# 3.3 平 面

一、 点法式方程

二、 一般式方程

三、 截距式方程

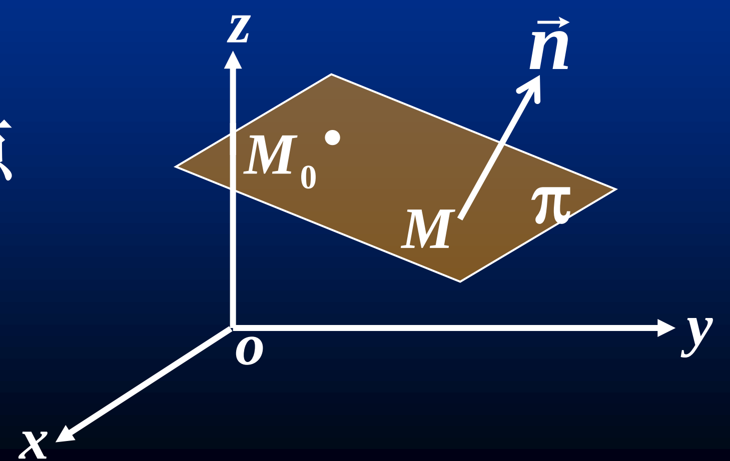
四、 平面与平面的位置关系

返回

# 3.3 平 面

## 一、点法式方程

平面$\pi$ 可由$\pi$ 上任意一点和垂直于$\pi$ 的任一向量完全确定. 垂直于$\pi$ 的任一向量称为$\pi$ 的**法线向量**.




**法线向量的特征**： 垂直于平面内的任一向量.

设 $\vec{n}=(A, B, C)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$M(x, y, z)$ 为平面π上的任一点,

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$

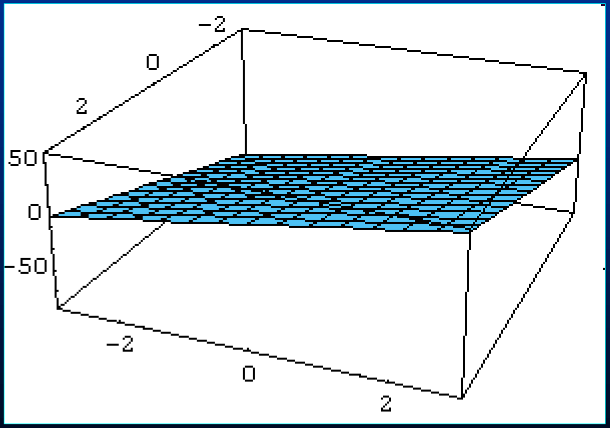
$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$

方程(1)称为平面的点法式方程,

其中法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 已知点 $(x_0, y_0, z_0)$.

平面上的点都满足方程(1)，不在平面上的点都不满足方程（1），方程(1)称为平面$\pi$的方程，平面$\pi$ 称为方程(1)的图形.

**例 1** 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.




**解** $\overrightarrow{AB}=\{-3, 4,-6\}$

$\overrightarrow{AC}=\{-2, 3,-1\}$

取 $$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14, 9,-1),$$

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

返回

**例 2** 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

**解** $\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}=(10,15,5)$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

## 二、一般式方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}_{=D}=0$$

$Ax+By+Cz+D=0$：　平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

## 平面一般方程的几种特殊情况:

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点;

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过} x \text{轴;} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于} x \text{轴;} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0$, $C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, 平面平行于 $xoy$ 坐标面;

类似地可讨论 $A = C = 0$, $B = C = 0$ 情形.

**例 4** 设平面过原点及点 $P(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

**解** 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

由平面过原点知 $D=0,$

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp(4,-1,2),\qquad \therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

## 三、 截距式方程

**例 5** 设平面与 $x, y, z$ 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

**解** 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

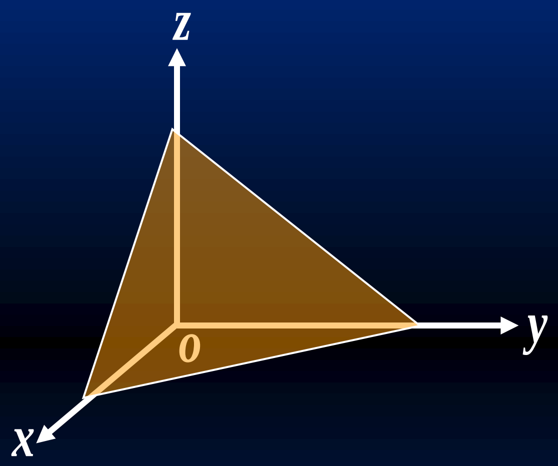
将 $A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c},$

