高等数学A(上)

第二章 一元函数微分学

本章重点

导　数 — 描述函数变化快慢
微　分 — 描述函数变化程度
微分学 — 基本概念是导数与微分

微分学	导　数	微　分
基本概念是导数与微分	描述函数变化快慢	描述函数变化程度

中值定理	应用一	应用二
罗尔、拉格朗日、柯西	研究函数性质及曲线性态	利用导数解决实际问题

第二章

目 录

CONTENTS

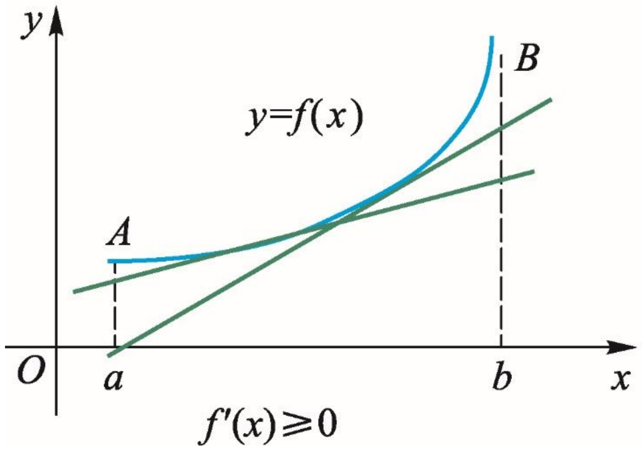
第7.1节 函数的单调性与曲线的凹凸性

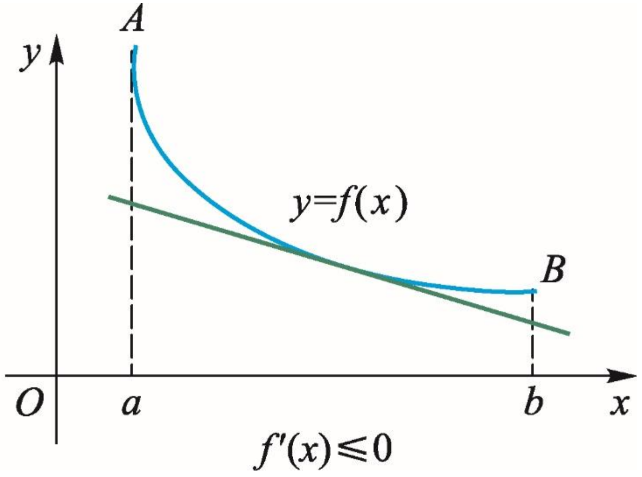
一、函数单调性的判定

二、曲线的凹凸性与拐点

一、函数单调性的判定

1. 单调性的判别法





可见:函数的单调性与导数的符号密切相关.

问题:能否用导数的符号判别函数的单调性呢?

定理1 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导.

(1)如果在(a,b)内$f'(x)>0$,则函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

(2)如果在(a,b)内$f'(x)<0$,则函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

证 $\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$, 且 $x_1<x_2$, 应用拉格朗日中值定理,得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\qquad(x_1<\xi<x_2)$$

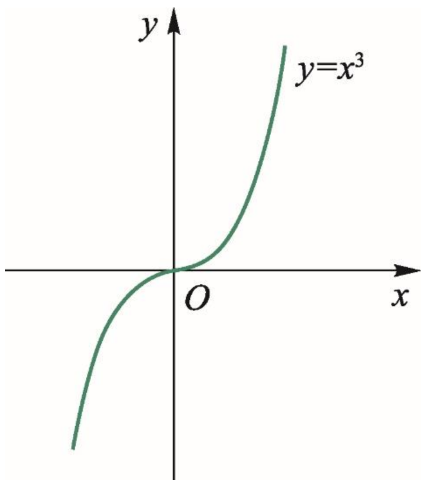
(1)若在(a,b)内, $f'(x)>0$,则 $f'(\xi)>0$, $\therefore\ f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore\ y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

(2)若在(a,b)内, $f'(x)<0$,则 $f'(\xi)<0$, $\therefore\ f(x_2)<f(x_1)$.

$\therefore\ y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少. 证毕

注意: 区间内个别点导数为零,不影响区间的单调性.



例如: $y = x^3,\ y'\big|_{x=0} = 0$, 但在$(-\infty, +\infty)$上单调增加.

一般地,有如下定理:

定理2 设函数$y = f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导.

(1) 如果在(a,b)内$f'(x) \geqslant 0$,且等号仅在有限多个点处成立,则函数$y = f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

(2) 如果在(a,b)内$f'(x) \leqslant 0$,且等号仅在有限多个点处成立,则函数$y = f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

参阅本节习题8

注 定理中的区间换成其它有限或无限区间,结论仍然成立.

例1　判定函数$y = x - \sin x$在$[-\pi, \pi]$上的单调性.

解　$\because$ $y = x - \sin x$在$[-\pi, \pi]$上连续, 在$(-\pi, \pi)$上可导, 且

$y' = 1 - \cos x \geqslant 0$且等号仅在$x = 0$成立.

$\therefore$ 函数$y = x - \sin x$ 在$[-\pi, \pi]$上单调增加.

例2　讨论函数$y = \mathrm{e}^x - x - 1$的单调性.

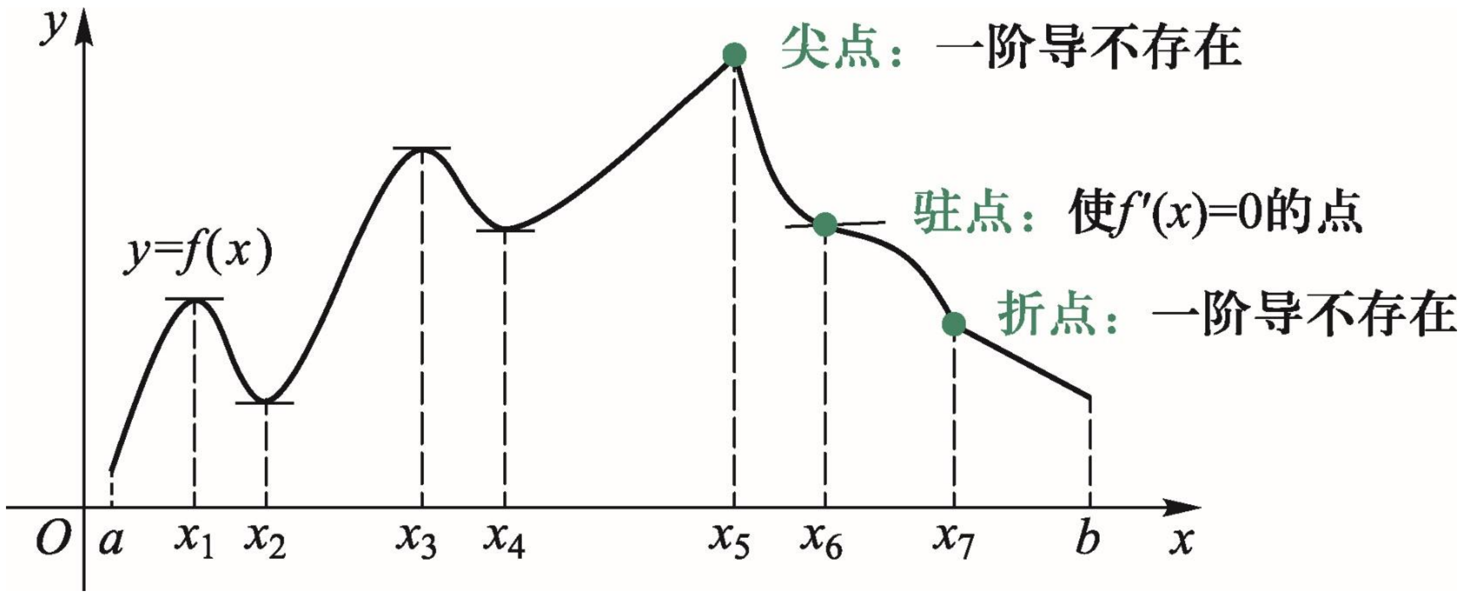
解　$\because$ $y' = \mathrm{e}^x - 1$. 又 $\because$ 定义域为$(-\infty, +\infty)$.

在$(-\infty, 0)$内, $y' < 0$, $\therefore$ 函数在$(-\infty, 0]$上单调减少;

在$(0, +\infty)$内, $y' > 0$, $\therefore$ 函数在$[0, +\infty)$上单调增加.

2. 单调区间的求法

问题： 函数在定义区间上不是单调的，但在各个部分区间上单调.



定义 若函数在其定义域的某个区间内是单调的，则该区间称为函数的**单调区间**.

驻点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

求函数单调性的步骤

(1) 求定义域;

(2) 求导数;

(3) 求驻点与不可导点;

(4) 求相应区间的导数符号，判别增减性:

$f'(x)>0$ 单增

$f'(x)<0$ 单减

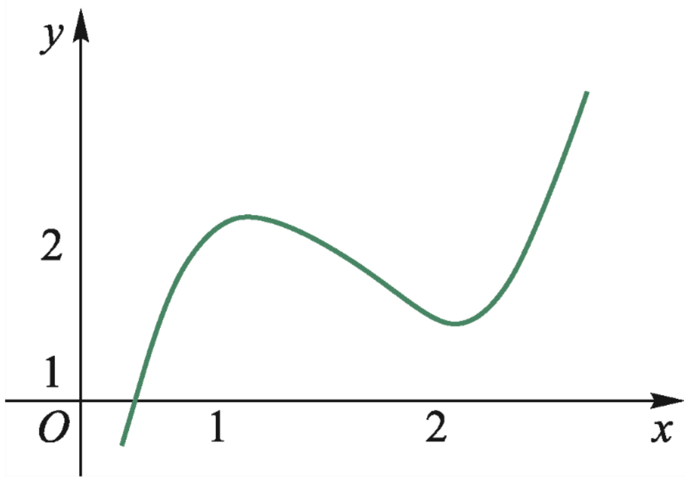
例3　确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解　$\because$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

解方程 $f'(x)=0$ 得, $x_1=1, x_2=2$.

x	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	单增	单减	单增



单调增区间为　$(-\infty,1]$,　$[2,+\infty)$.

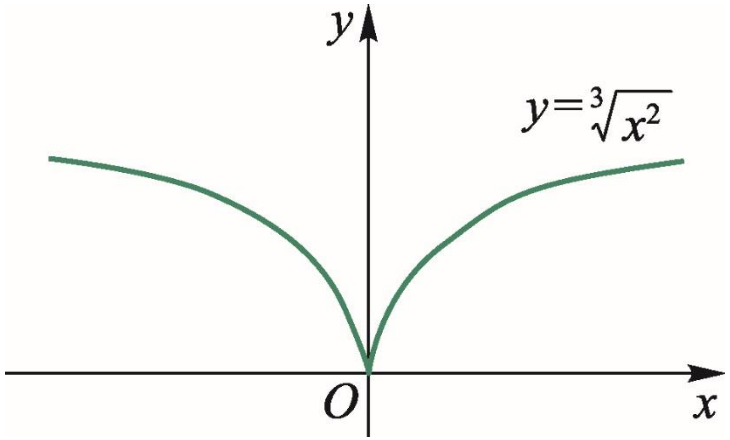
单调减区间为　$[1,2]$.

例4 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad (x\neq 0)$$

当$x=0$时,导数不存在.



x	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	单减	单增

单调减区间为 $(-\infty,0]$,

单调增区间为 $[0,+\infty)$.

3. 利用单调性证明不等式

例5 证明：当$0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$时，$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}$.

