一元函数微分学

本章重点

导　数　— 描述函数变化快慢
微　分　— 描述函数变化程度
微分学　— 基本概念是导数与微分

微分学	导　数	微　分
基本概念是导数与微分	描述函数变化快慢	描述函数变化程度

中值定理	应用一	应用二
罗尔、拉格朗日、柯西	研究函数性质及曲线性态	利用导数解决实际问题

目 录

CONTENTS

第1.1节 导数概念

一、引例

二、导数的定义

三、由定义求导数举例

四、导数的几何意义

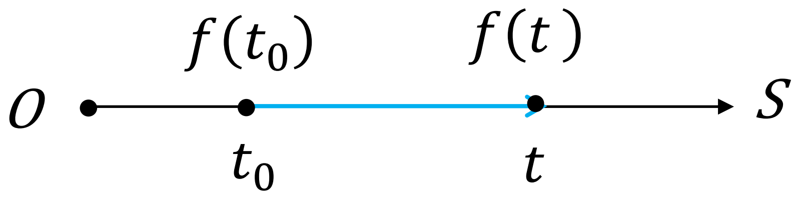
五、可导与连续的关系

一、引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

$$s = f(t)$$



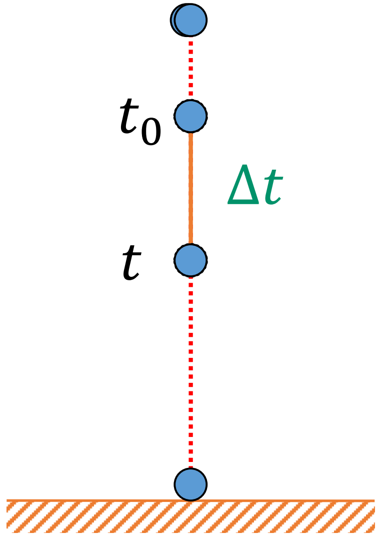
则t_0到t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

而在t_0时刻的瞬时速度为

$$\bar{v} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

自由落体运动



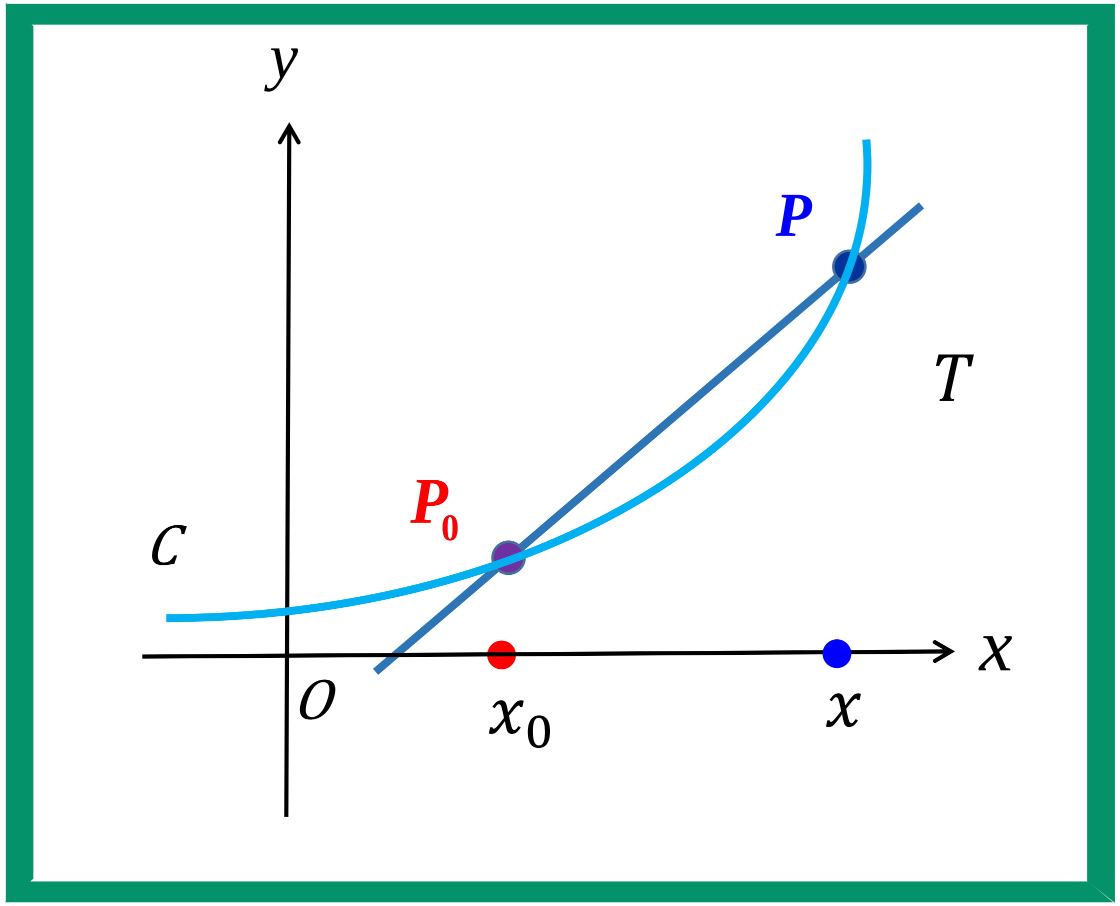
$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

