第三节　函数极限

- 自变量趋向无穷大时函数的极限
- 自变量趋向有限值时函数的极限
- 函数极限的性质
- 函数极限与数列极限的关系
- 小结

0 基本要求

基本要求：

1.理解函数在无穷大处的极限的概念.

2.理解函数在有限点处的极限的概念.

3. 理解左、右极限的定义.

4. 会利用定义来证明一些简单的函数极限.

0 问题引入

设上升的火箭与地心的距离为r,则地球对火箭的引力可表示成$f(r)=G\dfrac{Mm}{r^2}$,M和m分别是地球和火箭的质量，G是万有引力常数。如果考虑火箭脱离地球的运动，这时r不断增大，$f(r)$则无限地变小。这个过程抽象成数学问题，即当$r\to+\infty$时，$f(r)$的极限为0。

0 自变量的变化过程

对 $y=f(x)$ 自变量变化过程的六种形式:

1. x 为任意实数 , 且 $|x|$ 无限增大, 记为 $x\to\infty$.
2. $x>0$, 且 x 无限增大, 记为 $x\to+\infty$.
3. $x<0$, 且 $|x|$ 无限增大, 记为 $x\to-\infty$.
4. x 无限接近于x_0, 且 $x\neq x_0$, 记为 $x\to x_0$.
5. $x<x_0$, 且 x 无限接近于 x_0, 记为 $x\to x_0^-$.
6. $x>x_0$, 且 x 无限接近于 x_0, 记为 $x\to x_0^+$.

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

问题：函数 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时, 对应函数值是否无限接近某个确定值 A?

设$f(x)$当$x>a$时有定义,(a为某一正数)，如果当自变量x的绝对值无限增大时，对应的函数值$f(x)$无限接近于确定的常数A，那么A就叫做函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限.

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

"$\varepsilon - N$"定义：

如果对$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+$,使当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$\boxed{\text{"}\varepsilon - X\text{"定义}}$

1. $x \to +\infty$时 $f(x)$ 的极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当} x > X \text{时}, \text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当} x < -X \text{时}, \text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon.$$

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

"$\varepsilon - X$"定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当$|x| > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

注意:

$|f(x) - A| < \varepsilon$表示$|f(x) - A|$任意小;

$|x| > X$ 表示$x \to \infty$的过程.

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

"ε − X"定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \iff$

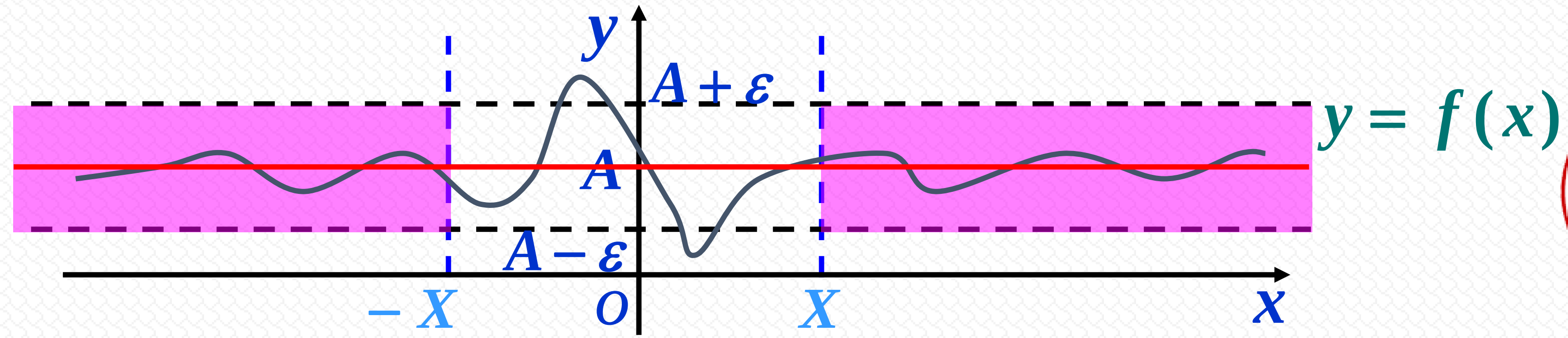
$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$x < -X$ 或 $x > X$

