第六节 有理函数的积分

一、有理函数的积分

二、三角函数有理式的积分

三、简单无理函数的积分

一、有理函数的积分

定义

两个多项式的商表示的函数称为有理函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$ 其中 $m,n\in\mathbf{N}_+$,

$a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$, $b_0,b_1,\cdots,b_m\in\mathbf{R}$, 并且$a_0\neq 0, b_0\neq 0.$

假定分子与分母之间没有公因式

（1）当$n<m$时,这有理函数是真分式;

（2）当$n\geqslant m$时,这有理函数是假分式;

$\xrightarrow{\text{利用多项式除法}}$ 多项式 + 真分式之和

例如: $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}.$$

难点 将有理函数化为部分分式之和.

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},\text{其中}A_1,A_2,\cdots,A_k\text{都是常数}$$

（2）分母中若有因式 $(x^2+Px+q)^k$，则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+Px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+Px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+Px+q}$$

其中$M_i,N_i,i=1,\cdots,k$都是常数

例1 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{1}{x(x-1)^2};\quad (2)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\quad (3)\ \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解 (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{-(x-1)+x}{x(x-1)^2}=\frac{-1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)-x}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(2) 用待定系数法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$\because$ 右端分子 $=A(x-3)+B(x-2)$

$\therefore x+3=A(x-3)+B(x-2)$

比较两端通次幂的系数得 $\begin{cases}A+B=1\\-3A-2B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-5,\\B=6.\end{cases}$

$$\therefore\ \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

(3) 赋值法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\therefore A(1+x^2)+(1+2x)(Bx+C)=1$$

代入特殊值来确定系数A,B,C. $\begin{cases} A+C=1 \\ 2A+3B+3C=1 \\ 2A+B-C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{4}{5} \\ B=-\dfrac{2}{5} \\ C=\dfrac{1}{5} \end{cases}$

依次取$x=0,1,-1$, 得

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

例2 求下列积分:

$$(1)\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x;\quad (2)\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x;\quad (3)\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

解 (1) 由例1知

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\therefore\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

(2) 由例1知

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}$$

$$\therefore \int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{-5}{x-3}\mathrm{d}x + \int \frac{6}{x-2}\mathrm{d}x$$

$$= -5\int \frac{1}{x-3}\mathrm{d}(x-3) + 6\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}(x-2)$$

$$= -5\ln|x-3| + 6\ln|x-2| + C$$

(3) 由例1知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

$$\therefore \int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}(1+2x)-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C$$

例3 求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}\mathrm{d}x.$

解 原式 $\xlongequal[\mathrm{d}x=\frac{6}{t}\mathrm{d}t]{令t=e^{\frac{x}{6}}} \displaystyle\int \frac{1}{1+t+t^2+t^3}\cdot\frac{6}{t}\mathrm{d}x = \int \frac{6}{t(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t$

$$= \int\left(\frac{6}{t}-\frac{3}{1+t}-\frac{3t+3}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 6\ln|t|-3\ln|1+t|-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2}-3\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= 6\ln|t|-3\ln|1+t|-\frac{3}{2}\ln|1+t^2|-3\arctan t+C$$

$x=6\ln|t|$

$$= x-3\ln(1+e^{\frac{x}{6}})-\frac{3}{2}\ln(1+e^{\frac{x}{3}})-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

二、三角函数有理式的积分

定义

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称为**三角有理式**. 一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

$$\because \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

令 $u = \tan\frac{x}{2}$, 则 $x = 2\arctan u$, 且 $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

于是得到**万能置换公式**

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

进而

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

三角函数有理式的积分化为有理函数的积分

例4 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 由万能置换公式 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ 及$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$

原式 $\displaystyle=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int \frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$

$$=\int \frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C \quad \because\ u=\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{2}+\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|-\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例5 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解 方法1. 设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$, $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.$$

解 方法2. 修改万能置换公式

令$u = \tan x$, 则 $\sin x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$.

$$\therefore \int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4} \cdot \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1+u^2}{u^4}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x + C.$$

解 方法3. 可以不用万能置换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\,(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \int \csc^2 x\mathrm{d}x + \int \cot^2 x\boxed{\csc^2 x\mathrm{d}x} = \mathrm{d}(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

结论： 比较以上三种解法可知,万能置换不一定是最佳方法,故三角有理式的计算中应优先考虑其他手段.

