高等数学A(上)

第一章　　函数、极限与连续

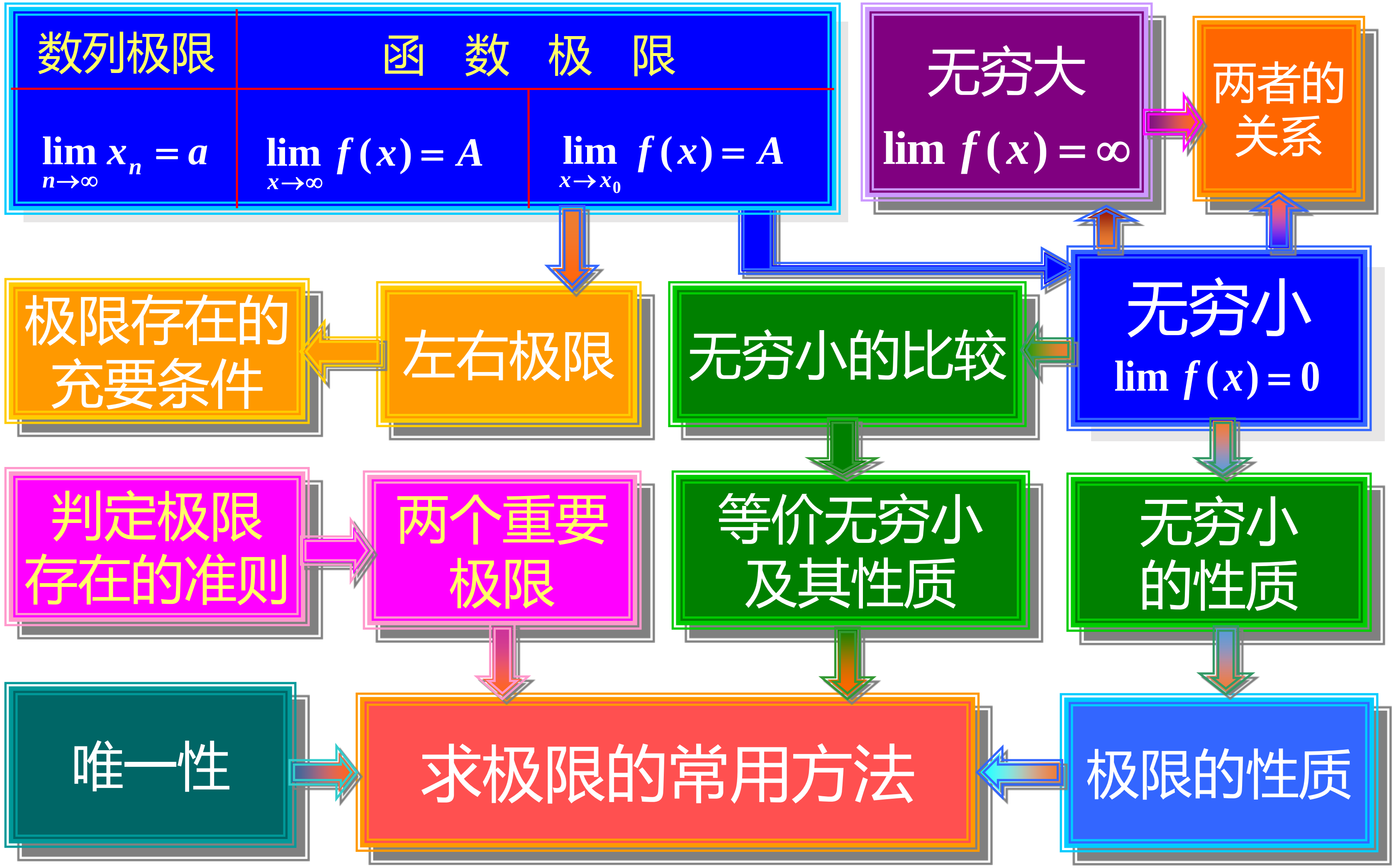
习　题　课

主要内容

典型例题

一、主要内容

- （一）极限的概念
- （二）连续的概念


数列极限
函 数 极 限
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$
无穷大
$\lim f(x) = \infty$
两者的关系
极限存在的充要条件
左右极限
无穷小的比较
无穷小
$\lim f(x) = 0$
判定极限存在的准则
两个重要极限
等价无穷小及其性质
无穷小的性质
唯一性
求极限的常用方法
极限的性质

