高等数学A(上)

第5.1节 二阶常系数线性微分方程

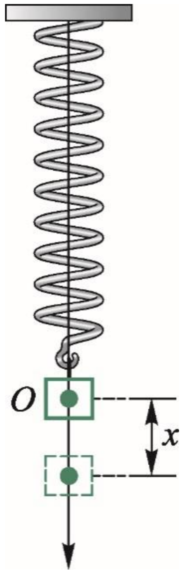
一、二阶线性微分方程举例

二、二阶齐次线性微分方程解的结构

三、二阶非齐次线性微分方程解的结构

一、二阶线性微分方程举例

例1　质量为m的物体自由悬挂在一端固定的弹簧上，当重力与弹性力抵消时，物体处于平衡状态．若用手向下拉物体使它离开平衡位置后放开，物体在弹性力与阻力作用下作往复运动，阻力的大小与运动速度成正比，方向相反．建立位移满足的微分方程．



解　取平衡时物体的位置为坐标原点，

建立坐标系如图．设时刻t物位移为$x(t)$．

(1)　自由振动情况．物体所受的力有：

弹性恢复力$f=-cx$．(胡克定律)

阻力 $R=-\mu\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,

据牛顿第二定律得 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-cx-\mu\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

令 $2n=\dfrac{\mu}{m}$, $k^2=\dfrac{c}{m}$, 则得有阻尼自由振动方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=0.$$

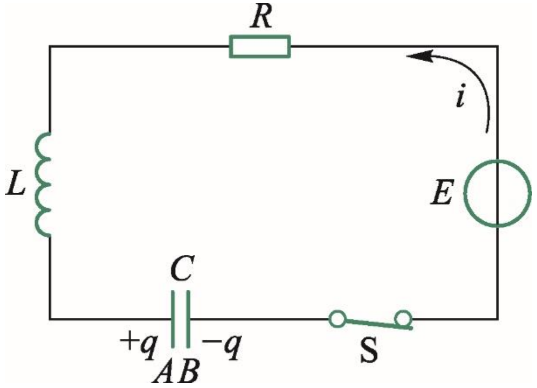
(2) 强迫振动情况. 若物体在运动过程中还受铅直外力

$F=H\sin pt$ 作用, 令 $h=\dfrac{H}{m}$, 则得强迫振动方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=h\sin pt.$$

例2　设有一个电阻 R、自感 L、电容 C 和电源 E 串联组成的电路，其中 R,L,C 为常数，$E=E_m\sin\omega t$，求电容器两极板间电压 u_c 所满足的微分方程 .

解　设电路中电流为 $i(t)$，极板上的电量为 $q(t)$，自感电动势为 E_L，



由电学知 $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，$u_C=\dfrac{q}{C}$，$E_L=-L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

根据回路电压定律：

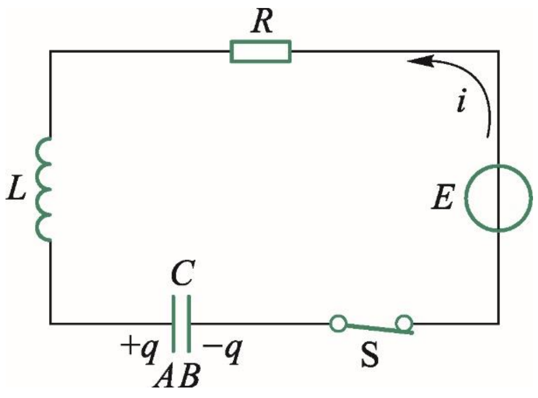
在闭合回路中，所有支路上的电压降为0

$$E-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\frac{q}{C}-Ri=0.$$

化为关于 u_c 的方程：注意 $i = C\dfrac{du_c}{dt}$，故有

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E_m\sin\omega t,$$

令 $\beta=\dfrac{R}{2L}$，$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



串联电路的振荡方程：

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\beta\frac{du_C}{dt}+\omega_0{}^2u_C=\frac{E_m}{LC}\sin\omega t.$$

如果电容器充电后撤去电源（$E=0$），则得

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\beta\frac{du_C}{dt}+\omega_0{}^2u_C=0.$$

例1 例2 方程的共性 — 可归结为同一形式：

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, 为二阶线性微分方程.

n阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

$$\begin{cases} \text{当} f(x) \not\equiv 0 \text{ 时, 称为非齐次方程;} \\ \text{当} f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习: 一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$.

$$\text{通解: } y = \underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}\,Y} + \underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}\,y^*}.$$

二、线性齐次方程的解的结构

定理1　若函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解，则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数)

也是该方程的解.（叠加原理）

证　将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入方程左边，得

$$[C_1y_1'' + C_2y_2''] + P(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] + Q(x)[C_1y_1' + C_2y_2']$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0.$$

证毕

注 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如: $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$y_2(x) = 2y_1(x)$ 也是齐次方程的解.