$$\bar{v} = \frac{g}{2}(t_0 + t)$$

$$v = \lim_{t \to t_0} \bar{v} = g t_0$$

2. 曲线的切线

曲线$C:y=f(x)$ 在P_0点处的切线——割线PP_0的极限位置P_0T



设$P_0(x_0,y_0)$, $P(x,y)$.

$$k_{割线}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

$$P\xrightarrow{沿曲线C}P_0,\ x\to x_0,$$

$$k_{切线}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

两个问题的**共性**：所求量为函数增量与自变量增量之比的极限.

瞬时速度 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

切线斜率 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

类似问题还有：加速度

角速度

线密度

……

变化率问题

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

二、导数的定义

1. 函数在一点处的导数

定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，

(1) 因变量的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

(2) 两增量的比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

(3) 极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，或在点 x_0 导数存在.

并称这个极限为函数 $y=f(x)$在点x_0处的导数，记为$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

也可记作 $y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

注 关于导数的几点说明：

(1)当极限 (1) 式不存在时，则称$f(x)$在x_0处不可导或导数不存在.

特别地，当 (1) 式的极限为 ∞时，也称$f(x)$在x_0处的导数为无穷大.

(2)在利用导数的定义证题或计算时，要注意导数定义可以写成多种形式：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

特别地，$f'(0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

(3) 导函数（瞬时变化率）是函数平均变化率的逼近函数.

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$：$x_0$处的瞬时变化率

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$：$y$在以$x_0$和$x_0+\Delta x$为端点的区间上的平均变化率.

2. 单侧导数

(1)左导数：

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(2)右导数：

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(3)单侧导数：左导数和右导数统称为单侧导数.

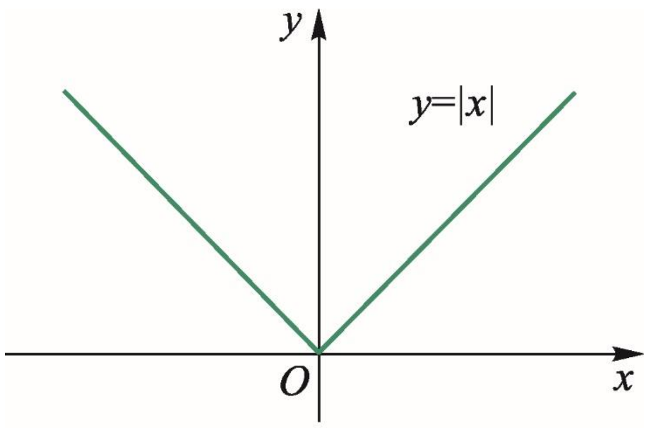
显然 $f'(x_0)$存在 $\Longleftrightarrow$ $f'_-(x_0)$和 $f'_+(x_0)$均存在且相等.

例1 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$ 处的可导性.

解 $\because f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$,

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{-h}{h}=-1.$$



$x=0$ 为尖点

即$f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$, $\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$ 点不可导.

3. 导函数

(1) 如果函数 $y=f(x)$在开区间I内的每点处都可导, 就称函数$f(x)$在开区间I内可导.