1. 极限的定义

定义① 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于$n > N$时的一切x_n,不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立,那末就称常数 a是数列x_n的极限,或者称数列 x_n收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或} \quad x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

"$\varepsilon - N$"定义

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon.$

定义②　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当 x \to x_0)$$

"ε－δ"定义　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，
恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$.

右极限 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，
恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

定理：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

定义③　设函数 $f(x)$当 $|x|$大于某一正数时有定义，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 X,使得当 x满足不等式 $|x| > X$时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么常数 A就叫函数 $f(x)$当 $x \to \infty$时的极限,记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to \infty)$$

"ε − X"定义　$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$|x| > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

★另两种情形:

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$2^0.\ x \to -\infty$ 情形： $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

定理：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

2. 无穷小与无穷大

无穷小: 极限为零的变量称为无穷小.

记作 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$).

无穷大: 绝对值无限增大的变量称为无穷大.

记作 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

无穷小与无穷大的关系

在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

无穷小的运算性质

定理1　在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

定理2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1　在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3. 极限的性质

定理　设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1)　$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$

(2)　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$

(3)　$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},$　其中$B\neq 0.$

推论1　如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

推论2　如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

4. 求极限的常用方法

a.多项式与分式函数代入法求极限;

b.消去零因子法求极限;

c.无穷小因子分出法求极限;

d.利用无穷小运算性质求极限;

e.利用左右极限求分段函数极限.

5. 判定极限存在的准则

准则Ⅰ′ 如果当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, r)$(或 $|x| > M$)时,有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在,且等于 A.(夹逼准则)

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

6. 两个重要极限

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\lim_{某过程}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;$$

(2) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

$$\lim_{某过程}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

7. 无穷小的比较

定义: 设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,

记作$\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;

记作$\alpha \sim \beta$;

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$，就说 β 是 α 是 k 阶的无穷小.

8. 等价无穷小的性质

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

9. 极限的唯一性

定理　若 $\lim f(x)$ 存在，则极限唯一.

连 续 定 义

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$　　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

间断点定义

第一类：可去间断点、跳跃间断点

第二类：无穷间断点、振荡间断点

左右连续 → 连续的充要条件

在区间[a,b]上连续 → 连续函数的运算性质

初等函数的连续性 → 非初等函数的连续性

初等函数的连续性 → 连续函数的性质

1. 连续的定义

定义 1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

定义 2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. 单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处右连续.

3. 连续的充要条件

定理 函数$f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$是函数$f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

4. 间断点的定义

函数$f(x)$在点x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足,则称函数$f(x)$在点x_0处不连续(或间断),并称点x_0为$f(x)$的不连续点(或间断点).

5. 间断点的分类

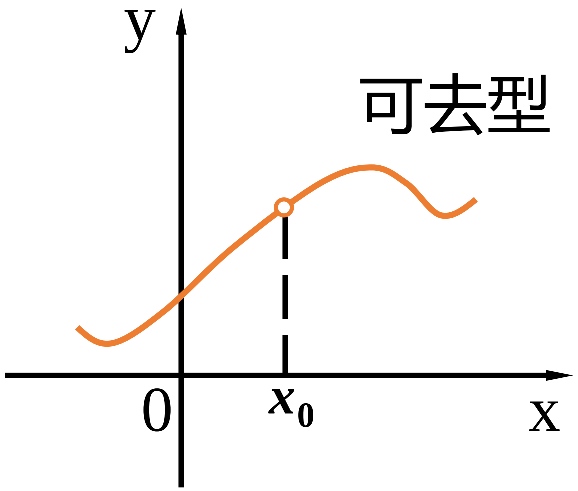
(1) 跳跃间断点 如果$f(x)$在点x_0处左,右极限都存在,但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,则称点x_0为函数$f(x)$的跳跃间断点.