但是, $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2C_2) y_1(x)$

并不是通解.

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义

设 $y_1(x)$，$y_2(x),\cdots$，$y_n(x)$是定义在区间 I 上的n 个函数，

若存在不全为0的常数 k_1，k_2，$\cdots$，k_n，使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv 0, x\in I,$$

则称这 n个函数在 I 上线性相关，　否则称为线性无关.

例如:

（1） 1，$\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 在任何区间I上都线性相关.

$\because \forall x\in \mathbf{R}$，都有$1-\cos^2 x-\sin^2 x\equiv 0$.

（2） 1，x，x^2在任何区间I上都线性无关.

$\because$ 若存在k_1,k_2,k_3，使得 $k_1+k_2x+k_3x^2\equiv 0$，

则根据二次多项式至多只有两个零点，必有$k_1=k_2=k_3=0$.

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的充要条件：

$y_1(x)$，$y_2(x)$线性相关 $\rightleftarrows$ 存在不全为0的 k_1，k_2 使

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)\equiv 0.$$

$$\rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)}\equiv -\frac{k_2}{k_1}.$$

$y_1(x)$，$y_2(x)$线性无关 $\rightleftarrows \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\not\equiv$ 常数.

可微函数 y_1，y_2 线性无关

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0.$$ （证明略）

思考　若$y_1(x)$，$y_2(x)$中有一个恒为0，则$y_1(x)$，$y_2(x)$必线性 **相关**

定理2 若$y_1(x), y_2(x)$是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解,

则$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$($C_1, C_2$为任意常数)是该方程的通解.(自证)

例如: 方程$y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, 且

$\frac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

推论: 若$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是n阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的n个线性无关解, 则方程的通解为

$y = C_1y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_ny_n$ (C_k为任意常数).

三、线性非齐次方程解的结构

定理3 设$y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ①$$

的一个特解，$Y(x)$是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \qquad ②$$

是非齐次方程的通解.

证　将$y=Y(x)+y^*(x)$代入方程①左端，得

$$(Y''+\underline{y^{*\prime\prime}})+P(x)(Y'+\underline{y^{*\prime}})+Q(x)(Y+\underline{y^*})$$

$$=(y^{*\prime\prime}+P(x)y^{*\prime}+Q(x)y^*)+(Y''+P(x)Y'+Q(x)Y)$$

$$=f(x)+0=f(x).$$

故 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的解，又Y中含有

两个独立任意常数，因而②也是通解. 证毕

例如: 方程$y'' + y = x$ 有特解$y^* = x$,

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 有通解

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,.$$

因此该方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x.$$

定理4 设$y_1^*(x), y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

非齐次方程之解的叠加原理

的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

注 定理3, 定理4均可推广到n阶线性非齐次方程.

定理5　给定n阶非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

设$y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$是对应齐次方程的n个线性无关特解，$y^*(x)$ 是非齐次方程的特解，则非齐次方程的通解为

$$y=\underbrace{C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)}_{}+y^*(x)$$

$$=Y(x)+y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

例3 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是（ $\boxed{\text{D}}$ ）.

~~(A)~~ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$

~~(B)~~ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

提示: (C) $C_1(y_1 + y_3) + C_2(y_2 + y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3$，$y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解，二者线性无关.（反证法可证）

例4 已知微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个解 $y_1=x, y_2=\mathrm{e}^x, y_3=\mathrm{e}^{2x}$, 求此方程满足初值条件 $y(0)=1, y'(0)=3$ 的特解.

