高等数学A(上)

第一章 函数的极限与连续

本章重点

分析基础
- 函数 — 研究对象
- 极限 — 研究方法
- 连续 — 研究桥梁

常量	变量	函数	极限	连续
初等数学	高等数学	研究对象	研究方法	研究桥梁

目 录

CONTENTS

第一章

第五节 无穷小的比较

一、无穷小的比较

二、等价无穷小代换

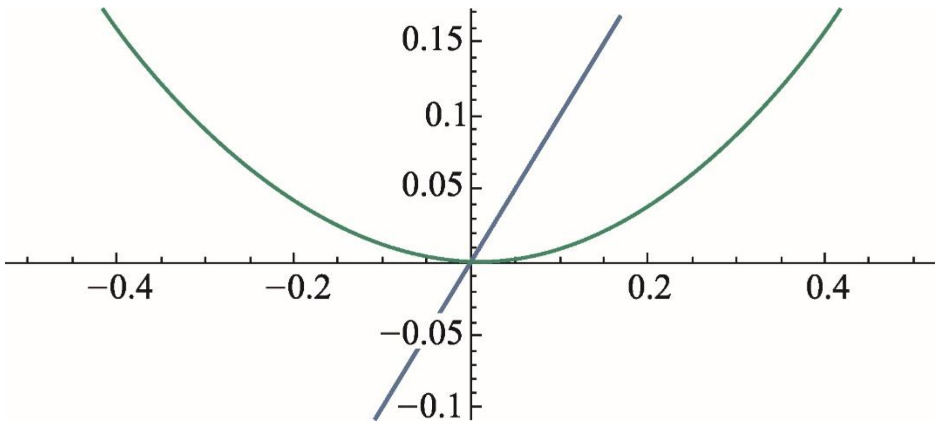
一、无穷小阶的比较

在自变量统一变化过程中，两个无穷小之和、差、积仍为无穷小.

思考： 两个无穷小之商是否还是无穷小？

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

反映出无穷小量趋于零的快慢程度不一样！



定义　设α和β是同一自变量变化过程中的无穷小量，且$\alpha \neq 0$.

（1）如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$;

（2）如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

（3）如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

特别地，如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

（4）如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$，则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小.

例如:

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=0,$　$\therefore x\to 0$ 时,x^3是x的高阶无穷小,即$x^3=o(x)$;

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty,$　$\therefore x\to 0$ 时,x是x^2的低阶无穷小;

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　$\therefore x\to 0$ 时,$\sin x$是x的等价无穷小, 即 $\sin x\sim x$;

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2},$　$\therefore x\to 0$ 时,$1-\cos x$是x^2的同阶无穷小;

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$1-\cos x$ 是x的二阶无穷小.

$1-\cos x$ 是$\dfrac{1}{2}x^2$的等价无穷小.

例1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 令$e^x-1=u$，即$x=\ln(1+u)$，则当$x\to 0$时，有$u\to 0$，

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

即，当$x\to 0$时，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$.

例2　证明: 当$x \to 0$时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{n}x$.

证　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\dfrac{x}{n}}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^n-1}{\frac{x}{n}\left[\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\cdots+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^{n-2}+\cdots+1}=1.$$

$\therefore$ 当$x \to 0$时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{n}x$.

定理1 β与α是等价无穷小的充分必要条件为$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

称α是β的主要部分.

证 必要性 设$\alpha\sim\beta$, $\lim\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}-1=0$,

$\therefore\quad \beta-\alpha=o(\alpha)$, 即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性 设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1.$$

$\therefore\quad \alpha\sim\beta$.

意义： 用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

例如: 常用的等价无穷小及其它们的近似表达

当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x,$$
$$\tan x \sim x,$$
$$\arcsin x \sim x,$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$
$$e^x - 1 \sim x,$$
$$\ln(1+x) \sim x,$$
$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim x.$$

当$x \to 0$时,

$$\sin x = x + o(x),$$
$$\tan x = x + o(x),$$
$$\arcsin x = x + o(x),$$
$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x),$$
$$e^x - 1 = x + o(x),$$
$$\ln(1+x) = x + o(x),$$
$$\sqrt[n]{1+x} - 1 = x + o(x).$$

二、等价无穷小代换

定理2（等价无穷小代换定理）

设$\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$，且$\lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$存在，则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$.

证　$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta}{\tilde{\beta}} \cdot \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \cdot \dfrac{\tilde{\alpha}}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta}{\tilde{\beta}} \cdot \lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} \cdot \lim \dfrac{\tilde{\alpha}}{\alpha} = \lim \dfrac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$.

定理2说明，对于$\dfrac{0}{0}$型的极限，选择恰当的等价无穷小可简化运算.

例如:　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$. $\because x \to 0$时，$\sin(mx) \sim mx, \tan(mx) \sim mx$.

例3 求极限

$\ln(1+t)\sim t$

$\sin t\sim t$

$e^t-1\sim t$

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

$1-\cos t\sim\frac{1}{2}t^2$

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x^2)}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+(-x^2)}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(-x^2)}{\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)\sin x^2}{(\arcsin x)^2}$.

解 当$x\to 0$时，$\sin x^2 \sim x^2 \Rightarrow (x+1)\sin x^2 \sim (x+1)x^2$,

$$\arcsin x \sim x \Rightarrow (\arcsin x)^2 \sim x^2.$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

思考. 如下解法是否正确？为什么？

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x} \times \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3}=0.$$

答案： 不正确

$\because\ x-x$与$\sin x-\tan x$不等价！

注 乘、除项的因子可用等价无穷小代换;

加、减项的无穷小慎用等价无穷小代换.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{\sin^3 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{(2x)^3} = \frac{1}{16}.$$

例5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解 $\because \tan 5x=5x+o(x)$, $\sin 3x=3x+o(x)$,

$$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{3x+o(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5+\frac{o(x)}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{o(x)^2}{x}}{3+\frac{o(x)}{x}}=\frac{5}{3}.$$