高等数学A(上)

第一章 函数的极限与连续

本章重点

分析基础
- 函数 — 研究对象
- 极限 — 研究方法
- 连续 — 研究桥梁

常量	变量	函数	极限	连续
初等数学	高等数学	研究对象	研究方法	研究桥梁

目录 CONTENTS

第一章

第七节 闭区间上连续函数的性质

一、有界性与最大值最小值定理

二、零点定理与介值定理

*三、一致连续性

一、有界性与最大值最小值定理

定义

对于在区间I上有定义的函数$f(x)$, 如果有$x_0\in I$使得对于任一$x\in I$都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\qquad (f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

例如: $f(x)=1+\sin x$, 在$[0,2\pi]$上, $y_{\max}=2$, $y_{\min}=0$;

$f(x)=\operatorname{sgn} x$, 在$(-\infty,+\infty)$上, $y_{\max}=1$, $y_{\min}=-1$;

在$(0,+\infty)$上, $y_{\max}=y_{\min}=1$.

$f(x)=x$, 在开区间(a,b)内, 既无最大值又无最小值.

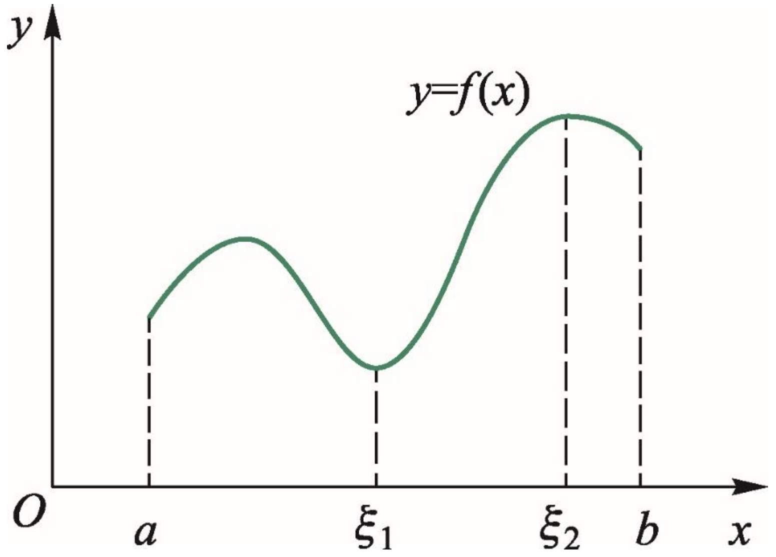
定理1 （最值定理）在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

即：设 $f(x)\in C[a,b]$,

则 $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$,

使 $f(\xi_1)=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$,

$f(\xi_2)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

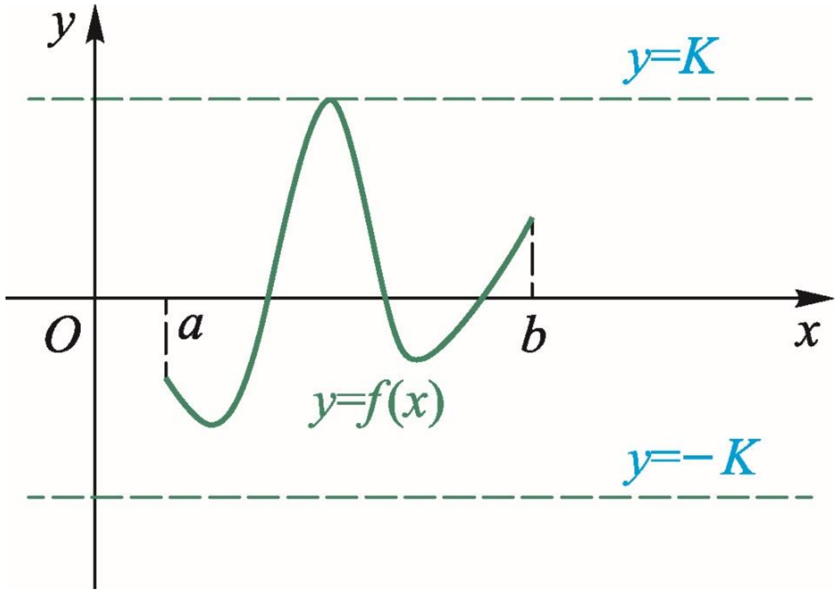


定理2 (有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

证 设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\forall x\in[a,b]$, 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

取 $K=\max\{|m|,|M|\}$, 则有 $|f(x)|\leqslant K$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.