解 y_2-y_1 与 y_3-y_1 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^{2x}-x}\neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y=C_1(\mathrm{e}^x-x)+C_2(\mathrm{e}^{2x}-x)+x$$

代入初值条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$, 得 $C_1=-1,\ C_2=2$,

故所求特解为 $y=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$.

第5.2节 常系数齐次线性微分方程

一、二阶情形下的定义解法和举例

二、 n 阶情形下的定义解法和举例

一、二阶常系数线性齐次微分方程

定义

形如 $y''+py'+qy=0$ (p,q是常数)

的方程称为二阶常系数齐次线性微分方程, 如果 p,q 不全是常数,则称之为二阶变系数齐次线性微分方程.

例如: $y''+2y'-5y=0,$ 二阶常系数齐次线性微分方程

$y''+2y'+3xy=0.$ 二阶变系数齐次线性微分方程

2. 解法

由二阶齐次线性微分方程通解的结构可知, 要求通解

就是要求它的两个线性无关的特解. 那么如何求两个

线性无关的特解呢？

为此先来分析方程的特点：

函数与其一阶、二阶导数只差一个常数因子.

$$y'' + py' + qy = 0(p, q\text{是常数})$$

而指数函数$y = e^{rx}$(r为常数)刚好具有这一特性

因此可用指数函数$y = e^{rx}$(r为常数)来尝试.

$$y'' + py' + qy = 0 \ (p, q\text{是常数})$$

设$y = \mathrm{e}^{rx}$(r为待定常数)是方程的解, 则

$$y' = r\mathrm{e}^{rx}, y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$$

代入方程并化简,得

$$(r^2 + pr + q = 0)\mathrm{e}^{rx} = 0$$

$$\boxed{r^2 + pr + q = 0}$$

特征方程

这就说明：只要r满足特征方程,那么$y = \mathrm{e}^{rx}$便是解.

$y'' + py' + qy = 0$ (p, q是常数) $r^2 + pr + q = 0$

1. 当$p^2 - 4q > 0$时,

特征方程有两个不相等的实根,设为r_1, r_2,

则可得微分方程的两个线性无关的特解:

$$y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}, y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x},$$

于是通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}.$$

$y'' + py' + qy = 0$ (p, q是常数) $r^2 + pr + q = 0$

2. 当$p^2 - 4q = 0$时，特征方程有两个相等的实根，设为r，

这时只能得一个特解 $y_1 = \mathrm{e}^{rx}$.

下面用常数变易法再求一个与 y_1线性无关的特解.

设$y_2 = u(x)\mathrm{e}^{rx}$是一个解，代入方程并化简，得

$$\mathrm{e}^{rx}[u'' + (2r + p)u' + (r^2 + pr + q)u] = 0.$$

由于r是特征方程的二重根，故上述方程即为$u'' = 0$.

取$u = x$，则 $y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$. 于是通解为$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{rx}$.

$y'' + py' + qy = 0$ (p, q是常数) $r^2 + pr + q = 0$

3. 当$p^2 - 4q < 0$时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta, r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta.$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x),$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x).$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

$y'' + py' + qy = 0$ (p, q是常数) $r^2 + pr + q = 0$

于是通解为

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

综上所述, 可得求通解的步骤:

步骤1 写出特征方程;

步骤2 求出特征方程的两个根;

步骤3 根据特征方程的两个根的不同情形写出通解.

$y'' + py' + qy = 0$ (p, q是常数) $r^2 + pr + q = 0$

特征根	通解
两个实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
两个复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) e^{\alpha x}$

例1 求微分方程$y'' - 2y' - 3y = 0$的通解.

解 特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

特征根 $r_1 = -1, r_2 = 3$ 是两个不相等的实根,

所以通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}.$$

例2 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} + 2\dfrac{ds}{dt} + s = 0, \\ s\Big|_{t=0} = 4, \quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = -2. \end{cases}$

解 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$

特征根 $r_1 = r_2 = -1$ 是两个相等的实根,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$.

利用初值条件得 $C_1 = 4,\ C_2 = 2,$

于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t)e^{-t}$.

例3 求微分方程$y'' - 2y' + 5y = 0$的通解.

解 特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$,

特征根为 $r_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $r_2 = 1 - 2\mathrm{i}$, 是一对共轭复根,

所以通解为 $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

例4 在第六节例1中，设物体只受弹性恢复力f的作用,且在初始时刻$t=0$的位置为$x=x_0$,初始速度$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0$. 求反映物体运动规律的函数$x=x(t)$.

