§5.1 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的定义

二、特征值和特征向量的求法

三、特征值和特征向量的性质

0 知识引入

例 设$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$,问$Au$和$Av$是什么？

$$Au=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=5u$$

$$Av=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}\neq \lambda v$$

则Au与u共线，$Au=5u$，因此A"拉伸"了u.

但Av不是v的倍数，A对v进行了"旋转".

思考：若$Au=5u$，则$A^n u=$?

一 特征值与特征向量的定义

定义1 设A是n阶方阵，若数λ和n维非零列向量α满足关系式

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

则称数λ为方阵A的特征值，

非零列向量α称为A的对应于特征值λ的特征向量.

说明： 1. 特征向量$\alpha \neq 0$.　2. 特征值问题只对方阵而言 .

3. 以下命题等价

$$A\alpha = \lambda\alpha = \lambda E\alpha, \alpha \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ 非零向量α满足$(A - \lambda I)\alpha = 0$

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$(A - \lambda I)x = 0$有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式$|A - \lambda I| = 0.$

一 特征值与特征向量的定义

$$4.\ \left|A-\lambda E\right|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

记 $f(\lambda)=\left|A-\lambda E\right|$，它是 λ 的 n 次多项式，

称其 为方阵 A 的 特征多项式．

称以 λ 为未知数的一元 n 次方程 $\left|A-\lambda E\right|=0$

为A的特征方程．

一 特征值与特征向量的定义

例 不用计算，求$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$的一个特征值及其对应的特征向量，并验证.

解 令$u=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Au=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=6u.$

则u是为A对应于特征值$\lambda=6$的特征向量.

一 特征值与特征向量的定义

例 设n阶方阵A满足$A^2-2A-3E=0$,证明A 的特征值只能是3或-1.

证明 设λ是A 的特征值, x是对应于特征值λ 的特征向量.

则$Ax=\lambda x$, 且$x\neq 0$.

$$\begin{aligned}(A^2-2A-3E)x&=A^2x-2Ax-3Ex\\&=A(Ax)-2Ax-3x\\&=A(\lambda x)-2\lambda x-3x\\&=\lambda(Ax)-2\lambda x-3x\\&=(\lambda^2-2\lambda-3)x=0\end{aligned}$$

又$x\neq 0$, 则$\lambda^2-2\lambda-3=0\Rightarrow\lambda=3$或$\lambda=-1$.

二 特征值与特征向量的求法

方阵的特征值与特征向量的计算方法：

(1) 求出特征方程的 $|A-\lambda E|=0$ 所有根，即 A 的全部特征值：λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n (可能有重根).

(2) 对于 A 的每个特征值 λ_i，求齐次线性方程组 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的一个基础解系 α_{i_1}，$\alpha_{i_2},\cdots$，α_{i_t} 则 $k_{i_1}\alpha_{i_1}+k_{i_2}\alpha_{i_2}+\cdots+k_{i_t}\alpha_{i_t}$ 即为 A 的对应于 λ_i 的全部特征向量，其中 k_{i_1}，$k_{i_2},\cdots$，k_{i_t} 为不全为零的任意常数.

二 特征值与特征向量的求法

例1 求$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=4.$

当$\lambda_1=2$时,对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

二 特征值与特征向量的求法

即 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

解得 $x_1 = x_2$，所以对应的特征向量可取为$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

所以$k_1 p_1 (k_1 \neq 0)$是对应于$\lambda_1 = 2$的全部特征向量.

当$\lambda_2 = 4$时,由

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\text{即}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解得$x_1 = -x_2$,所以对应的特征向量可取为$p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

所以$k_2 p_2 (k_2 \neq 0)$是对应于$\lambda_2 = 4$的全部特征向量.

二 特征值与特征向量的求法

例 2 求矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解 A的特征多项式为

$$|A-\lambda \mathbf{I}|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

所以A的特征值为$\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1.$

当$\lambda_1=2$时,解方程$(A-2I)x=0$.由

二 特征值与特征向量的求法

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$

所以$k_1p_1(k_1\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时,解方程$(A-E)x=0$.由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

二 特征值与特征向量的求法

得基础解系 $$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{k}_2 \neq \boldsymbol{0})$是对应于$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的全部特征向量.

