§6.2 正定二次型

一、惯性定理

二、正(负)定二次型的概念

三、正(负)定二次型的判别

0 知识回顾

只含有平方项的二次型 $f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$

称为二次型的标准形(或法式).

例如 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2$ 为标准形.

若标准形中的系数只在 –1,0,1 三个数中取值，即有

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2\cdots-y_r^2$$

称上式为二次型的规范形.

例如 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-x_2^2+x_4^2$ 为规范形.

0 知识回顾

2. 用矩阵表示

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$(其中$a_{ij}=a_{ji}$), $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则二次型可记作 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$,其中A为对称矩阵.

对称矩阵 A 称为二次型 f 的矩阵.

对称矩阵 A 的秩称为二次型 f 的秩.

对称矩阵 A 与二次型 f 之间一一对应.

0 知识回顾

例:将二次型$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$化成标准型和规范型.

配方法

$$x=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}y$$

$$f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

正交变换

$x=Py$

$$x=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}y$$

$$f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$$

注: 化标准形, 所用的可逆线性变换不同, 得到的标准型也不同, 形式不唯一;

问: 化二次型为标准型，不同标准型有什么共性?

注: 经过可逆变换，二次型 f 的秩不变;

注: 标准形的秩就是标准形中非零项数，因此二次型的不同标准形中非零的项数是相同的.

0 知识回顾

例:将二次型$f=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$化成标准型和规范型.

$$x=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}y$$

配方法

$$f=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

$$\begin{cases}z_1=\sqrt{2}y_1\\z_2=2y_3\\z_3=y_2\end{cases}$$

正交变换

$x=Py$

$$x=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}y$$

$$f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$$

$$\begin{cases}z_1=y_2\\z_2=2y_3\\z_3=\sqrt{2}y_1\end{cases}$$

$$f=z_1^2-z_3^2+z_2^2$$

注: 化二次形为规范形，规范形唯一，正(负)平方项唯一;

一 惯性定理

一个实二次型, 既可以通过正交变换法化为标准形, 也可以通过拉格朗日配方法化为标准形.

用不同的方法其标准形的表达式一般来说是不同的, 但标准形中所含有的项数是确定的,其项数等于二次型的秩, 而且正系数的项数和负系数的项数也分别相等.

实二次型的这个性质常称为惯性定理

下面我们限定所用的变换为实变换, 来研究二次型的标准形所具有的性质.

一 惯性定理

定理5.3 (惯性定理) 设有实二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$, 其秩为r, 有两个**可逆变换** $x = Cy$, $x = Qy$, 分别使 f 化为标准形:

$$f = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ry_r^2, \quad (k_i \neq 0),$$

$$f = m_1z_1^2 + m_2z_2^2 + \cdots + m_rz_r^2, \quad (m_i \neq 0),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中与 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 中正数的个数相等.

二次型的标准形中正系数的**个数**称为二次型的**正惯性指数**, 负系数的个数称为负惯性指数.

若二次型 f 的秩为r,正惯性指数为 p, 则f 的规范形为:

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_r^2.$$

一 惯性定理

二次型、标准型与规范型的关系

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_n \Longleftrightarrow A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ 找可逆的线性变换$x=Cy$

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2 \Longleftrightarrow A=\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$\Updownarrow$ 找可逆的线性变换$y=Pz$

$$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2 \Longleftrightarrow \Lambda=\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

推论: 任何实对称矩阵A 必合同于对角阵Λ.

二 正(负)定二次型概念

定义5.4 设有二次型 $f=x^{T}Ax$, 若对任何非零向量 $x\neq 0$, 都有 $f(x)>0$ (显然有 $f(0)=0$)则称 f 为正定二次型，

并称对称阵 A 是正定的. (或称 A 是正定阵).

若对任何 $x\neq 0$, 都有 $f(x)<0$,则称 f 为负定二次型 ,并称对称阵 A 是负定的. (或称 A 是负定阵).

