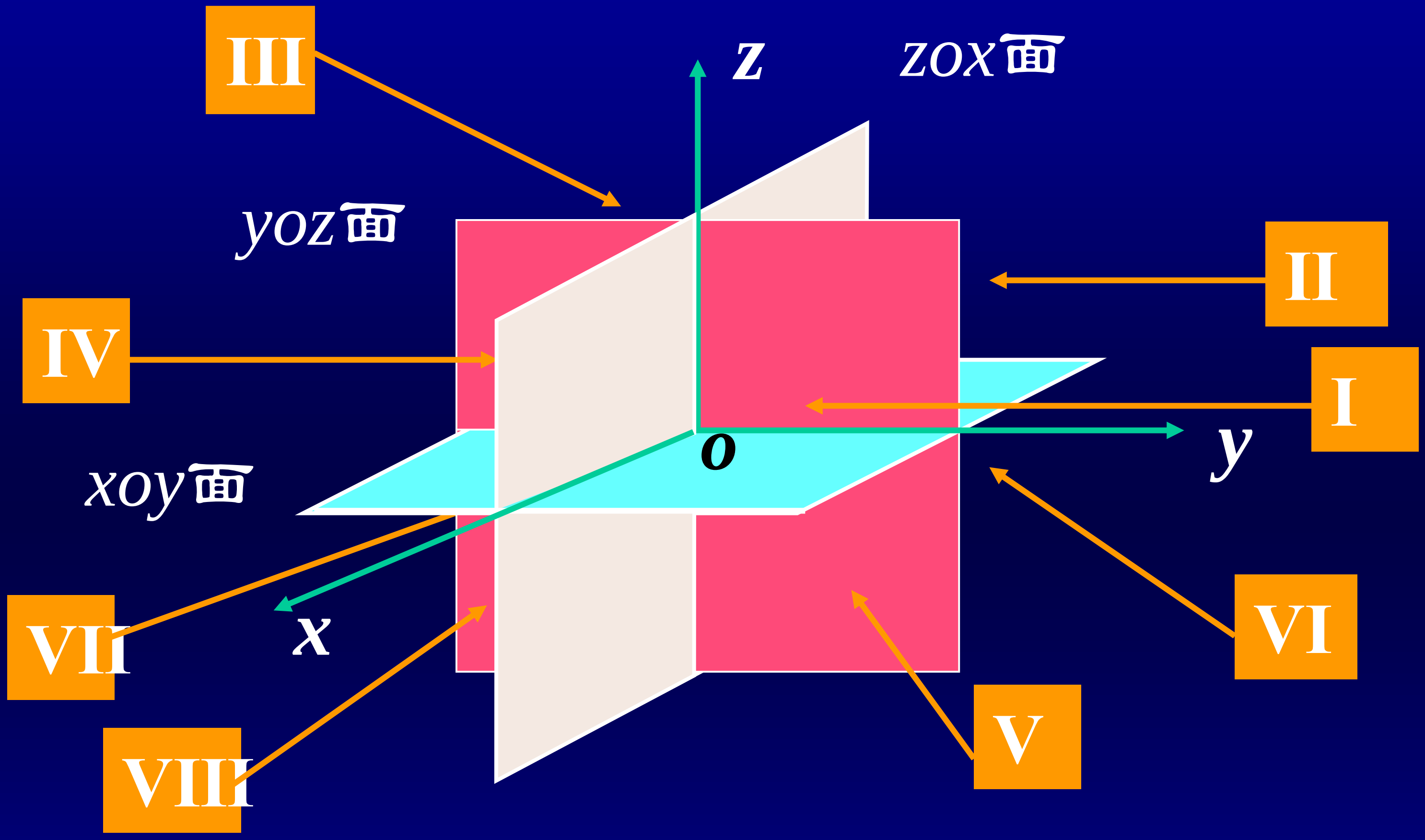




符合右手系.



不符合右手系.



