新时代大学数学系列教材

线性代数

高等教育出版社

第四章 n维向量空间

第四节　　线性方程组解的结构

目录

一、齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

即 $AX = 0$

平凡解：$X = 0$(零解)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价：

1° $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

2° $AX = 0$有非零解;

3° $R(A) < n$.

解的性质：

$AX = 0$ 的解向量的线性组合仍为$AX = 0$的解.

证 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 为$AX = 0$ 的解向量，则

$$A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s)$$

$$= A(k_1\alpha_1) + A(k_2\alpha_2) + \ldots + A(k_s\alpha_s)$$

$$= k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \ldots + k_s A\alpha_s$$

$$= k_1 0 + k_2 0 + \ldots + k_s 0 = 0.$$

所以，$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s$ 仍为$AX = 0$的解.

$W=\{X\in \mathrm{R}^n \mid AX=0\}$ 为R^n的子空间

$AX=0$的**基础解系**：W 的一组基.

1° 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性无关;

2° $AX=0$的任一解向量均可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$线性表出

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$为$AX=0$ 的一个基础解系.

定理1 设$\mathrm{R}(A)=r<n$, 则$AX=0$有基础解系且所含向量个数为$n-r$,

即$\dim W=n-r$, 这里n为方程组未知数个数.

证 $R(A)=r$，不妨设A的前r个列向量线性无关，则

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-1} \\ & & & O & & \end{pmatrix}$$

得$AX=0$的同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

分别取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

则依次得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$

便得$AX=0$的$n-r$个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可证明: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 即为基础解系:

(1) 证明 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ 线性无关

$\Rightarrow$ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关　为什么？

(2) 可以证明$AX=0$的任一解都可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表出.（略）

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 为 $AX = 0$ 的一个基解系，则

$\forall\ AX = 0$ 的解 α，

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r},\ k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbf{R}.$$

$AX = 0$ 的 通解

$AX = 0$ 的基础解系一般不惟一，但其任一基础解系中所含向量个数必为

$$n\ (\text{未知数个数}) - \mathrm{R}(A).$$

若 $AX = 0$ 有非零解，则必有无穷多个解.

例1 求方程组的通解 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+8x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+2x_3 \qquad\quad =0 \end{cases}$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A)=2<n=4,\ n-R(A)=2,$$

为求通解，可进一步化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + \dfrac{1}{5}x_4 \\ x_3 = -\dfrac{3}{10}x_4 \end{cases}$$
(x_2, x_4为自由未知量)

基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

方程组通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2,\ k_1, k_2 \in \mathbf{R}.$$

例2 解
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+6x_2+10x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+7x_3=0 \\ x_1+2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{r}(A)=3=n$, 只有零解 $X=0$

例3 解
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0 \\ x_1+4x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+6x_3+4x_4=0 \\ -x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$
(x_3为自由未知量)

基础解系为
$$\xi = \begin{pmatrix} -2 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

方程组通解为
$$X = k\xi,\ k \in \mathbf{R}.$$

例4 证明：与$AX=0$基础解系等价的线性无关的向量组也是该方程组的基础解系.

证 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相等.

设$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$是$AX=0$基础解系， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$与之等价.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$可由$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$线性表出，所以是$AX=0$的解；

$AX=0$的任一解X可由$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$线性表出，

又$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$可由$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$线性表出，

所以X可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性表出；

故， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是$AX=0$的基础解系.

例5 设n阶矩阵A, B满足$AB = 0$, 证明:

$$R(A)+R(B)\le n.$$

证 设 $B = (b_1, \dots, b_n)$, 则

$$AB = A(b_1, \dots, b_n) = (A b_1 , \dots, Ab_n)$$

$$A b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

两向量组秩的关系:

若向量组(I)可由组(II)线性表出，则

组(I)的秩 $r_1\le$ 组(II)的秩 r_2.

证 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 为 (I) 的极大无关组, $\beta_1,\dots,\beta_{r_2}$ 为 (II) 的极大无关组.

组(I)可由组(II)线性表出,所以 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1,\dots,\beta_{r_2}$ 线性表出, $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 线性无关， 故 $r_1\le r_2$.