例如: $f(x,y,z)=x^2+4y^2+16z^2$, f 为正定二次型.

注意 若 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2$, 则 f 不为正定二次型.

例1 设 A, B 均为正定阵, 证明 $A+B$ 亦为正定阵.

三 正(负)定二次型判定

定理 实二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定的充要条件是: 其标准形的 n 个系数全为正，即正惯性指数为 n .

定理: 二次型$f=k_1y_1^2+k_1y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$是正定的$\Leftrightarrow k_i>0$

证明 设可逆变换 $x=Cy$ 使 $f(x)=f(Cy)=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2$.

充分性 设 $k_i>0\ (i=1,\cdots,n)$,

任给 $x\neq 0$, 则 $y=C^{-1}x\neq 0$, 故 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i^2>0$,

即 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 为正定二次型 .

必要性 假设有 $k_s\leq 0$, 则当 $y=e_s=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$时,

显然 $x=Ce_s\neq 0$, 但 $f(x)=f(Ce_s)=k_s\leq 0$,

这与 f 正定矛盾. 故 $k_i>0\ (i=1,\cdots,n)$. 命题得证.

三 正(负)定二次型判定

定理2 可逆变换不会改变二次型的正定型．

注: 可化二次形为标准形或规范形判定二次型的正定性.

三 正(负)定二次型判定

定理3 实二次型 $f(x)=x^{T}Ax$, A为n阶实对称矩阵,则下列命题等价

（1）二次型 $f(x)=x^{T}Ax$ 是正定二次型;

（2）A为正定矩阵;

（3）A的正惯性指数为n;

（4）A的特征值都大于零;

（5）A与E合同;

（6）存在可逆矩阵P，使得$A=P^{T}EP=P^{T}P$.

推论: 设 A 是 n 阶正定矩阵，则(1) $a_{ii}>0$;（2) $|A|>0$.

定理1: 二次型$f=k_1y_1^2+k_1y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$是正定的$\Leftrightarrow k_i>0$

定理2 可逆变换不会改变二次型的正定型 .

三 正(负)定二次型判定

例2 判定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-4x_1x_3$ 的正定性.

解 f 的矩阵为: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

由 $|A-\lambda E|=(2-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)=0$,

得特征值: $\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=6$,

故 A 是正定阵, 从而 f 是正定二次型.

三 正(负)定二次型判定

定义5.5 对于 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$, 行列式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, (k = 1,2,\cdots,n).$$

称为方阵 A 的 k 阶顺序主子式.

定理5.5 (霍尔维茨定理)

(1) 对称阵 A 为正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式为正.

即$\Delta_k > 0,(k = 1,2,\cdots,n)$.

(2) 对称阵 A 为负定的充要条件是奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶正. 即$(-1)^k \Delta_k > 0,(k = 1,2,\cdots,n)$.

三 正(负)定二次型判定

例3 判定二次型

$f(x,y,z)=5x^2+y^2+5z^2+4xy-8xz-4yz$ 的正定性.

解 f 的矩阵为: $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

它的顺序主子式:

$$a_{11}=5>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\quad |A|=1>0,$$

故 A 是正定阵, 从而 f 是正定二次型.

三 正(负)定二次型判定

例4 判定二次型 $f(x,y,z)=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

解 f 的矩阵为: $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$,

它的顺序主子式:

$$a_{11}=-5<0,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=26>0,|A|=-104>0,$$

故 A 是负定阵，从而 f 是负定二次型.

三 正(负)定二次型判定

例5 t 取何值时, 二次型 $f=x^2+y^2+5z^2+2txy-2xz+4yz$ 正定.

解　f 的矩阵为: $A=\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ t & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$,

它的顺序主子式:

$$a_{11}=1>0,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2,\ |A|=-5t^2-4t,$$

由 A 正定, 得 $\begin{cases}1-t^2>0\\ -5t^2-4t>0\end{cases}$, 解得: $-\dfrac{4}{5}<t<0$.

感谢聆听