解 由于不计阻力，所以第六节例1中的方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0\ ,$$

该方程叫做无阻尼自由振动的微分方程.其通解为

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

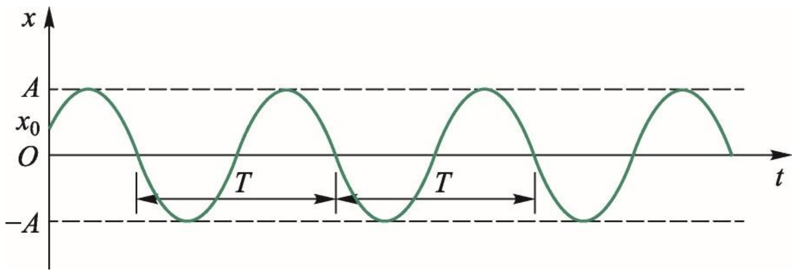
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \qquad x\big|_{t=0} = x_0, \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$$

由初值条件可求得特解为

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt = A \sin(kt + \varphi),$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \tan\varphi = \frac{kx_0}{v_0}.$$



该函数所反映的运动称为

简谐振动.

振幅 角频率

$$x = A \sin(kt + \varphi)$$

初相

例5 在第六节例1.中,设物体受弹性恢复力f和阻力R的作用,且在初始时刻$t=0$的位置为$x=x_0$,初始速度$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0$.求反映物体运动规律的函数$x=x(t)$.

解 这就是要解初始问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=0, \\ x|_{t=0}=x_0\ ,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0. \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k^2x=0,x|_{t=0}=x_0,\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0$$

特征方程为 $r^2+2nr+k^2=0$，其根为

$$r=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}\,.$$

(1) 小阻尼情形：$n<k$.

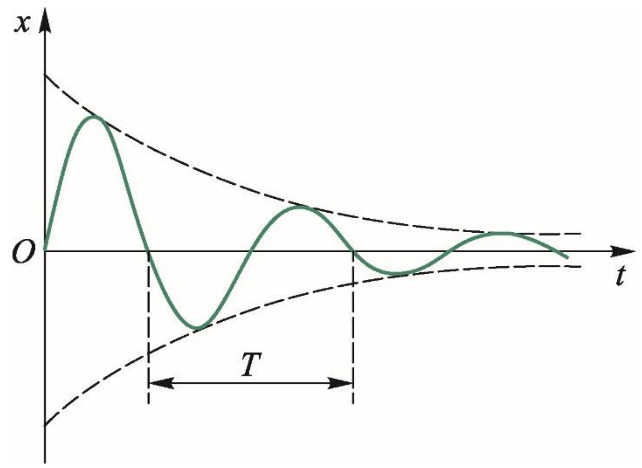
此时方程的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-nt}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)\,,\omega=\sqrt{k^2-n^2}.$$

由初值条件可求得特解为 $x=\mathrm{e}^{-nt}\left(x_0\cos\omega t+\dfrac{v_0+nx_0}{\omega}\sin\omega t\right).$

$$x=\mathrm{e}^{-nt}\left(x_0\cos\omega t+\frac{v_0+nx_0}{\omega}\sin\omega t\right)=A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega t+\varphi),$$

其中 $\omega=\sqrt{k^2-n^2}$, $A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{(v_0+nx_0)^2}{\omega^2}}$, $\tan\varphi=\dfrac{x_0\omega}{v_0+nx_0}$.



(2) 大阻尼情形：$n>k$.

此时方程的通解为 $x=C_1\mathrm{e}^{-(n-\sqrt{n^2-k^2})t}+C_2\mathrm{e}^{-(n+\sqrt{n^2-k^2})t}$.