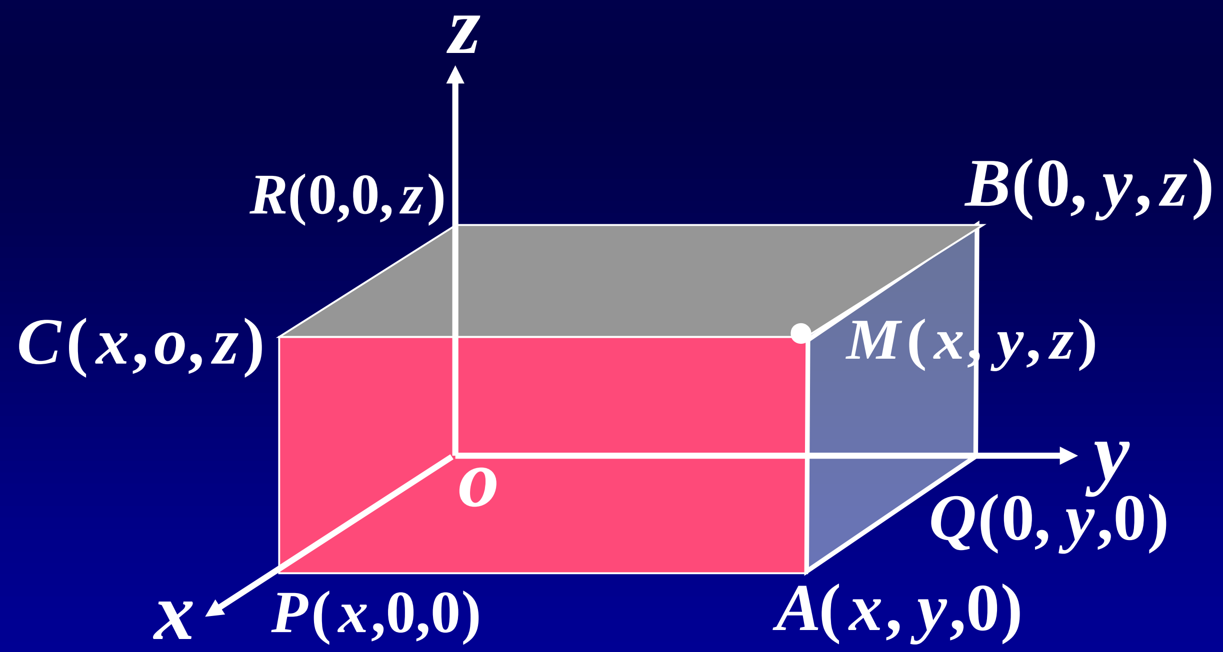
空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点$M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x, y, z)

(x, y, z)称为点 M 的坐标.

