第四节　极限的运算

- 无穷小量与无穷大量
- 极限的运算法则
- 数列极限存在准则
- 两个重要极限
- 小结

0 基本要求

基本要求：

1.理解无穷小量与无穷大量的概念与性质.

2.理解极限的运算法则.

3.掌握两个重要极限.

4.会利用数列记极限存在准则证明极限.

一 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义1.4.1

在自变量的一定趋向下，如果$f(x)$以零为极限，则称$f(x)$是在x指定趋向下的无穷小量，简称无穷小.

简而言之，极限为零的变量称为无穷小.

一 无穷小量与无穷大量

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, $\therefore a_n = \dfrac{1}{n}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小.

注记：1.无穷小是变量, 不能与很小的数混淆;

零是可以作为无穷小的唯一的数;

2.无穷小是一类极限, 与自变量的变化过程有关.

一 无穷小量与无穷大量

定理1.4.1（无穷小与函数极限的关系）

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证 必要性

充分性

意义：

1) 将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小);

2) 给出了函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的近似表达式

$f(x) \approx A$, 误差为 $\alpha(x)$.

一 无穷小量与无穷大量

2.无穷小的运算定理

定理1.4.2 在自变量的同一趋向下,

(1)有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

(2)有界函数与无穷小乘积仍为无穷小.

证(1): (以$x \to \infty$为例证明,其它情况类如)

设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小,

$\forall \varepsilon > 0, \exists X_1 > 0, X_2 > 0$,使得

当$|x| > X_1$时恒有$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$;当$|x| > X_2$时恒有$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$;

取$X = \max\{X_1, X_2\}$, 当$|x| > X$时,恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \therefore \alpha \pm \beta \to 0 \ (x \to \infty)$$

一 无穷小量与无穷大量

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

一 无穷小量与无穷大量

证(2):（以$x \to x_0$为例证明，其它情况类如）

设函数u在$\mathring{U}(x_0,\delta_1)$内有界，

则$\exists M>0,\delta_1>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta_1$时有$|u|\le M$.

又设α是当$x \to x_0$时的无穷小，

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta_2>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta_2$时有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

$\therefore$当$x\to x_0$时，$u\cdot\alpha$为无穷小.

一 无穷小量与无穷大量

推论1.4.1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1.4.2　有限个无穷小的乘积是无穷小.

例1　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$　　　$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$

一 无穷小量与无穷大量

3.无穷大量

在自变量某变化过程中, $|f(x)|$无限增大，则称 $f(x)$ 在自变量该变化过程中为无穷大.

定义1.4.1

若对任意给定的正数M(无论它有多大),总存在正数δ(或X),使当$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时,恒有$|f(x)|>M$成立,则称当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时$f(x)$是无穷大量，简称无穷大.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$).

一 无穷小量与无穷大量

定义中$|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$ (或 $f(x)<-M$)即有

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$$

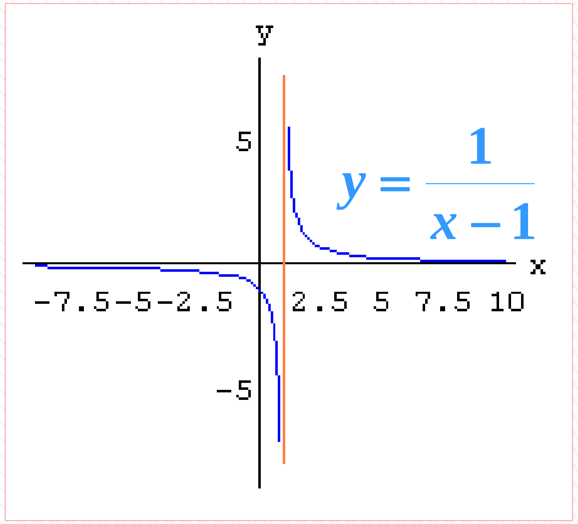
注记： 1.无穷大是极限不存在的情形，这里借用了极限的记号，但并不表示极限存在.

2.无穷大不是一个数而是一个变量，一个数无论多大也不是无穷大.

3.说一个函数是无穷大量，同样要指出自变量的变化过程.