代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ **平面的截距式方程**

$x$ 轴上截距　$y$ 轴上截距　$z$ 轴上截距

**例 6** 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.




**解** 设平面为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$

$$\because V=1,\quad \therefore\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$

返回

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$, 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$\Rightarrow a=\frac{1}{6t}$, $b=\frac{1}{t}$, $c=\frac{1}{6t}$, 代入体积式

$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t} \Rightarrow t=\frac{1}{6}$,

$\therefore a=1,\quad b=6,\quad c=1,$

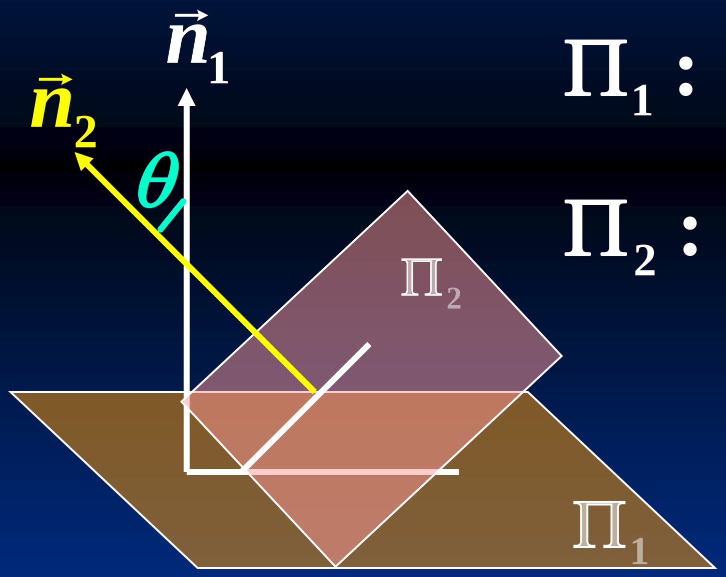
所求平面方程为 $6x+y+6z=6.$

◀ ▶ 返回

## 四、平面与平面的位置关系

### 1. 两平面的夹角

**定义** 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.




$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

返回

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}$$

两平面夹角余弦公式

**2. 两平面垂直与平行的充要条件：** P109

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$

(3) $\Pi_1$与$\Pi_2$重合 $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

**例7** 讨论以下各组平面的位置关系：

$$(1)\ -x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$$

$$(2)\ 2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$$

$$(3)\ 2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$$

**解** (1)
$$\cos\theta=\frac{-1\times 0+2\times 1-1\times 3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{60}}$$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\frac{-1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1=(2,-1,1),\quad \vec{n}_2=(-4,2,-2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合.

(3) $\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2},$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\in\Pi_2$

$\therefore$ 两平面重合.

返回

**例8** 求过点$M_0(-1,3,2)$且与平面$2x - y + 3z - 4 = 0$和$x + 2y + 2z - 1=0$都垂直的平面$\pi$的方程.

**解** 两个已知平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2,-1,3),\qquad \vec{n}_2=(1,2,2),$$

故平面$\pi$的法向量为

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-8\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$$

故平面$\pi$的方程为

$$-8(x+1)-(y-3)+5(z-2)=0,$$

即

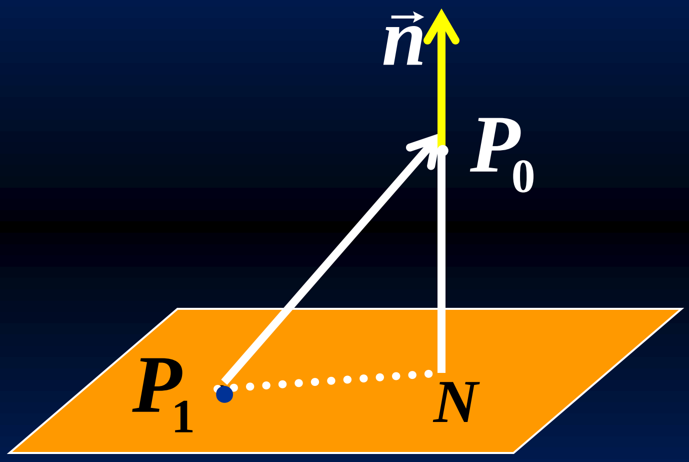
$$8x+y-5z+15=0.$$

**例 9** 求点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离.

**解** $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$




$$d = |\Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}}{\|\vec{n}\|} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

点到平面距离公式．

返 回