证 令$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$，则$f(x)$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上可导，

且 $f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0.$

令 $g(x) = x - \tan x$，则 $g'(x) = 1 - \sec^2 x = -\tan^2 x < 0$，

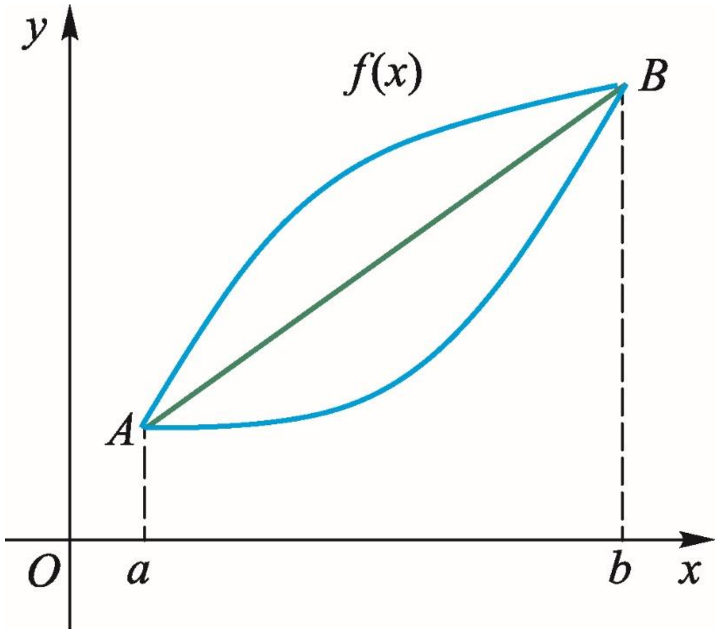
$\therefore$ $g(x)$在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递减，$\therefore g(x) < g(0) = 0$，即 $x - \tan x < 0$.

$\therefore f(x)$在$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，$\therefore f(x) \geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$，$\therefore \frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}$. 证毕

二、曲线的凹凸性与拐点

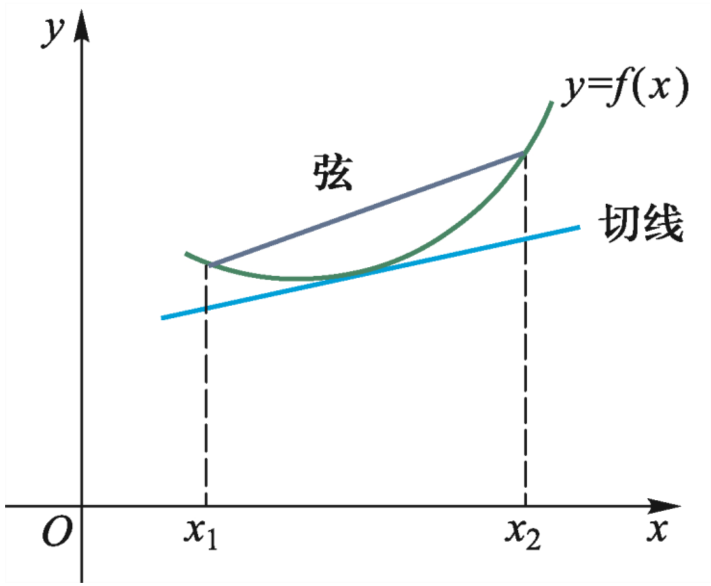
1. 曲线凹凸性的定义

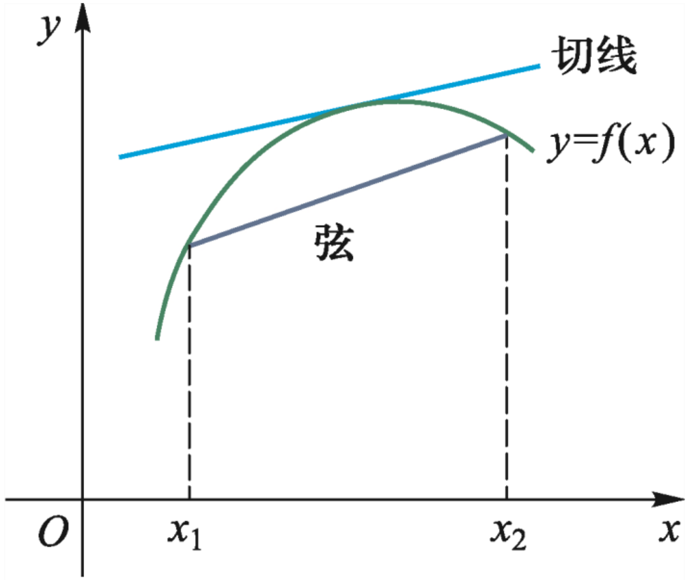
引入　函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续且单调增加, 用一条曲线连接起点和终点, 则



仅有函数$f(x)$的单调性作图可能会产生很大偏差, 还需讨论其弯曲方向, 即凹凸性.

从几何上看：





凹弧

弦总在曲线的上方
切线总在曲线的下方

弦总在曲线的下方
切线总在曲线的上方

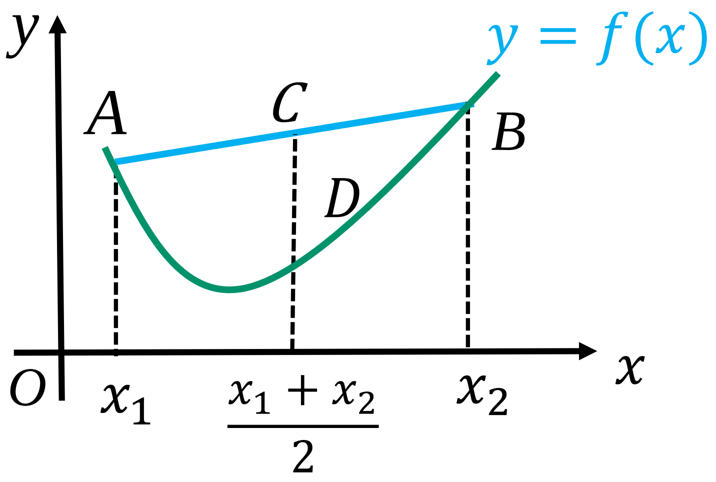
凸弧

定义　设$f(x)$在区间 I上连续，如果对I上任意两点x_1，x_2，

(1) 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是

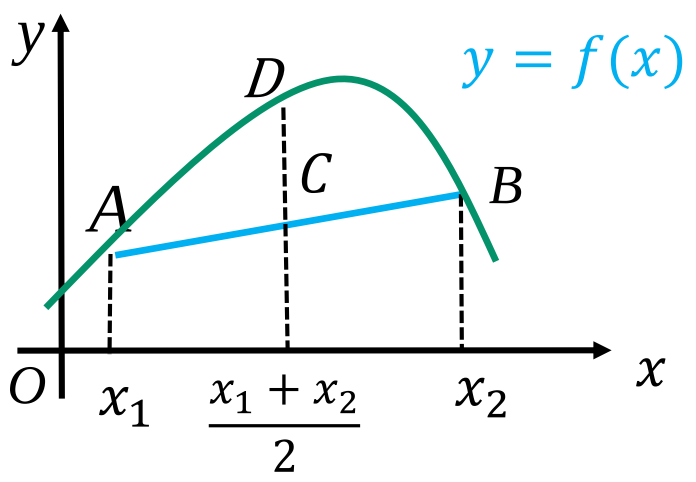
(向上)凹的(或凹弧);



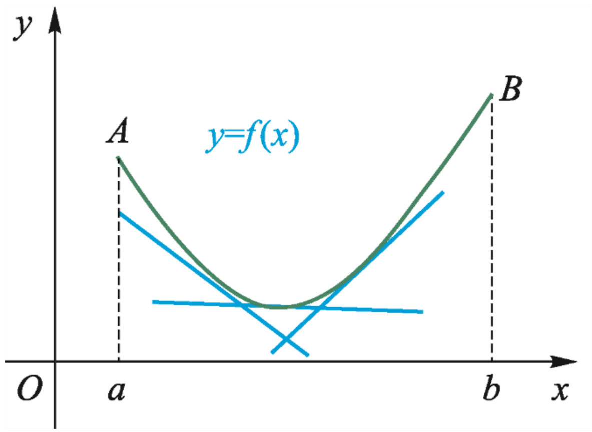
(2) 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

则称 $f(x)$在 I 上的图形是

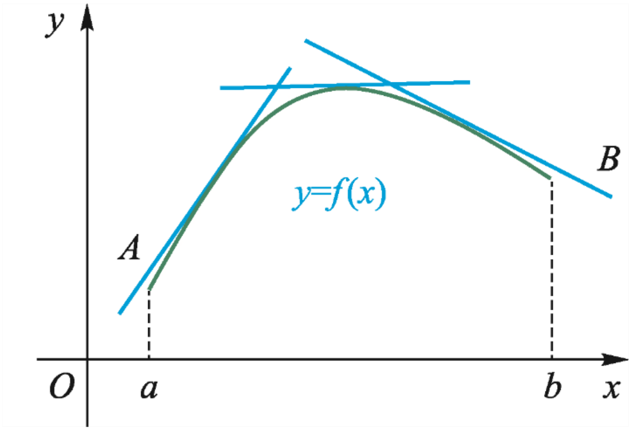
(向上)凸的(或凸弧).



2.曲线凹凸性的判定



$f'(x)$ 递增　$f''(x) > 0$



$f'(x)$ 递减　$f''(x) < 0$

定理3　如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数.

在 (a,b) 内,

(1) 若$f''(x) > 0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的;

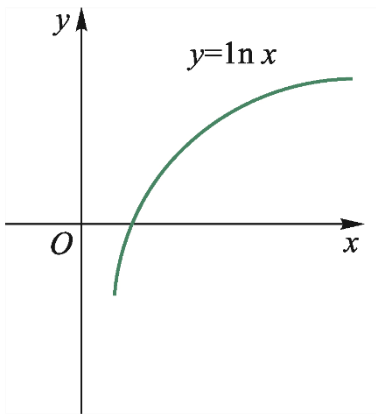
(2) 若$f''(x) < 0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的.

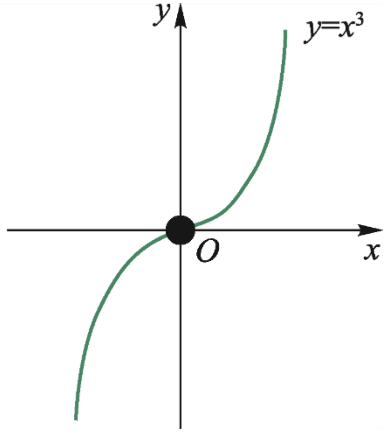
例6 判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解 定义域为 $(0,+\infty)$.

$\because\ y'=\dfrac{1}{x},\ y''=-\dfrac{1}{x^2}<0,$

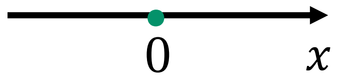
$\therefore$ 曲线 $y=\ln x$ 是凸的.





例7 判断曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解 定义域为$(-\infty,+\infty)$.



$\because\ y'=3x^2,\ y''=6x,$

令 $y''=0$, 得$x=0$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	凸	拐点(0,0)	凹

注 连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为**拐点**.

3.求曲线 $y=f(x)$ 拐点的一般步骤:

(1) 求函数$y=f(x)$的定义域D;

(2) 求出使$f''(x)=0$的点以及$f''(x)$不存在的点;（拐点的可疑点）

(3) 上述点将定义域D分割为若干开区间和孤立的点;

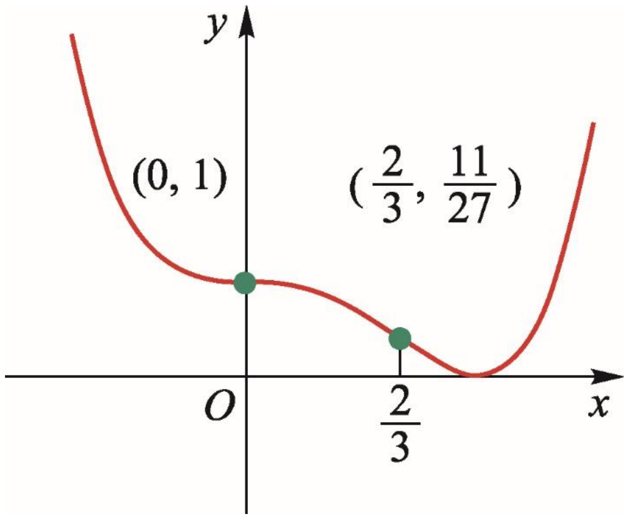
(4) 在每个开区间上判断$f''(x)$的正负号，得其凹凸性和拐点.

