高等数学A(上)

第3章　一元函数积分学

本章重点

积分学

不定积分
定积分

微积分基本公式

揭示出定积分与不定积分之间的联系，给出定积分计算的有效而简便的方法

换元法和分部积分

计算定积分的常用方法

第5.1节 不定积分的分部积分法

一、问 题

二、分部积分法

一、分部积分公式

问题 $\int xe^x dx = ?$　　$\int x\ln x dx = ?$　　$\int e^x \sin x dx = ?$

特点 被积函数是两个不同函数的乘积

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

过程 设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \boxed{uv' = (uv)' - u'v}$$ 两边积分

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx, \quad \int udv = uv - \int vdu.$$ 分部积分公式

分部积分公式

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x$$

u和v'的选取原则

(1) v'的选取要使v易求出;

(2) $\int u'v\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\mathrm{d}x$ 容易计算.

二、例题

例1 求 $\int x\cos x\mathrm{d}x.$

解 设 $u=x,\quad v'=\cos x,$

则$u'=1,\ v=\sin x$

$\because \int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x,$

$\therefore \int x\cos x\mathrm{d}x$

$=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x$

$=x\sin x+\cos x+C$

解 设 $u=\cos x,\quad v'=x,$

则$u'=-\sin x,\ v=\dfrac{x^2}{2}$

$\because \int u\mathrm{d}x=uv-\int v\mathrm{d}u.$

$\therefore \int x\cos x\mathrm{d}x$

$=\dfrac{x^2}{2}\cos x+\int\dfrac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x$

u,v' 选择不当，积分更难进行

例2 求 $\int x^2 e^x dx$.

$$e^x dx = dv$$

$$\int uv' dx = \int u dv$$

$$= uv - \int v du$$

$$= uv - \int u' v dx$$

解

$u \quad v'$

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

再次使用分部积分法

$$= x^2 e^x - 2\int x de^x$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) + C$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

例3 求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解 设$u=\ln x$，$v'=x$ (若设 $v'=\ln x$,则v不容易求出)

则 $\int x\ln x\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})$

$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}(\ln x)$

$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

$\int uv'\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v$

$=uv-\int v\mathrm{d}u$

$=uv-\int u'v\mathrm{d}x$

例4 求 $\int \arccos x\mathrm{d}x$.

解 设$u=\arccos x$，$v'=1$ (若设 $v'=\arccos x$,则v不容易求出)

则 $\int \arccos x\mathrm{d}x$

$=x\arccos x-\int x\mathrm{d}(\arccos x)$

$=x\arccos x-\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=x\arccos x-\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$

$\int uv'\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}v$

$=uv-\int v\mathrm{d}u$

$=uv-\int u'v\mathrm{d}x$

例5 求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int \arctan x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

从以上例子可看出

对于 $\int x^n e^{ax} dx$ 和 $\int x^n \sin bx dx$,

$\int x^n \cos bx dx$.

选择 $u = x^n$

对于 $\int x^n \ln x \, dx$ 和 $\int x^n \arcsin x dx$,

$\int x^n \arccos x dx$,

$\int x^n \arctan x dx$.

选择 $v' = x^n$.

例6 求 $\int e^x \sin x dx$.

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x \, de^x = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d \cos x)$

$= e^x (\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

例7 求 $\int \sec^3 x dx$.

解 $\boxed{\int \sec^3 x dx} = \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x\, d(\tan x)$

$= \sec x \tan x - \int \tan x d(\sec x) = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx$

$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \boxed{\int \sec^3 x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$

例8 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

解 令$\sqrt{x}=t$, 则$x=t^2$, $dx=2t\,dt$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt = 2\int t\,de^t$$

$$= 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right)$$

$$= 2(te^t - e^t) + C$$

$$= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

第5.2节 定积分的分部积分法

一、问 题

二、分部积分法

一、分部积分法

定理2　设函数$u(x), v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数, 则

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x$$

定积分的分部积分公式

由不定积分的分部积分法及牛顿–莱布尼茨公式立即可得.

例1　计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x$.

$$\int_a^b uv' \mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \mathrm{d}u = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu' \mathrm{d}x$$

解　原式 $= x\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d}(\arcsin x)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

凑微分

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

例2 计算 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

$$\int_a^b uv' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

解 先换元去掉根号

$$\text{原式} \xlongequal[\text{则} dx = 2tdt]{\text{令} \sqrt{x} = t} \int_0^2 e^t \cdot 2tdt = 2\int_0^2 tde^t$$

$$= 2\left(te^t\Big|_0^2 - \int_0^2 e^t dt\right)$$

$$= 2(2e^2 - e^t\Big|_0^2) = 2(e^2 + 1)$$

例3 已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解 $\because \frac{\sin x}{x}$ 没有初等形式的原函数, 无法直接求出,

$\therefore$ 采用分部积分法计算.

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2)\\ &= \frac{1}{2}[x^2 f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}f(x)\\ &= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\because f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\ \therefore f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=0,$$

$$又\because f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

凑微分

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 \sin x^2\,\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}[\cos x^2]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例4 证明定积分公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

自证

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数} \end{cases}$$

证 设 $u = \sin^{n-1} x, v = -\cos x,$

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx,$$

$$dv = \sin x dx,$$

$$I_n = \underbrace{\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n}x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\therefore\ I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} \Longrightarrow I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2}I_{n-4} \Longrightarrow I_{n-4} = \frac{n-5}{n-4}I_{n-6}$$

$$\Longrightarrow = \cdots\cdots$$

积分 I_n 关于下标的递推公式

直到下标减到0或1为止

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$(m=1,2,\cdots)$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

$$\because\ I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\ \ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,$$

$$\therefore\quad I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$(m=1,2,\cdots)$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

证毕