(2) 如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导, 且$f'_{+}(a)$及$f'_{-}(b)$都存在, 就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

(3) 对于$\forall x \in I$, 都对应着 $f(x)$的一个确定的导数值. 这个函数叫做原来函数 $f(x)$的导函数.

记作y', $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

即$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

或$f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

显然

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

$$f'(x_0) \neq [f(x_0)]'$$

三、由定义求导数

步骤：(1)求增量　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2)算比值　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(2)求极限　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1　求函数$f(x)=C$(C为常数)的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0.$

即$(C)'=0.$

例2 求函数 $f'(x)=x^{\mu}(\mu\in\mathbf{R})$的导数.

解 设x在幂函数x^{μ}的定义域内, 且$x\neq 0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu}}{h}=x^{\mu-1}\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\mu}-1}{\frac{h}{x}}=\mu x^{\mu-1}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$$

即 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$. $(*)$

对$x=0$, 经分析可知, $(*)$式两端相等.

故 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}(\mu\in\mathbf{R})$.

例3 求下列函数的导数.

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

(1) $y = x^2 \qquad y' = 2x^{2-1} = 2x$

(2) $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \qquad y' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

(3) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad y' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}} \qquad y' = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$

例4　求函数 $f(x)=\sin x$的导数.

解　$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即　$(\sin x)'=\cos x.$

同理可得　$(\cos x)'=-\sin x.$

例5　求函数 $f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$的导数.

解　$$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\ln a.$$

$x\to 0$时,
$a^x-1\sim x\ln a$

即　$(a^x)'=a^x\ln a.$　特别地 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x.$

例6　求函数 $f(x)=\log_a x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

即$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$.

特别地，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

四、导数的几何意义与物理意义

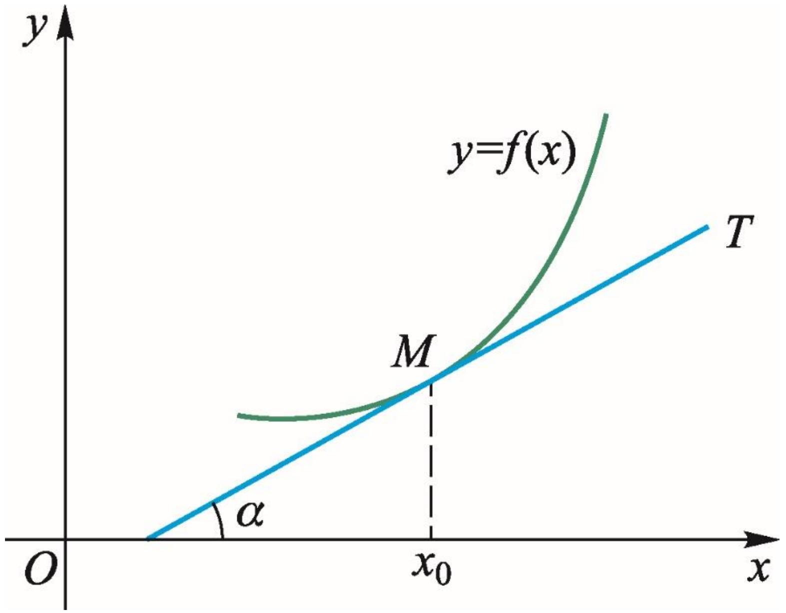
1. 几何意义

$k=f'(x_0)=\tan\alpha$, (α为倾角)

表示曲线 $y=f(x)$在点

$M(x_0, f(x_0))$处的切线的

斜率.



切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

例7 求等边双曲线$y=\frac{1}{x}$在点$\left(\frac{1}{2},2\right)$处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 $\because y=\frac{1}{x}=x^{-1},\quad y'=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},$

$\therefore k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$

故所求

切线方程为 $y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即$4x+y-4=0.$

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即$2x-8y+15=0.$

例8 求曲线$y=x^{\frac{3}{2}}$通过点$(0,-4)$的切线方程.

解 设切点为(x_0,y_0)，则切线的斜率为

$$\therefore k=f'(x_0)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}.$$

于是所求切线方程可设为 $y-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(x-x_0)$,

由$y_0=x_0^{\frac{3}{2}}$, 以及点$(0,-4)$在切线上, 可得$x_0=4$, $y_0=8$.