例8　求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点.

解　定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$y'=12x^3-12x^2$，$y''=36x(x-\frac{2}{3})$.

令$y''=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{2}{3}$.

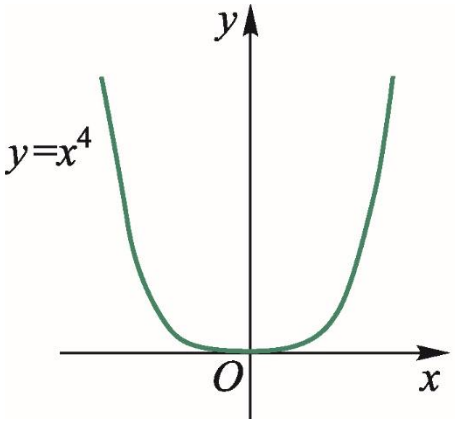


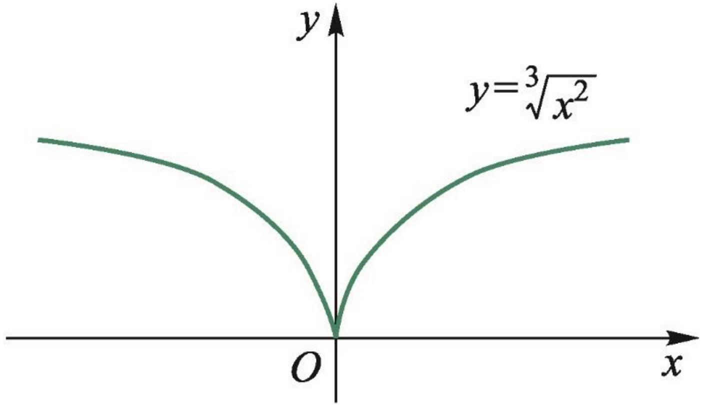
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,{}^2/_3)$	${}^2/_3$	$({}^2/_3,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点$(0,1)$	凸的	拐点$({}^2/_3,{}^{11}/_{27})$	凹的

课堂练习及提问

1. 问 $y=x^4$是否有拐点？

2. 问$y=\sqrt[3]{x^2}$是否有拐点？





答案： 没有拐点.

$$f''(x)\text{在可疑点}x_0\text{两侧}\begin{cases}\text{异号，则点}(x_0,f(x_0))\text{是曲线一个拐点.}\\\text{同号，则点}(x_0,f(x_0))\text{不是曲线的拐点.}\end{cases}$$

4. 凹凸性的简单应用-证明不等式

例9 证明 $\dfrac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}, (x \neq y).$

证 设 $f(t)=e^t$, 则 $\because f'(t)=f''(t)=e^t>0,$

$\therefore$ 曲线$f(t)=e^t$在$(-\infty,+\infty)$内是凹的.

$\therefore \forall x,y\in(-\infty,+\infty),\ x\neq y$时, 有$\dfrac{f(x)+f(y)}{2} > f(\dfrac{x+y}{2}),$

即 $\dfrac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}},\quad (x\neq y).$

曲线凹的定义

第7.2节　函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

二、最大值最小值问题

一、函数的极值及其求法

1. 函数极值的定义

定义

设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，

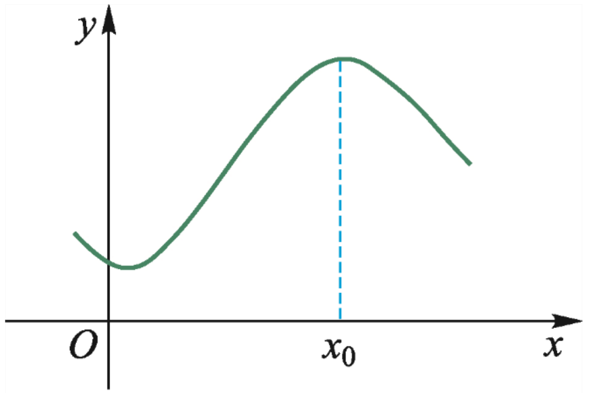
如果对于去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内的任一x，有

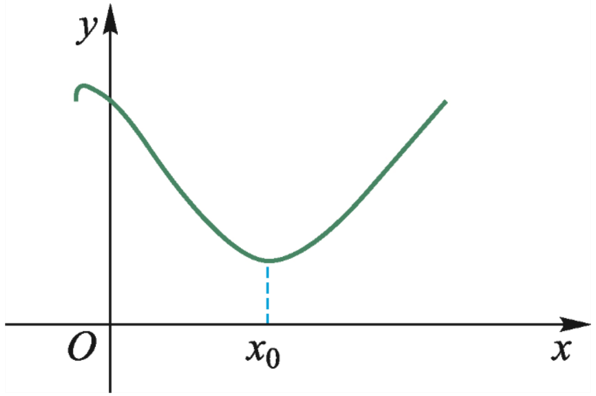
$$f(x) < f(x_0)\text{(或}f(x) > f(x_0)\text{)}$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值(或极小值).

函数的极大值与极小值统称为极值.

使函数取得极值的点x_0(自变量)称为极值点.



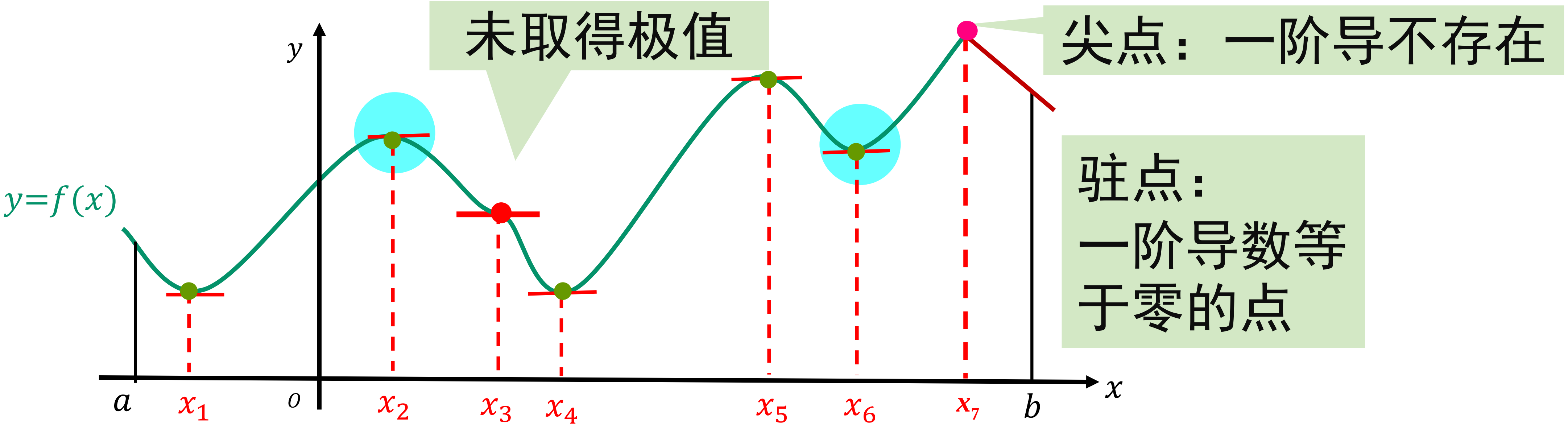


注 由图可知,在一个区间内

(1)函数的极值只是一点附近的最大值或最小值,是局部性的.

(2)函数可能存在许多个极值,极小值可能大于某个极大值.

(3)若$f(x)$在x_0点取得极值, 则$f'(x_0)=0$ 或$f'(x_0)$不存在.

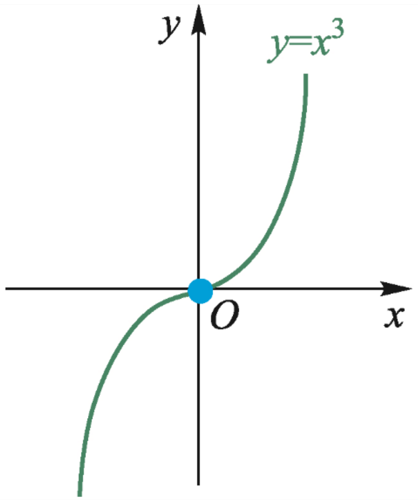


（4）驻点或者不可导点，未必是极值点.

例如:

1. $f(x)=x^3, f'(0)=3x^2|_{x=0}=0$，

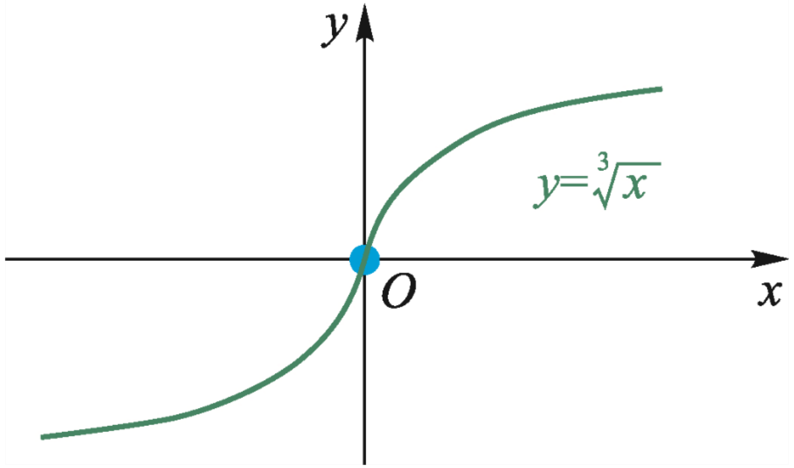
   可见 $x=0$是驻点，但不是极值点.



2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$,

   $$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty$$

   可见$x=0$为不可导点，但不是极值点.



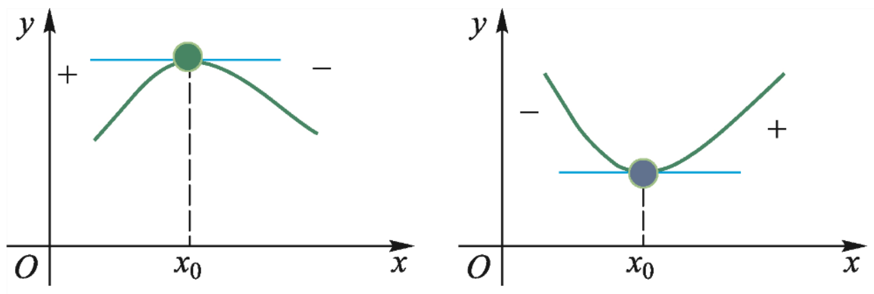
问题：如何判断驻点和不可导点是不是极值点呢？

2. 函数极值的求法

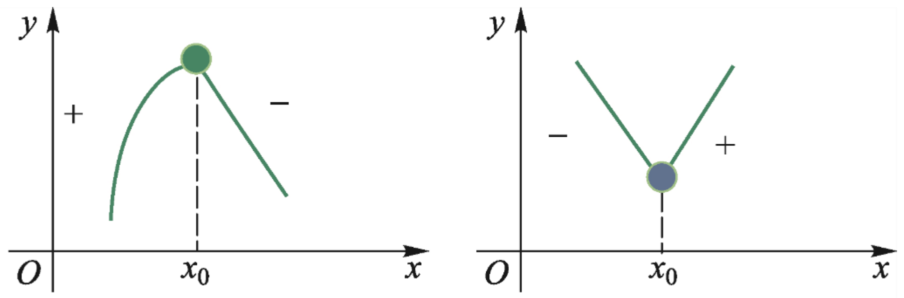
定理1 （必要条件）费马引理

设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$.