特殊点的表示: 坐标轴上的点P, Q, R,

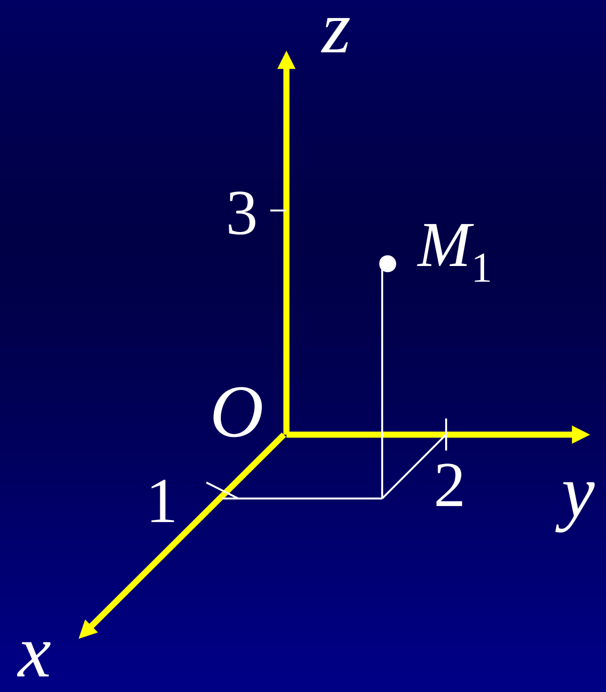
坐标面上的点A, B, C, 原点$O(0,0,0)$



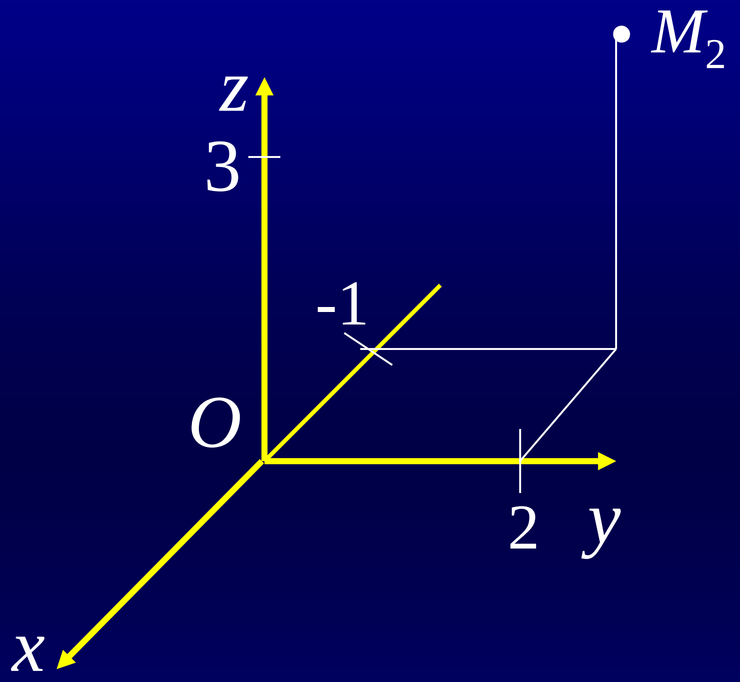
返回

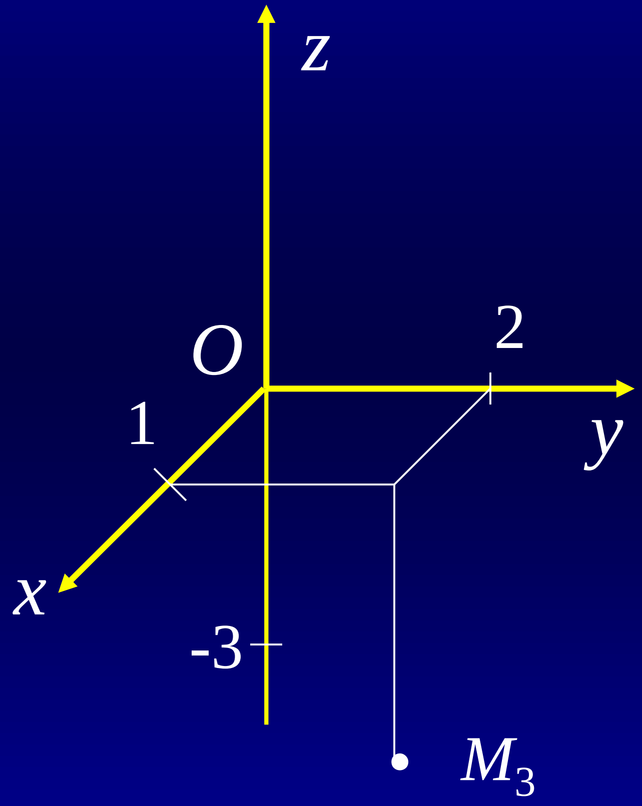
例 在O—xyz坐标系中表示以下三个点：

$$M_1(1, 2, 3),\ M_2(-1, 2, 3),\ M_3(1, 2, -3).$$

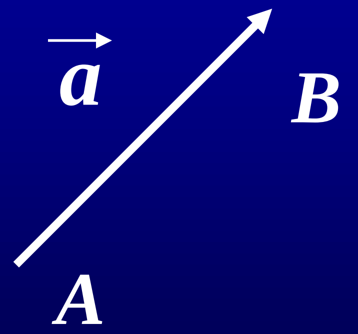


返回


M_2
z
3
-1
O
2
y
x


z
O
2
1
y
x
-3
M_3

二、 向量的概念



向量：既有大小又有方向的量.

向量的表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$

以A为起点，B为终点的有向线段.

向量的模：向量的大小. $\|\vec{a}\|$ 或 $\|\overrightarrow{AB}\|$

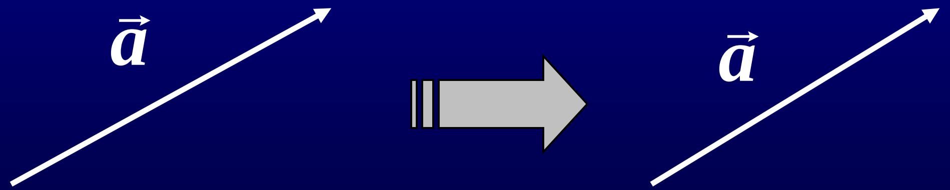
（模又称为长度或范数）.

单位向量：模为1的向量.

零向量：模为 0 的向量.$\vec{0}$

返回

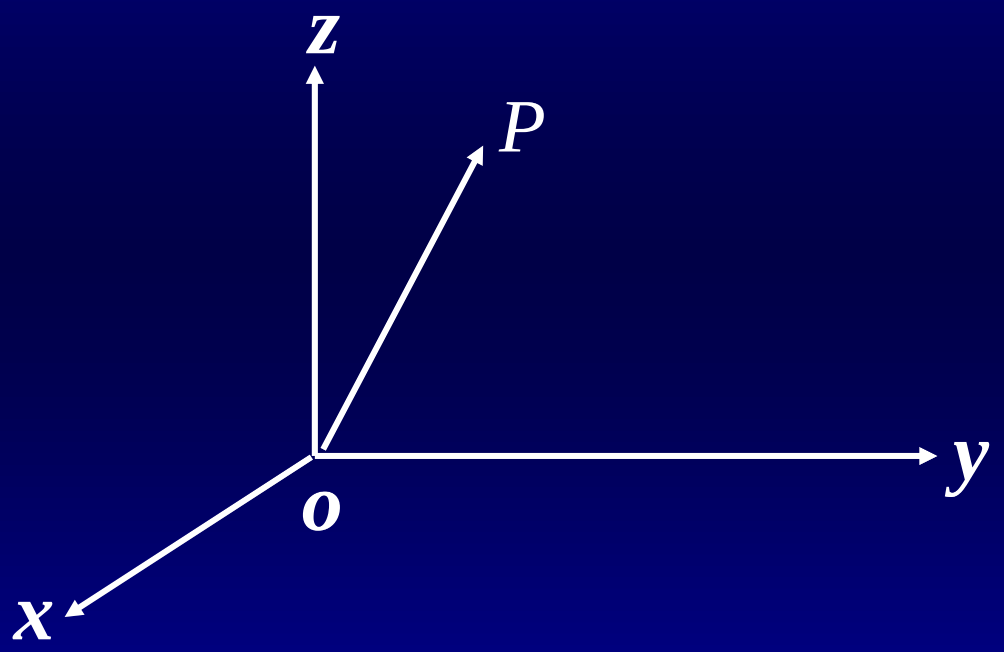
自由向量： 不考虑起点位置的向量.