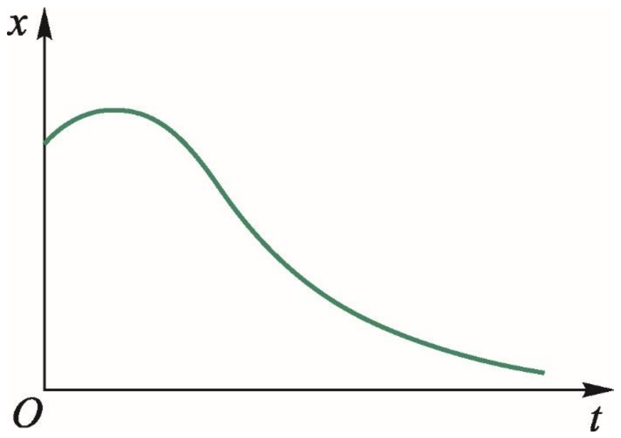
其中任意常数可由初值条件来确定.

从通解中可以看出，使$x=0$

的t值最多只有一个，即物体最

多越过平衡位置一次，因此物体

已不再有振动现象.



(3) 临界阻尼情形：$n = k$.

此时方程的通解为

$$x = \mathrm{e}^{-nt}(C_1 + C_2 t).$$

其中任意常数可由初值条件来确定.

此时也无振动现象.

二、n阶常系数线性齐次微分方程

n阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

其中$p_1, p_2, \cdots, p_n$都是常数.

其特征方程为 $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0.$

特征方程是一元n次方程, 在复数范围内有n个根, k

重根算k个根.

根据特征根可以写出其对应的微分方程的解如下:

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根r	给出一项： $C\mathrm{e}^{rx}$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{i}\beta$	给出两项： $\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta + C_2\sin\beta x)$
k重实根r	给出k项： $\mathrm{e}^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对k重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{i}\beta$	给出$2k$项： $\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $+\mathrm{e}^{\alpha x}(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x$

例6　求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解　特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0,$

特征根　$r_1=r_2=0,\ r_{3,4}=1\pm 2\mathrm{i}$

通解为　$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$

课堂练习　解方程 $y^{(5)}-y^{(4)}=0.$

答案

特征方程 $r^5-r^4=0,$

特征根　$r_1=r_2=r_3=r_4=0,\ r_5=1,$

通解为　$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5\mathrm{e}^x.$

(不难看出，原方程有特解 $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \mathrm{e}^x$)

第5.3节 常系数非齐次线性微分方程

一、定 义

二、$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$型

三、$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$型

一、 定义

形如 $y''+py'+qy=f(x)$ (p,q是常数)的方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程.

通解的结构: $y_{\text{非齐次通解}} = y_{\text{齐次通解}} + y^*_{\text{非齐次特解}}$

齐次中已解决

难点问题

难点: 如何求特解?

方法: 待定系数法.

针对$f(x)$的特殊形式,
给出特解 y^* 的待定式,
代入原方程确定待定系数.

二、$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$型

$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$，$\lambda$是实数，$P_m(x)$是$m$次多项式.

设方程的特解为 $y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，$Q(x)$是待定的多项式.

$$\because\quad y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

$$y^{*\prime}=\mathrm{e}^{\lambda x}[\lambda\ Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=\mathrm{e}^{\lambda x}[\lambda^2\ Q(x)+2\lambda\ Q'(x)+Q''(x)]$$

代入方程, 并消去$\mathrm{e}^{\lambda x}$, 得

$$Q''(x)\ +\ (2\lambda+p)Q'(x)\ +\ (\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)\ =P_m(x).$$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x).$$

1. 当 λ 不是特征根时，$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$　使上式成立

$Q(x)$应是 m 次多项式，故特解的形式为

$$y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$$

2. 当 λ 是特征方程的单根时，$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$　而

$2\lambda + p \neq 0$ 使上式成立 $Q(x)$应是 $m+1$次多项式，故特解的形式为

$$y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}$$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x).$$

3. 当 λ 是特征方程的重根时,

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且

$2\lambda + p = 0$ 使上式成立 $Q(x)$ 应是 $m+2$ 次多项式，故特解的形式为

$$y^* = x^2 Q_m(x)e^{\lambda x}$$

综上所述，有以下结论:

方程　$y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$　具有形如

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

的特解，其中 $k = \begin{cases} 0, & \lambda\text{不是根}, \\ 1, & \lambda\text{是单根}, \\ 2, & \lambda\text{是重根}, \end{cases}$

特征方程
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

例1 求微分方程$y''-2y'-3y=3x+1$的一个特解.

解 本题 $\lambda=0$， 而特征方程为 $r^2-2r-3=0$，

$\lambda=0$ 不是特征方程的根.