若组(I)与组(II)等价，则

组(I)的秩 $r_1=$ 组(II)的秩 r_2.

b_i ($i = 1, \dots, n$)为$AX = 0$的解,

所以可由基础解系$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ ($r = R(A)$)线性表出.

所以, 秩(B) =秩 $(b_1, \dots, b_n) \le$秩$(\xi_1, \dots, \xi_{n-r})= n-r(A)$.

即 $R(A)+R(B)\le n$.

二、非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $AX = b$

($AX = 0$称为$AX = b$的导出组)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = b$,

$AX = b$ 有解

$\Leftrightarrow$ b可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出

$\Leftrightarrow$ $R(\overline{A}) = R(A)$

解的性质：

性质1 设η_1, η_2为$AX=b$的解, 则$\eta_1-\eta_2$为其导出组的解.

证 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$

所以， $\eta_1-\eta_2$为$AX=0$的解.

性质2 设η为$AX=b$的解, ξ为$AX=0$的解， 则$\eta+\xi$为$AX=b$的解.

证 $A(\eta+\xi)=A\eta+A\xi=b+0=b$

所以， $\eta+\xi$为$AX=b$的解.

$AX=b$ 的**特解**： $AX=b$ 的任一解.

性质3 设η_0为$AX=b$ 的一个特解, 则$AX=b$ 的任一解η 可表为

$$\eta=\eta_0+\xi, \qquad (\xi\text{为}AX=0\text{ 的一个解})$$

对于$AX=b$ 的任一个特解η_0, 当ξ取遍它的导出组的全部解时,

$\eta=\eta_0+\xi$就给出$AX=b$ 的全部解.

性质3的证明

$$\eta=\eta_0+\underbrace{(\eta-\eta_0)}_{\text{为}AX=0\text{的解，设为}\xi}$$

为了求$AX = b$ 的通解（全部解），只需求其一个特解η_0, 以及导出组的全部解即可：

设η_0为$AX = b$ 的一个特解， $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$为其导出组的基础解系，则$AX = b$ 的通解为

$$X = \eta_0 + k_1\xi_1 + \ldots + k_{n-r}\xi_{n-r}，k_1, \ldots, k_{n-r} \in \mathbf{R}$$

例6 解 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+x_3=13 \\ x_2+2x_3=2 \end{cases}$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(A)=R(\overline{A})=2<n=3$，有无穷多解. 得同解方程组 $\begin{cases} x_1=3+x_3 \\ x_2=2-2x_3 \end{cases}$

(1)求非齐次的特解：　取x_3=0, 得 η_0 =(3,2,0)^T

(2)求导出组的基础解系：　取x_3=1, 得 ξ =(1, -2, 1)^T

$AX=b$ 的通解为：

$$X=\eta_0+k\,\xi,\ k\in\mathbf{R}$$

例7 解
$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3 \\ x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

解

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$R(A)=2\neq R(\overline{A})=3,$ 无解

例8 解 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

解 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2+\lambda-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

(1) $\lambda=1$时， $R(A)=R(\overline{A})=1<n=3$, 有无穷多解

$$\overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

得同解方程组 $x_1=1-x_2-x_3$

导出组基础解系： $\xi_1=(-1,1,0)^T$， $\xi_2=(-1,0,1)^T$

非齐次特解： $\eta_0=(1,0,0)^T$

原方程组通解：$X=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2\in\mathbf{R}$

(2) $\lambda=-2$时， $R(A)=2\neq R(\overline{A})=3$, 无解

(3) $\lambda\neq1,-2$时，$R(A)=R(\overline{A})=3=n$, 有惟一解：

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2}\\ x_2=\dfrac{1}{\lambda+2}\\ x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{cases}$$

例9 判断方程组有无解 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ ax_1 + bx_2 = c \\ a^2x_1 + b^2x_2 = c^2 \end{cases}$ **(a, b, c互不等)**

解

$$\det \bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

$$R(\bar{A}) = 3,$$

$$R(A) = 2,$$

（为什么？）

所以，方程组无解

例10 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 系数矩阵A的秩等于 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$

的秩，证明上述方程组有解.