相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

负向量： 大小相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$

向径： 空间直角坐标系中任一点 P与原点构成的向量. $\overrightarrow{OP}$



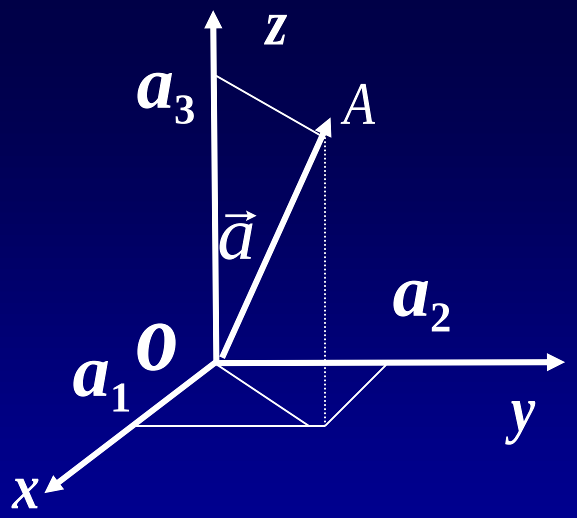
三、向量的线性运算

1. 向量的分量：

把向量 $\vec{a}$ 作平行移动，使其起点与原点重合。

设其终点A的坐标为(a_1, a_2, a_3), 则称a_1, a_2, a_3为向量$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$的分量或坐标，

记为 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.



返回

2. 向量的线性运算

定义 设$\alpha=(a_1, a_2, a_3)$, $\beta=(b_1, b_2, b_3)$,

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$

$$k\cdot\alpha=(ka_1, ka_2, ka_3).$$

$\alpha+\beta$称为***加法***, $k\cdot\alpha$称为***数乘***.

加法与数乘统称为**线性运算**.

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

$$=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3).$$

返回

3. 线性运算满足的运算规律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

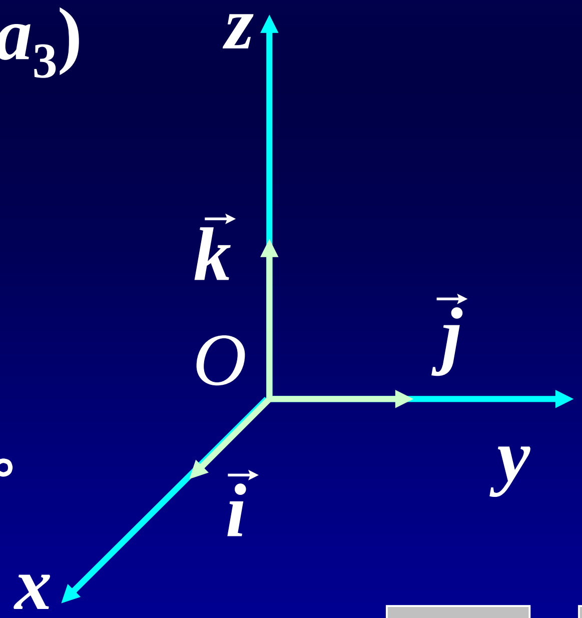
(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

4. 基向量与线性表出

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \ \vec{j}=(0,1,0),\ \ \vec{k}=(0,0,1)$$

单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 称为基向量.

$$\begin{aligned}\vec{a}&=(a_1,a_2,a_3)\\&=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)\\&=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\end{aligned}$$



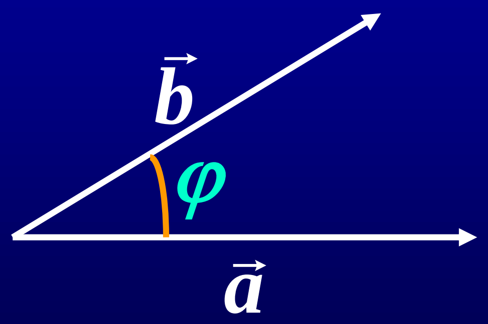
称 $\vec{a}$ 可由 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 线性表出。

