§6.1 实二次型及其标准型

一、二次型及其标准形的概念

二、二次型的表示方法

三、合同矩阵

四、用正交变换化二次型为标准形

五、拉格朗日配方法

0 知识引入

解析几何中，二次曲线的一般形式$ax^2+bxy+cy^2=d$

通过选择适当的可逆变换

$$\begin{cases} x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi \\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi \end{cases} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

使得$mx'^2+ny'^2=d.$

例 二次曲线 $xy=1$

通过可逆的线性变换$\begin{cases} x=x'+y' \\ y=x'-y' \end{cases}$

使得$x'^2-y'^2=1.$

一 二次型及其标准形的概念

定义5.1 含有n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型(quadratic form) .

系数为实数的二次型为实二次型

系数为复数的二次型为复二次型

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

都为二次型 .

一 二次型及其标准形的概念

只含有平方项的二次型 $f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$

称为二次型的标准形(或法式).

例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2$ 为标准形.

若标准形中的系数只在 –1,0,1 三个数中取值，即有

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2$$

称上式为二次型的规范形.

例如 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_4^2$ 为规范形.

二 二次型的表示方法

1. 用和号表示

二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$

取$a_{ji} = a_{ij}$，则$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$，

于是有：$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n$

$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n$

$+ \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$

二 二次型的表示方法

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$
$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$

对称阵的二次型

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=x^T Ax.$$

对称阵

二 二次型的表示方法

2. 用矩阵表示

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$(其中$a_{ij}=a_{ji}$), $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$,其中A为对称矩阵.

对称矩阵 A 称为二次型 f 的矩阵.

对称矩阵 A 的秩称为二次型 f 的秩.

对称矩阵 A 与二次型 f 之间一一对应.

二 二次型的表示方法

例1 写出二次型 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ 的矩阵表示式并求 f 的秩.

解 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$\because \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \ R(A) = 3$, 即二次型 f 的秩为 3.

二 二次型的表示方法

例2 $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 9\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ 是否为二次型?

若是, 写出 f 的矩阵.

解 $f(x,y,z)=x^2+3y^2+5z^2-2xy+2xz+8yz,$

故 f 是二次型, 且其矩阵为: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}.$

二 二次型的表示方法

3. 二次型、标准型与规范型的关系

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_n \Longleftrightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ 找可逆的线性变换$x=Cy$

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2 \Longleftrightarrow A=\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ 找可逆的线性变换$y=Pz$

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2 \Longleftrightarrow A=\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

二 二次型的表示方法

3. 二次型、标准型与规范型的关系

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_n$$

$$f=x^TAx$$
$$=(Cy)^TACy$$
$$=y^T(C^TAC)y$$

找可逆的线性变换$x=Cy$

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$=y^T\Lambda y$$

找可逆的线性变换$y=Pz$

找可逆的线性变换$x=Cy$
使C^TAC为对角矩阵.

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

注：经过可逆变换后，二次型f的矩阵由A变成矩阵C^TAC
则二次型的秩不变.

三 合同矩阵

1. 定义5.3 设A和 B 都是 n 阶方阵, 若有可逆矩阵 C 使得 $B=C^TAC$, 则称矩阵A与B 合同.

2. 性质1：若n阶方阵A与B合同，则

(1)$R(A)=R(B)$;

(2)若A为对称矩阵，则B也为对称矩阵.

证明：$(2)B^T=(C^TAC)^T=C^TA^T(C^T)^T=C^TA^TC$

$$\because A^T=A,\quad \therefore B^T=B.$$

三 合同矩阵

3. 合同对角化：若n阶方阵A与对角矩阵Λ合同，则称A为可合同对角化.

即存在可逆矩阵C，使得 $C^T AC=\Lambda$.

4. 性质2：任意实对称矩阵A必合同于对角矩阵Λ，

即存在可逆矩阵C，使得 $C^T AC=\Lambda$.

5. 定理：设A为n阶实对称阵, 则必有正交阵P, 使得

$$P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda,$$

其中Λ是以A为n个特征值为对角元的对角阵.

注：实对称阵A,可相似对角化，可合同对角化，

即找到正交阵C，使得 $C^{-1}AC = C^T AC = \Lambda$.

四 用正交变换化二次型为标准型

对于二次型, 我们讨论的主要问题是:
寻求可逆的线性变换, 将二次型化为标准形.

