第八节 反常积分

一、无穷区间上的反常积分

二、无界函数的反常积分

一、无穷区间上的反常积分

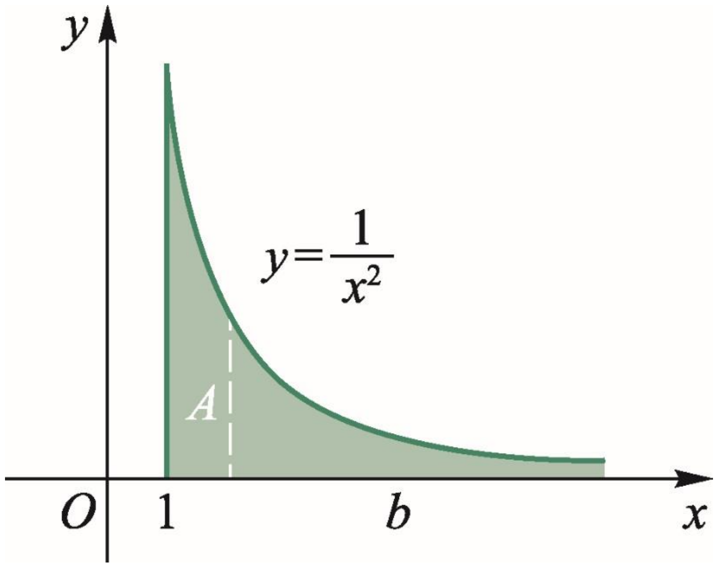
引例: 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形

的面积可记作 $A=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$



定义1 (1) 设$f(x)\in C[a,\ +\infty)$, 取$b>a$, 若$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在,

则称此极限为$f(x)$的无穷区间上的反常积分，记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 如果上述极限不存在,

就称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

（2）设$f(x)\in C(-\infty,\ b]$, 取$a<b$, 则类似地可定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

作为课堂提问

(3) 若$f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

只要有一个极限不存在, 则称反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

上述反常积分统称为无穷区间上的反常积分

也称为第一类反常积分.

注 若$F(x)$是 $f(x)$的原函数, 引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛顿 – 莱布尼茨公式的计算表达式:

$$(1)\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$(2)\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$(3)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

若出现$\infty-\infty$，并非不定型，它表明该反常积分发散.

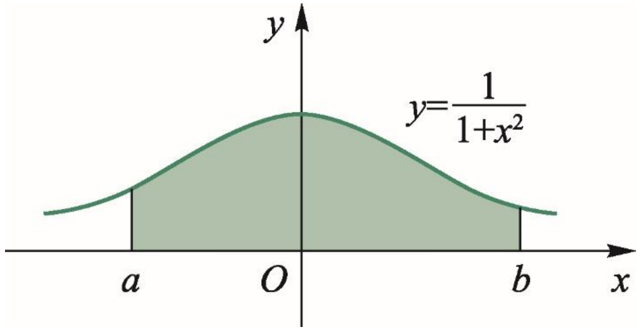
例1 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\pi$$

几何意义：
图中阴影部分的面积.



显然有：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

思考: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} \cancel{=} 0$ 对吗?

分析: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注意:

对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用“偶倍奇零”的性质!

例2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-Pt}\,\mathrm{d}t \quad (P>0)$.

解 原式 $= -\dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-Pt}) = -\dfrac{1}{P}t\mathrm{e}^{-Pt}\Big|_0^{+\infty} + \dfrac{1}{P}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-Pt}\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{P^2}\mathrm{e}^{-Pt}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{P^2}.$$

例3 证明反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^P}$，当$P>1$时收敛，当$P\leqslant 1$时发散.

证 当$P=1$时有 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln|x|]_a^{+\infty}=+\infty.$

当$P\neq 1$时有 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^P}=\left[\frac{x^{1-P}}{1-P}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & P<1,\\ \dfrac{a^{1-P}}{P-1}, & P>1.\end{cases}$