故所求的切线方程为$3x-y-4=0$.

2. 物理意义

变速直线运动：路程对时间的导数为物体的瞬时速度.

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

交流电路：电量对时间的导数为电流强度.

$$i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

非均匀的物体：质量对长度（面积，体积）的导数为物体的线（面，体）密度.

一般地：非均匀变化量的瞬时变化率.

五、可导与连续的关系

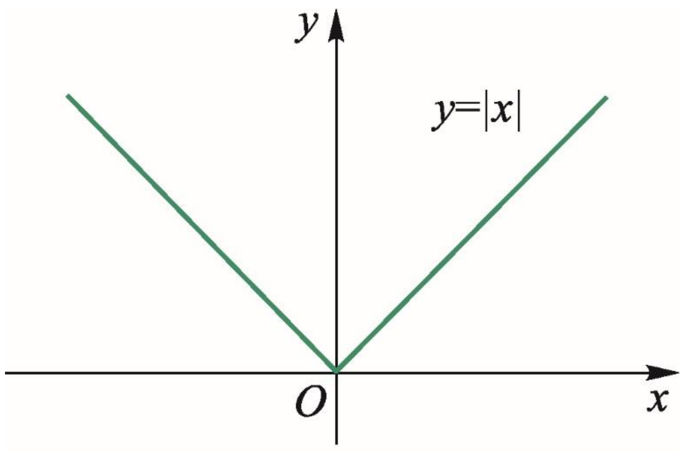
定理 凡可导函数都是连续函数.

证 设函数 $f(x)$在点x_0可导, 即$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$, 其中$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$,

于是$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x\xrightarrow{\Delta x\to 0}0$.

即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 故函数$f(x)$在点$x_0$连续.



x=0 为尖点

思考 可导 $\overset{?}{\rightleftarrows}$ 连续

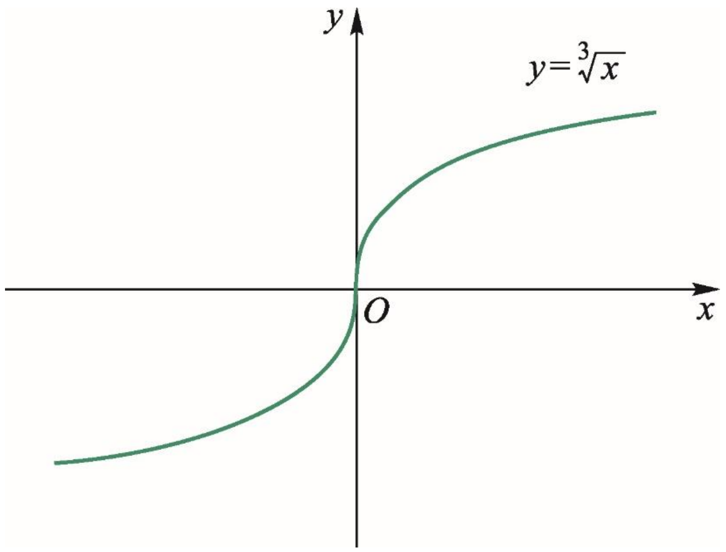
结论： 连续未必可导. 例如, $y=|x|$在$x=0$处连续, 但不可导.

例9 讨论函数$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$处的连续性和可导性.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0=f(0)$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$



$\therefore$ 函数$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$连续但不可导.

注 本题中,也称$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$处有无穷大导数.
在图形中表现为它在原点具有垂直的切线$x=0$.

例10　讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$在$x=0$处的连续性和可导性.

解

$$\because \lim_{x\to 0} f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0} x\ \sin\frac{1}{x}=0,$$

$\therefore f(x)$在$x=0$处可导, 因而$f(x)$在$x=0$处也连续.