$a_1\vec{i}$称为向量$\vec{a}$在x轴上的 分向量。

返回

四、向量在轴上的投影

1. 空间两向量的夹角的概念：



$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0},$

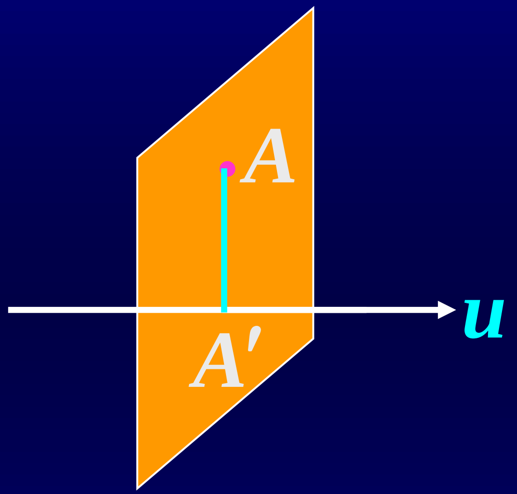
向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角

$$\varphi = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

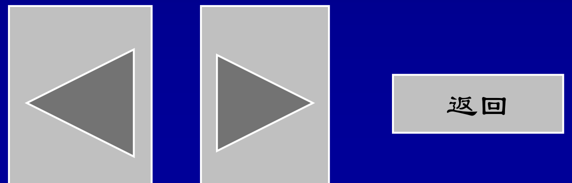
特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与 π 之间任意取值.

返回

2. 空间一点在轴上的投影

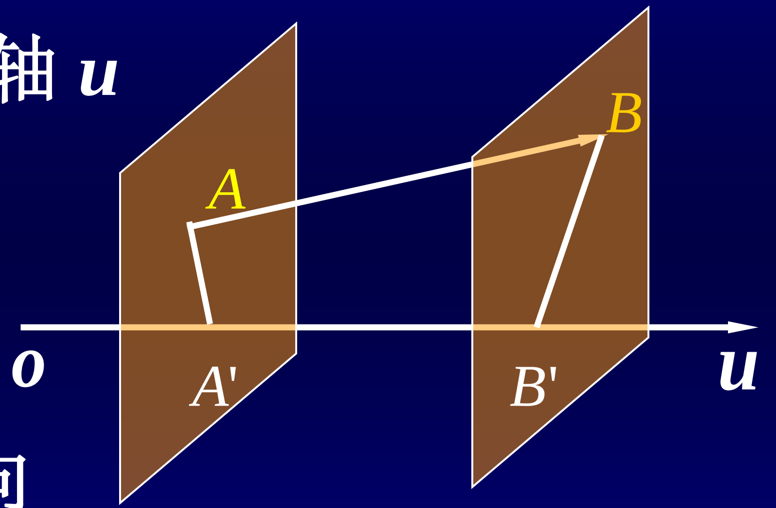


过点A作轴u的垂直平面，交点A'即为点A在轴u上的投影.



3. 向量在轴上的投影

过空间点A,B作平面与轴 u垂直，与轴 u相交于A', B',向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影定义为



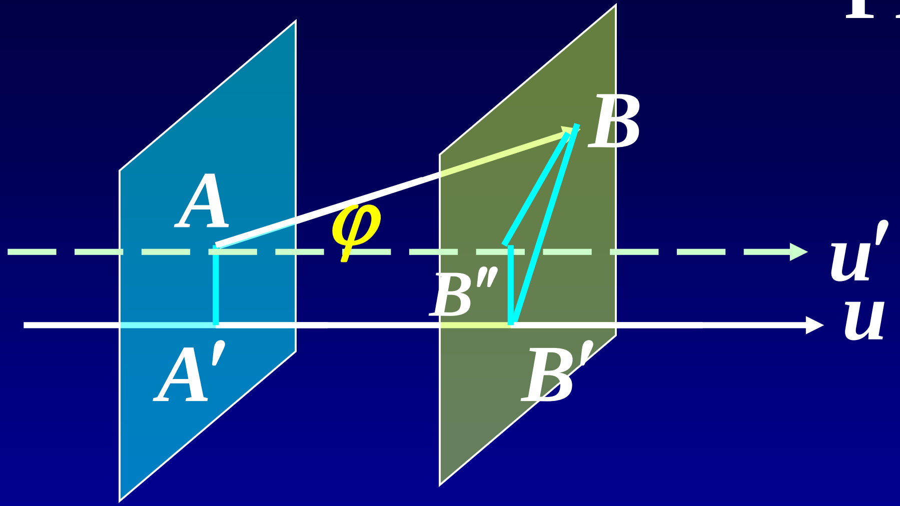
$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与}u\text{同向} \\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与}u\text{反向} \end{cases}$$

返回

向量在轴上的投影有以下两个性质：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦：$\mathrm{Pr\,j}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$

证



$$\mathrm{Pr\,j}_u \overrightarrow{AB} = \mathrm{Pr\,j}_{u'} \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