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

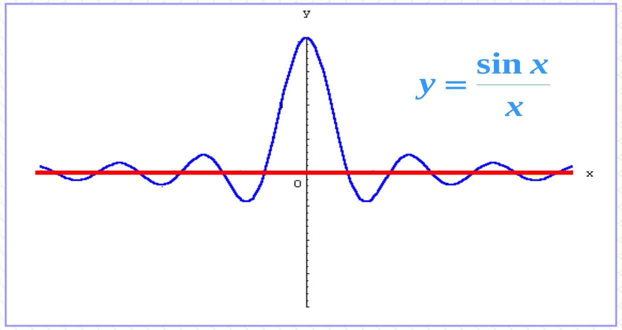
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义:

当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ε 的带形区域内.



一 自变量趋向无穷大时函数的极限

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



证 $\because \left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}$

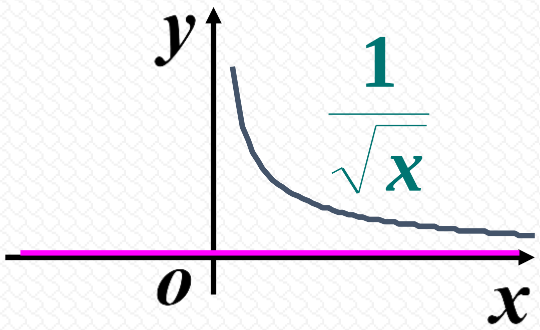
$\forall\varepsilon>0$,要使$|f(x)-A|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$,即$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$

取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当$|x|>X$时恒有

$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

例2 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0.$



证 $|f(x)-A|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

对$\forall\varepsilon>0$要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，

$\forall\varepsilon>0$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}>0$，则当 $x>X$ 时恒有

$\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$， 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0.$

类似可证：**例3** 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0\ (a>1).$

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

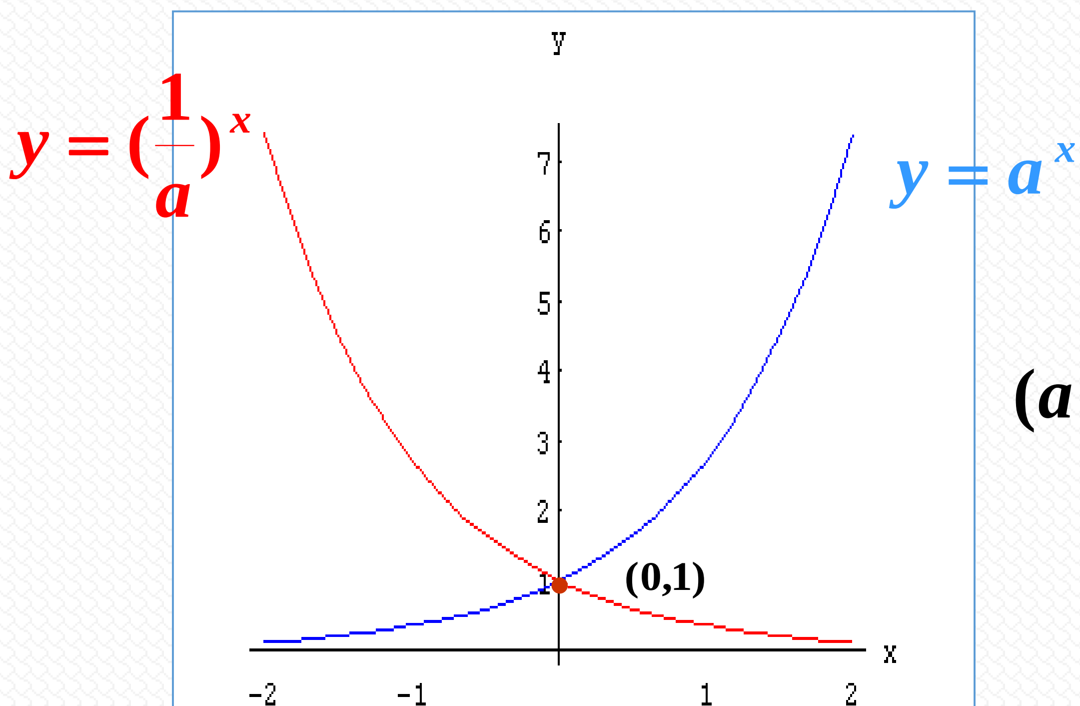
水平渐近线 **(horizontal asymptote)**

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$,则称直线 $y=c$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的 水平渐近线 .