一 无穷小量与无穷大量

例2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证 $\forall M>0.$ 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M,$

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M},$ 取 $\delta=\dfrac{1}{M},$

当 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$ 时, 就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

一 无穷小量与无穷大量

4. 无穷大量与无穷小量的关系

定理1.4.3 在自变量的同一趋向下，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$.

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

一 无穷小量与无穷大量

反之,设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$.

$\therefore \forall M > 0, \exists \delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时

恒有$|f(x)| < \dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x) \neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$.

$\therefore$ 当$x \to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

一 无穷小量与无穷大量

注意:

1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种状态.

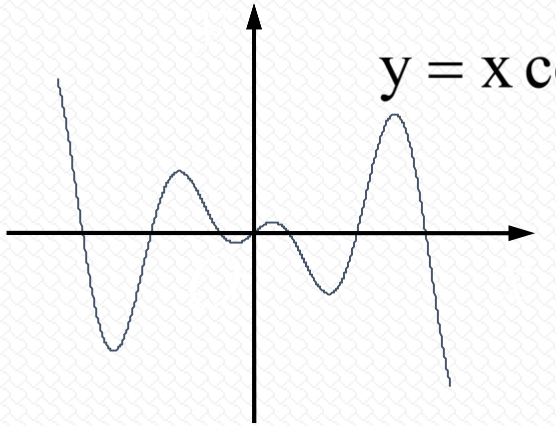
2. 函数为无穷大 , 必定无界 . 但反之不真 !

例如, 函数 $f(x) = x\cos x,\ x \in (-\infty, +\infty)$

$$f(2n\pi) = 2n\pi \to \infty \quad (\text{当 } n \to \infty)$$

但 $f(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$

所以 $x \to \infty$ 时, $f(x)$ 不是无穷大 !



二 极限的运算法则

下面各定理的极限符号lim没有注明自变量的变化趋向，是指同一变化趋向，且是六种变化趋势中的某一种情形.

定理1.4.4 设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

二 极限的运算法则

证 $\because \lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B.$

$\therefore f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta$，其中$\alpha\to 0,\beta\to 0.$

由无穷小运算法则,得

$$[f(x)\pm g(x)]-(A\pm B)=\alpha\pm\beta\to 0.$$

$\therefore$ (1)成立.

$$[f(x)\cdot g(x)]-(A\cdot B)=(A+\alpha)(B+\beta)-AB$$

$$=(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta\to 0.$$

$\therefore$ (2)成立.

二 极限的运算法则

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}$$

$\because B\alpha-A\beta\to 0.$

又$\because \beta\to 0, B\neq 0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时,

$|\beta|<\frac{|B|}{2}$, $\quad\therefore |B+\beta|\geq|B|-|\beta|>|B|-\frac{1}{2}|B|=\frac{1}{2}|B|$

$\therefore |B(B+\beta)|>\frac{1}{2}B^2$, 故$\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|<\frac{2}{B^2}$, 有界,

$\therefore$ (3)成立.

二 极限的运算法则

推论1.4.3　若 $\lim f(x)=A, c$ 为常数,

则 $\lim[cf(x)] = c\lim f(x) = cA.$

推论1.4.4　若 $\lim f(x)=A, n$ 为常数,

则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n.$

二 极限的运算法则

定理1.4.5

设$y = f[\varphi(x)]$是由$y = f[u], u = \varphi(x)$复合而成，如果$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$,且在$x_0$的一邻域内(除$x_0$外)$\varphi(x) \neq u_0$, $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$,则有$\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = A$.

二 极限的运算法则

例3 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin e^{x}=\sin 1.$

例4 设x_0为实数, n为正整数, 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n.$

一般地, 设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} p(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=p(x_0).$$

二 极限的运算法则

例5　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

二 极限的运算法则

一般地

对于 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

二 极限的运算法则

例6 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0$, 商的法则不能用

又 $\because \lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0$,

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$$

二 极限的运算法则

例7 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零.

先约去不为零的无穷小因子 $x-1$ 后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

注记：消去零因子法

二 极限的运算法则

例8 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x+1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{20}.$$

二 极限的运算法则

例9 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{2}{(1-x)(1+x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}\right]=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

二 极限的运算法则

例10 (1) 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+5}{5x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时,分子,分母的极限都是无穷大.

