3.2 向量的乘法

一、 内 积

二、 外 积

三、 混 合 积

返回

一、内积

向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>$

其中$<\vec{a},\vec{b}>$是 $\vec{a}$与 $\vec{b}$ 的夹角。

内积又称为**数量积**

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ 记为 $\vec{a}^{\,2}$

返回

向量的内积具有以下性质：

(1) $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2$;

证 $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\cos<\vec{a},\vec{a}> = \|\vec{a}\|^2$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{0} = 0$;

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

(4) $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \lambda,\mu \in R$;

(5) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

由定义可知，基向量

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$$

的内积为

$$\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

设向量 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

若$\|\vec{a}\| \neq 0, \|\vec{b}\| \neq 0$, 则

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}=\vec{e}_{\vec{a}}\cdot\vec{e}_{\vec{b}}$$

若$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{2}$, 则称$\vec{a}$与$\vec{b}$正交（或垂直），记为$\vec{a}\perp\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.}$$

例1 设 $\|\vec{a}\|=11, \|\vec{b}\|=23, \|\vec{a}-\vec{b}\|=30$, 求 $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

解 $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2 \quad =\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=650-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=900.$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-250,$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=650+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=400, \ \|\vec{a}+\vec{b}\|=20.$$

例2. $\vec{a}=(-2,2,1)$, $\vec{b}=(1,3,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,12)$,

$\vec{d}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$, 求 $\mathrm{Pr}\, j_{\vec{c}}\vec{d}$.

解 $\vec{d}=(-6-8+12)(1,3,-3)+(-2+6-3)(3,-4,12)$

$=(1,-10,18)$,

$$\mathrm{Pr}\, j_{\vec{c}}\vec{d}=\|\vec{d}\|\cos<\vec{c},\vec{d}>$$

$$=\|\vec{d}\|\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|\|\vec{d}\|}$$

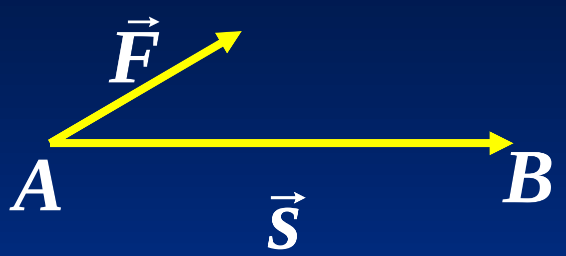
$$=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|}=\frac{259}{13}.$$

例3. 内积的物理意义

一质点在力 $\vec{F}$ 的作用下从点A移动到B，力$\vec{F}$所做的功.

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{s}\| \cos < \vec{F}, \vec{s} >$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{s}.$$



返回

柯西–施瓦茨$(Cauchy-Schwarz)$不等式

对 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos<\vec{a},\vec{b}>$ 两边取绝对值

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \quad 或 \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})$$

证明三角不等式 $\|\vec{a}+\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$

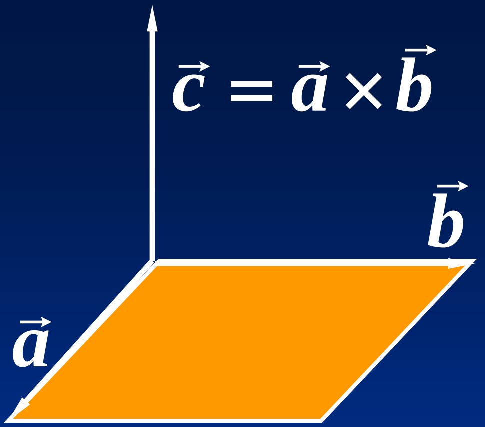
二、外积

定义 向量$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的外积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个**向量**，

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$,

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 所确定的平面垂直，且

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$ 符合右手系.



外积又称为**向量积**.

返回

外积的性质

(1) $\vec{a} \perp \vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b} \perp \vec{a}\times\vec{b};$

(2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\ \vec{0}\times\vec{a}=\vec{0};$

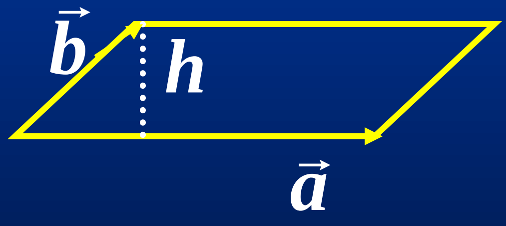
(3) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0};$

(4) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a};$

(5) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b});$

(6) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

外积的几何意义



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$$

$$= \|\vec{a}\|h$$

= 以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积.

基向量的外积

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

返回

利用坐标计算外积

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

例 1 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

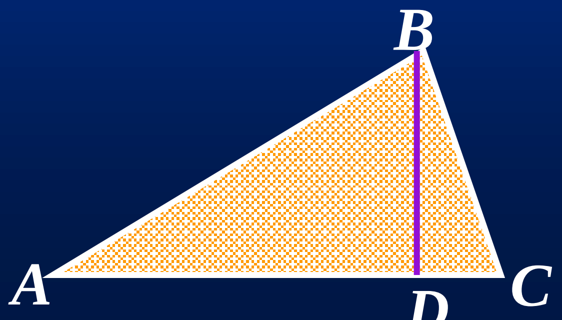
$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore\ \pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例 2 在顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC边上的高BD.

解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$



三角形ABC的面积为

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|BD\|$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot BD \qquad \therefore BD=5.$$

返回

例3 设单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点. 求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

解 设α,β,γ是$\overrightarrow{OA}$的方向角，则

$$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

由 $\alpha=\beta=\gamma$可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1.$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overrightarrow{OA}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

返回

$$M(1,-3,2) \qquad N(-1,2,1) \qquad B(x,y,z)$$

设点B的坐标是(x, y, z),则点N是MB的中点，且

$$\frac{x+1}{2}=-1,\ \frac{y-3}{2}=2,\ \frac{z+2}{2}=1.$$

$$x=-3,\ \ y=7,\ \ z=0.$$

$$\overrightarrow{OB}=(-3, 7, 0),$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-7,-3,10).$$

三、混合积

定义 设已知三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, 数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为这三个向量的**混合积**，记为 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},$

$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k},$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

这是**混合积的坐标表达式**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

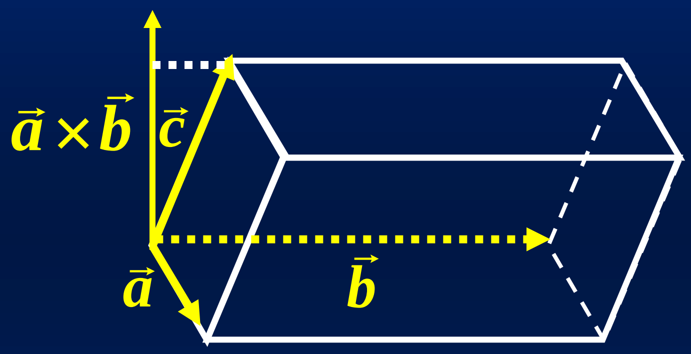
$$=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

混合积的几何意义与性质：

(1) 向量的混合积

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.



$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle$$

(2) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

（3）三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0.$

例5 已知$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=4.$$

例 6 已知不在一平面上的四点$A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$、$C(x_3, y_3, z_3)$、$D(x_4, y_4, z_4)$，求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知，四面体的体积等于以向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$\because\ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\because\ \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$$

$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择和行列式的符号一致.