因此，当$P>1$时，反常积分收敛，其值为 $\dfrac{a^{1-P}}{P-1}$；

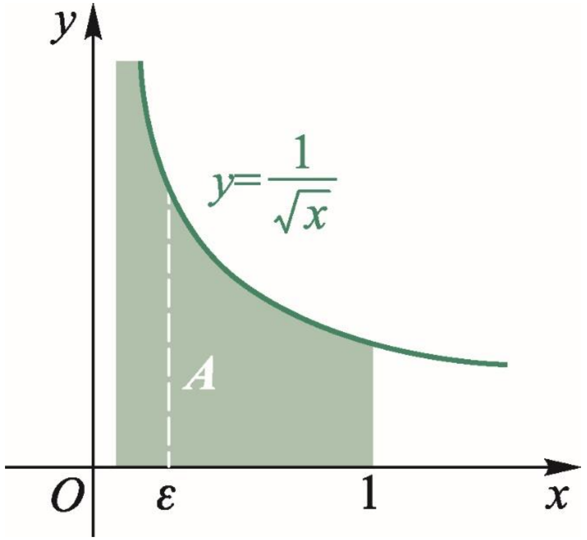
当$P\leqslant 1$时，反常积分发散. 证毕

二、无界函数的反常积分

引例: 曲线$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$与x轴, y轴和直线

$x=1$所围成的开口曲边梯形的面积

可记作 $A=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义2 (1)设$f(x) \in C(a,\ b]$,而在点a的右邻域内无界，取$\varepsilon > 0$,

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数$f(x)$在$[a,b]$上

的反常积分,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果上述极限不存在，则称

反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

作为课堂提问

（2）设$f(x) \in C[a,\ b)$,而在b的左邻域内无界,则类似地可定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

（3）若$f(x)$在 $[a,b]$上除点$c(a<c<b)$外连续，而在点c的邻域内无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

只要有一个极限不存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

无界点常称为瑕点（奇点），因此上述无界函数的反常积分又称为瑕积分，也称为第二类反常积分.

注 若$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则有类似牛顿–莱布尼茨公式的计算表达式:

(1)若b为瑕点, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

(2)若a为瑕点, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a^-)$

(3)若a,b都为瑕点, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^-)$

思 考:

若瑕点$c \in (a,b)$, 则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - \underline{F(c^+)+F(c^-)} - F(a)$

可消除吗?

例4 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} \ (a>0)$.

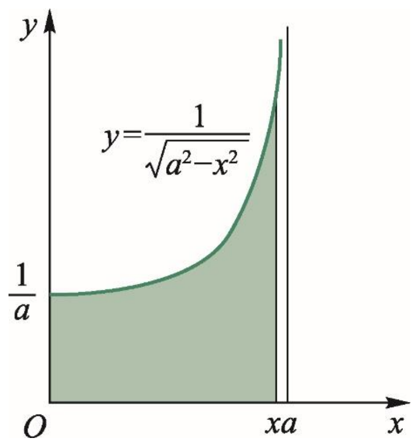
解 $\because \lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$,

$\therefore$ 点a是瑕点,于是

原式 $=\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a$

$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.

几何意义:
图中阴影部分的面积.



例5 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的敛散性.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\therefore x=0$是瑕点.

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\cancel{=}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1}$$

$$=\left(-\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}-1\right)+\left(-1+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)$$

可相消吗?

$$=(+\infty-1)+(-1+\infty),$$

$\therefore$ 反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散.

例6 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当$0<q<1$时收敛, $q\geqslant 1$时发散.

解 (1) 当$q=1$时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=[\ln|x-a|]_a^b= +\infty$;

(2) 当$q\neq 1$时,

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 0<q<1,\\ +\infty, & q>1,\end{cases}$$

$\therefore$ 当$0<q<1$时, 该反常积分收敛, 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当$q\geqslant 1$时, 该反常积分发散.

注 (1) 设有反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (a,b可以是∞或瑕点), 当$f(x)$在开区间(a,b)内连续, 所做换元函数单调时, 也可以像定积分一样换元.

(2) 有时通过换元, 反常积分和常义积分可以互相转化. **例如,**

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \xlongequal{令x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$$

令$x = t + \dfrac{1}{t}$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}$$

(3)当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间分别讨论.

例7 求反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$.

证 $\because \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)^3}}=\infty$, $\therefore x=0$是瑕点.

$\therefore$ 本题既是瑕积分又是无穷区间上的反常积分.

令$\dfrac{1}{x}=t$,则$x\to 0^+$时,$t\to+\infty$, $x\to+\infty$时,$t\to 0$.

$$原式=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+1\right)^3}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(t+1)^3}}\cdot\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}(t+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot\mathrm{d}(t+1)=\left[-2(t+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty}=2.$$

例8 设$f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，求$I=\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x.$

解 $\because x=0$与$x=2$都是瑕点，$\therefore I$为反常积分.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=\arctan f(x)+C$$

$$=\left[\arctan f(x)\right]_{-1}^{0^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{0^+}^{2^-}+\left[\arctan f(x)\right]_{2^+}^{3}$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\left[-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]+\left[\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}\right]=\arctan\frac{32}{27}-2\pi.$$