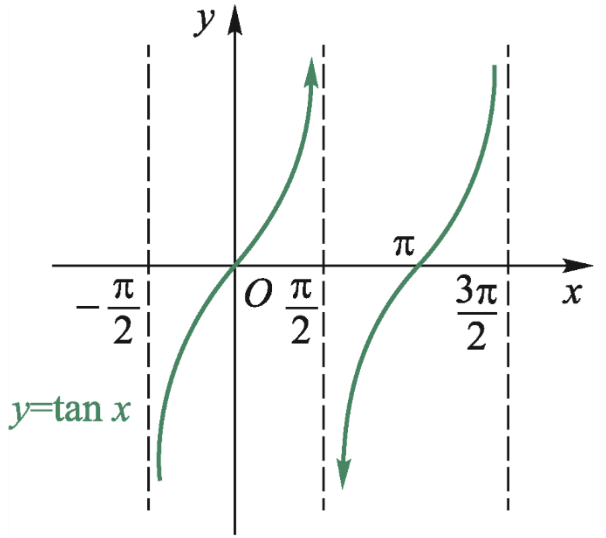
注 若函数在开区间内连续,

或在闭区间上有间断点,

定理1和定理2未必成立.

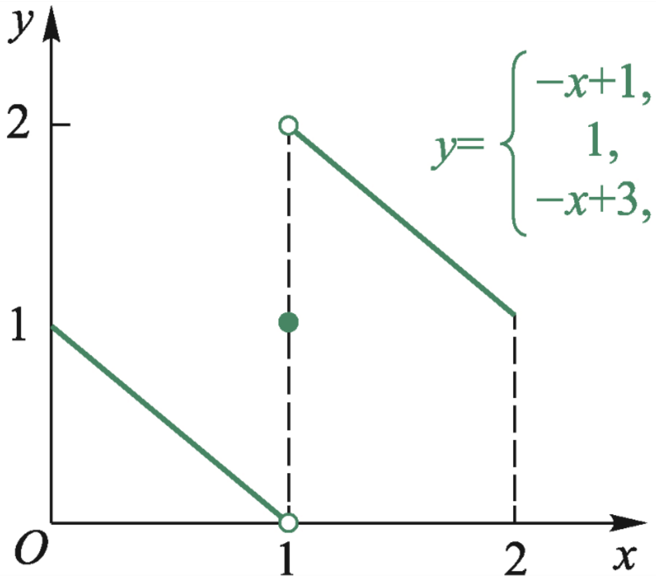
例如:

$\because\ f(x)=\tan x$ 在开区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内连续,



无界,无最大值,无最小值

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 0<x\leqslant 2.\end{cases}$$



在闭区间[0, 2]上有间断点 $x=1$.

有界,无最大值,无最小值

二、零点定理与介值定理

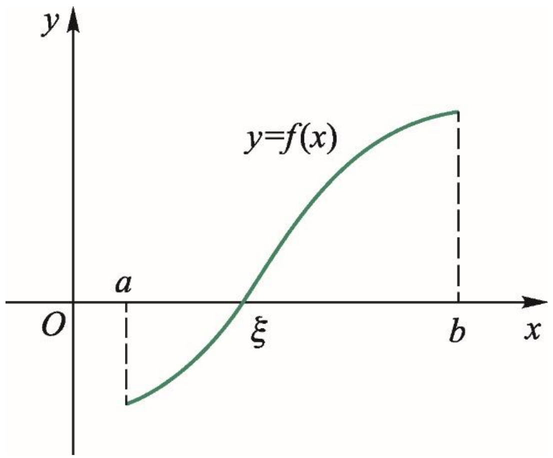
定义　如果x_0使$f(x_0)=0$，则x_0称为函数$f(x)$的零点.