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

例如：$\because \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 (a > 1),$

$\therefore y = 0$是函数$y = a^x$的图形的水平渐近线.



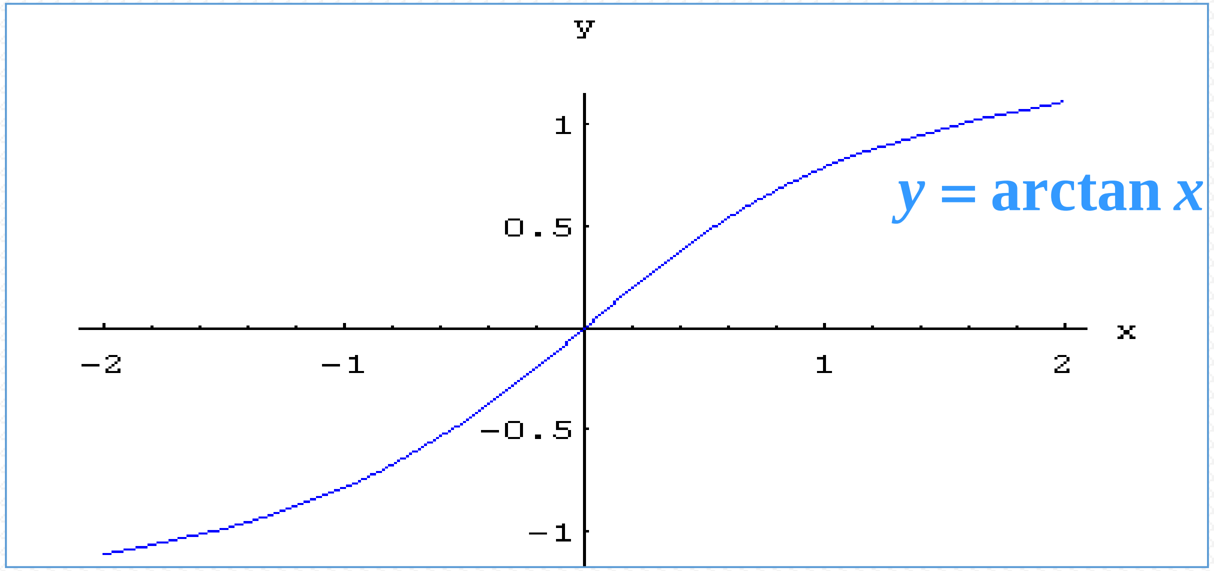
$(a > 1)$

一 自变量趋向无穷大时函数的极限

$\because \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2},$

$\therefore y = -\dfrac{\pi}{2}$ 与 $y = \dfrac{\pi}{2}$ 都是函数 $y = \arctan x$ 的图形

的水平渐近线.