几何上（如下图），
若x_0是连续函数$f(x)$单增单减的分界点，则x_0必为极值点.



驻点情形

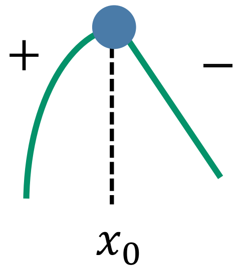


不可导点情形

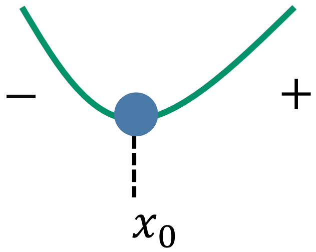
定理2（第一充分条件） 极值第一判别法

设$f(x)$在x_0点连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内可导.

(1)若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，
而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，
则$f(x_0)$为极大值.



(2)若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$，
而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，
则$f(x_0)$为极小值.



(3)若$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x_0)$不是极值.

自证

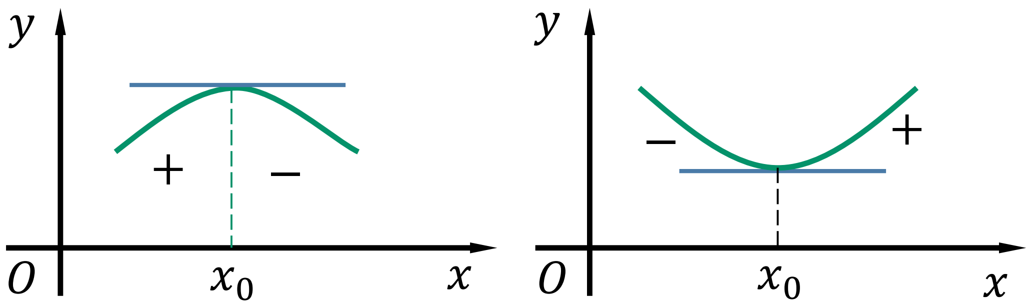
求极值的步骤：

(1) 求导数$f'(x)$;

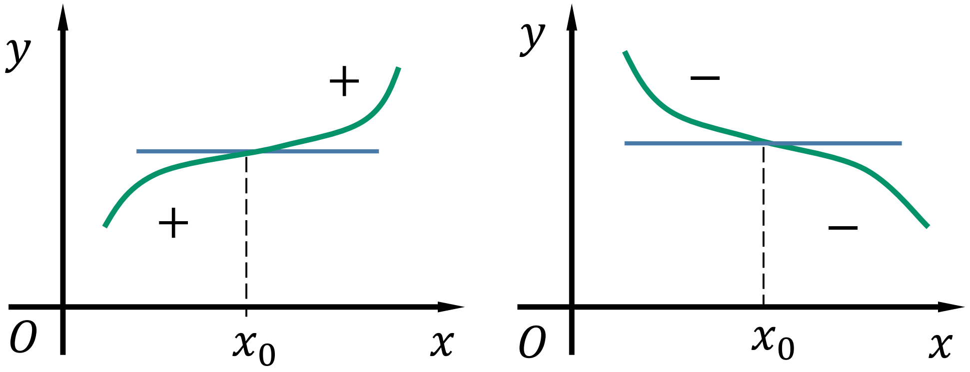
(2) 求极值点的嫌疑点：驻点和不可导点;

(3) 检查 $f'(x)$ 在嫌疑点左右的正负号,判断极值点;

(4) 求极值.



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

例1 求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解 (1) $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$内连续，除 $x=-1$外处处可导.

(2) $f'(x)=\dfrac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}=0$，得$x=1$.

(3) 得到极值的嫌疑点为：驻点x=1.不可导点x=− 1.

(4) 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不可导	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$f_{极大}(-1)=0$	$\downarrow$	$f_{极小}(1)=-3\sqrt[3]{4}$	$\uparrow$

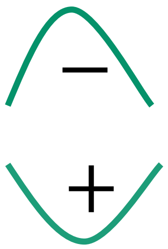
对于**驻点**,有时还可以利用函数在该点处的**二阶导数**的正负号来判断极值点.

定理3（第二充分条件） 极值第二判别法

设$f(x)$在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.

(1)若 $f''(x_0)<0$,则$f(x_0)$为 **极大值.**

(2)若 $f''(x_0)>0$,则$f(x_0)$为 **极小值.**



证 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

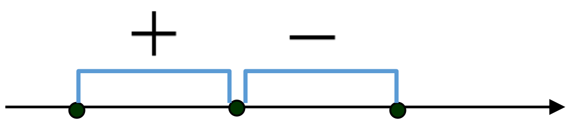
(1) 若$f''(x_0)<0$,

极限的局部保号性

存在$\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当$x_0-\delta<x<x_0$时, $f'(x)>0$;

当$x_0<x<x_0+\delta$时, $f'(x)<0$,



由第一判别法知$f(x)$在x_0取极大值.

(2) 类似可证. 证毕

定理3 表明，如果$f'(x_0)=0$.

$$\begin{cases} f''(x_0)<0 & \text{则} f(x_0) \text{为极大值.} \\ f''(x_0)>0 & \text{则} f(x_0) \text{为极小值.} \\ f''(x_0)=0 & \text{用定理3无法判断（即第二充分条件失效），} \end{cases}$$

需要再用定理2判别（即用第一充分条件）.

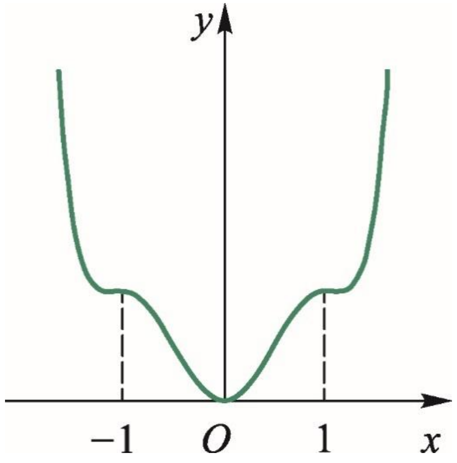
例2 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 (1) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续且可导.

(2) $f'(x)=6x(x^2-1)^2=0$, 得驻点 $x_1=-1,\ x=0,\ x=1$.

(3) $f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$.

(4) 对驻点逐一判别:



$\because f''(0)=6>0,\ \therefore f(0)=0$是极小值.

$\because f''(-1)=f''(1)=0$,

$\therefore$ 第二充分条件失效, 转而用第一充分条件判别.

$\because f'(x)$在$x=\pm1$左右邻域内不变号, $\therefore\ f(x)$在$x=\pm1$没有极值.

定理4 (判别法的推广)

若函数$f(x)$在x_0点有直到 n 阶的导数，

且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则

(1)当n 为偶数时，

$$x_0\text{为极值点, 且}\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0\text{时}, x_0\text{是极小值点.} \\ f^{(n)}(x_0)<0\text{时}, x_0\text{是极大值点.} \end{cases}$$

(2)当n 为奇数时，x_0不是极值点.

证 将$f(x)$在x_0点展开成带佩亚诺余项的泰勒公式,可得

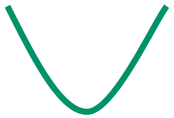
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

(1)当n为偶数,且$f^{(n)}(x_0)>0$时,

$\because$ $x\in(x_0-\delta,x_0)$时, $f(x)>f(x_0)$

$x\in(x_0,x_0+\delta)$时, $f(x)>f(x_0)$

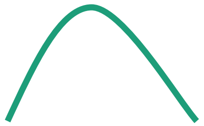
$\therefore$ x_0是极小值点.



$f^{(n)}(x_0)<0$时,

$f(x)<f(x_0)$

$f(x)<f(x_0)$



$\therefore$ x_0是极大值点.

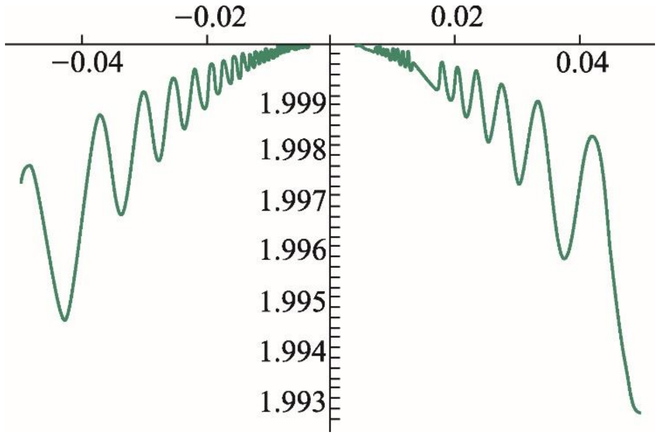
(2)当n为奇数时,进行课堂提问得出结论.

注 极值的判别法（定理2 — 定理4）条件都是充分的.

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在.

例如:

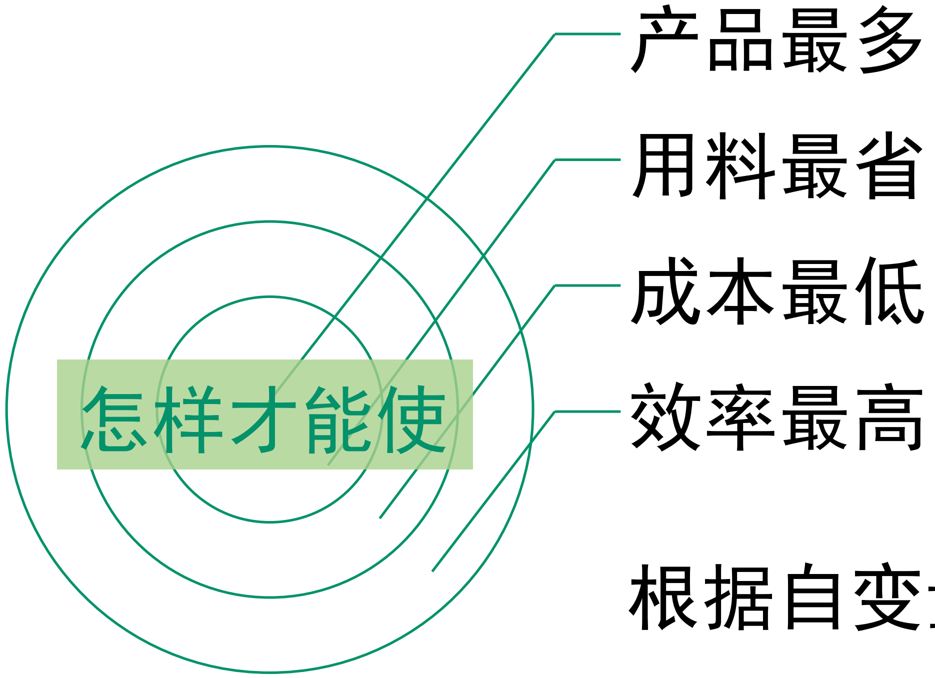
$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$



$f(0)=2$为极大值, 但不满足定理2—4的条件.

三、最大值与最小值问题

在工程技术、科学实验和实际问题中,经常有这样的问题:



这样的问题在数学中有时可归结为求某一函数**（称为目标函数）**的最大值或最小值问题.

