高等数学A(上)

第二章 一元函数微分学

本章重点

导　数 — 描述函数变化快慢
微　分 — 描述函数变化程度
微分学 — 基本概念是导数与微分

微分学	导　数	微　分
基本概念是导数与微分	描述函数变化快慢	描述函数变化程度

中值定理	应用一	应用二
罗尔、拉格朗日、柯西	研究函数性质及曲线性态	利用导数解决实际问题

第二章

目 录

CONTENTS

第六节 洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、$0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式

在第二章中已经看到：两个无穷小之商或两个无穷大之商，其极限都不能直接利用极限运算法则来求.

例如:

未定式

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x-1}{2x^5+3x^2}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln 3x}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

未定式的定义 如果当$x\to a$(或$x\to\infty$)时，两个函数$f(x)$与$F(x)$都趋于零或趋于无穷大，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{F(x)}$称为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

未定 意味着关于它的极限不能确定出一般的结论，而并不是在确定的情况下关于它的极限不能确定.

对于 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 在第二章中已有一些求的方法.

本节研究

函数之商的极限　$\lim\frac{f(x)}{g(x)}\ \left(\frac{0}{0}\text{ 或 }\frac{\infty}{\infty}\right)$

洛必达法则　**转化**

导数之商的极限　$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

定理1

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

(2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\mathring{U}(a)$内可导，且$F'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为∞)

$$\longrightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

证 定义辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a, \\ 0, & x=a, \end{cases} \quad F_1(x)=\begin{cases} F(x), & x\neq a, \\ 0, & x=a, \end{cases}$$

则$f_1(x)$和$F_1(x)$在以 a 与 x 为端点的区间上,满足柯西中值定理条件,

$$\therefore \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi\text{在}x\text{与}a\text{之间})$$

注意到当$x\to a$时,$\xi\to a$, 故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{\xi\to a}\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=A.$

证毕

洛必达法则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

推论1 定理1中的$x\to a$换为 $x\to a^{+}$，$x\to a^{-}$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$之一，条件(2)作相应的修改,定理1仍然成立.

推论2 若$\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$仍属$\dfrac{0}{0}$ 型，且$f'(x),F'(x)$满足定理1条件,

则$\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{F''(x)}.$

并且可以以此类推.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan ax)'}{(\tan bx)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sec^2 ax}{b\sec^2 bx} = \dfrac{a}{b}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2} = \dfrac{3}{2}$.

$\neq \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6}{6} = 1$

注意： 不是未定式不能用洛必达法则！

例3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

思考： 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan n}{\dfrac{1}{n}}$（$n$为正整数）？

例4 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{2x\sin x+x^2\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x\cdot\sec^2x}{2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x}=\cdots$$ 繁杂!

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

等价无穷小代换 $x^2\cdot\sin x\sim x^2\cdot x$

洛必达法则

化简 $\sec^2x-1=\tan^2x$

等价无穷小代换 $\tan x\sim x$

注意: 洛必达法则是求未定式的一种有效方法,但与其他求极限方法结合使用,效果更好

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理2

(1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \lim\limits_{x\to a}|F(x)| = \infty$

(2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导, 且$F'(x) \neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为$\infty$) $\longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ (洛必达法则)

证　仅就极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 存在的情形加以证明.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}\neq 0$的情形

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{F(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{-1}{F^2(x)}F'(x)}{\dfrac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\frac{F'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

$\therefore 1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F'(x)}{f'(x)}$ 从而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

(2) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = 0$的情形.取常数$k \neq 0$.

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{F(x)} + k\right] = \lim_{x \to a}\frac{f(x) + kF(x)}{F(x)} = k \neq 0,$$ 可用(1)中结论

$$= \lim_{x \to a}\frac{f'(x) + kF'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to a}\left[\frac{f'(x)}{F'(x)} + k\right]$$

$$\therefore \lim_{x \to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

(3)当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\infty$时，结论仍然成立.？（证明略）

推论3 定理2中的 $x\to a$ 换为 $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$之一，条件(2)作相应的修改，定理2仍然成立.

推论4 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$仍属 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，且$f'(x)$, $F'(x)$满足定理2条件，

则 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{F''(x)}$.

并且可以以此类推.

例5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0).\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}\ (n>0,\lambda>0).$

解 (1) n为正整数的情形.

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}}$

$=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x}}=0.$

(2) n不为正整数的情形.

存在正整数k, 使当$x>1$时,

$x^k<x^n<x^{k+1}.$

于是 $\dfrac{x^k}{\mathrm{e}^{\lambda x}}<\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}<\dfrac{x^{k+1}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}.$

$\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=0,$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=0.$

注

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0\,(n>0)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=0\,(n>0,\lambda>0)$的结果表明,当$x\to+\infty$时, $\ln x$, x^n $(n>0)$, $\mathrm{e}^{\lambda x}$ $(\lambda>0)$均为无穷大,后者比前者趋于$+\infty$更快.

下表列出了x分别取10, 100, 1000时, 函数 $\ln x$, $\sqrt{x}$, x^2及e^x相应的函数值. 从中可以看出当 x 增大时这几个函数增大"速度"快慢的情况.

x	10	100	1000
$\ln x$	2.3	4.6	6.9
$\sqrt{x}$	3.2	10	31.6
x^2	100	10^4	10^6
e^x	2.20×10^4	2.69×10^{43}	1.97×10^{434}

(2) 当 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在($\neq \infty$)时, $\lim \dfrac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

例如: 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

洛必达法则失效

解 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\cos x}{x-\cos x} \neq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$　极限不存在

事实上 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{\cos x}{x}}{1-\dfrac{\cos x}{x}} = 1.$　注意洛必达法则的使用条件

(3) 某些情况下洛必达法则不能解决计算问题.

例如: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\ ?$$

事实上: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$

三、$0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式解法

关键： 将其他类型未定式化为洛必达法则可解决的类型.

1、$0\cdot\infty$型

步骤：$0\cdot\infty \Rightarrow \dfrac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\dfrac{1}{0}$.

例7 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln x \ (n>0)$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^n}{n}=0.$$

课堂练习

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\mathrm{e}^x$.

答案 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$

$=+\infty$.

2、$\infty-\infty$型

步骤：$\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例8 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$. $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$

3、$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤: $\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \begin{cases} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{cases} \Rightarrow \ 0\cdot\infty.$

或 $\lim f(x)^{g(x)}$

$= \lim \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$

$= \mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$

例9　求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$. (0^0)

解1　原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \mathrm{e}^0 = 1.$

解2　令$y = x^x$，则 $\ln y = x\ln x$.

于是 $\ln\lim\limits_{x\to0^+} y = \lim\limits_{x\to0^+}\ln y = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$，故 $\lim\limits_{x\to0^+} y = \mathrm{e}^0 = 1.$

例10 求 $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^∞)

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}$.

例11 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x}}=e^{-1}$.

课堂练习 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$.

答案: 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\cdots=1$. 同例9