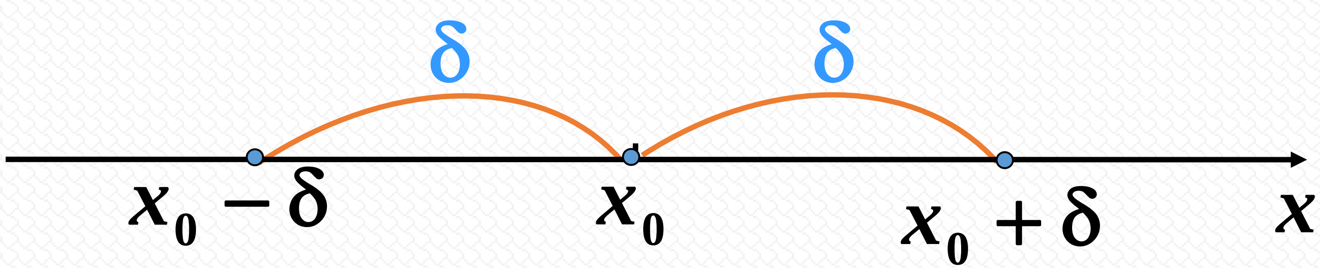


二 自变量趋向有限值时函数的极限

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的<u>过程中</u>,对应函数值 $f(x)$ 无限<u>趋近于</u>确定值 A.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

二 自变量趋向有限值时函数的极限

1. $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

定义 设 $f(x)$在点x_0的某去心邻域有定义,若有常数 A,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$时的极限, 简称 A 是 $f(x)$在 x_0 处的极限. 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 或者 $f(x) \to A(x \to x_0)$.

$\boxed{\text{"}\varepsilon - \delta\text{"定义}}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时}, \\ \text{恒有} |f(x) - A| < \varepsilon. \end{array}$$

说明

1) δ 刻划 x 与 x_0 的接近程度,与 ε 有关.

2) 定义中$0 < |x - x_0|$是重要的,不能去掉.

3) 函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关.

二 自变量趋向有限值时函数的极限

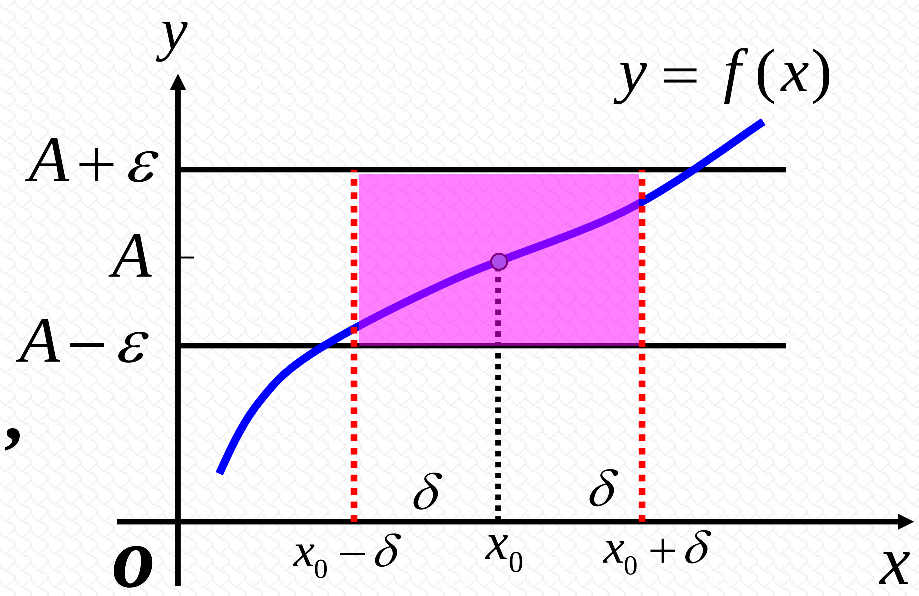
几何意义:

当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 时,

函数$y = f(x)$图形完全

落在以直线 $y = A$为中心,

宽为2ε的带形区域内.



二 自变量趋向有限值时函数的极限

用定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的过程：

1. 把 $|f(x)-A|$ 化简为 $|f(x)-A|<k|x-x_0|$；

2. $\forall\varepsilon>0$，要 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要 $k|x-x_0|<\varepsilon$；

3. 取 $\delta=\dfrac{1}{k}\varepsilon$；再用 $\varepsilon-\delta$ 语言顺述结论.