第1.2节　函数的微分

一、微分的定义

二、可微的条件

三、微分的几何意义

四、微分公式与微分运算法则

五、微分在近似计算中的应用

一、微分的定义

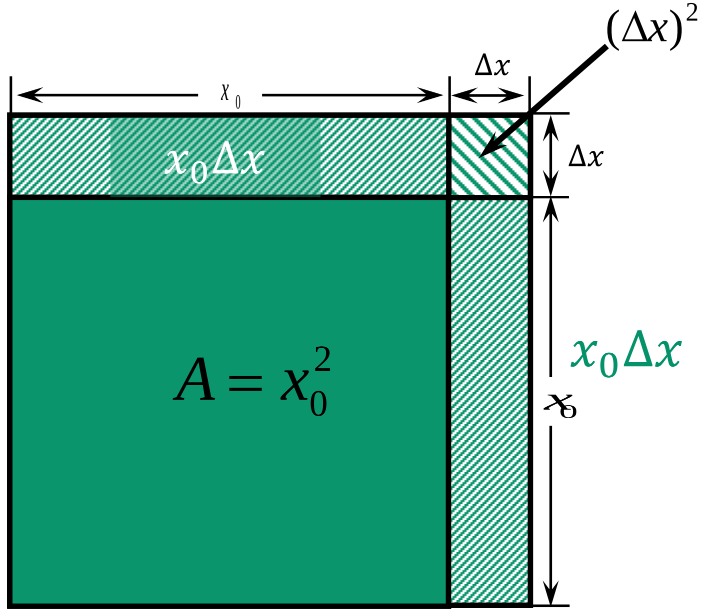
引例　正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A=x_0{}^2$,

$\therefore$ $\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx的线性函数, 且为ΔA的主要部分;

(2): Δx的高阶无穷小, 当$|\Delta x|$很小时可忽略.

再例如,

设函数$y=x^3$在点x_0处的改变量为Δx时,求函数的改变量Δy.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$$

$$=\underbrace{3x_0^2\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当$|\Delta x|$很小时,(2)是Δx的高阶无穷小$o(\Delta x)$,

$\therefore\ \Delta y\approx 3x_0^2\cdot\Delta x.$

既容易计算又是较好的近似值

问题: 这个线性函数(改变量的主要部分)是否所有函数的改变量都有?它是什么?如何求?

微分定义

设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数$y=f(x)$在点x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$\mathrm{d}y|_{x=x_0}$或$\mathrm{d}f(x_0)$，即$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$.

微分$\mathrm{d}y$叫做函数增量Δy的线性主部. **(微分的实质)**

一、可微的条件

定理 函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0处可导，

且 $A = f'(x_0)$.

证 必要性.

$\because f(x)$在点x_0可微，

$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$,

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

$\therefore f(x)$在x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

充分性.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 \right)$$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{\text{线性主部}} + \underbrace{\alpha \cdot (\Delta x)}_{\text{高阶无穷小}}$$

$\therefore f(x)$在点x_0可微.

由上述可知:

(1) 可导 $\Leftrightarrow$ 可微, 且$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$.

(2) $\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小, 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta x} = 0$.

(3) 当$f'(x_0) \neq 0$时, $\mathrm{d}y$与Δy是等价无穷小, 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1$.

(4) 当$|\Delta x|$很小时, $\mathrm{d}y$是Δy的线性主部, 即$\Delta y \approx \mathrm{d}y$.

$$\Delta y = \mathrm{d}y + o(\mathrm{d}y) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = 1.$$

(5)有限增量公式 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

例1　求函数 $y=x^3$ 当$x=2$，$\Delta x=0.02$时的微分.

解　$\because\ \mathrm{d}y=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$

$$\therefore\ \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=0.24.$$

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分,记作$\mathrm{d}x$,即$\mathrm{d}x=\Delta x$.

$$\therefore\ \mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x. \longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

即函数的微分$\mathrm{d}y$与自变量的微分$\mathrm{d}x$之商等于该函数的导数. 导数也叫“微商”.