由上可知: 即寻找可逆矩阵 C 使 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角阵.
此问题称为把对称阵 A 合同对角化.

设对称阵 A 的 n 个特征值为: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,
对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,
则总存在正交阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 即 $P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda$.

四 用正交变换化二次型为标准型

定理 5.2 任给二次型 $f=x^{T}Ax$, 总有正交变换 $x=Py$, 使 f 化为标准形: $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$,
其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 f 的矩阵 A 的n个特征值.

推论 任给二次型 $f=x^{T}Ax$, 总有可逆变换 $x=Cz$, 使 f 化为规范性: $f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2\cdots-z_r^2$,
其中 r 是 f 的秩.

四 用正交变换化二次型为标准型

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤:

1. 写出二次型 f 的矩阵 A.

2. 求出矩阵 A 的所有特征值: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

3. 对每个 $\lambda=\lambda_i$ 求出对应方程 $(A-\lambda E)x=0$ 的基础解系, 并正交、单位化得: $P_1, P_2, \cdots, P_n$.

4. 得正交矩阵: $P=(P_1, P_2, \cdots, P_n)$.

5. 正交变换 $x=Py$ 将 f 化为标准形:

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

四 用正交变换化二次型为标准型

例1 求一个正交变换 $x = Py$, 将二次型 f 化为标准形.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

解 f 的矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+4)(\lambda-5)^2,$$

A的特征值为: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 5.$

四 用正交变换化二次型为标准型

对 $\lambda_1 = -4$,

$$由A+4E=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$得:\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ 单位化得:P_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

对 $\lambda_2=\lambda_3=5$,

$$由A-5E=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

四 用正交变换化二次型为标准型

$$得:\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},$$

$$正交化得:\alpha_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\qquad \alpha_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$单位化得:P_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad P_3=\frac{\sqrt{5}}{15}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix},$$

四 用正交变换化二次型为标准型

得正交矩阵: $P=(P_1, P_2, P_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$,

故正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

将 f 化为标准形: $f = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2$.

四 用正交变换化二次型为标准型

说明:

若再令$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2} z_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} z_2, \\ y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \overset{\Delta}{=} C \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$

则可逆变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, (其中 $K=PC$)

将 f 化为规范形: $f = -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

四 用正交变换化二次型为标准型

例2 二次型 $f = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为标准形: $f = y_1^2 + 4y_3^2$,

求 a, b 及正交矩阵P.

解 f 的矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

由 f 的标准形可知A的特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4.$

故有 $\begin{cases} 2 + a = 5 \\ |A| = -(b-1)^2 = 0 \end{cases}$, $\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$.

四 用正交变换化二次型为标准型

$$对\ \lambda_1=1,\ 由A-E=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$得:\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad 单位化得:P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$对\ \lambda_2=0,\ 由A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$得:\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},单位化得:P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

四 用正交变换化二次型为标准型

对 $\lambda_3=4$,由$A-4E=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得:$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,单位化得:$P_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

故所求正交阵为 $P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

五 拉格朗日配方法

1. 若二次型含有 x_i 的平方项, 则先把含有 x_i 的乘积项先集中, 然后配方, 再对其余的变量同样进行,直到都配成平方项为止.

例3 用配方法化二次型为标准形, 并求所用变换矩阵

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

五 拉格朗日配方法

解 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

$$=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3)-x_2^2+x_3^2-2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2x_2^2-4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2+2x_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

可将 f 化为标准形：$f=y_1^2-2y_2^2+2y_3^2.$

所用变换矩阵为 $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(|C|=1\neq 0)$.

五 拉格朗日配方法

2. 若二次型中不含有平方项, 但有 $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$,

则先作可逆变换 $\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \quad (k = 1,2,\cdots,n \text{且} k \neq i, j) \\ x_k = y_k \end{cases}$

化二次型为含有平方项的二次型再按 1 中方法配方.

例4 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形,

并求所用的变换矩阵.

五 拉格朗日配方法

例4 化二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 为标准形,并求所用的变换矩阵.

解 令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3 \end{cases}$

代入二次型得: $f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$

配方,得: $f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$

再令 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3, \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3, \\ y_3=z_3 \end{cases}$

可将 f 化为标准形: $f=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$

五 拉格朗日配方法

由上可知有:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

故所用变换矩阵为:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (|C| = -2 \neq 0).$$

感谢聆听