二 自变量趋向有限值时函数的极限

例1 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例2 证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

例3 证明：$\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$

二 自变量趋向有限值时函数的极限

例4 证明:当 $x_0 > 0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

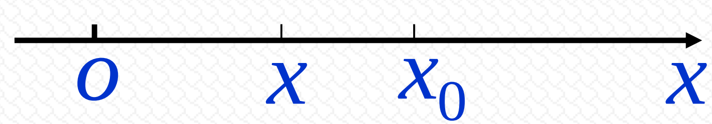
证 $|f(x)-A| = |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|$,

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$,

还需 $x\ge 0$, 而 $x\ge 0$ 可用 $|x-x_0|\le x_0$ 保证,

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{\sqrt{x_0}\varepsilon, x_0\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

总有 $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.



二 自变量趋向有限值时函数的极限

例5 证明：$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

证 不妨先限制 $|x-2|<1(x\neq 2)$ 即 $1<x<3(x\neq 2)$

$\Rightarrow 3<x+2<5$

二 自变量趋向有限值时函数的极限

我们先限制$|x-2|<1(x\neq 2)$来讨论，这实际上就是先限定δ为某个恰当小的正数，这是允许的. 因为在极限的ε-δ定义中，ε给定后，δ的值不唯一. 如果找到某个符号要求的δ_0，则比δ_0小的任一正数均可作为所求的δ.这种先限定δ为某个较小值的手法是经常采用. 当然最后δ值应该取开始值与后来求出的值中的较小者.

二 自变量趋向有限值时函数的极限

重要结论

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数及反三角函数等基本初等函数，在其定义域内的每点处的极限都存在且等于函数在该点处的值.

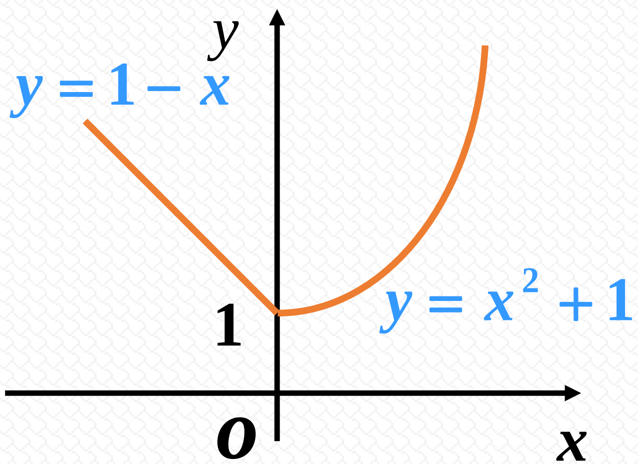
二 自变量趋向有限值时函数的极限

2.单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$;

x 从右侧无限趋近 x_0, 记作 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$;

二 自变量趋向有限值时函数的极限

左极限定义

设 $f(x)$在x_0的某个左邻域内有定义,若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使当$0<x_0-x<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称$A$是$f(x)$在$x_0$处的左极限 (left limit).

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0-0 \\ (x\to x_0^-)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A.$

二 自变量趋向有限值时函数的极限

右极限定义

设 $f(x)$在x_0的某个右邻域内有定义，对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$
使当$0<x-x_0<\delta$时，恒有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，则称常数$A$
为$f(x)$在x_0处的右极限 (right limit).

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0 \\ (x\to x_0^+)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A.$

二 自变量趋向有限值时函数的极限

定理：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$

由此有

一个在 x_0 某去心邻域内有定义的函数 $f(x)$，若 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在但不相等，或 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极限或者说 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

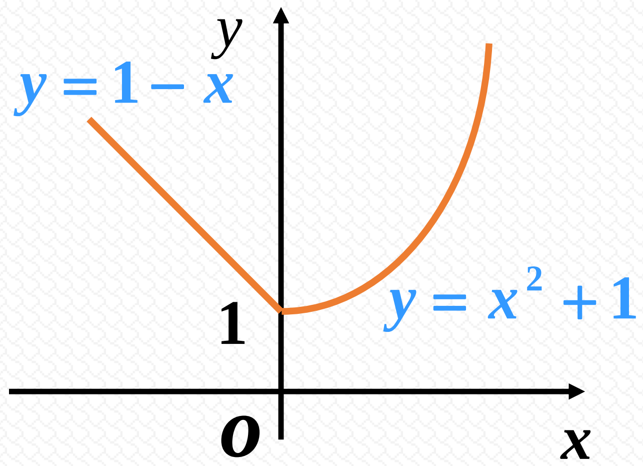
推论：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