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$， 代入方程:

$$-3b_0x-3b_1-2b_0=3x+1.$$

比较系数，得

$$\begin{cases}-3b_0=3,\\ -2b_0-3b_1=1.\end{cases} \longrightarrow b_0=-1,\quad b_1=\frac{1}{3},$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$.

例2 求方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

解　本题 $\lambda = 2$, 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$，其根为 $r_1 = 2$,　$r_2 = 3$.

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

设非齐次方程特解为　$y^* = x(b_0 x + b_1)e^{2x}$,

代入方程得　$-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$,

比较系数，得 $\begin{cases} -2b_0 = 1, \\ 2b_0 - b_1 = 0. \end{cases} \longrightarrow b_0 = -\dfrac{1}{2}$，$b_1 = -1$,

因此特解为　$y^* = x\left(-\dfrac{1}{2}x - 1\right)e^{2x}$.

所求通解为　$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \left(\dfrac{1}{2}x^2 + x\right)e^{2x}$.

二、$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$型

分析思路:

步骤1. 将 $f(x)$转化为

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}};$$

步骤2. 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x},$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}};$$

步骤3. 利用叠加原理求出原方程的特解;

步骤4. 分析原方程特解的特点.

步骤1. 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}+Q_n(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{Q_n(x)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{Q_n(x)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,\ l\}$，则

$$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)}\mathrm{e}^{(\lambda-\mathrm{i}\omega)x}$$

$$=P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}+\overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}.$$

步骤2. 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x} \quad ①$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}} \quad ②$$

设 $\lambda+\mathrm{i}\omega$ 是特征方程的 k 重根 $(k=0,1)$, 则 ① 有

特解: $y_1^* = x^k R_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$ ($R_m(x)$为m次多项式)

故 $(y_1^*)'' + p(y_1^*)' + qy_1^* \equiv P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}$

等式两边取共轭:

$$\overline{y_1^*}'' + p\overline{y_1^*}' + q\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ② 的特解.

步骤3. 求原方程的特解

原方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$

利用步骤2的结果，根据叠加原理，原方程有特解：

$$
\begin{aligned}
y^* &= y_1^* + \overline{y_1^*} \\
&= x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[\,R_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \overline{R_m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,] \\
&= x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[\,R_m(\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x) \\
&\qquad\qquad + \overline{R_m}(\cos\omega x - \mathrm{i}\sin\omega x)] \\
&= x^k \mathrm{e}^{\lambda x}[\,R_m^{(1)}\cos\omega x + R_m^{(2)}\sin\omega x\,]
\end{aligned}
$$

其中 $R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 均为 m 次多项式.

步骤4. 分析y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*} = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)} \cos \omega x + R_m^{(2)} \sin \omega x \right]$$

因 $$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^* 本质上为实函数, 因此 $R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ 均为 m 次实多项式.

综上所述，有以下结论：

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$$

可设特解：

$$y^* = x^k \mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}\cos\omega x + R_m^{(2)}\sin\omega x\right]$$

其中 $m = \max\{n,\ l\}$，$k = \begin{cases} 0, & \lambda \pm \mathrm{i}\omega\text{不是根,} \\ 1, & \lambda \pm \mathrm{i}\omega\text{是单根.} \end{cases}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例3 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解.

解 本题 $\lambda = 0$，$\omega = 2$，$P_l(x) = x$，$Q_n(x) = 0$，特征方程 $r^2 + 1 = 0$，

$\lambda + \mathrm{i}\omega = 2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根，故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x.$$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x.$$

比较系数，得 $\begin{cases} -3a = 1, \\ -3b + 4c = 0, \\ -3c = 0, \\ -3d - 4a = 0, \end{cases}$ $\therefore a = \dfrac{-1}{3}, b = 0, c = 0, d = \dfrac{4}{9}.$

于是求得一个特解 $y^* = \dfrac{-1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x.$

例4 求方程 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的一个特解.