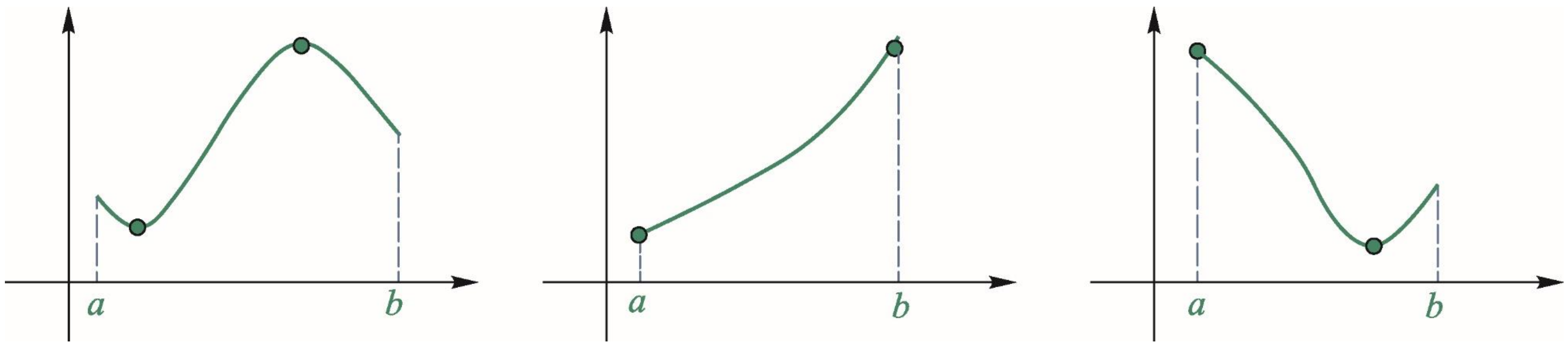
根据自变量的取值范围,分以下两种情况讨论.

1. 闭区间上连续函数的最值(最大值或最小值)

在第1章中已经知道,

闭区间$[a,b]$上的连续函数必有最大值和最小值.

显然，其最值只能在极值点或端点处达到.



求连续函数在闭区间上最值的步骤:

(1) 求$f(x)$在区间(a,b)内的极值可疑点: 驻点和不可导点

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots, x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{\, f(x_1), f(x_2),\ \cdots, f(x_m), f(a),\ f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{\, f(x_1), f(x_2),\ \cdots, f(x_m), f(a),\ f(b)\}$$

注意:如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.

例3 求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$在$[-3,4]$上的最大值与最小值.

解 $\because\ f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\in[-3,1]\cup[2,4],\\ -x^2+3x-2, & x\in(1,2).\end{cases}$

$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x\in(-3,1)\cup(2,4),\\ -2x+3, & x\in(1,2),\\ \text{不存在}, & x=1\text{或}x=2.\end{cases}$

$\therefore$ 得到区间内部极值的可疑点：驻点$x=\dfrac{2}{3}$，不可导点$x=1,x=2$.

$\because\ \underset{\text{max}}{f(-3)=20},\underset{\text{min}}{f(1)=0},f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4},\underset{\text{min}}{f(2)=0},f(4)=6.$

2.开区间上连续函数最大值最小值的求法

若开区间上的连续函数满足下列两个条件：

（1）$f(x)$在开区间有且仅有最大（小）值；

（2）$f(x)$在开区间只有一个可能取得极值的点，

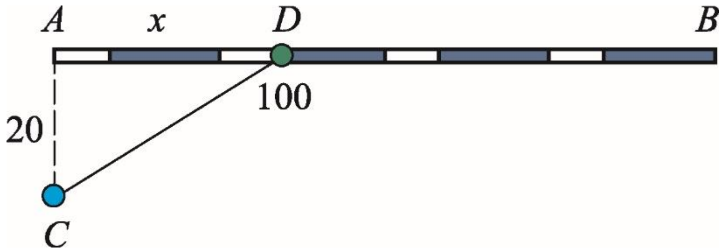
则可以断定这个极值点一定是函数的最大（小）值点.

实际问题求最值应注意

建立目标函数 → 求最值

若目标函数只有唯一驻点,则该点的函数值即为所求的最值.

例4　铁路上 AB 段的距离为100km，工厂C距A处20km, $AC\perp AB$, 要在AB线上选定一点D向工厂修一条公路. 已知铁路与公路每公里货运价之比为3: 5, 为使货物从B运到工厂C的运费最省, 问D点应选在何处?



解　设$AD = x$ (km)，　则$CD = \sqrt{20^2 + x^2}$, 总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x)\ (k \text{ 为某一常数})\ (0 \leqslant x \leqslant 100)$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right),$$ 令$y' = 0$, 得$x = 15$.

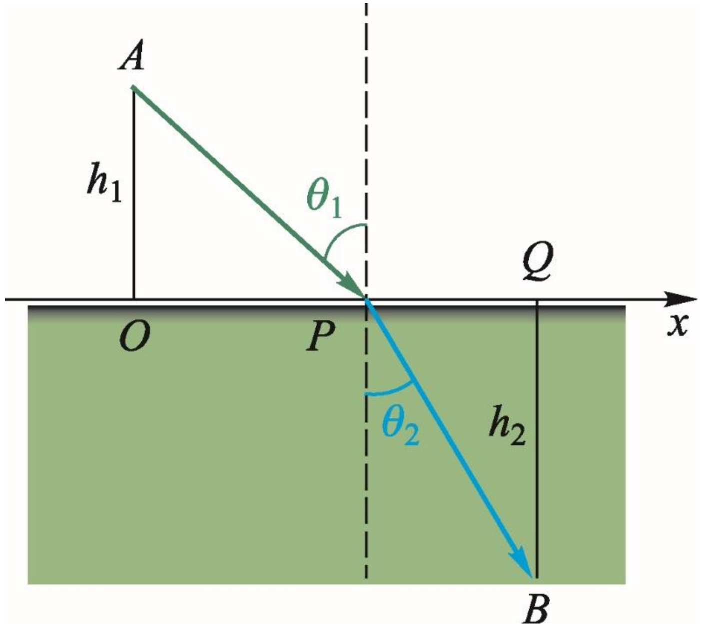
又 $y''\Big|_{x=15} = 5k\dfrac{400}{(400 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=15} > 0$,　所以 $x = 15$ 为唯一的极小值点,

从而为最小值点. 故$AD = 15$km时运费最省.

例5 一束光线由空气中点A经过水面折射后到达水中点B. 已知光在空气中和水中传播的速度分别是v_1和v_2, 光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播. 试确定光线传播的路径.

解 如图: 设$AO = h_1$, $BQ = h_2$, $OQ = l$, $OP = x$.

则A到B所需要的传播时间为



$$T(x) = \frac{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{{h_2}^2 + (l-x)^2}}{v_2}, x \in [0, l].$$

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{{h_1}^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{{h_2}^2 + (l-x)^2}}, x \in [0, l].$$

$\because T'(0) < 0$, $T'(l) > 0$, $\therefore T'(0)$在$[0, l]$上有唯一零点x_0.

又 $\because T''(x)=\dfrac{1}{v_1}\cdot\dfrac{{h_1}^2}{({h_1}^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{1}{v_2}\cdot\dfrac{{h_2}^2}{[{h_2}^2+(l-x)^2]^{\frac{3}{2}}}>0, x\in[0,l].$

$\therefore x_0$ 是$T'(x)$在$[0,l]$上的唯一零点.

$\therefore x_0$ 是$T(x)$在$[0,l]$上的最小值点.

又 x_0满足$T'(x)=0$，即 $\dfrac{x_0}{v_1\sqrt{{h_1}^2+{x_0}^2}}=\dfrac{l-x_0}{v_2\sqrt{{h_2}^2+(l-x_0)^2}}$.

记 $\dfrac{x}{\sqrt{{h_1}^2+x^2}}=\sin\theta_1$，$\dfrac{l-x}{\sqrt{{h_2}^2+(l-x)^2}}=\sin\theta_2$. 于是

著名的折射定律

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

θ_1入射角，θ_2折射角.

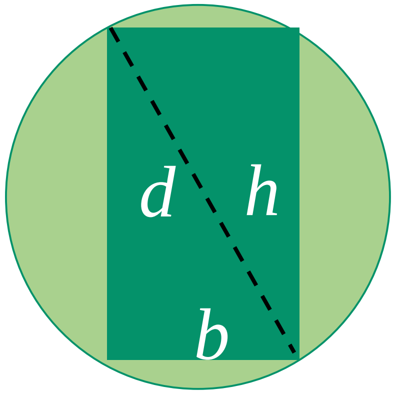
例6 把一根直径为d的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高h和宽b应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大？

解 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

$$W=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}b(d^2-b^2),\ b\in(0,d).$$

令$W'=\frac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$，得$b=\sqrt{\frac{1}{3}}d$.

从而有$h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}d$，即$d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.



由实际意义可知，所求最值存在，而驻点只一个，

故所求结果就是最好的选择.

例7 假设某工厂生产某产品x千件的成本是$C(x)=x^3-6x^2+15x$，售出该产品x千件的收入是$r(x)=9x$. 问是否存在一个能取得最大利润的生产水平？如果存在，找出这个生产水平.

解 售出x千件产品的利润是

$p(x)=r(x)-C(x)=-x^3+6x^2-6x,\quad x\geqslant 0.$

由$p'(x)=-3x^2+12x-6=0$，得驻点 $x_1=2-\sqrt{2}$，$x_2=2+\sqrt{2}$.

又$p''(x)=-6x+12$，$p''(x_1)>0$，$p''(x_2)<0$.

故$p(x)$在$x_2=2+\sqrt{2}$处达到最大利润，而在$x_1=2-\sqrt{2}$处发生局部最大亏损.

在经济学中，导数被称为边际.

边际成本$C'(x)$.

边际收入$r'(x)$.

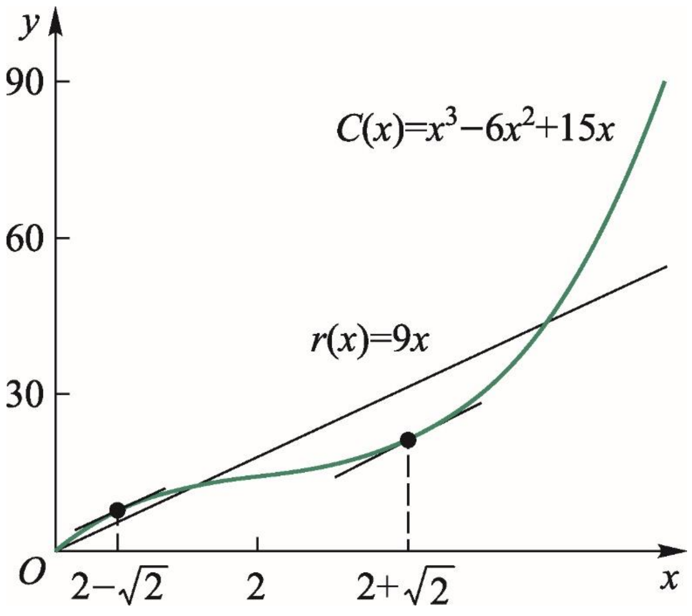
边际利润$p'(x)$.

例7的结果表明：

在最大利润的生产水平上，

$r'(x) = C'(x)$,

即边际收入等于边际成本.



第7.3节 函数图形的描绘

一、曲线的渐近线

二、函数图形的描绘

一、渐近线

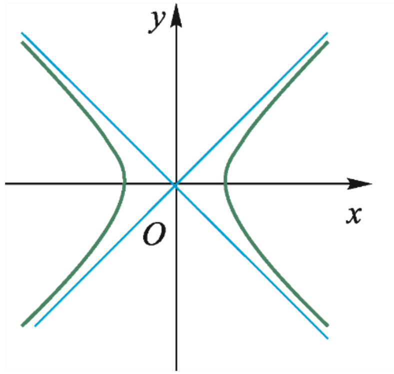
定义 当曲线 $y=f(x)$ 上的一动点 M 沿着曲线移向无穷点时，如果点 M 到某定直线 L 的 距离 趋向于零，那么直线 L 就称为曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线.

