第二节 数列极限的定义

一、数列的概念

二、数列的极限

三、数列极限的性质

四、小结

0 基本要求

基本要求:

1. 理解数列极限的定义,以及它的推论.

2. 会利用定义来证明一些简单的数列极限.

3. 理解数列极限的性质.

一 数列的概念

割圆术：用圆的内接多边形来逼近圆的方法

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”。

——《九章算术注》

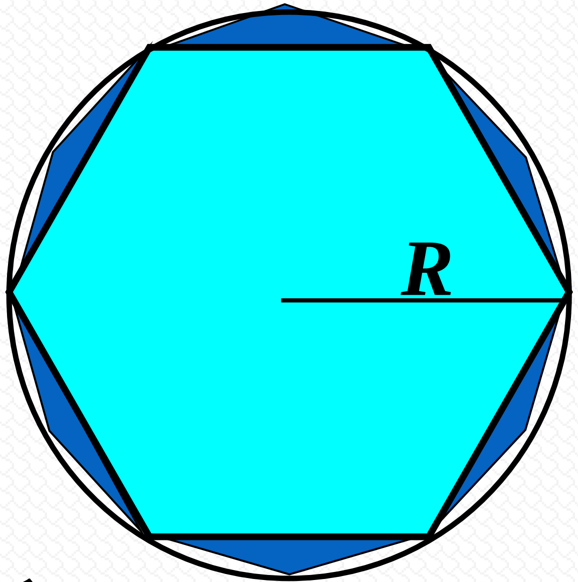
刘徽(公元3世纪)

正六边形的面积 A_1,

正十二边形的面积 A_2,

....

正$6 \times 2^{n-1}$边形的面积A_n,



$A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots \Rightarrow$ 圆面积 A.

一 数列的概念

我国春秋战国时期的哲学家庄子在《庄子.天下篇》中记载的“截仗问题”中也隐含着深刻的极限思想。

截杖问题

庄子：“一尺之棰, 日截其半, 万世不竭.”

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

一 数列的概念

数列定义　按照某一法则，对每个自然数 n，都有确定的实数x_n与之对应，这列有序的数：

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

称为数列 (sequence),

第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项 .

数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 简记为 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

也可记为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

一 数列的概念

例如:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,$ $\quad x_n = \frac{1}{n};$ $\quad (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$

2) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots,$ $\quad x_n = 2^n;$ $\quad (\ 2^n\ )_{n=1}^{\infty}$

3) $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots,$ $\quad x_n = (-1)^{n+1};$ $\quad ((-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$

4) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\cdots,$ $\quad x_n = \frac{n+(-1)^{n-1}}{n};$ $\quad (\frac{n+(-1)^{n-1}}{n})_{n=1}^{\infty}$

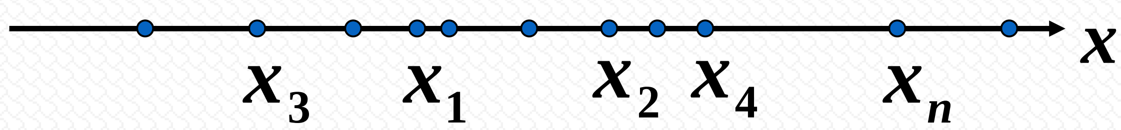
5) $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \cdots, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}, \cdots$

$$x_1 = \sqrt{3},\ \ x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}.$$

一 数列的概念

说明：

1. 在几何上，数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



2. 数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

数列实质上是定义在正整数集上的函数：

$$x_n = f(n),\ n \in Z^+$$

二 数列的极限

问题：当 n 无限增大时，x_n 的变化趋势如何？

把n无限增大这个重要的变化过程记为 $n\to\infty$.

当 $n\to\infty$ 时，$x_n=1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

当 $n\to\infty$ 时，$x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 无限接近于 0.

当 $n\to\infty$ 时，$x_n=2^n$ 无限增大.

当 $n\to\infty$ 时，$x_n=(-1)^{n+1}$ 没有确定的变化趋势.