二 自变量趋向有限值时函数的极限

例4:

设 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ x^2+1, & x\geq 0 \end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



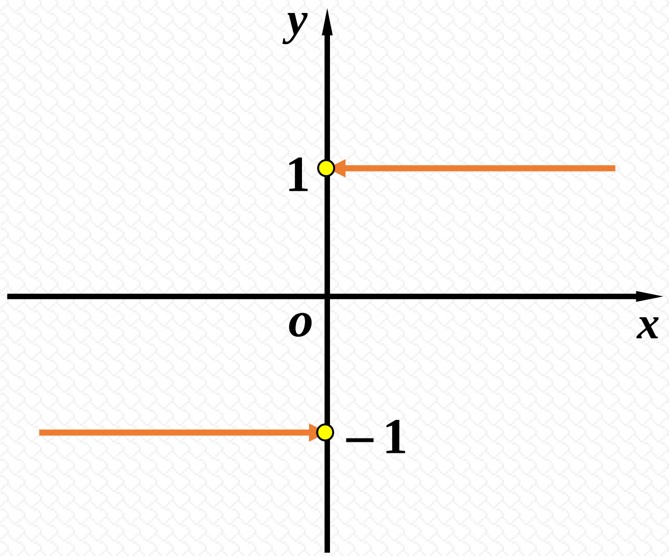
二 自变量趋向有限值时函数的极限

例5: 验证 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$



左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

注:分段函数在分界点处的两侧函数表达式不一致时, 求在分界点处的极限应考虑左右极限.

例6：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

三 函数极限的性质

1. 极限的惟一性

定理1 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$)存在, 则极限是惟一的.

2. 有极限的函数的局部有界性

定理2 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则在点 x_0 的某个去心邻域内, 函数 $f(x)$ 有界.

定理2′ 若极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则必存在 $X>0$, 使得函数 $f(x)$在无穷区间 $(X,+\infty)$ 和 $(-\infty,-X)$ 内均有界.

三 函数极限的性质

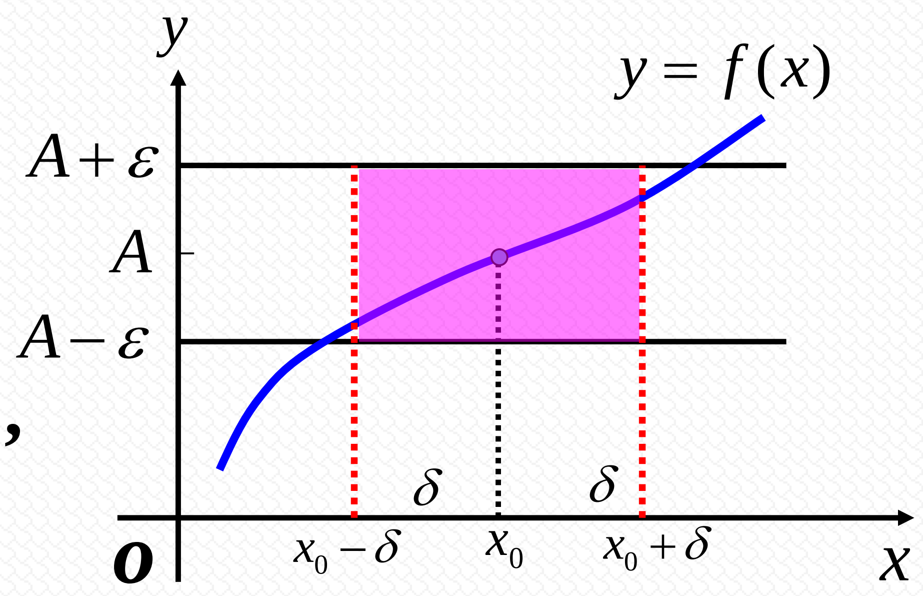
几何意义:

当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时,

函数 $y = f(x)$ 图形完全

落在以直线 $y = A$ 为中心,

宽为 2ε 的带形区域内.