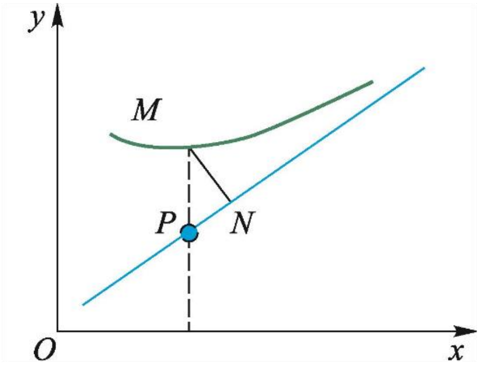
或为“纵坐标差”

例如: 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$

但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线.





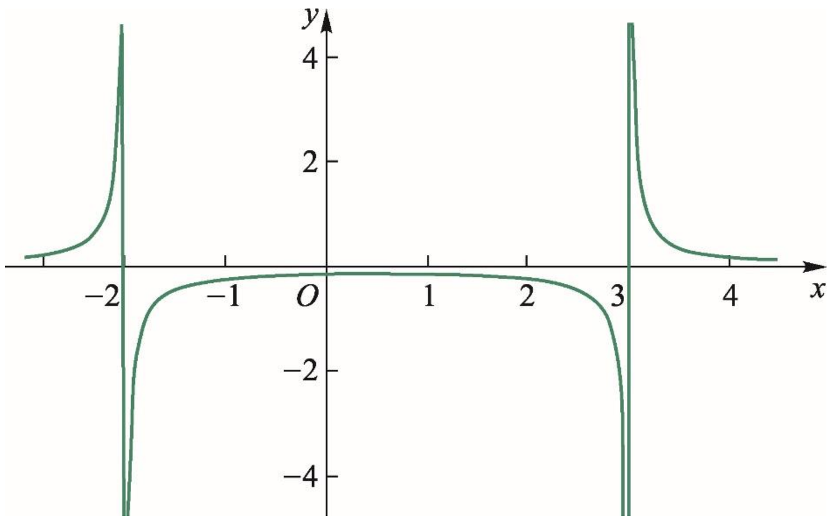
1. 铅直渐近线（垂直于 x 轴的渐近线）

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, 则 $x=x_0$ 就是$y=f(x)$的一条铅直渐近线.

例如: $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$,

有铅直渐近线两条:

$x=-2,\quad x=3.$



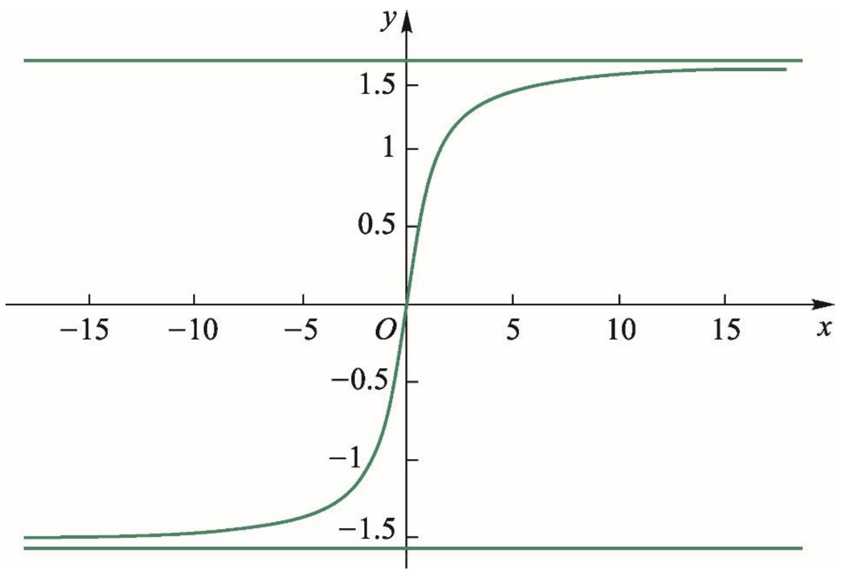
2.水平渐近线（平行于 x 轴的渐近线）

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$($b$ 为常数), 则 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如: $y=\arctan x$,

有水平渐近线两条:

$$y=\frac{\pi}{2},\qquad y=-\frac{\pi}{2}.$$



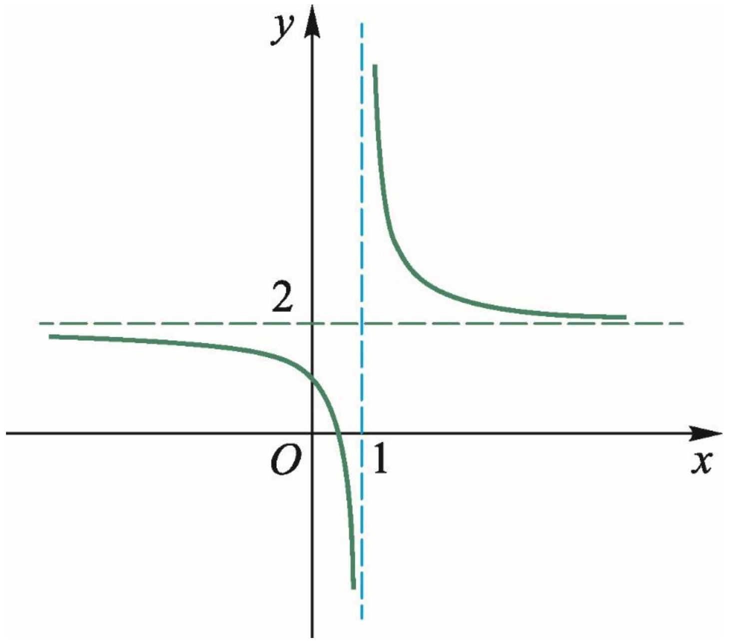
例1　求曲线$y=\dfrac{1}{x-1}+2$的渐近线.

解　$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2,$

$\therefore\ y=2$为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty,$

$\therefore\ x=1$为铅直渐近线.

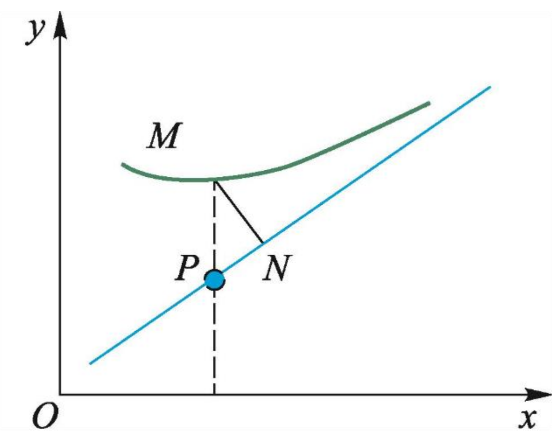


3.斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0(a,b$ 为常数),

则 $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.



斜渐近线求法:

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$

② $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$

$\Rightarrow$ $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

①和②有一个极限不存在，则可以断定 $y=f(x)$ 不存在斜渐近线.

例2　求 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

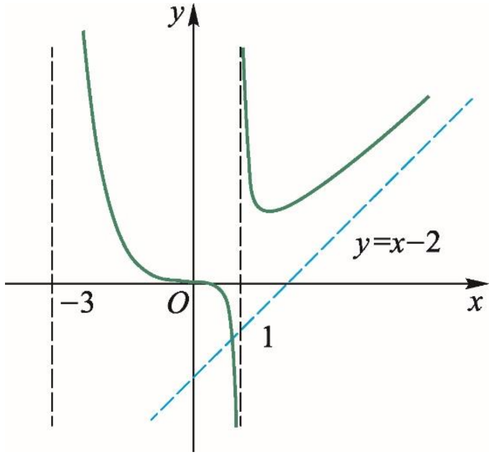
解　$\because y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$　$\therefore \lim\limits_{x\to-3} f(x)=\infty$,　$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$,

$\therefore$　$x=-3$和$x=1$ 都是y的铅直渐近线.

又　$\because a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$.

$\therefore$　$y=x-2$ 是曲线的斜渐近线.



二、函数图形的描绘

1.图形描绘的步骤

（1）确定函数$y=f(x)$的定义域，并考察其对称性及周期性；

（2）求$f'(x)$和 $f''(x)$，并求出$f'(x)$及$f''(x)$为0和不存在的点；

（3）列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

（4）求渐近线；

（5）确定某些特殊点，描绘函数图形.

2. 作图举例

例3 画出函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 （1）定义域为 $(-\infty,+\infty)$，无奇偶性及周期性.