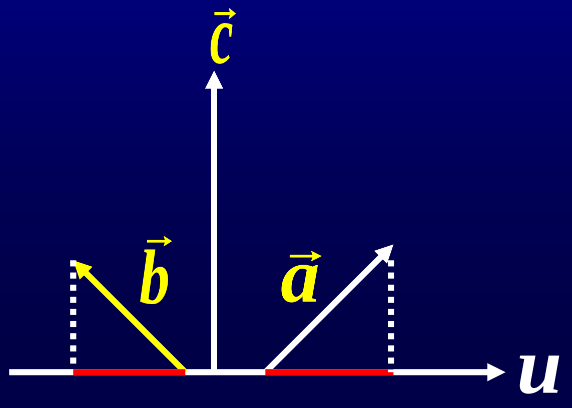
返回

由性质1容易看出：

(1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, 投影为正；

(2) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$, 投影为负；

(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 投影为零；

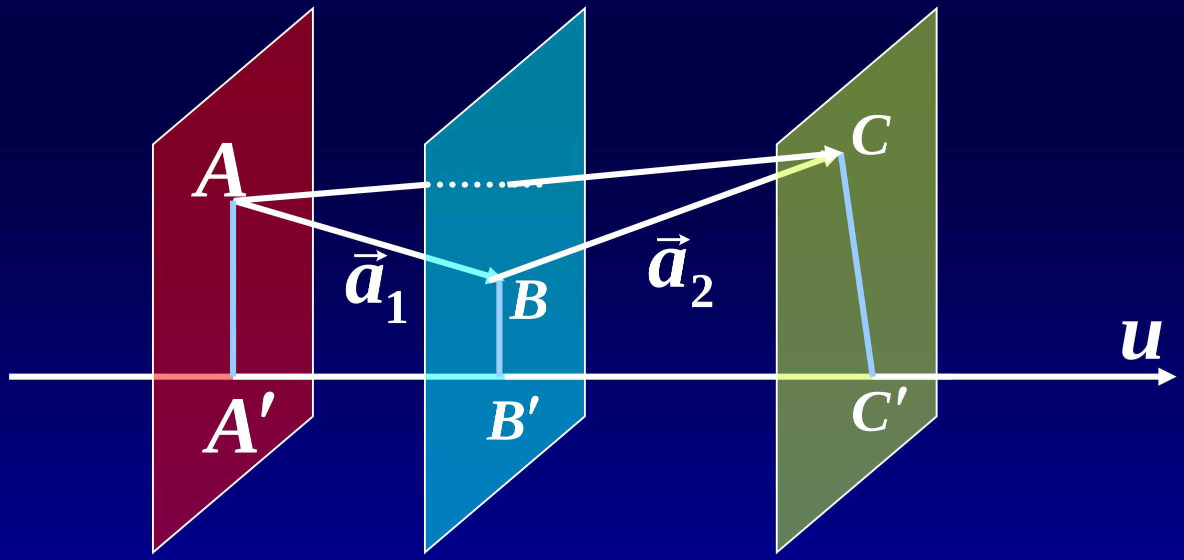


返回

（2）

两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和. （可推广到有限多个）

$$\mathrm{Pr}\,j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\mathrm{Pr}\,j_u\vec{a}_1+\mathrm{Pr}\,j_u\vec{a}_2.$$



返回

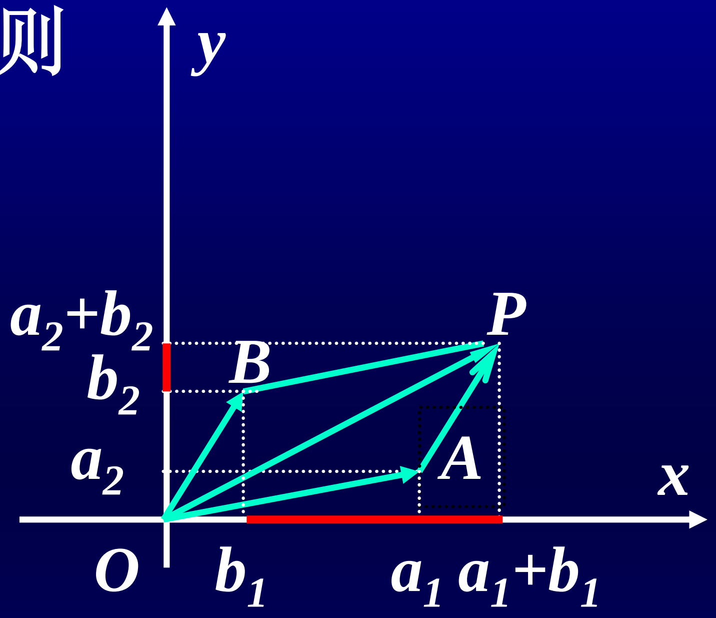
五、线性运算的几何意义

设 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2),\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$, 则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=\overrightarrow{OP},$$