三 函数极限的性质

"$\varepsilon - X$"定义 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \iff$

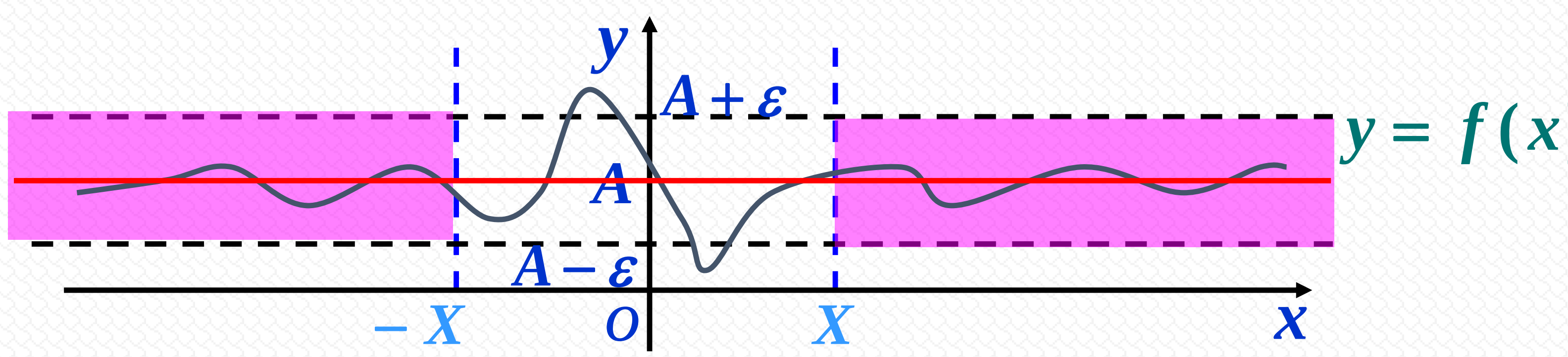
$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$x < -X$ 或 $x > X$

$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$的几何意义:

当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ε 的带形区域内.



三 函数极限的性质

3. 极限的局部保号性

定理3(局部保号性)

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0 \ (A<0)$，则 $\exists\delta>0$，

当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0 \ (\ f(x)<0)$.

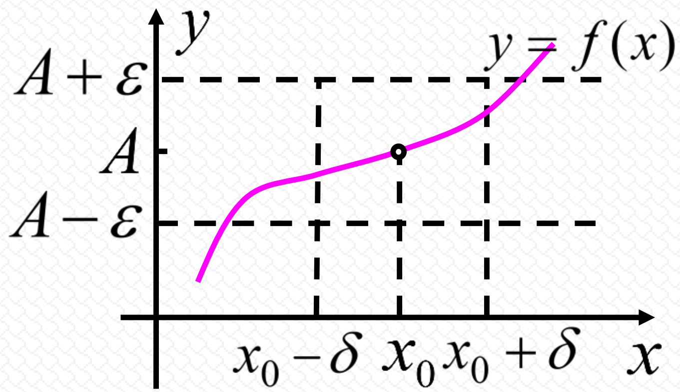
证 由已知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,

有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，

当 $A>0$ 时，取正数 $\varepsilon\le A$，

则在对应的邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 上有

$f(x)>0.$



三 函数极限的性质

3. 极限的局部保号性

定理3 (局部保号性) 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0\,(A<0)$，

则 $\exists\,\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0\,(f(x)<0)$.

定理3′ 若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$，且 $A>0\,(A<0)$，则 $\exists\,X>0$，

当 $x\in(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 时，$f(x)>0\,(f(x)<0)$.

推论 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $\exists\,\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$f(x)\ge 0\,(f(x)\le 0)$，则 $A\ge 0\,(A\le 0)$.

思考：若推论中的条件改为 $f(x)>0$，是否必有 $A>0$？

否！ 如 $\lim_{x\to 0} x^2=0$

三 函数极限的性质

4.函数极限的归并性 (函数极限与数列极限的关系)

定义 设在过程 $x \to a$ 中有数列 $x_n (\neq a)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

则称数列 $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时的子列.