定理3（零点定理）设函数$f(x)$

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) $f(a)\cdot f(b)<0$.

则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$.



即方程 $f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根.

几何解释： 连续曲线弧$y=f(x)$的两个端点位于x轴的不同侧，则曲线弧与x轴至少有一个交点.

定理4 (介值定理) 设函数$f(x)$

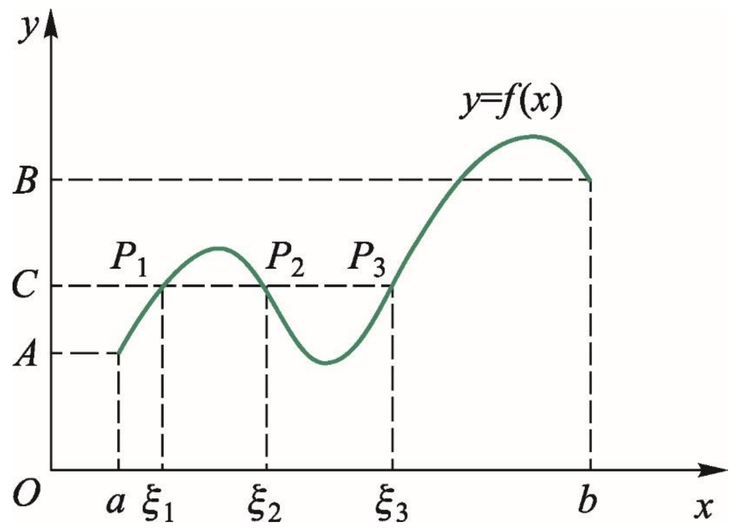
(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) $f(a)=A, f(b)=B$,

则对介于A,B之间的任意常数C,

至少有一点$\xi\in(a,b)$, 使得

$f(\xi)=C$.



证　设$F(x)=f(x)-C$, 则 $\because F(x)$在$[a,b]$上连续,

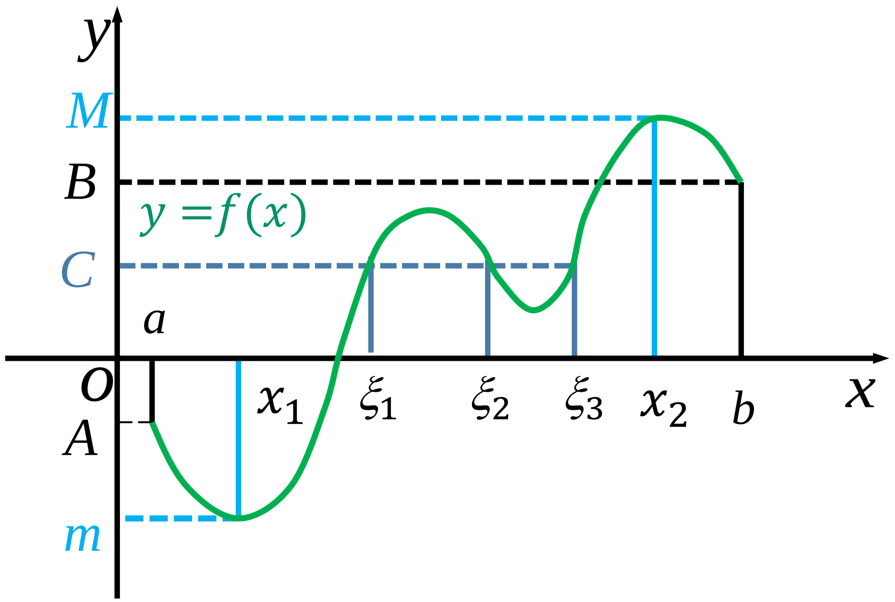
$$F(a)\cdot F(b)=(A-C)(B-C)<0.$$

$\therefore\ \exists\xi\in(a,b)$, 使$F(\xi)=0$, 即$F(\xi)=F(\xi)-C=0$, 故 $f(\xi)=C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M 与m最小值之间的任何值.