二 特征值与特征向量的求法

例 3 设$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$,求$A$的特征值与特征向量.

解 $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

令 $-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2.$

二 特征值与特征向量的求法

当$\lambda_1=-1$时,解方程$(A+E)x=0$.由

$$A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

故对应于$\lambda_1=-1$的全体特征向量为k_1p_1 $(k_1\neq 0)$.

二 特征值与特征向量的求法

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为: $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\quad p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$,

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为:

$$k_2p_2+k_3p_3 \quad (k_2,k_3\text{不同时为}0).$$

二 特征值与特征向量的求法

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时,解方程$(A-2E)x=0$.由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为: $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$,

所以对应于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全部特征向量为:

$$k_2p_2+k_3p_3\quad(k_2,k_3\text{不同时为}0).$$

二 特征值与特征向量的求法

定理：设有n阶对角阵$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，

则$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$就是$\Lambda$的$n$个特征值.

推广：对角矩阵的特征值就是其主对角线上的元素.

三 特征值与特征向量的性质

定理1 A与其转置矩阵 A^{T}有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。

$$|A-\lambda E| = \left|(A-\lambda E)^{\mathrm{T}}\right| = \left|A^{\mathrm{T}}-\lambda E\right|$$

定义2 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$主对角线上的元素的和

$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$称为$A$的迹，记为tr($A$).

定理 2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是n 阶方阵A的n 个特征值，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=$tr($A$)；

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

三 特征值与特征向量的性质

例 A不可逆 $\Leftrightarrow$ A中至少有一个特征值为0.

证明 A不可逆 $\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow |A-0\cdot E|=0$

$\Rightarrow \lambda=0$为A 的一个特征值.

A至少有的一个特征值为0

$\Rightarrow |A-0\cdot E|=0$, 即$|A|=0.\Rightarrow A$ 不可逆.

推论1 n阶方阵A可逆的充分必要条件是A的所有特征值都不为零.

三 特征值与特征向量的性质

性质4 设λ是方阵A 的特征值，则

(1) $a+\lambda$是$aE+A$的特征值;

(2) $k\lambda$是kA的特征值;

(3) λ^m是A^m的特征值;

(4) 当A可逆时,$1/\lambda$是A^{-1}的特征值;

(5) 当A可逆时,$|A|/\lambda$是A^*的特征值;

(6) $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$是矩阵多项式

$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$的特征值.

三 特征值与特征向量的性质

证明 (3) $Ax=\lambda x$ $\therefore A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)$

$$\Rightarrow A^2x=\lambda^2x$$

再继续施行上述步骤 $m-2$ 次，就得 $A^m x=\lambda^m x$

故λ^m是矩阵A^m的特征值,且x是A^m对应于λ^m的特征向量.

(4) A可逆时，$\lambda\neq 0$, 由$Ax=\lambda x$可得

$$A^{-1}(Ax)=A^{-1}(\lambda x)=\lambda A^{-1}x\Rightarrow A^{-1}x=\lambda^{-1}x$$

故λ^{-1}是矩阵A^{-1}的特征值,且x是A^{-1}对应于λ^{-1}的特征向量.

三 特征值与特征向量的性质

证明 (6) $Ax=\lambda x,\ A^2x=\lambda^2x,\cdots,\ A^mx=\lambda^mx.$

$$
\begin{aligned}
f(A)x&=(a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m)x\\
&=a_0x+a_1Ax+\cdots+a_mA^mx\\
&=a_0x+a_1\lambda x+\cdots+a_m\lambda^mx\\
&=(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m)x\\
&=f(\lambda)x.
\end{aligned}
$$

$\therefore\ f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$是矩阵多项式

$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$的特征值.

三 特征值与特征向量的性质

例6 (1) 已知三阶方阵 A 的 特征值为 $1, 2, -1$,

求 $|A^3-5A^2+7A|$.

解： 令$f(A)=A^3-5A^2+7A$, 则$f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$,

$f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(-1)=-13$

依题意可得$f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$为$f(A)$的特征值

$$|f(A)|=|A^3-5A^2+7A|=f(1)\cdot f(2)\cdot f(-1)=-78.$$

三 特征值与特征向量的性质

例6 (2) 已知三阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, -1$,

求 $|A^* + 3A + 2E|$.

