# 高等数学A(上)

# 第三节 可用变量代换法求解的一阶微分方程

一、齐次微分方程

二、可化为齐次方程

三、伯努利方程

# 一、齐次微分方程

**1.定义**

如果一个一阶微分方程可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式，

那么就称这方程为**齐次方程.**

**例如:**

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

$$(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2(\frac{y}{x})}$$

## 2. 解法

步骤1 将齐次方程转化为形式 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ①

步骤2 令$u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$， $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入①式，得

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u \quad ②$$

步骤3 ②是可分离变量的微分方程，求解后再用$\dfrac{y}{x}$代替$u$，便得原方程的通解.

## 3. 典型例题

**例1** 解方程$y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解** 原方程可写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}-1}$.

令$u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入上式, 得

$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1}$, 即$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}$.

分离变量, 得 $\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两端积分，得 $u-\ln|u|+C_1=\ln|x|$,

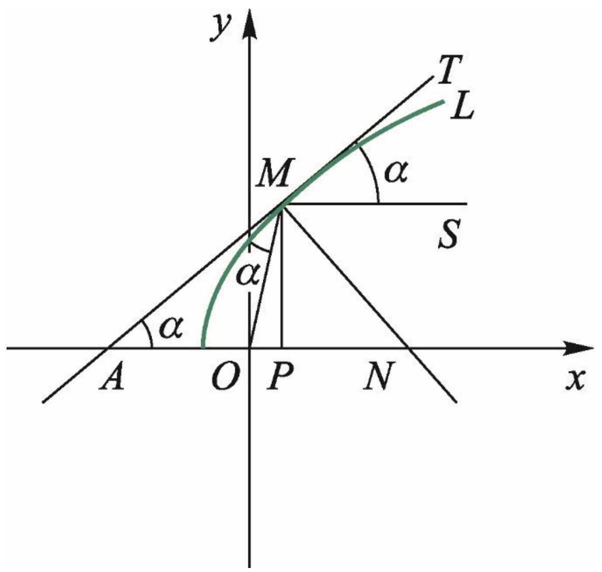
或写为 $\ln|xu|=u+C_1$.

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，得

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C_1$$

或 $y=C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\ (C=\pm\mathrm{e}^{C_1})$.

**例2** 探照灯的聚光镜面是一张旋转曲面，它的形状由$xOy$坐标面上的一条曲线$L$绕$x$轴旋转而成，按聚光镜性能的要求，在其旋转轴($x$轴)上一点$O$处发出的一切光线，经它反射后都与旋转轴平行. 求曲线 $L$ 的方程.




**解** 将光源所在点取作坐标原点，

并设 $L: y = f(x) \quad (y \geqslant 0)$ .

由光的反射定律：入射角 = 反射角

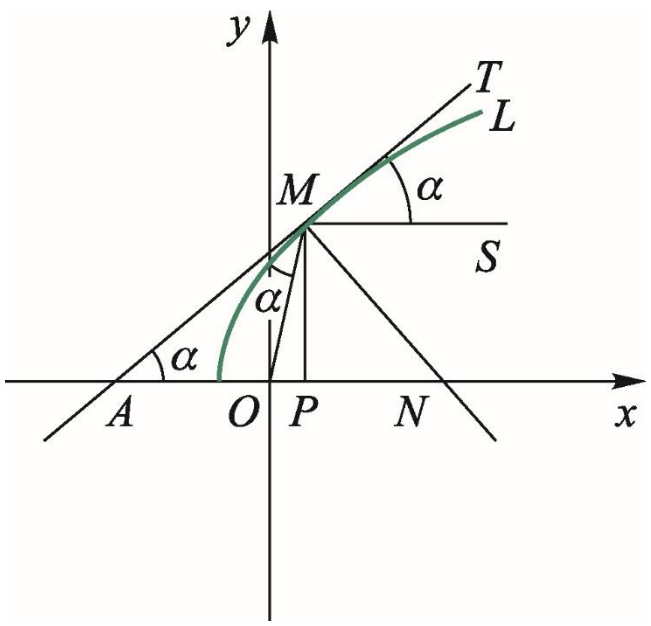
可得 $\angle OMA = \angle OAM = \alpha$,

从而 $AO = OM$.