几何意义（介值定理及其推论）

连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少有一个交点.



其中的C

或$m\leqslant C\leqslant M$

或 $f(a)\leqslant C\leqslant f(b)$

或 $f(b)\leqslant C\leqslant f(a)$

例1　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证　令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0,$$

$\therefore \exists\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$,

故方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

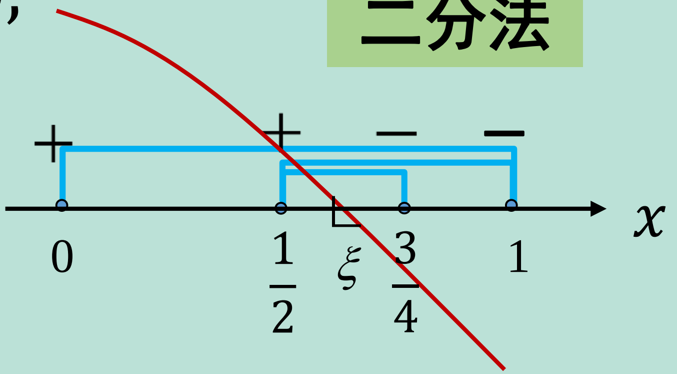
说明： 取 $[0,1]$ 的中点 $x=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}>0$，

则 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内必有方程的根；

取 $[\frac{1}{2},1]$ 的中点 $x=\frac{3}{4}$，$f\left(\frac{3}{4}\right)<0$，

则 $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ 内必有方程的根……可用此法求近似根.

二分法



例2 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 且 $f(a)<a, f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令$F(x)=f(x)-x$,

则 $\because F(x)$在$[a,b]$上连续,

$F(a)=f(a)-a<0,$

$F(b)=f(b)-b>0,$

$\therefore \exists\xi\in(a,b)$, 使$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

例3 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且恒为正，证明：

对任意的$x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, 必存在一点$\xi\in[x_1,x_2]$,

使$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

证 方法1：利用介值定理

$\because$ $f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，$\therefore$ 在其上有最大值M和最小值m.

$\because$ $f(x)>0$, $\therefore m^2\leqslant f(x_1)\ f(x_2)\leqslant M^2$,

$$\therefore\ m\leqslant\sqrt{f(x_1)f(x_2)}\leqslant M,$$

由介值定理,

必存在一点$\xi\in[x_1,x_2]$, 使 $f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

证　方法2：利用零点定理

令$F(x)=f^2(x)-f(x_1)f(x_2)$，则$F(x)$在$[x_1,x_2]$上连续,

且 $F(x_1)F(x_2)=-f(x_1)f(x_2)(f(x_1)-f(x_2))^2\leqslant 0.$

(1)当 $f(x_1)\neq f(x_2)$时,

$\because f(x)>0,\quad \therefore F(x_1)F(x_2)<0,$

$\therefore \exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使$F(\xi)=0$, 即$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

(2)当 $f(x_1)=f(x_2)$时,

取$\xi=x_1$或$\xi=x_2$，则有$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

综上, 必存在一点$\xi\in[x_1,x_2]$, 使$f(\xi)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

补例:设函数 $f(x)\in C(a,b)$, $x_i\in(a,b), i=1,2,\cdots n$.

证：必$\exists\xi\in(a,b)$使$f(\xi)=\dfrac{2}{n(n+1)}(f(x_1)+2f(x_2)+\cdots nf(x_n))$

补例：$f(x)$非负，$f(x)\in C[0,1]$，且$f(0)=f(1)=0$，

证：对于$\forall a(0<a<1)$必$\exists x_0(0\le x_0<1)$使$f(x_0+a)=f(x_0)$.