二 数列的极限

当 $n \to \infty$ 时, x_n 的变化趋势分为三类:

1) x_n 无限接近于某个确定的常数 a .

2) x_n 无限增大 ,即趋向无穷大 .

3) x_n 没有确定的变化趋势 .

二 数列的极限

简明定义：

设数列$\{x_n\}$，当n无限增大时，通项x_n无限趋近于一个确定的数a，

则称a为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限或$\{x_n\}$收敛于a，

记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，此时，称$\{x_n\}$为收敛数列，

若数列的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$发散，或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

而数列 $x_n = 2^n$, $x_n = (-1)^{n+1}$ 没有极限.

二 数列的极限

问题:“无限接近”意味着什么? 如何用精确的数学语言刻划它?

当 $n \to \infty$ 时, $x_n = \dfrac{1}{n}$ 无限接近于 0 .

$$\because \quad |x_n - 0| = \frac{1}{n}$$

给定 $\dfrac{1}{100}$, 要使 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{100}$, 由 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$, 只要 $n > 100$;

给定 $\dfrac{1}{1000}$, 要使 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$;

给定 $\dfrac{1}{10000}$, 要使 $|x_n - 0| < \dfrac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$;

任意给定 $\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$ 成立, 只要 $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

二 数列的极限

问题:“无限接近”意味着什么? 如何用数学语言刻划它?

当 $n \to \infty$ 时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\frac{1}{100}$, 要使 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$ 由 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$;

给定 $\frac{1}{1000}$, 要使 $|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$;

给定 $\frac{1}{10000}$, 要使 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$;

任意给定 $\varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立, 只要 $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

二 数列的极限

定义 若存在常数 a，使对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正整数$N>0$，当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$当 $n\to\infty$ 时的**极限**(limit)或者称数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **收敛**于 a.

记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，或 $x_n \to a\ (n\to\infty)$

如果数列没有极限，就说数列是发散的，习惯上说$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

$\varepsilon-N$定义：

如果对$\forall\varepsilon>0,\exists N\in Z^+$,使当$n>N$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

二 数列的极限

说明：

1.ε是用来刻画x_n与常数a的接近程度，ε具有任意性和稳定性的双重意义：ε的任意性刻画了x_n与无限接近；同时ε又具有相对稳定性，一经取定，它就确定了，这样用有限形式$|x_n - a| < \varepsilon$来表示x_n无限接近于a的过程.

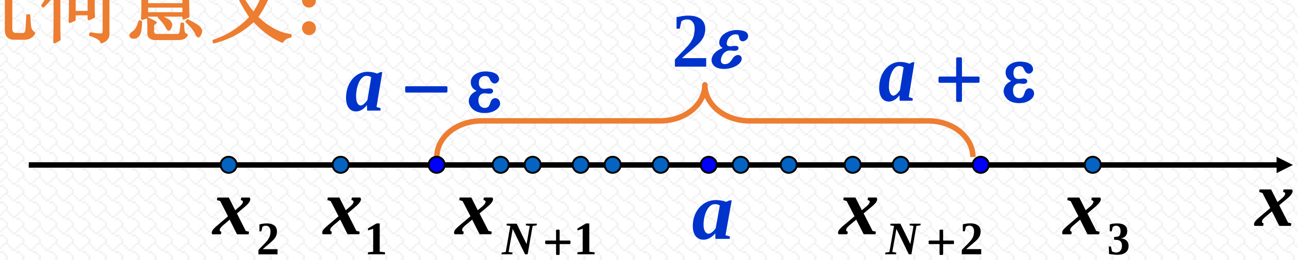
2.N用来刻画n的增大程度，要使得$|x_n - a| < \varepsilon$，n要变化到什么程度，定义中表明了比N大的各项都应该满足$|x_n - a| < \varepsilon$，x_n是否以a为极限，关键是对$\forall \varepsilon > 0$这样的N是否存在.

二 数列的极限

3.一般地，N与ε有关，ε取得越小，相应地N就越大. 如果N存在，这样的N就不唯一.

