新时代大学数学系列教材

线性代数

高等教育出版社

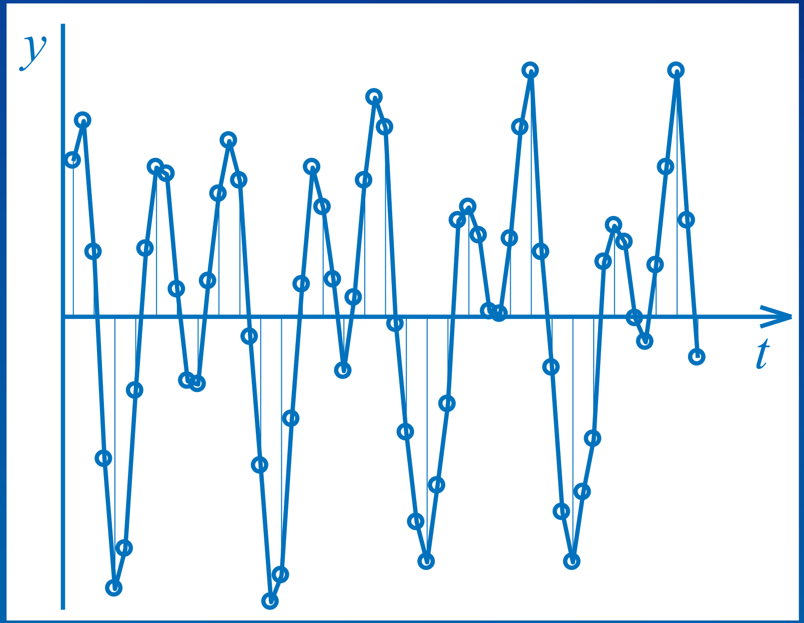
第四章 n维向量空间

引例

智能语音应用已经逐渐走进我们的生活，比如智能音箱、手机里面的各种智能语音服务等．这些程序或设备是如何接收和处理我们语音的呢？

首先要做的就是**采样**，将连续的模拟信号转换为离散的数字信号，右图为人类笑声的一段信号．在传输和处理过程中就只考虑这些采样点上的值，可以用矩阵$(y_1, y_2, \dots, y_n)$来表示，这样便于压缩、分离、识别等后续任务．

这类矩阵是一类特殊矩阵，其本身及所在的空间也是线性代数非常重要的内容，在实际工程中有着极为广泛的应用．



第三章 n维向量空间

第一节　　n维向量空间的概念

目录

一、n 维向量空间的概念

几何空间中：

$$\vec{a} := OP = (a_1, a_2, a_3)$$

点P的坐标

向量的线性运算

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

所有三维向量组成的集合，按上述线性运算，满足：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称这个集合构成一个三维向量空间，记为$\mathbf{R}^3$.

n 维向量空间 ($\mathbf{R}^n$):

n 维向量: $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ (有序数组)

α 的分量

n 维行向量

n 维列向量: $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

实（复）向量: 分量为实（复）数

n维向量的实际意义

确定飞机的状态，需要以下6个参数：

机身的仰角 $\varphi \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$

机翼的转角 $\psi \quad (-\pi \leq \psi \leq \pi)$

机身的水平转角 $\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数 $P(x, y, z)$

所以，确定飞机的状态，需用**6维向量**

$$a = (x, y, z, \phi, \psi, \theta)$$

向量相等： $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i$$

零向量： $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$

负向量： $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$

$\mathbf{R}^n$： n 维向量的全体.

n维向量的**线性运算**:

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n),\ k \in \mathbf{R}.$$

加法与数乘满足:

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称 $\mathbf{R}^n$ 构成 ***n* 维实向量空间**.

线性方程组与n维向量的线性运算：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$

即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$

即 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X = b,$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{AX = b}$$

二、 $\mathbf{R}^n$ 的子空间

定义 若$\varphi \neq V \subset R^n$,且$\forall \alpha, \ \beta \in V, k \in R$,有

$$\alpha + \beta \in V, k\alpha \in V,$$

则称V是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

例1 设$V = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$, V是否是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间?

例2 设$V = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$, V是否是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间?

例3 过坐标原点的平面为R^3的一个子空间；

过坐标原点的空间直线为R^3的一个子空间.

但是，不过坐标原点的平面不是R^3的一个子空间；

不过坐标原点的空间直线不是R^3的一个子空间.

因为，不存在零元0.

谢谢