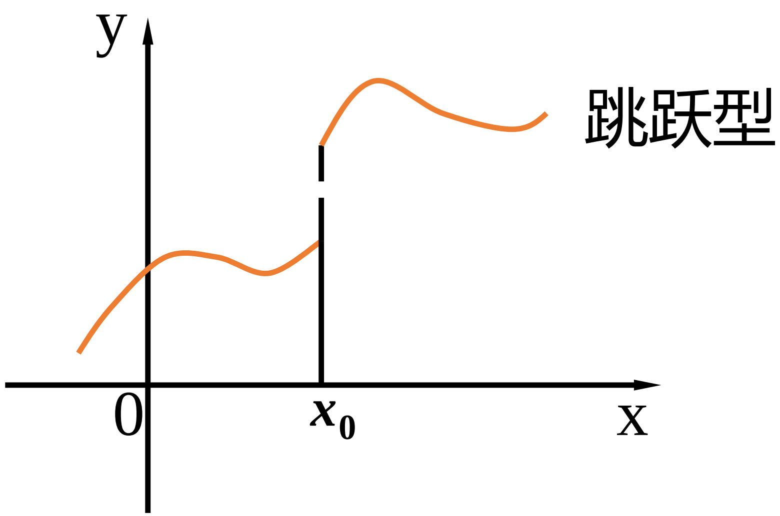
(2)可去间断点 如果$f(x)$在点x_0处的极限存在,但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$,或$f(x)$在点$x_0$处无定义则称点$x_0$为函数$f(x)$的可去间断点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点：函数在点x_0处的左,右极限都存在.

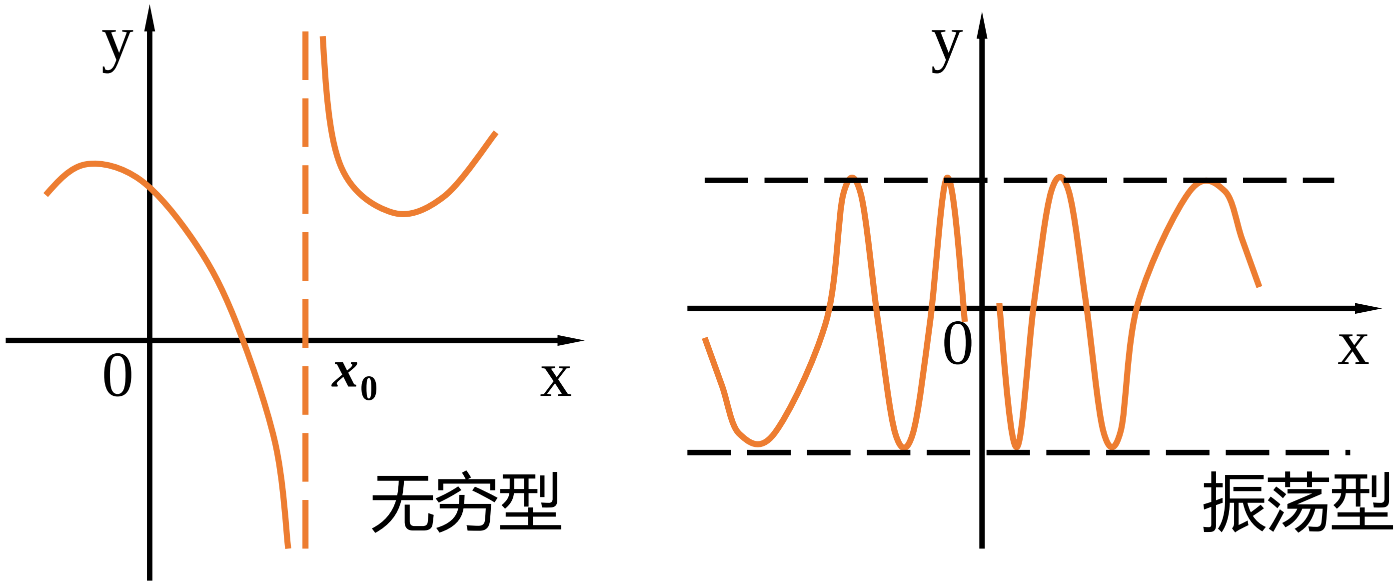
第一类间断点





第二类间断点 如果$f(x)$在点x_0处的左,右极限至少有一个不存在,则称点x_0为函数$f(x)$的<u>第二类间断点</u>.