解 本题 $\lambda = 1,\ \omega = 2,\ P_l(x) = 1,\ Q_n(x) = 0,$

$\lambda + i\omega = 1 + 2i$ 不是特征方程 $r^2 - 1 = 0$ 的根, 故设特解为

$$y^* = e^x(a\cos 2x + b\sin 2x).$$

代入方程得

$$4e^x[(-a+b)\cos 2x - (a+b)\sin 2x] = e^x\cos 2x,$$

比较系数，得 $\begin{cases} 4(-a+b) = 1, \\ 4(a+b) = 0, \end{cases}$ $\therefore\ a = \dfrac{-1}{8},\quad b = \dfrac{1}{8}$

于是求得一个特解 $y^* = \dfrac{1}{8}e^x(\sin 2x - \cos 2x)$.

例5 在第六节 **例1** 中，设物体受弹性恢复力f和铅直干扰力F的作用. 试求物体的运动规律.

解 这里需要求出无阻尼强迫振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = h \sin pt$$

的通解.

对应的齐次方程(即无阻尼自由振动方程)为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0 ,$$

它的特征根为$r = \pm \mathrm{i}k$.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=h\sin pt$$

故齐次方程的通解为

$$X=C_1\cos kt+C_2\sin kt, \quad \Longrightarrow \quad X=A\sin(kt+\varphi),$$

其中 A,φ 为任意常数.

上述非齐次方程右边的函数 $f(t)=h\sin pt$ 与

$$f(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}[P_l(t)\cos\omega t+Q_n(t)\sin\omega t]$$

相比较，得 $\lambda=0,\omega=p,P_l(t)=0,Q_n(t)=h.$

现在分别就 $p\neq k$ 和 $p=k$ 两种情形进行讨论.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+k^2 x=h\sin pt$$

(1) $p\neq k$. 此时 $\lambda\pm \mathrm{i}\omega=\pm \mathrm{i}p$ 不是特征根，故设特解

为 $x^*=a\cos pt+b\sin pt.$

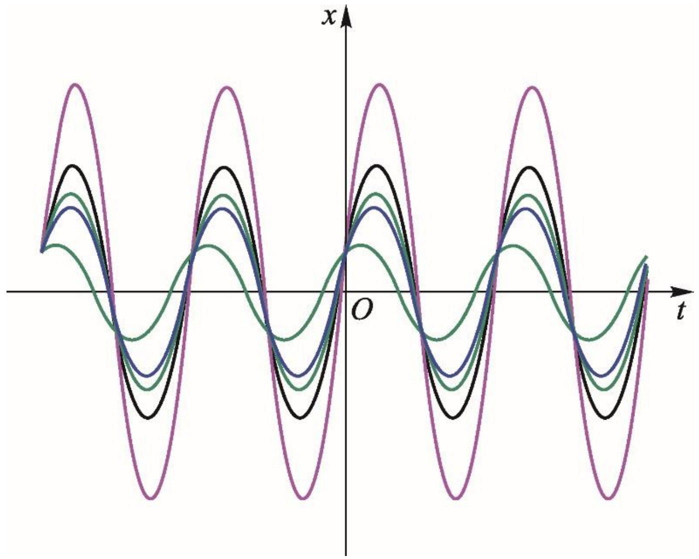
代入上述方程求得 $a=0, b=\dfrac{h}{k^2-p^2}$,

于是 $x^*=\dfrac{h}{k^2-p^2}\sin pt$.

此时方程的通解为 $x=A\sin(kt+\varphi)+\dfrac{h}{k^2-p^2}\sin pt$.

$$x=A\sin(pt+\omega)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$$

通解的表达式表示，物体的运动由两部分组成. 第一部分为自由振动，第二部分为强迫振动. 强迫振动是干扰力引起的，它的角频率为干扰力的角频率p. 当干扰力的角频率与系统的固有频率相差很小时，振幅可以很大.



$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\sin pt$$

(2) $p=k$. 此时$\lambda\pm i\omega=\pm ip$是特征根，故设特解为

$$x^*=t(a\cos kt+b\sin kt).$$

代入上述方程求得 $a=-\dfrac{h}{2k},b=0.$

于是 $$x^*=-\frac{h}{2k}t\cos kt.$$

此时方程的通解为 $x=A\sin(kt+\omega)-\dfrac{h}{2k}t\cos kt.$

$$x = A\sin(kt+\omega) - \frac{h}{2k}t\cos kt$$

上式第二项表明，强迫振动的振幅 $\frac{h}{2k}t$ 随时间 t的增大而无限增大. 这就发生所谓共振现象.