二、微分的几何意义

几何意义:(如图)

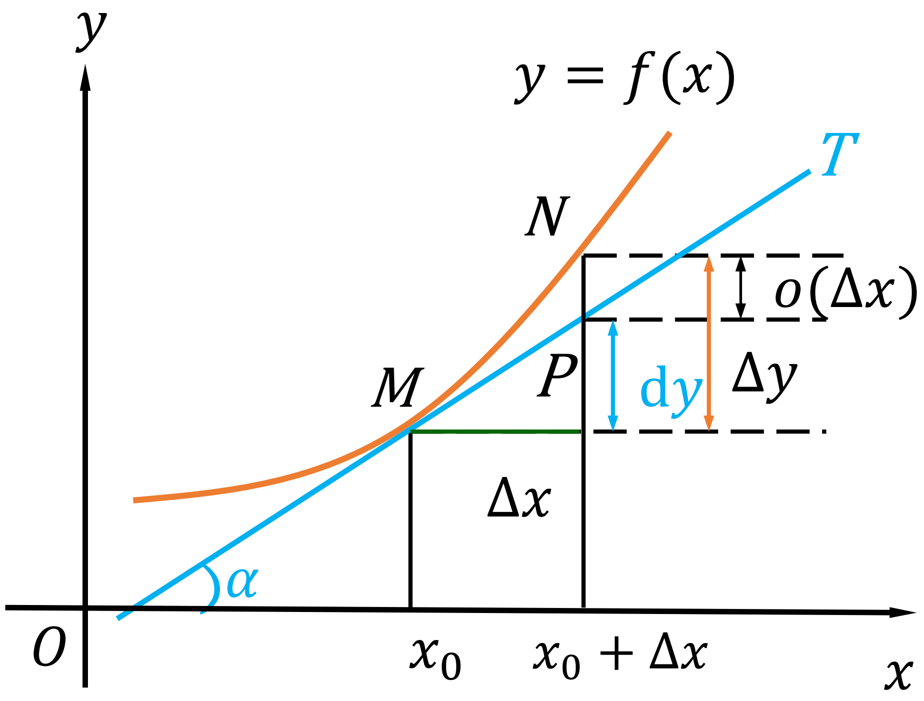
当Δy是曲线的纵坐标增量时,

$\mathrm{d}y$就是切线纵坐标对应的增量.

当$|\Delta x|$很小时,在点M的附近,

切线段MP可近似代替

曲线段MN.



在局部范围内,用线性函数近似代替非线性函数

称为非线性函数的局部线性化

三、微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

利用$\Delta y \approx \mathrm{d}y$，可得如下公式：

（1）$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$　　(当$|\Delta x|$很小时).

（2）$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$　　(当$|x-x_0|$很小时).

（3）$f(x) \approx f(0)+f'(0)\cdot x$　　(当$|x|$很小时).

例7　求$\sin 29^{\circ}$的近似值.

解　设$f(x)=\sin x$,

$\because\ 29^{\circ}=30^{\circ}-1^{\circ}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}$,

利用$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$

$\therefore\ \sin 29^{\circ}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{180}\right)\approx\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)\approx 0.485.$$

例8　计算$\sqrt[5]{245}$的近似值.

解　$\because 245 = 243 + 2 = 3^5 + 2 = 3^5\left(1 + \dfrac{2}{3^5}\right)$,

$$\therefore \sqrt[5]{245} = \sqrt[5]{243 + 2}$$

$$= 3\left(1 + \frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\approx 3\left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{243}\right)$$

$$= 3.0049 \approx 3$$

设$f(x) = (1 + x)^{\alpha}$

则由$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$

可得$(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$

*2. 误差估计

某个量的精确值为A, 其近似值为a, 称$|A-a|$为a的绝对误差.

$$\text{称}\ \frac{|A-a|}{|a|}\ \text{为}\ a\ \text{的相对误差.}$$

若$|A-a|\leqslant\delta_A$, 则称δ_A为测量A的绝对误差限,

$$\text{称}\ \frac{\delta_A}{|a|}\ \text{为测量}\ A\ \text{的相对误差限.}$$

误差传递公式:

若直接测量某量得x, 已知测量误差限为δ_x, 按公式$y=f(x)$

计算y值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x| \leqslant |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故y的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$,

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$.

例9 设测得圆钢截面的直径$D=60.03\text{mm}$，测量D的绝对误差限$\delta_D=0.05\text{mm}$,欲利用公式$A=\frac{\pi}{4}D^2$计算圆钢截面积,试估计面积的误差.

解 计算A的绝对误差限约为

$$\delta_A=|A'|\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times 60.03\times 0.05\approx 4.712(\text{mm})$$

A的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|}=\frac{\frac{\pi}{2}D\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.0}=0.17\%$$