（2）$f'(x)=(3x+1)(x-1),f''(x)=2(3x-1).$

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=-\dfrac{1}{3},x=1.$

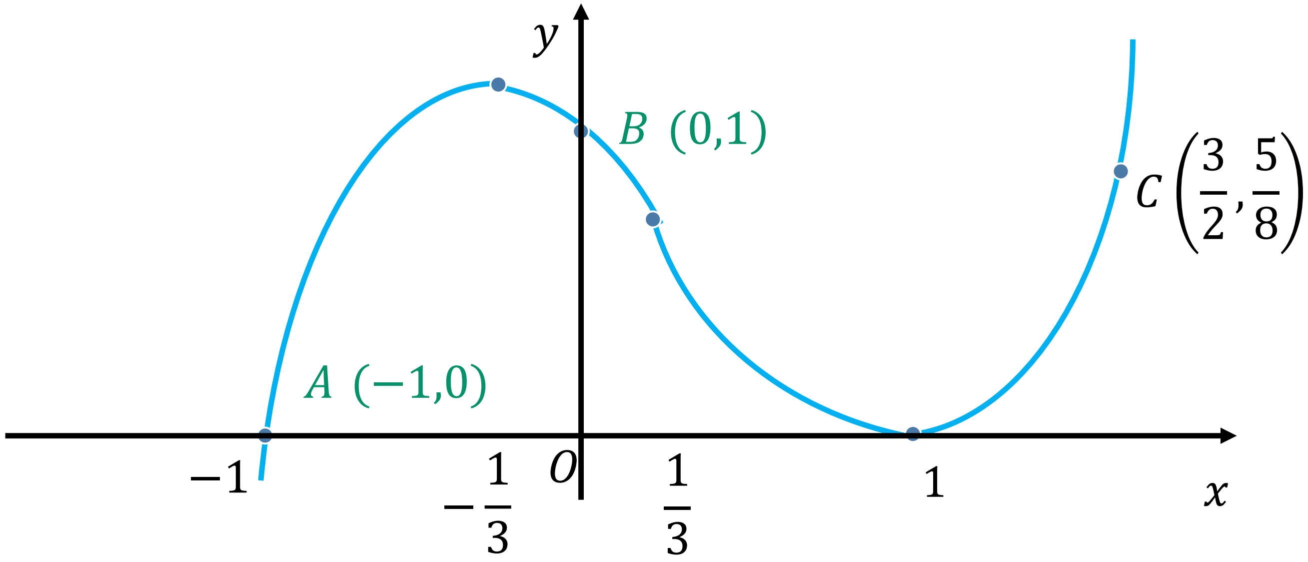
令 $f''(x)=0$,得特殊点 $x=\dfrac{1}{3}.$

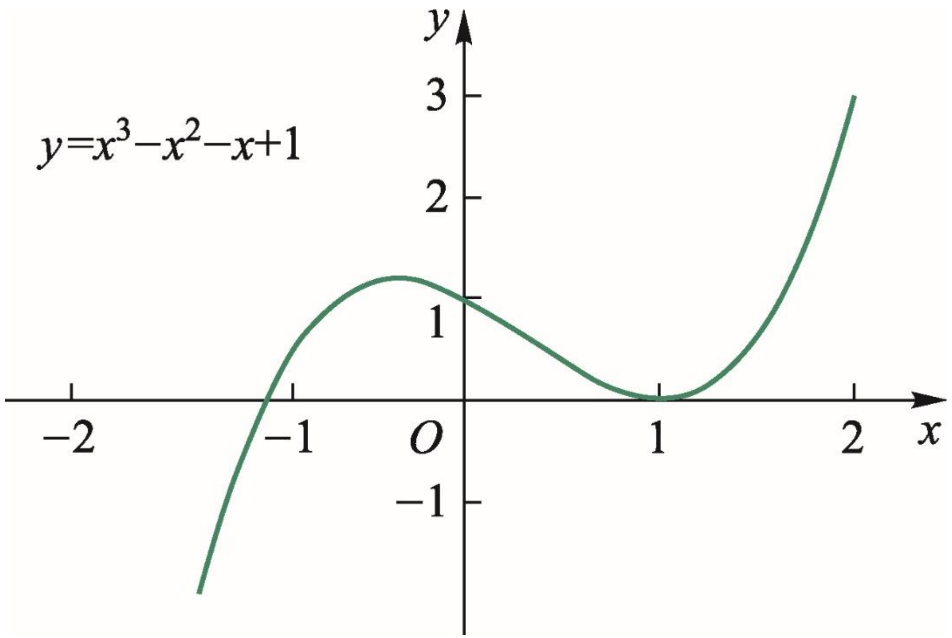
(3)列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		极大值 $\frac{32}{27}$		拐点 $\left(\frac{1}{3},\frac{16}{27}\right)$		极小值 0	

（5）确定某些特殊点，描绘函数图形.

$$A\ (-1,0), B\ (0,1),\ C\left(\frac{3}{2},\frac{5}{8}\right).$$




$y=x^3-x^2-x+1$
y
x
O
3
2
1
−1
−2
−1
1
2

例4 描绘函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 (1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

y为偶函数，图形关于y轴对称.

(2) $\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\varphi''(x)=-\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$

令 $\varphi'(x)=0$,得驻点 $x=0$,

令 $\varphi''(x)=0$,得特殊点 $x=-1$, $x=1$.

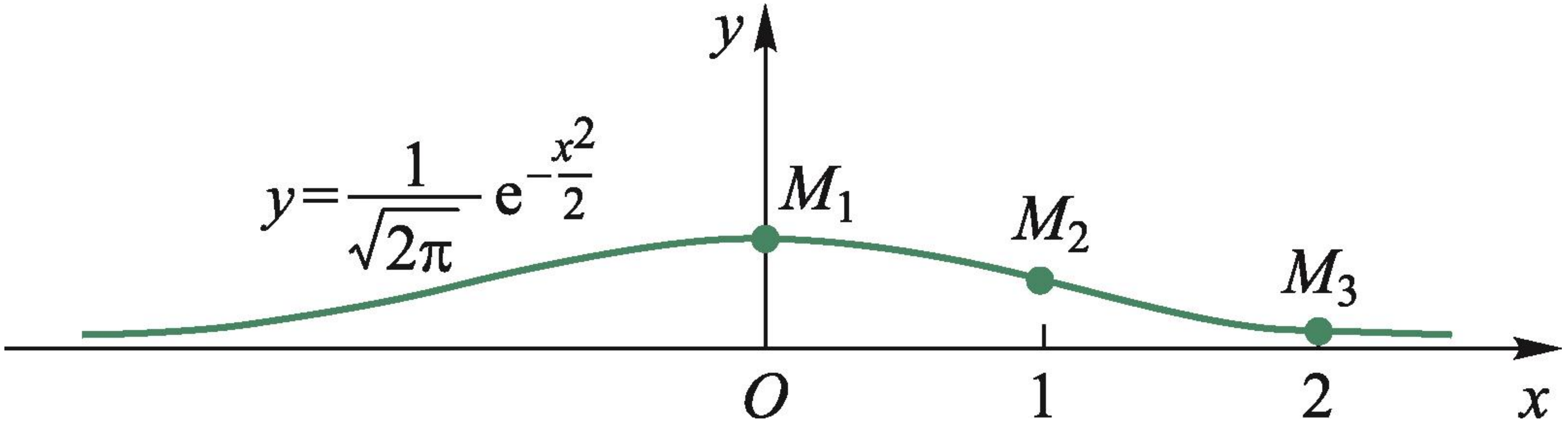
(3)列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$		拐点 $\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$		极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		拐点 $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$	

(4) $\because \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$, 得水平渐近线 $y=0$.

（5）确定某些特殊点,描绘函数图形.

$$\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}},\quad \varphi(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}.$$



例5 描绘函数 $y = 1 + \dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1)定义域为 $(-\infty, -3), (-3, +\infty)$. 无奇偶、周期和对称性.

$$f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3},\ f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

令 $f'(x) = 0$,得驻点 $x = 3$,

令 $f''(x) = 0$, 得特殊点 $x = 6$.

$x = -3$是函数的间断点.

(2)列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	不存在	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		不存在		极大值 4		拐点 $\left(6,\frac{11}{3}\right)$	

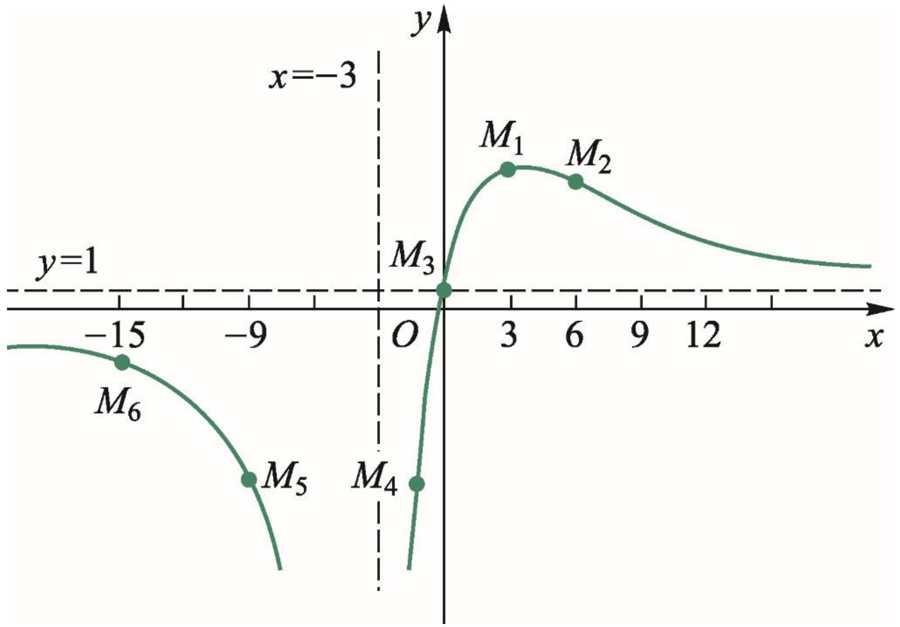
(3) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to-3} f(x)=-\infty,$

$\therefore$ 得水平渐近线 $y=1$,铅直渐近线 $x=-3$.

（4）确定某些特殊点，描绘函数图形.

$$f(3)=4,\ f(6)=\frac{11}{3}, f(0)=1, f(-1)=-8,$$

$$f(-9)=-8, f(-15)=-\frac{11}{4}.$$



第7.4节 曲率

一、弧微分

设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数. 如图，$A(x_0,y_0)$为基点，$M(x,y)$为任意一点. $N(x+\Delta x,y+\Delta y)$.

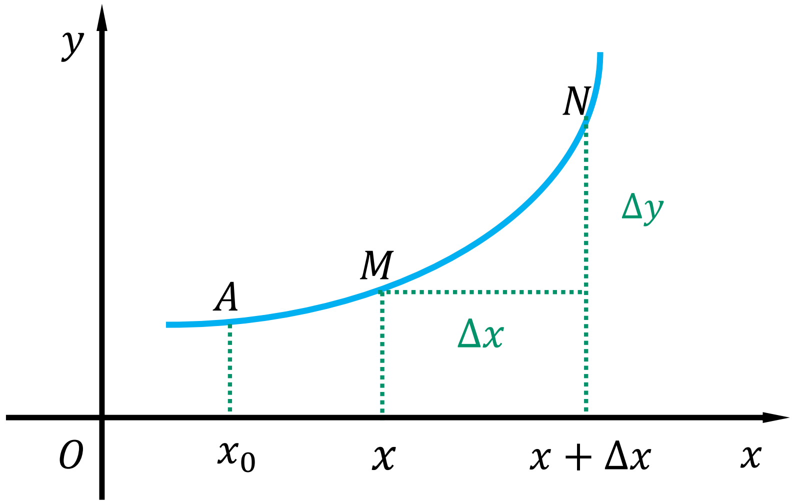
规定:

(1)曲线的正向与x增大的方向一致;

(2)弧长$s=\left|\overset{\frown}{AM}\right|=s(x)$,

当AM的方向与曲线正向一致时，s取正号，相反时，s取负号.

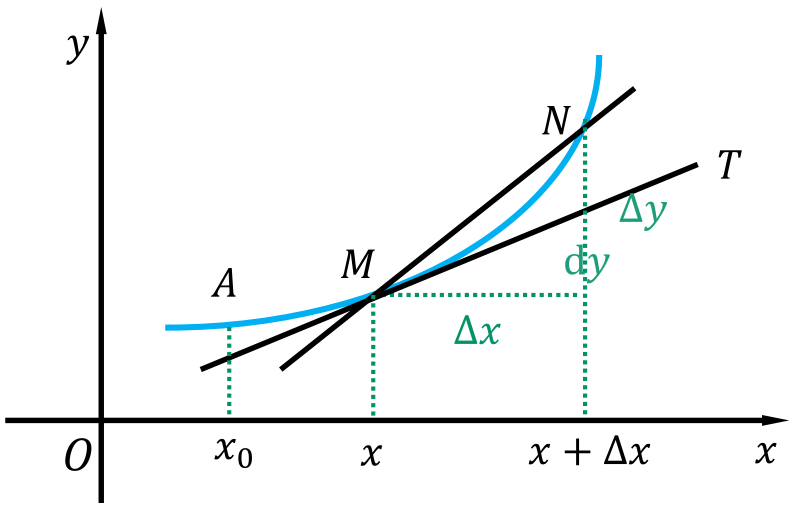
于是$s=s(x)$是单调增函数



$$\because \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|} \cdot \frac{|MN|}{\Delta x}$$

$$= \frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$= \pm \frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\frown}{MN}}{|MN|} = \pm 1 \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y')^2}$$

$$\therefore ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx \text{或} ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

弧微分公式

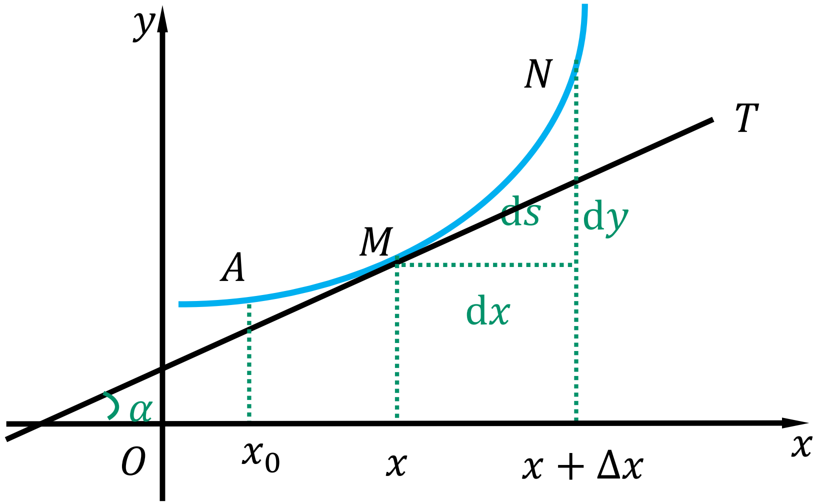
若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