证

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$\overline{A}$ 的行向量组是$\boldsymbol{B}$ 的行向量组的部分组,

所以 $\overline{A}$ 的行向量组可由$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表出,

$\overline{A}$ 的行向量组的秩$\le \boldsymbol{B}$ 的行向量组的秩

$$R(\overline{A}) \le R(B) = R(A),$$

已知

又

$$R(A) \le R(\overline{A}),$$

故

$$R(A) = R(\overline{A}),$$

方程组有解

思考题

1. 证明$R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

证 设A为$m\times n$矩阵, x为n维列向量.

若x满足$Ax=0$, 则有$A^{\mathrm{T}}(Ax)=0$, 即

$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$;

若x满足$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$, 则$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x=0$, 即

$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)=0$, 从而推知$Ax=0$.

综上可知方程组$Ax=0$与$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$同解,

$$\therefore\ n-R(A)=n-R(A^{T}A)$$

因此 $R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

2. 已知四元齐次方程组 $(I):\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ 及另一四元齐次方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}} \quad (k_1,k_2 \in \mathbf{R}).$$

问*(I)*与*(II)*是否有非零公共解？若有，求出来；若没有，说明理由.

解 将 (II) 的通解代入 (I) 得

$$\begin{cases} -k_2+k_1+2k_2=0 \\ k_1+2k_2-k_2=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=-k_2.$$

故 (II) 与 (I) 的公共解为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

所有非零公共解为

$$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}\ (k\neq 0).$$

3. 设A是$m\times 3$矩阵,且$R(A)=1$.如果非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

解 $\because A$是$m\times 3$矩阵, $R(A)=1$,

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.

方法1 令$\eta_1+\eta_2=a, \eta_2+\eta_3=b, \eta_3+\eta_1=c$, 则

$$\eta_1=\frac{1}{2}(a+c-b)=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}, \qquad \eta_2=\frac{1}{2}(a+b-c)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\qquad \eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的基础解系中的解向量.

故$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},$$

其中k_1,k_2为任意实数.

方法2（更简单）：

$$(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\quad (\eta_1+\eta_2)-(\eta_3+\eta_1)=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},$$

线性无关，所以为 $AX=0$ 的基础解系.

$$A(\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3))=\frac{1}{2}(b+b)=b,$$

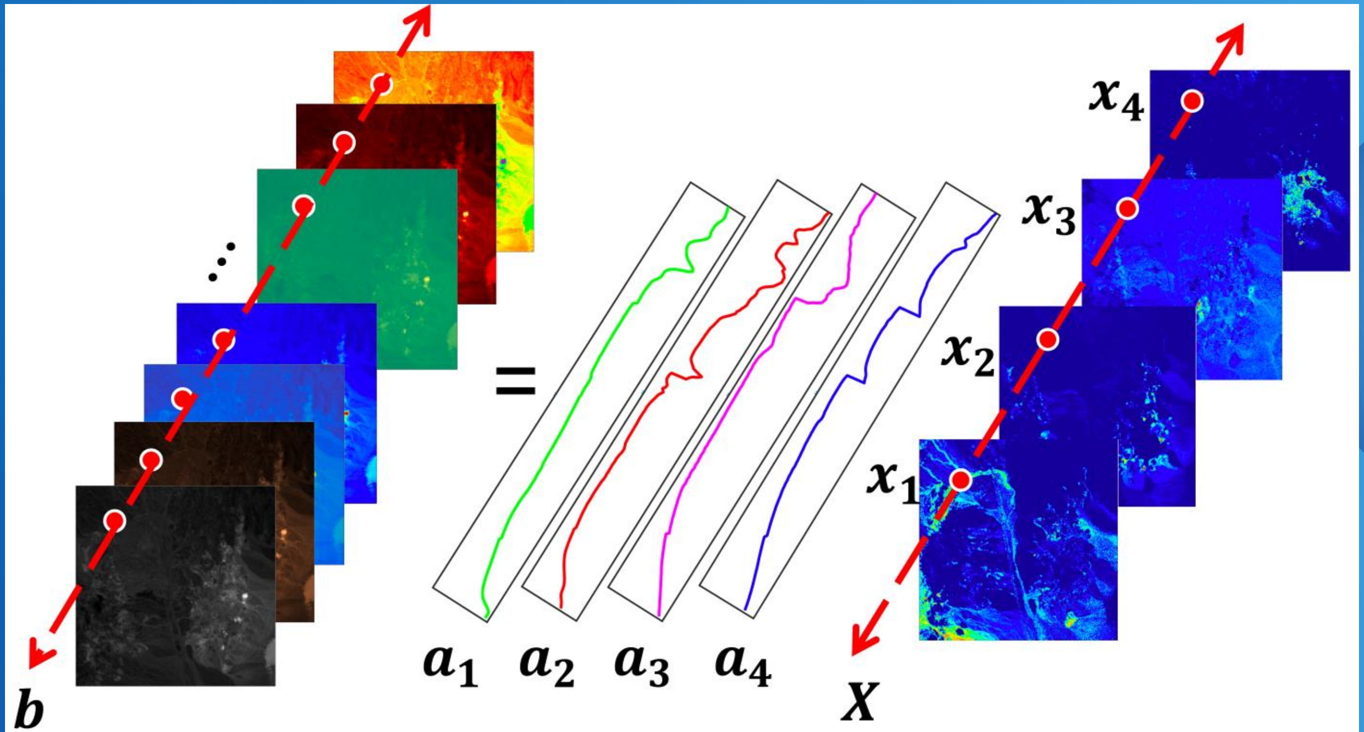
$$\therefore \frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$ 为 $AX=b$ 的解.