解: $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$，令 $f(A) = A^* + 3A + 2E$,

则 $f(\lambda) = -\dfrac{2}{\lambda} + 3\lambda + 2$

$\Rightarrow f(1) = 3$，$f(2) = 7$，$f(-1) = 1$

依题意可得 $f(1), f(2), f(-1)$ 为 $f(A)$ 的特征值

$|f(A)| = |A^* + 3A + 2E| = f(1)\cdot f(2)\cdot f(-1) = 21.$

三 特征值与特征向量的性质

例7 设$A^2=A$，证明：A的特征值只能为0或1.

解： λ为A的特征值，α为A对应于λ的特征向量，则

$\because f(A)=A^2-A=0, \therefore f(\lambda)=\lambda^2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)=0$

即$\lambda=0$或$\lambda=1$.

三 特征值与特征向量的性质

定理3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个特征值, $p_1,p_2,\cdots,p_m$依次是与之对应的特征向量.如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等,则 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性无关.

证明 设有常数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m=0.$

则 $A(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_mp_m)=0,$

即 $\lambda_1x_1p_1+\lambda_2x_2p_2+\cdots+\lambda_mx_mp_m=0,$

类推之，有 $\lambda_1^kx_1p_1+\lambda_2^kx_2p_2+\cdots+\lambda_m^kx_mp_m=0.$

$$(k=1,2,\cdots,m-1)$$

三 特征值与特征向量的性质

把上列各式合写成矩阵形式，得

$$(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} = (0,0,\cdots,0)$$

上式等号左端第二个矩阵的行列式为范德蒙行列式,当各λ_i不相等时,该行列式不等于0,从而该矩阵可逆.于是有 $(x_1 p_1, x_2 p_2, \cdots, x_m p_m) = (0,0,\cdots,0)$,

即 $x_j p_j = 0\,(j=1,2,\cdots,m)$.但 $p_j \neq 0$,故 $x_j = 0\,(j=1,2,\cdots,m)$.

所以向量组 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关.

三 特征值与特征向量的性质

定理3 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵$A$的$m$个特征值, $p_1, p_2, \cdots, p_m$依次是与之对应的特征向量.如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$各不相等,则 $p_1, p_2,\cdots, p_m$ 线性无关.

定理 A的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

三 特征值与特征向量的性质

定理3的一个常用推广：

定理4　设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是方阵 A的m个互不相同的特征值，$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}$是$A$的对应于$\lambda_i$的$r_i$ 线性无关的特征向量，$i=1,2,\cdots,m$ 则

$$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1r_1},\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2r_2},\cdots,\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mr_m}$$

线性无关。

注： A中m个不同特征值所对应的m组各自线性无关的特征向量，合并后仍是线性无关的.

三 特征值与特征向量的性质

定义3 设λ_i是n阶方阵A的特征值，λ_i作为特征方程的根的重数称为λ_i的代数重数; 对应于λ_i的线性无关的特征向量的最大个数称为的几何重数。

结论：特征值的几何重数不大于其代数重数 。

三 特征值与特征向量的性质

例8 设λ_1 和λ_2 是方阵A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为p_1 和p_2 ，证明：p_1+p_2不是A的特征向量.

解： 反证法. 设p_1+p_2是A对应于特征值λ 的特征向量，

则$A(p_1+p_2)=\lambda(p_1+p_2)$，又$Ap_1=\lambda_1 p_1$ $Ap_2=\lambda_2 p_2$.

则$A(p_1+p_2)=Ap_1+Ap_2=\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2=\lambda(p_1+p_2)$,

$(\lambda-\lambda_1)p_1+(\lambda-\lambda_2)p_2=0$

又λ_1和λ_2是方阵A 的两个不同的特征值，

则p_1,p_2线性无关，所以$(\lambda-\lambda_1)=(\lambda-\lambda_2)=0$,

即$\lambda_1=\lambda_2$与题设矛盾，

因此p_1+p_2不是A的特征向量.

感谢聆听