第二类间断点



6. 闭区间的连续性

如果函数在开区间(a,b)内连续,并且在左端点$x=a$处右连续,在右端点$x=b$处左连续,则称函数$f(x)$<u>在闭区间$[a,b]$上连续</u>.

7. 连续性的运算性质

定理 若函数$f(x),g(x)$在点x_0处连续,则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$$

在点x_0处也连续.

8. 初等函数的连续性

定理1 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

定理2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,函数$f(u)$在点$a$连续,则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理3 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续,且$\varphi(x_0)=u_0$,而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

定理4　基本初等函数在定义域内是连续的.

定理5　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

9. 闭区间上连续函数的性质

定理1(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3(零点定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)\cdot f(b)<0$)，那末在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点，即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使$f(\xi)=0$.

定理 4(介值定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那末，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$ $(a<\xi<b)$.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

典型例题

1. 当$|x|<1$时，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

3. 设$p(x)$是多项式，且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$，求$p(x)$.

4. 设$x_n=\frac{1}{2}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{5}{6}\cdots\bullet\frac{2n-1}{2n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

提示，利用$(2n-1)(2n+1)<(2n)^2$.

5. 讨论$f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$的连续性.

6. 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,且$f(0)=f(1)$,

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

典型例题解答

1. 当$|x|<1$时,

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解　将分子、分母同乘以因子$(1-x)$, 则

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}.\qquad (\because \text{当}|x|<1\text{时},\lim_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0.)$$

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解 解法讨论

设$\lim f(x)=0, \lim g(x)=\infty$, 则

$$\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=e^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$$

$$(\because \ln[1\pm f(x)]\sim \pm f(x)) \qquad =e^{\pm\lim g(x)f(x)}.$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\cos x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore 原式=e^{\frac{1}{2}}.$$

3. 设$p(x)$是多项式，且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{p(x)}{x}=1$, 求$p(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$,

$\therefore$ 可设$p(x)=x^3+2x^2+ax+b$(其中a,b为待定系数)

又 $\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{p(x)}{x}=1$,

$\therefore\ p(x)=x^3+2x^2+ax+b\sim x\quad (x\to0)$

从而得　$b=0, a=1$.　故 $p(x)=x^3+2x^2+x$

4. 设$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$，求$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

提示，利用$(2n-1)(2n+1) < (2n)^2$.

解　由$(2n-1)(2n+1) < (2n)^2$知，

$$\frac{2n-1}{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+1} < \frac{2n}{2n+1},$$

故，$x_n^{\ 2}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2$

$<\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$.

又,$0 < x_n^2 < \dfrac{1}{2n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0,$$

$\therefore$ 由夹逼准则知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 0$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

5. 讨论$f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$的连续性.

解　将$f(x)$改写成

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

由初等函数性质知，

$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$内连续.

当$x=-1$时,

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(1-x)=2.$ $\because \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0.$ 故$f(x)$在$x=-1$间断.

当$x=1$时,

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0.$ $\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0.$ 故$f(x)$在$x=1$连续.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

6. 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明　令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$, 　　$F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论: 若$F(0)=0$, 　则 $\xi=0$, 　$f(0+\frac{1}{2})=f(0)$;

若$F(\frac{1}{2})=0$, 　则 $\xi=\frac{1}{2}$, 　$f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$;

若$F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$, 则

$$F(0)\cdot F(\frac{1}{2})= -[f(\frac{1}{2})-f(0)]^2 < 0.$$

由零点定理知，$\exists \xi \in (0,\frac{1}{2})$, 使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$成立.

综上，必有一点$\xi\in[0,\frac{1}{2}]\subset[0,1]$,

使 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$ 成立.