二 数列的极限

几何意义:



推论 数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 a $\Leftrightarrow$

对 a 的任一 ε 邻域 $U(a,\varepsilon)$，只有有限多项 $x_n \notin U(a,\varepsilon)$.

二 数列的极限

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 $\left|x_n-a\right| = \left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right| = \dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon>0$, 要使 $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,

所以, $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时,

总有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

二 数列的极限

用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，就是证明对 $\forall\varepsilon>0$，N存在.

证明的步骤：

(1) 对于任意给定的正数ε, 令 $|x_n-a|<\varepsilon$;

(2) 由上式开始分析倒推，推出 $n > \varphi(\varepsilon)$;

(3)取$N=[\varphi(\varepsilon)]$, 再用$\varepsilon-N$语言顺述结论.

二 数列的极限

例2 设 $x_n \equiv C$ (C为常数)，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 对于一切自然数 n,

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon \text{ 恒成立},$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

说明: 常数列的极限等于同一常数 .

注意 数列极限的定义未给出求极限的方法.

二 数列的极限

例3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+3}=\dfrac{3}{2}$.

注意：(1)由于N 不唯一,不要求最小的N,故可把$|x_n-a|$适当放大,得到一个新的不等式,再寻找 N.

(2)从 $|x_n-a|<\varepsilon$ 找 N 与解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 意义不同.

二 数列的极限

例4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q| < 1$.

证 任给$\varepsilon > 0$,(设$\varepsilon < 1$) 若$q = 0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若$0 < |q| < 1$, $|x_n - a| = |q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$,

$n\ln|q| < \ln\varepsilon$, $\ln|q| < 0$ $\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$,

所以, $\forall\, \varepsilon > 0$, 取$N = [\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$, 则当$n > N$时,

就有$|q^n - 0| < \varepsilon$, $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

二 数列的极限

例5 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0).$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

证 $a>1$任给$\varepsilon>0,$

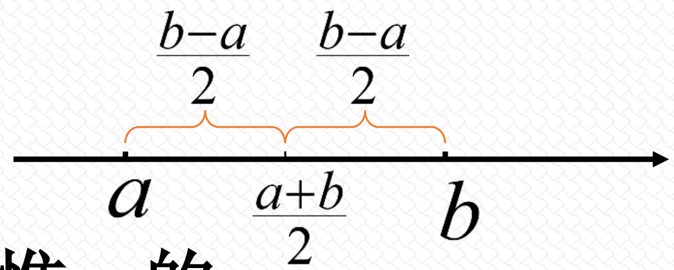
$$\left|x_n-1\right|=\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon,\quad \sqrt[n]{a}<1+\varepsilon,\quad \frac{1}{n}\ln|a|<\ln(1+\varepsilon),$$

$$\therefore n>\frac{\ln|a|}{\ln(1+\varepsilon)},\ 取N=\left[\frac{\ln|a|}{\ln(1+\varepsilon)}\right],\ 则当n>N时,$$

$$就有\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon,\qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

三 数列极限的性质

1. 极限的唯一性



定理1 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则极限是惟一的.

证: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$. 取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$,

故$\exists N_1 \in Z^+$, 当 $n > N_1$ 时, 有$|x_n - a| < \dfrac{b-a}{2}$, 即 $x_n < \dfrac{a+b}{2}$,

$\exists N_2 \in Z^+$, 当 $n > N_2$ 时, 有$|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$, 即 $x_n > \dfrac{a+b}{2}$,

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时,

x_n满足的不等式矛盾. 故假设不真！

因此收敛数列的极限必惟一

三 数列极限的性质

2. 收敛数列的有界性

1) 数列的有界性　对数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$，若$\exists M>0$，对一切自然数 n，恒有$|x_n|\le M$成立，则称数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 有界，否则，称为无界.

2) 定理2　收敛数列必有界.

推论　无界数列必定发散.

注意：有界性是数列收敛的必要非充分条件.