$$\mathrm{Pr}\,j_{Ox}\overrightarrow{BP}=a_1+b_1-b_1=a_1$$

$$\mathrm{Pr}\,j_{Oy}\overrightarrow{BP}=a_2+b_2-b_2=a_2$$



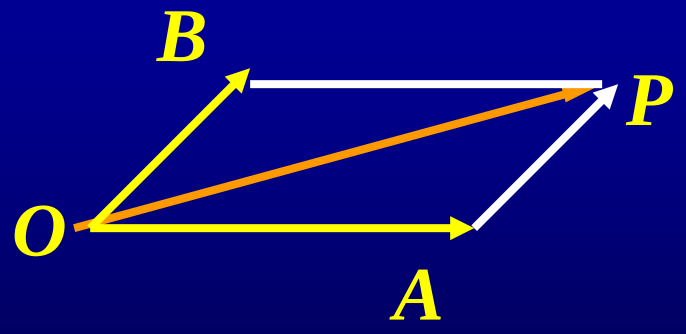
故 $\overrightarrow{BP}$ 经平行移动后可与 $\overrightarrow{OA}$ 重合.

故 $\overrightarrow{BP}\,//\,\overrightarrow{OA}$ 同理： $\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{OB}$

所以，*OAPB*是平行四边形.

返回

1. 平行四边形法则



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP},$$

$\overrightarrow{OP}$ 是以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为边的平行四边形的对角线.

平行四边形法则也可表示为三角形法则

返回

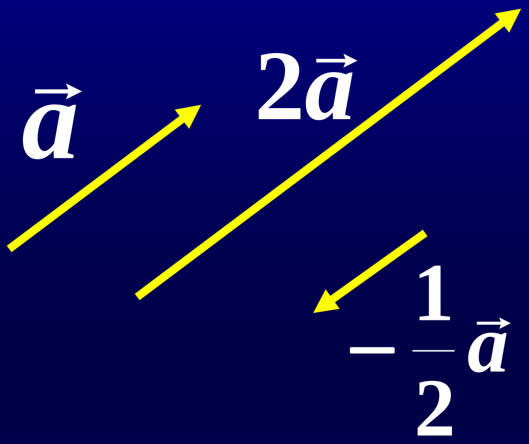
2. 伸缩变换

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

(1) $\lambda > 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向;

(2) $\lambda = 0$, $\vec{b} = 0$

(3) $\lambda < 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向.



$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) = \lambda \vec{a}$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.$$

(若$a_i = 0$,则$b_i = 0$).

返回

例1. 非零向量单位化.

设向量 $\vec{a} \neq 0$,

令 $\vec{e}_a = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$, 则

$$\|\vec{e}_a\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \cdot \|\vec{a}\|$$

$$= \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\vec{e}_a$ 是与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量.

返回

例2. 证明：三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

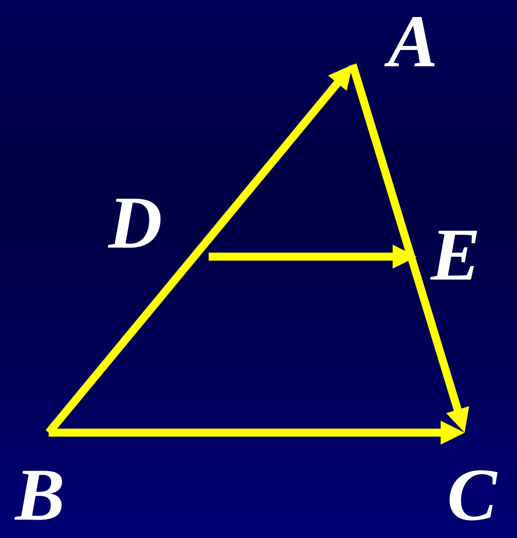
证 设DE是中位线，

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

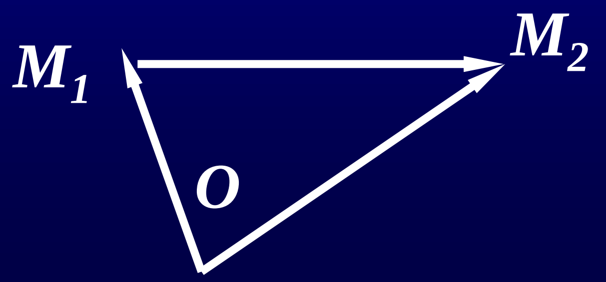


返回

例3. 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

(1) 求 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$;

解.



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

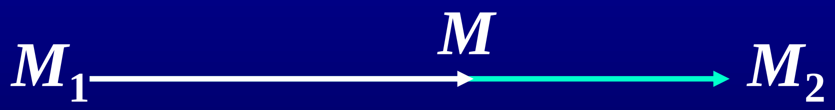
$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

返回

(2) 设M为 $\overrightarrow{M_1M_2}$上一点，$\dfrac{\|\overrightarrow{M_1M}\|}{\|\overrightarrow{MM_2}\|}=\lambda$，求$M$的坐标.

解.