故 $Ax=b$ 的通解为 $X=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},$

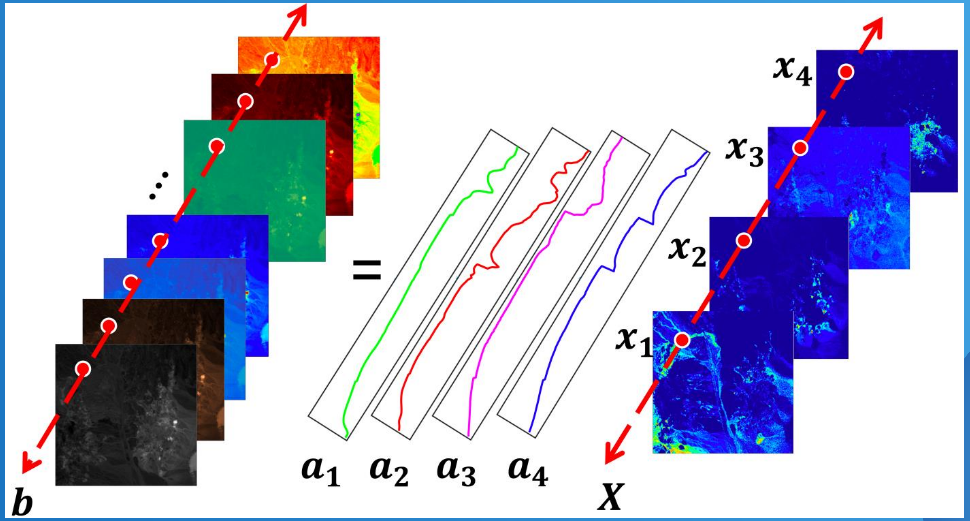
应用实例一：高光谱图像解混

高光谱图像由搭载在不同空间平台上的成像光谱仪，以数十至数百个连续且细分的光谱波段对目标区域同时成像得到.

但由于成像设备限制和环境因素等影响，高光谱图像中的每个像素是不同典型地物的光谱特征的线性组合.



$$b = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$



其中：

- $b \in \mathbf{R}^m$表示高光谱图像中的一个混合像元
- $\boldsymbol{a}_i \in \mathbf{R}^m$表示一个端元光谱特征
- $x_i \in \mathbf{R}$表示端元$\boldsymbol{a}_i$所占比例

令 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n), X = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

若已知像素b和光谱矩阵A，

计算成分向量X就是：**求解线性方程组** $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AX}$

谢谢