先用x^3去除分子分母,分出无穷小,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+5}{5x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{3}{5}.$$

无穷小因子分出法:以自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

二 极限的运算法则

例10（2） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时，分子，分母的极限都是无穷大.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+5}{7x^3+4x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$$

$$=0.$$

二 极限的运算法则

例10 (3) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x^2-1}{2x^2+3x+5}$.

解 $x\to\infty$时, 分子,分母的极限都是无穷大.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+4x^2-1}{2x^2+3x+5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}$$

$$=\infty.$$

二 极限的运算法则

一般地，有如下结论：

当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}n = m, \\ 0, & \text{当}n > m, \\ \infty, & \text{当}n < m, \end{cases}$$

又如求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

“抓大头”

二 极限的运算法则

例11 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

二 极限的运算法则

例12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right).$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

二 极限的运算法则

例13 已知 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x+1}+bx+4$，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，求 a，b 的值.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，求 a，b 的值.

解 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x+1}+bx+4=\dfrac{bx^2+(a+b+4)x+3}{x+1}$

(1) 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx^2+(a+b+4)x+3}{x+1}=0$，得

$b=0$，$a+b+4=0$，$\therefore$ $a=-4$，$b=0$.

二 极限的运算法则

例13 已知 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x+1}+bx+4$，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，求 a，b 的值．

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，求 a，b 的值．

解 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x+1}+bx+4=\dfrac{bx^2+(a+b+4)x+3}{x+1}$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx^2+(a+b+4)x+3}{x+1}=\infty$，得

$b\neq 0$，$a+b+4\in R$，$\therefore$ $\boldsymbol{a\in R}$，$\boldsymbol{b\neq 0}$．

二 极限的运算法则

例14 设 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=I$ (有限数)，求 a,I.

解 由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=I$ (有限数)，

$\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$，可得 $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-ax^2-x+4)=0$，

即 $4-a=0$， $\therefore\ a=4$，

由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-5x+4)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-5x+4)\ =10$， $\therefore\ I=10$.

三 数列极限存在准则

1.夹逼准则

若数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$满足下列条件：

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$, 证明：（P33）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注意　用夹逼准则求极限, 关键是构造出y_n与z_n,
并且y_n与z_n的极限相同且容易求.

三 数列极限存在准则

例1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　$\because \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$,　由夹逼得准则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

三 数列极限存在准则

例2 (1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n}$.

(2) 设 a_1,a_2,a_3 为正实数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+a_3^n}=\max\{a_1,a_2,a_3\}$$

三 数列极限存在准则

1.单调有界收敛准则

若数列$\{x_n\}$满足：

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots\text{，就称为递增数列.} \\ x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots\text{，就称为递减数列.} \end{array}\right\}\text{单调数列}$$

单调有界收敛准则：单调有界数列必有极限.

1) 若$\{x_n\}$单调增加且有上界 M, 则$\{x_n\}$必有极限

且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le M$.

2) 若$\{x_n\}$单调减少且有下界 m, 则$\{x_n\}$必有极限

且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge m$.

三 数列极限存在准则

若数列$\{x_n\}$满足：

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots，\text{就称为递增数列.} \\ x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots，\text{就称为递减数列.} \end{array}\right\}$$

单调有界收敛准则：单调有界数列必有极限.

1) 若$\{x_n\}$单调增加且有上界 M, 则$\{x_n\}$必有极限且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le M$.

2) 若$\{x_n\}$单调减少且有下界 m, 则$\{x_n\}$必有极限且有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge m$.

三 数列极限存在准则

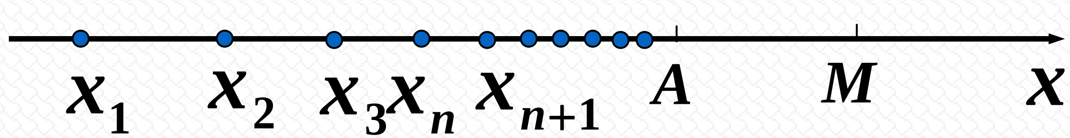
单调有界准则

如果数列 x_n 满足条件

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots, & \text{单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots, & \text{单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则 II　单调有界数列必有极限.

几何解释:



三 数列极限存在准则

例1

设 $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{1+x_n^2}{2}\,(n=1,2,\cdots)$,

(1) 求证: 数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界 .

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

注意　在取极限前应该先证明数列 x_n 有极限.

