第五章　特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

一、问题引入

二、矩阵相似的定义与性质

三、矩阵的相似对角化

一、问题的引入

例 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A^{10}.

解 $A = P\Lambda P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^{10} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

问题： 1. 什么样的矩阵有这样的 P 与 Λ?

2. $p = ?$ $\quad \Lambda = ?$

二、 矩阵相似的定义与性质

定义 设A与B都是n阶矩阵，如果存在可逆矩阵P，使

$$P^{-1}AP = B$$

则称A与B相似，记为$A \sim B$.

简单性质：

(1)反身性 $A \sim A$;

(2)对称性 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

(3)传递性 $A \sim B$且$B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

简单性质：

2. $P^{-1}(A_1A_2)P=(P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)$.

3. 若A与B相似,则A^m与B^m相似(m为正整数).

4. $P^{-1}(k_1A_1+k_2A_2)P=k_1P^{-1}A_1P+k_2P^{-1}A_2P$

其中k_1,k_2是任意常数.

定理1 相似矩阵有相同的特征值.

证 设 $A \sim B$,则 $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned}|\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |\lambda I - A|\end{aligned}$$

思考：相似矩阵有相同的行列式?

三、 矩阵的相似对角化

定理2 设矩阵

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 是A的全部特征值 .

证 $$|\lambda I-\Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & & & \\ & \lambda-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$\therefore$ Λ的全部特征值是：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

$\because$ A与Λ的特征值相同，

$\therefore$ A的全部特征值是：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

定理3 n阶矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量．

证 充分性 设A有n个线性无关的特征向量：

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \qquad AP_i = \lambda_i p_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

令 $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$ $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则 $AP = P\Lambda \qquad P^{-1}AP = \Lambda$

$$\therefore \quad A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

必要性　设 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则　$AP = P\Lambda$

设　$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$

则　$\begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \cdots & AP_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \cdots & \lambda_n P_n \end{pmatrix}$

$AP_i = \lambda_i P_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

$\therefore$　$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量 .

定理4 矩阵 A 不同特征值的特征向量线性无关.

证 设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\cdots,A\alpha_m=\lambda_m\alpha_m$,

且 λ_1, $\lambda_2,\cdots$, λ_m 互不相同.

当 $m=2$时, 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$. (1)

则 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2$

$$=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0 \quad (2)$$

又由式(1): $k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_2=0 \quad (3)$

$(2)-(3)$: $k_2(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2=0$

$\because$ $\lambda_1\neq\lambda_2$ 且 $\alpha_2\neq 0$, $\therefore$ $k_2=0$, 同理, $k_1=0$,

$\therefore$ α_1,α_2 线性无关.

由归纳法可证: α_1, $\alpha_2,\cdots$, α_m 线性无关.

推论1 如果矩阵 A 的特征值都是单特征根，则 A 与对角矩阵相似．

证 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的互异特征值，

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是它们对应的特征向量

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，

$\therefore$ A 与对角矩阵相似．

推论2 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是矩阵 A 的不同特征值，$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$ 是 λ_i 的线性无关特征向量，则 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kr_k}$ 线性无关．

推论3　n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ 若 λ_i 是 A 的 k_i 重特征值，则 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的基础解系由 k_i 个解向量组成 .

$\Leftrightarrow R(\lambda_i I - A) = n - k_i$.

分析：设 λ_1，$\lambda_2, \cdots$，λ_r 是 A 的全部互异特征值，

则　$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

例1 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$， 求 A^{10}.

解

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1 = -2$， $\lambda_2 = 1$（二重）.

$$(\lambda_1 I - A) = \begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x_1 = -x_3$, $x_2 = x_3$, $\alpha_1 = (-1,1,1)^T$

返回

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 + 0x_3$$

$$\alpha_2 = (-2, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T.$$

令 $P = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$

返回

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$A^{10} = P\Lambda^{10} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1022 & -2046 & 0 \\ 1023 & 2047 & 0 \\ 1023 & 2046 & 1 \end{pmatrix}$$

例2　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$$

求 A 的特征值与特征向量，

并判断A能否与对角矩阵相似．

解　$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

返回

$$=\begin{vmatrix} \lambda-na & \lambda-na & \cdots & \lambda-na \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-na)\lambda^{n-1},$$

返回

$\lambda_1 = na$， $\lambda_2 = 0$ $(n-1\text{重})$.