设M的坐标为(x, y, z)，由$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$得，

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x), \qquad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

同理，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

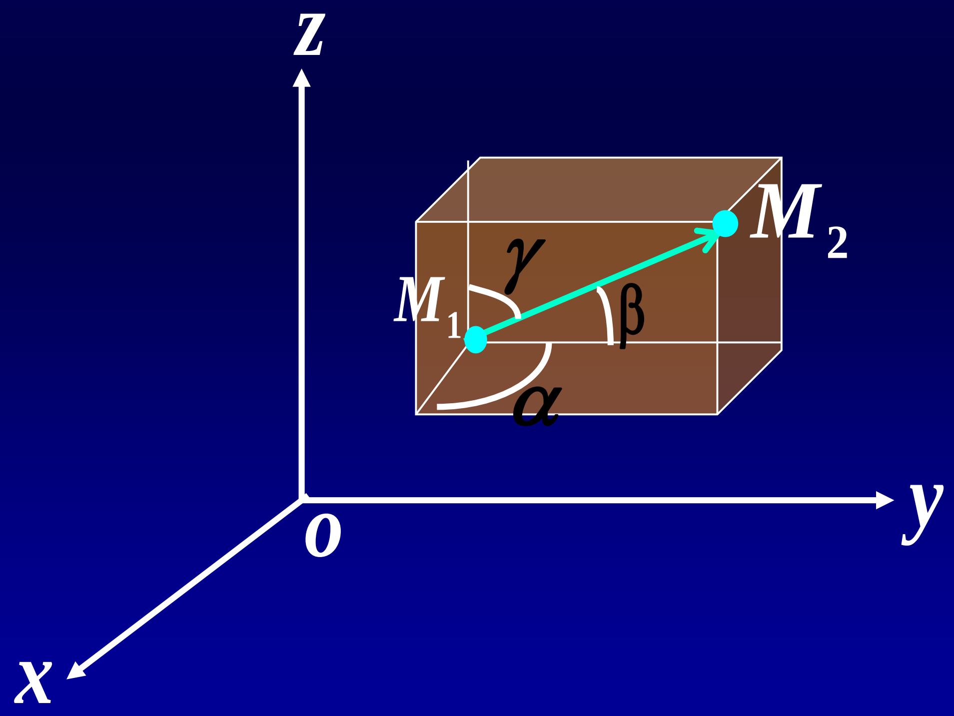
若M为M_1M_2的中点，则M的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

六、向量的模与方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.

$$\alpha = <\vec{a}, \vec{i}>, \beta = <\vec{a}, \vec{j}>, \gamma = <\vec{a}, \vec{k}>,$$

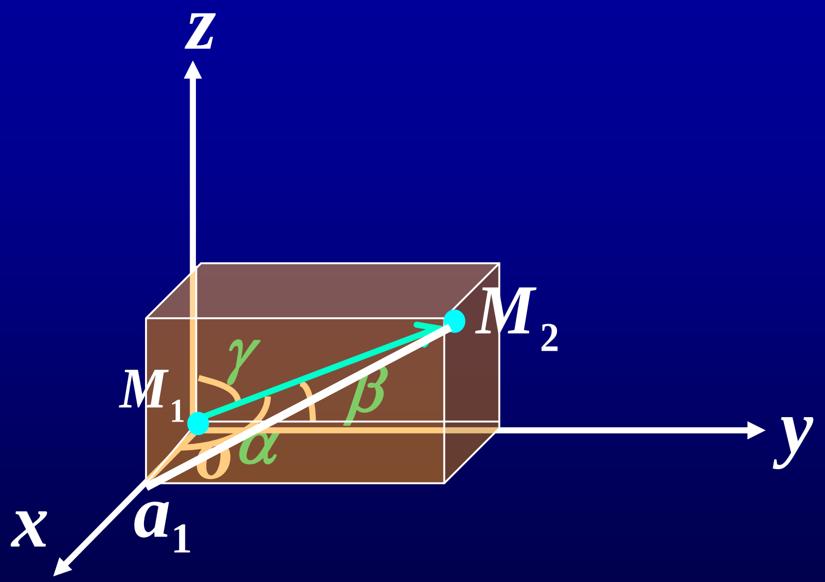


$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

返回



由图示可知 $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

$\cos\beta = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

方向余弦的特征

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

特殊地：单位向量为

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

返回

例4 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|=2$，它与 x 轴和y轴的夹角分别为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$ ，如果 P_1 的坐标为 (1,0,3)，求P_2 的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\ \therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

返回

$$\Rightarrow \gamma=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x,y,z),

$$\cos\alpha=\frac{x-1}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow x=2,$$

$$\cos\beta=\frac{y-0}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|}\Rightarrow\frac{y-0}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow y=\sqrt{2},$$

$$\cos\gamma=\frac{z-3}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|}\Rightarrow\frac{z-3}{2}=\pm\frac{1}{2}\quad\Rightarrow z=4,\ z=2,$$

P_2的坐标为$(2,\sqrt{2},4)$, $(2,\sqrt{2},2)$.

例5 设$\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量$\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k},$$

$\therefore$在x轴上的投影为$a_1=13$,

在y轴上的分向量为$7\vec{j}$.

返回