这时常用的一个方法是先证明数列 x_n 单调有界.

四 两个重要极限

定理1.4.6 (函数形式的夹逼定理)

设在x_0的某去心邻域内有$h(x) \le f(x) \le g(x)$且

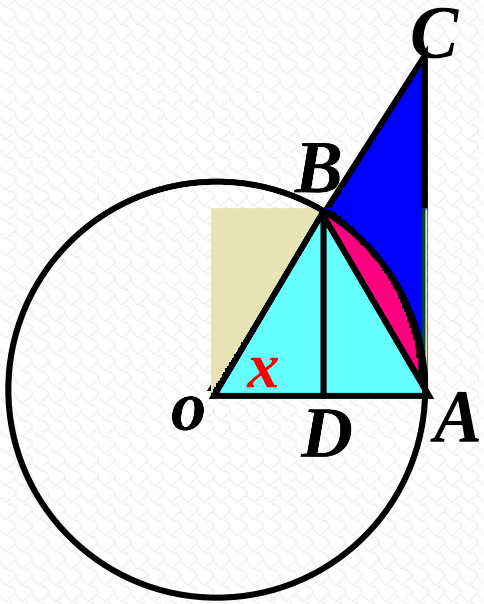
$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$,则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

证明：（P35）

说明：夹逼定理同样适用于自变量的其它趋向形式.

四 两个重要极限

1. 第一个重要极限 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$



设单位圆 O，圆心角 $\angle AOB = x$，$(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得 ΔACO.

扇形 OAB 的圆心角为 x，ΔOAB 的高为 BD，

$$S_{\Delta OAB} < S_{扇形OAB} < S_{\Delta OAC},$$

四 两个重要极限

$\therefore \sin x < x < \tan x,$ 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1,\quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1,$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

可推广为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$(其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$)

四 两个重要极限

注记：

在上面证明过程中,我们实际上已证明了不等式:对于任意实数x,有$|\sin x| \le |x|$. 这是一个重要的不等式,在以后许多地方会用到.

四 两个重要极限

例15 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

例16 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

例17 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

例18 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

例19 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

四 两个重要极限

注记：

我们把第一个重要极限公式写出如下的一般形式：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1.$$

由该公式推出的下面两个公式最好记住，

以便于后面求极限时使用：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}. \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1.$$

四 两个重要极限

2. 第二个重要极限 $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$

前述： $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 证明：（P34）

四 两个重要极限

当 $x\geq 1$时， 有 $[x]\leq x\leq [x]+1$,

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}\leq(1+\frac{1}{x})^{x}\leq(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})=e,$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=e,$$

$$\therefore\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e.$$

四 两个重要极限

令 $t=-x$,

则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

可推广为

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=e.\ \ (\text{其中}\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty)$$

四 两个重要极限

令 $t=\frac{1}{x}$， $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t}=e.$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

可推广为

$$\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e.\quad(\text{其中}\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0)$$

四 两个重要极限

例20 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

例21 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$

例22 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x+1})^{x}$

四 两个重要极限

注记：

我们把第二个重要极限写出如下的一般形式：

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e \qquad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

当$x\to\infty$(或$x\to x_0$)时，有$f(x)\to 1$,

$g(x)\to\infty$,幂指函数 $f(x)^{g(x)}$的极限

类型称为1^{∞}型，对1^{∞}的极限可以考虑

利用第二个重要极限.

四

两个重要极限

例23 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

例24 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$

例25 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$

四 两个重要极限

注记:

例23和例24的极限可作为公式使用, 即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

例25利用极限运算的结果:如果极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$存在，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=A^{B}.$$

五 小结

无穷小与无穷大是相对于过程而言的.

1、主要内容: 两个定义;三个定理;两个推论.

2、几点注意:

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小.

（3） 无界变量未必是无穷大.

五 小结

1. 极限的四则运算法则及其推论;
2. 极限求法;
   1) 多项式与分式函数代入法求极限;
   2) 消去零因子法求极限;
   3) 无穷小因子分出法求极限;
   4) 利用无穷小运算性质求极限;
   5) 利用左右极限求分段函数在分段点处的极限;
   6) 分母或分子有理化.
3. 两个重要极限

六 思考题

设$f(x)$是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，求$f(x)$.