3. 收敛数列的保号性

定理3　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，且 $A>0$ (或 $A<0$)，则 $\exists N\in Z^{+}$，当$n>N$时，$x_n>0$ (或 $x_n<0$) .

三 数列极限的性质

定理3说明了，当下标n充分大后，数列中的项x_n保持极限A的符号，故称为收敛数列的保号性.

推论：如果数列$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$从某项起有$x_n \geq 0$(或$x_n \leq 0$)且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则$A \geq 0$(或$A \leq 0$)

三 数列极限的性质

4. 收敛数列的归并性(子数列的收敛性)

在数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$中任意抽取无穷多项并保持这些项在原数列中的先后顺序，这样得到的数列记为$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 称为数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的子数列.

******************************* ::::::

定理4 若数列收敛，则其任一子数列收敛，且极限相同 .

定理 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a.$

思考：如何判别极限不存在？

方法1. 找一个趋于 ∞ 的子数列;

方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

三 数列极限的性质

一、夹逼准则

1、关于数列收敛的夹逼准则

若数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}$ 满足下列条件：

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$,

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a$,

则数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限存在,且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

注意　用夹逼准则求极限, 关键是构造出 y_n 与 z_n，并且 y_n 与 z_n 的极限相同且容易求 .

三 数列极限的性质

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼得准则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

三 数列极限的性质

例2 (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$.

(2) 设 a_1,a_2,a_3 为正实数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}=\max\{a_1,a_2,a_3\}$$

三 数列极限的性质

二、单调有界收敛准则

若数列$\{x_n\}$满足：

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots，\text{就称为递增数列.} \\ x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots，\text{就称为递减数列.} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

单调有界收敛准则：单调有界数列必有极限.

1) 若$\{x_n\}$单调增加且有上界 M, 则$\{x_n\}$必有极限

且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le M$.

2) 若$\{x_n\}$单调减少且有下界 m, 则$\{x_n\}$必有极限

且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge m$.

三 数列极限的性质

若数列$\{x_n\}$满足：

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots, \text{就称为递增数列.} \\ x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots, \text{就称为递减数列.} \end{array}\right\}$$

单调有界收敛准则：单调有界数列必有极限.

1) 若$\{x_n\}$单调增加且有上界 M, 则$\{x_n\}$必有极限

且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le M$.

2) 若$\{x_n\}$单调减少且有下界 m, 则$\{x_n\}$必有极限

且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge m$.

三 数列极限的性质

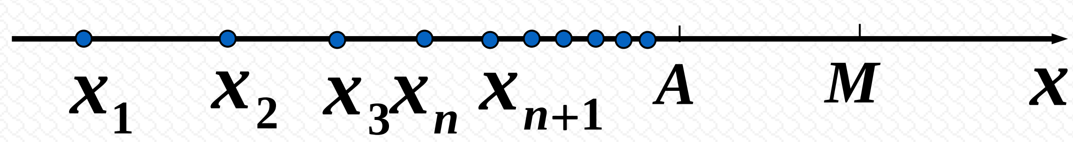
单调有界准则

如果数列 x_n 满足条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,\ \text{单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,\ \text{单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则 II　单调有界数列必有极限.

几何解释:



三 数列极限的性质

例1

设 $x_1 = \dfrac{1}{2}, x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2} \ (n = 1, 2, \cdots)$,

(1) 求证: 数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界.

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

注意　在取极限前应该先证明数列 x_n 有极限.

这时常用的一个方法是先证明数列 x_n 单调有界.

三 数列极限的性质

思考题：

(a)： 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$不存在． 问：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)$是否存在？

(b)： 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$都不存在． 问：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)$是否存在？

(c)： 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$不存在． 问：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$是否存在？

(d)： 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$都不存在． 问：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$是否存在？

四 小结

数列　研究其变化规律;

数列极限　定义,几何意义,性质.

1. 数列极限的“$\varepsilon-N$”定义

2. 收敛数列的性质:

唯一性；有界性；保号性;

任一子数列收敛于同一极限