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内

任一收敛于x_0的数列，且满足$x_n \neq x_0$，那么相

应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，

且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

三 函数极限的性质

4.函数极限的归并性（函数极限与数列极限的关系）

例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，则 $x_n\to 0$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$

取 $x_n'=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则 $x_n'\to 0$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1,\cdots$

三 函数极限的性质

定理（海涅定理）：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对任意的数列$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

推论1：若存在某个数列$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，而它的函数值数列$\{f(x_n)\}$不存在极限，则函数$f(x)$也不存在极限.

推论2：若存在某两个数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$x_n\neq x_0$，$y_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=x_0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=B$，而$A\neq B$，则函数$f(x)$在$x_0$的极限不存在.

三 函数极限的性质

判别极限不存在的两个方法:

[方法一]

找出两个数列$\{x_n\}: x_n \neq x_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

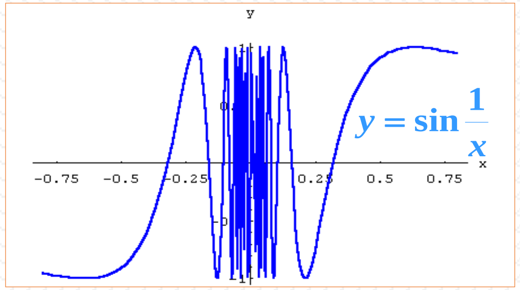
$\{x'_n\}: x'_n \neq x_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$,

数列 $f(x_n)$ 和 $f(x'_n)$ 有不同极限.

[方法二] 找出一个数列$\{x_n\}: x_n \neq x_0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,

数列 $f(x_n)$ 发散;

三 函数极限的性质



例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $(n=1,2,3,\cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,

取 $x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{1}{2}\pi}$, $(n=1,2,3,\cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{1}{2}\pi)=1,$$

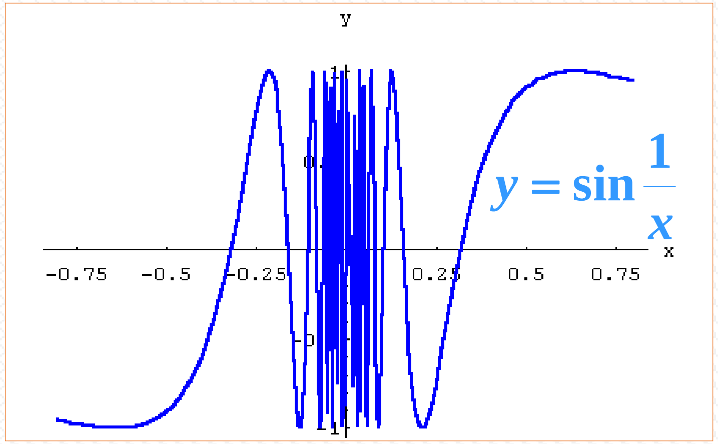
故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

三 函数极限的性质

注意：

也可以取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}$，

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$， 且 $x_n\neq 0$；



取 $\{y_n\}=\left\{\dfrac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}\right\}$， $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，且 $y_n\neq 0$；

三 函数极限的性质

例2 证明：当 $x \to +\infty$ 时，$\cos x^3$ 没有极限 .

证 取 $x_n = \sqrt[3]{2n\pi}, (n = 1,2,3,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty.$

取 $x_n' = \sqrt[3]{(2n+1)\pi}, (n = 1,2,3,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = +\infty.$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n'^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(2n+1)\pi = -1$,

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x^3$ 不存在 .

四 函数极限的运算

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

(2) $\lim[f(x).g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$\mathrm{B}\neq 0$.

五 小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,∃时刻,从此时刻以后,

恒有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. (见下表)

五 小结

过　程	$n \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n > N$	$\|x\| > N$	$x > N$	$x < -N$
$f(x)$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$			

过　程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0 < \|x - x_0\| < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$f(x)$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$		