例6 求 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}\mathrm{d}x$.

公式 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

解 原式 $\displaystyle=\int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

不用万能置换公式

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\tan x$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\tan x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\tan x$$

$$=\frac{1}{4\cos x}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\tan x+C.$$

三、简单无理函数的积分

讨论类型

解决方法 作代换去掉根号.

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$$

令$t=\sqrt[n]{ax+b}$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$$

令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$$\int R(x\,, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x$$

令 $t=\sqrt[P]{ax+b}$, P为m,n的最小公倍数.

例7 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 令$u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2, \mathrm{d}u=3u^2\mathrm{d}u$

原式 $=\int \frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u = 3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u = 3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\mathrm{d}u$

$$=3\left(\frac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\right)+C$$

$$=3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{x+2}+\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|\right)+C$$

例8 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

例9 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解 令 $x = t^6$，则 $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$,

$$原式 = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 6\int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= 6\int (1-\frac{1}{1+t^2})\,\mathrm{d}t = 6(t-\arctan t)+C$$

$$= 6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$$

积分表的使用

一、关于积分表的说明

一、关于积分表的说明

(1) 常用积分公式汇集成的表称为积分表.

(2) 积分表是按照被积函数的类型来排列的.

(3) 求积分时,可根据被积函数的类型直接或经过简单变形后,查得所需结果.

基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k 是常数）;

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;

说明: $x > 0, \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$,

$x < 0, \quad [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + C$,

$\therefore \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

$$(4)\quad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C;$$

$$(5)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C;$$

$$(6)\quad \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

$$(7)\quad \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C;$$

$$(8)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C;$$

$$(9)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C;$$

(10) $$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C;$$

(11) $$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C;$$

(12) $$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C;$$

(13) $$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

(14) $$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C;$$

(15) $$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C.$$

$$(16)\quad \int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$(17)\quad \int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$(18)\quad \int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$(19)\quad \int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$(20)\quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$(21)\quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$(22)\quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$(23)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

$$(24)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

结论　若$f(x)$在$[0,1]$上连续，

(1)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2)　$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(3)　$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数,}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}\end{cases}$$

设$f(x)$是连续的周期函数，周期为T：

(1) $$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) $$\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x \ (n \in \mathbf{N}).$$

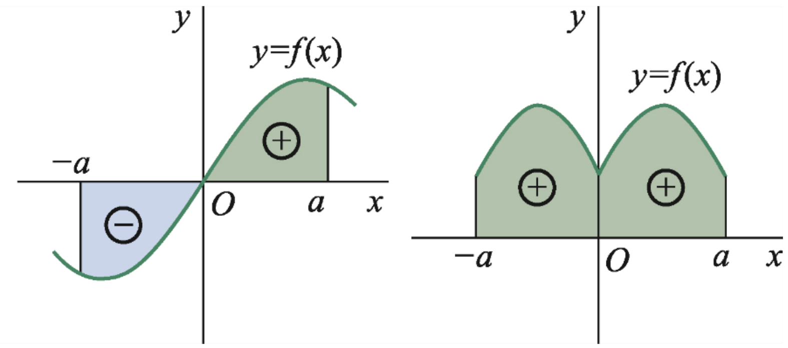
设$f(x)$为$[-a,\ a]$上的连续函数.

（1）若$f(-x)=f(x)$，则$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$；

（2）若$f(-x)=-f(x)$, 则$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

偶倍奇零

由定积分的几何意义(面积的代数和)可得.



注 初等函数在其定义区间上原函数一定存在,但原函数不一定都是初等函数.

例如: $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x$,

等等，它们原函数都不是初等函数.