则弧长微分公式为: $\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t$

几何意义:

$\mathrm{d}s = |MT|$

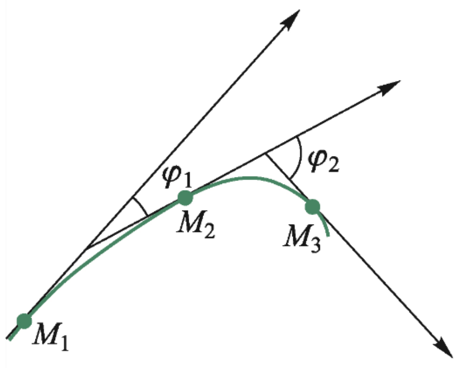
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha\,;\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$

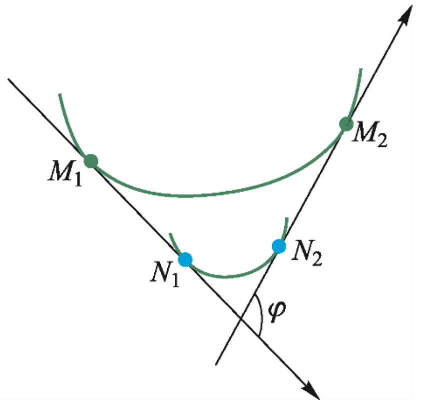


二、曲率及其计算公式

1. 曲率的定义

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量.





弧段弯曲程度

越大转角越大

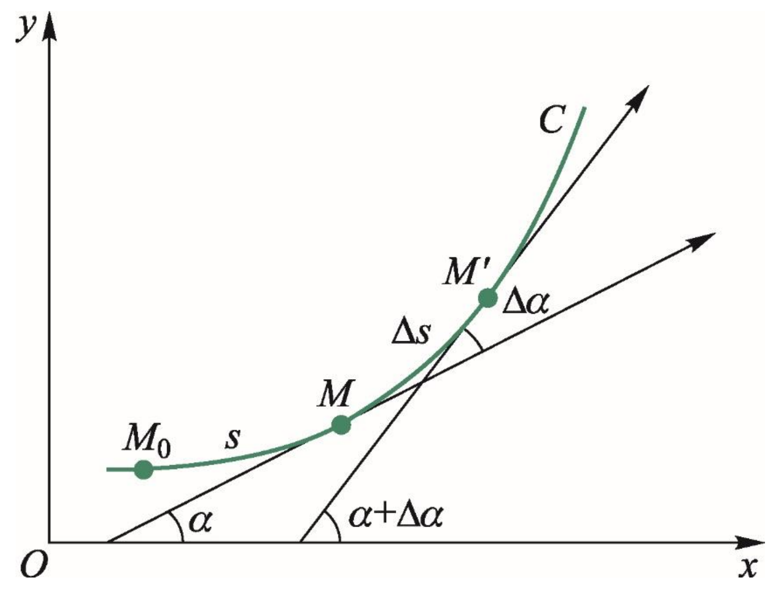
转角相同弧段

越短弯曲程度越大

设曲线C是光滑的，M_0是基点.

$$\left|\overset{\frown}{MM'}\right| = |\Delta s|,$$

$M \to M'$ 切线转角为$|\Delta\alpha|$.



定义

弧段Δs上的平均曲率为$\bar{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.

点M处的曲率为$K = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$.

注　直线上任意点处的曲率为0.

2. 曲率的计算公式

设$y=f(x)$二阶可导, $\because \tan\alpha = y' \quad (设 -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$,

$\therefore \alpha = \arctan y'$,

$\therefore \mathrm{d}\alpha = \dfrac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$,

曲率的计算公式

又 $\because \mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \quad \therefore K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率公式说明:

(1)当 $|y'| << 1$ 时,有曲率近似计算公式$K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx |y''|$.

(2)若曲线由参数方程$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$给出,则$K = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3)若曲线方程为$x = \varphi(y)$,则$K = \dfrac{|x''|}{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

例1 计算等边双曲线$xy=1$在点(1,1)处的曲率.

解 $\because y'=-\frac{1}{x^2},\ y''=\frac{2}{x^3},$

$$\therefore\ K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=1,y=1}$$

$$=\frac{2}{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例2 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点的曲率最大?

解 $\because y'=2ax+b,\ y''=2a,$

$$\therefore\ K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

显然，当$x=-\frac{b}{2a}$时，K最大.

即抛物线在顶点处的曲率最大.

$$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

三、曲率圆与曲率半径

定义

设曲线 $y=f(x)$ 在点$M(x,y)$ 处的曲率为 $K(K\neq 0)$.

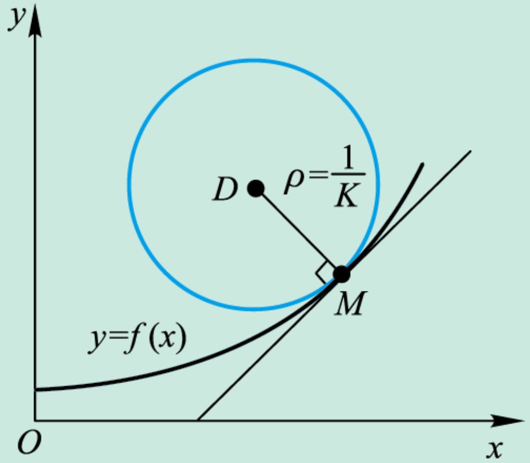
在点 M 处的曲线的法线上,在凹的一侧取一点 D,

$$使\ |DM|=\frac{1}{K}=\rho.$$

以 D 为圆心, ρ 为半径作圆(如图),

称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆(密切圆).

D——曲率中心, ρ——曲率半径.



注意:

(1)曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

$$即\ \rho = \frac{1}{K},\quad K = \frac{1}{\rho}.$$

(2)曲线上某点处的曲率圆与曲线有如下密切关系:

① 有公切线;　② 凹向一致;　③ 曲率相同.

(3)曲线上一点处的曲率圆弧可近似代替该点附近曲线弧

(称为曲线在该点附近的二次近似).

例3 设工件内表面的截线为抛物线$y = 0.4x^2$. 现要用砂轮磨削其内表面,问选择直径多大的砂轮比较合适?

解 $\because y' = 0.8x,\quad y'' = 0.8.$

由例2可知，抛物线在顶点(0,0)处曲率最大,

$$\therefore\ K = \left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0,y=0} = 0.8,\ \therefore\ \rho = \frac{1}{K} = 1.25.$$

抛物线顶点处的曲率半径

$\therefore$ 选用砂轮的半径不得超过1.25单位长,即直径不得超过2.50单位长.

*四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

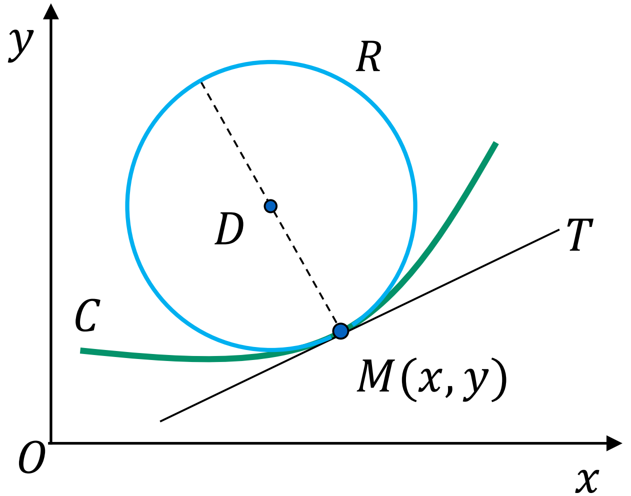
1.曲率中心的计算公式

设曲线方程为$y=f(x)$,且$y''\neq 0$,求曲线上点M处的曲率半径及曲率中心$D(\alpha,\beta)$的坐标公式.

设点M处的曲率圆方程为

$$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=R^2$$

故曲率半径公式为 $R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$



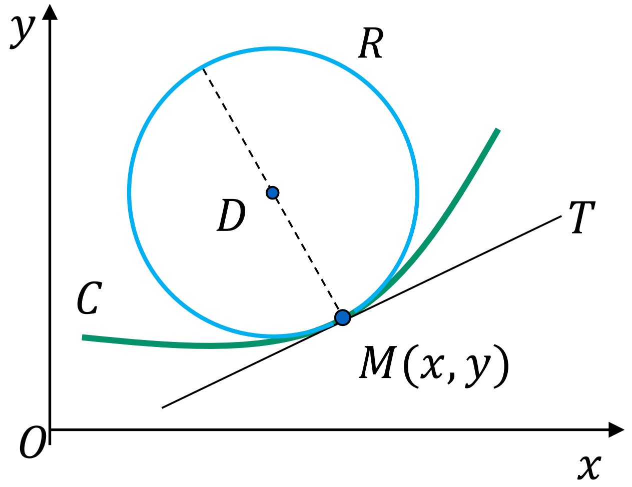
曲率中心$D(\alpha,\beta)$的坐标α，β满足方程组

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2, & (\because M(x,y)\text{在曲率圆上})\\ y'=-\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}, & (\because DM\perp MT)\end{cases}$$

由此可得曲率中心公式

$$\begin{cases}\alpha=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''},\\ \beta=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}.\end{cases}$$

注意$y-\beta$与y''异号



2.渐屈线与渐伸线

当点$M(x,y)$沿曲线$y=f(x)$移动时,

相应的曲率中心的轨迹G

称为曲线C的渐屈线,

曲线C称为曲线G的渐伸线.

曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为x).

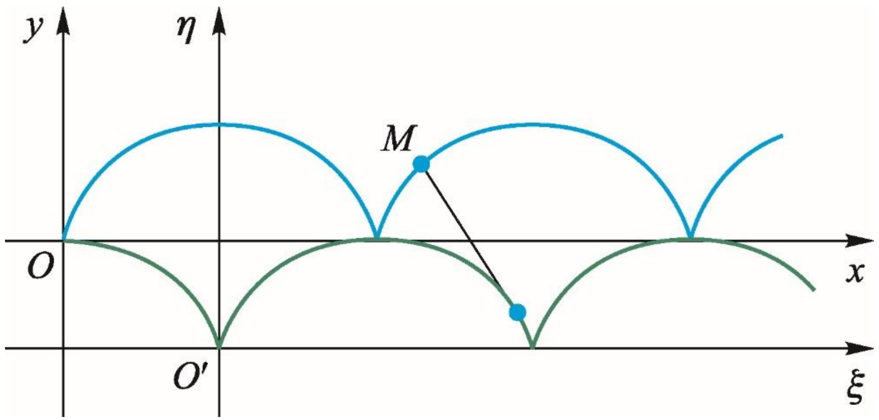
例5　求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的渐屈线方程.

解　$\because y' = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t},\ y'' = \dfrac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$ 代入曲率中心公式, 得

$$\therefore \begin{cases} \alpha = a(t + \sin t) \\ \beta = a(\cos t - 1) \end{cases}$$

令 $t = \pi + \tau$, $\begin{cases} \xi = \alpha - \pi a \\ \eta = \beta + 2a \end{cases}$

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau) \\ \eta = a(1 - \cos \tau) \end{cases}$$ (仍为摆线)



摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

半径为a的圆周沿直线无滑动地滚动时,

其上定点M的轨迹即为摆线.