$(\lambda_1 I - A)X = 0$ 即

有什么特点？

$$\begin{pmatrix} (n-1)a & -a & \cdots & -a \\ -a & (n-1)a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & (n-1)a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = (1,\ 1,\ \cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

λ_1 对应的特征向量为：$k_1\alpha_1\ (k_1 \neq 0)$.

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

$$\alpha_2 = (1,\ -1,\ \ 0,\ \cdots\ ,0,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_3 = (0,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\alpha_n = (0,\ 0,\ 0,\ \cdots, 1,\ -1)^{\mathrm{T}}.$$

A有n个线性无关的特征向量,能与对角矩阵相似.

◀ ▶ 返回

例3 下列矩阵能否与对角矩阵相似.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$$

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$A \sim diag\,(\,1\,,\ -1\,,\ 3\,)$

返回

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1(\text{二重}).$$

$$\lambda_2 I - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2 + x_3, \quad \alpha_2 = (1, 2, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T.$$

$$B \sim diag(0, 1, 1)$$

◀ ▶ 返回

又 $R(\lambda_2 I - B) = 1$,

$\therefore$ B与对角矩阵相似.

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = 1$,(二重) $\lambda_2 = -2$,

$R(\lambda_1 - C) = 2$,

$\therefore$ C不能与对角矩阵相似.

返回

例4 设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\Lambda \text{为对角阵.}$$

求x与y应满足的条件 .

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda_1=1\text{(二重)},\lambda_2=-1.$$

$A\sim$对角阵$\Leftrightarrow\lambda_1$有两个线性无关的特征向量

$$\Leftrightarrow R(\lambda_1E-A)=1$$

返回

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\lambda_1 E - A) = 1 \Leftrightarrow -x - y = 0$$

即 $x + y = 0$.

例5 设 $A \sim B, C \sim D$, **证明:**

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证 $\because A \sim B, C \sim D$

$\therefore \exists$ 可逆矩阵 P, Q, 使

$$P^{-1}AP = B,\ Q^{-1}CQ = D$$

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

例6 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A$, $3I-A$, $I-3A$ 均不可逆．证明：

(1) A 可逆，(2) A 与对角矩阵相似．

证 (1) $\because$ $I+A$ 不可逆，$\therefore$ $|I+A|=0$,

$$\therefore (-1)^3|-I-A|=0 \Rightarrow |-I-A|=0,$$

$\therefore$ $\lambda_1=-1$ 是 A 特征值．

由 $|3I-A|=0 \Rightarrow \lambda_2=3$ 是 A 的特征值．

$$|I-3A|=3^3\left|\frac{1}{3}I-A\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}I-A\right|=0,$$

$\therefore$ $\lambda_3=\dfrac{1}{3}$ 是 A 的特征值．

A 的特征值均不为零，故 A 可逆．

(2) $\because$ A的特征值都是单特征值，

$$\therefore \quad A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

四、小结

1．相似矩阵

相似是矩阵之间的一种关系，它具有很多良好的性质，除了课堂内介绍的以外，还有：

(1) A与B相似，则$\det(A)=\det(B)$；

(2) 若A与B相似，且A可逆，则B也可逆，且A^{-1}与B^{-1}相似；

(3) A与B相似，则kA与kB相似，k为常数；

２．相似变换与相似变换矩阵

相似变换是对方阵进行的一种运算，它把A变成 $P^{-1}AP$，而可逆矩阵 P称为进行这一变换的**相似变换矩阵**.

这种变换的重要意义在于**简化对矩阵的各种运算**，其方法是先通过相似变换，将矩阵变成与之等价的对角矩阵，再对对角矩阵进行运算，从而将比较复杂的矩阵的运算转化为比较简单的对角矩阵的运算.

思考题

判断下列两矩阵A,B是否相似.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}n & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

思考题解答

解 因 $\det(A-\lambda E)=(n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$, A的特征值为 $\lambda_1=n, \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.又$A$是实对称矩阵,存在可逆矩阵 P_1,使得

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=diag(n,0,\cdots,0),$$

还可求得

$$\det(B-\lambda E)=(n-\lambda)(-\lambda)^{n-1},$$

即B与A有相同的特征值.

对应特征值$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$,有$n-1$个线性无关的特征向量，故存在可逆矩阵$P_2$,使得

$$P_2^{-1} B P_2 = \Lambda,$$

从而 $$P_1^{-1} A P_1 = P_2^{-1} B P_2,$$

即 $$P_2 P_1^{-1} A P_1 P_2^{-1} = B,$$

故A与B相似.