而 $\quad AO = AP - OP = y\cot\alpha - x$

$$= \frac{y}{y'} - x,$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$




于是得微分方程:

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

变形,得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

令 $v=\frac{x}{y}$，则$x=yv$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ ,

于是方程变为 $y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\sqrt{1+v^2}$ .

可求得其通解为 $\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln y-\ln C$ .

代回原来的变量并化简，得 $y^2=2C(x+\frac{C}{2})$ .

## 二、伯努利方程

**1.定义**

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

的方程称为伯努利方程.

**例如:**

$$y'-3xy=xy^2$$

$$x\mathrm{d}y-[y+xy^3(1+\ln x)]\mathrm{d}x=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=y^3(1+\ln x)$$

## 2. 解法

以 $y^n$除方程两边，则原方程化为

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

作变量代换 $z=y^{1-n}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

线性方程

求出此方程通解后，换回原变量即得伯努利方程的通解.

**例4**　求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$的通解.

**解**　令 $z=y^{-1}$，则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为　$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$代入，得原方程通解：$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$

# *三、可化为齐次的方程

**1.定义**

方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$

当$c=c_1=0$时是齐次的.

当$c^2+c_1^2\neq 0$时，是非齐次的，但可以化为齐次方程求解.

**例如:** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x-y-6}$ $\xrightarrow{\text{令}\begin{cases}x=X+1\\ y=Y-5\end{cases}}$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{X+Y}{X-Y}$

## 2. 解法 分两种情况

(1)当 $\dfrac{a_1}{a} \neq \dfrac{b_1}{b}$ 时，作变换 $\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases}$ ($h, k$为待定常数),

则原方程化为 $$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}.$$

令 $\begin{cases} ah + bk + c = 0\ , \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{cases}$ 解出$h, k$.

齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}.$$ 求出其解后，将 $\begin{cases} X = x - h \\ Y = y - k \end{cases}$ 代入.

(2)当$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$时, 原方程可变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1},b\neq 0.$$

令$v=ax+by$, 则$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

原方程化为$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{v+c}{\lambda v+c_1}$　可分离变量的方程

注 该方法适用于更一般的方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)(c^2+c_1^2\neq 0)$

## 3. 典型例题

**例3** 解方程 $(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0.$

**解**　原方程变形，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2x+y-4}{x+y-1}$，

令 $\begin{cases} x=X+h, \\ y=Y+k, \end{cases}$ 代入方程，得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{2X+Y+2h+k-4}{X+Y+h+k-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{2X+Y+2h+k-4}{X+Y+h+k-1}$$

解方程组$\begin{cases}2h+k-4=0\,,\\ h+k-1=0\,,\end{cases}$得$\begin{cases}h=3\,,\\ k=-2\,.\end{cases}$

即经代换$\begin{cases}x=X+3\\ y=Y-2\end{cases}$，后原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{2X+Y}{X+Y}=-\frac{2+\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}},$$ 这是齐次方程.

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=-\frac{2X+Y}{X+Y}=-\frac{2+\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$$

令 $\frac{Y}{X}=u$，则 $Y=uX$，$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}$，于是方程变为

$$u+X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=-\frac{2+u}{1+u},$$

化简并分离变量，得 $-\frac{u+1}{u^2+2u+2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}X}{X}$，

$$-\frac{u+1}{u^2+2u+2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

两边积分，得

$$\ln C_1-\frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2)=\ln|X|,$$

$$\Downarrow$$

$$X=\frac{C_1}{\sqrt{u^2+2u+2}}, \quad \Rightarrow \quad Y^2+2XY+2X^2=C_2.$$

代回原来的变量并化简得通解为

$$2x^2+2xy+y^2-8x-2y=C.$$

其积分曲线为一簇椭圆. 当 $C=4$ 时的椭圆如下所示.

于是题目的几何意义是:

这一簇椭圆在任意一点

$(x,y)$ 处的切线斜率为

$$k=-\frac{2x+y-4}{x+y-1}.$$