高等数学A(上)

第四章　微分方程

本章重点

实际问题 → 微分方程 → 微分方程求解

实际问题	微分方程	微分方程求解
函数关系	含有未知函数及其导数的等式	找到未知函数

目 录

CONTENTS

第四章

第一节 微分方程的基本概念

一、引 例

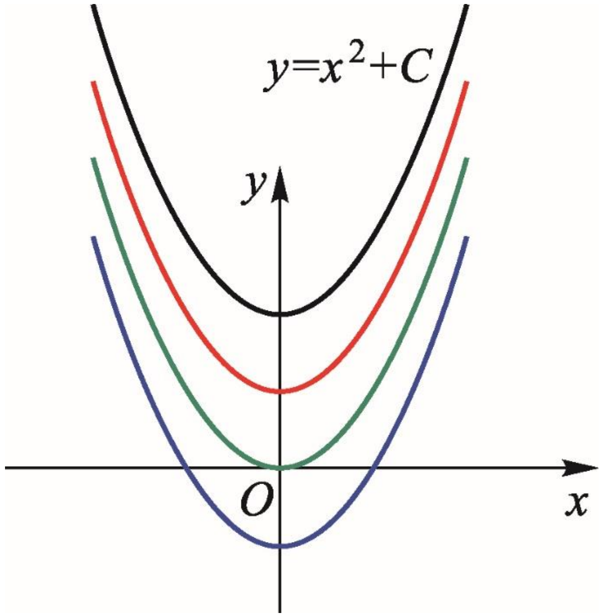
二、基本概念

一、引例

例1　一曲线通过点(1,2), 在该曲线上任意点(x, y)处的切线斜率为$2x$, 求该曲线的方程.

解　设所求曲线方程为$y = y(x)$, 则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2, & ② \end{cases}$$



由 ① 式得 $y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$（$C$为任意常数）

由 ② 式得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$

例2　列车在平直路上以 20m/s 的速度行驶,制动时获得加速度 $a=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$, 求制动后列车的运动规律.

解　设列车在制动后 t s 行驶了 s m, 即求 $s=s(t)$.

$$\text{已知}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4 & ①\\ s\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20 & ②\end{cases}$$

由①式得　$s=-0.2t^2+C_1t+C_2$　③

利用②式和③式可得　$C_1=20,\quad C_2=0$

因此所求运动规律为　$s=-0.2t^2+20t$

二、 微分方程的基本概念

1. 微分方程

含有未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程叫做微分方程.

例如: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ （例1）, $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$ (例2)

$(2x+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=x+y$ 都是微分方程.

注: 分类 $\begin{cases}\text{常微分方程（本章内容）}\\ \text{偏微分方程}\end{cases}$

2. 微分方程的阶

方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,叫做微分方程的阶.

例如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$$ 一阶

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4$$ 二阶

$$xy'''+x^2y''-4xy'=3x^2$$ 三阶

$$y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=\sin 2x$$ 四阶

一般地, n阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$ (n阶显式微分方程)

注

上式中$y^{(n)}$必须出现, 而其他的变量则可以不出现.

例如: $y^{(n)} = 1.$

3. 微分方程的解及解的分类

（1）使微分方程成为恒等式的函数叫做微分方程的解;

（2）若解中含有任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称之为通解;

（3）确定了通解中任意常数以后的解称之为特解.

例如: **在例1中**

例1 一曲线通过点(1,2),在该曲线上任意点(x,y)处的切线斜率为$2x$,求该曲线的方程.

解 设所求曲线方程为$y=y(x)$,则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x & ① \\ y\Big|_{x=1}=2, & ② \end{cases}$$

由 ①式得 $y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$（$C$为任意常数） 通解

由 ②式得 $C=1$,因此所求曲线方程为 $y=x^2+1$ 特解

例如: 在例2中

例2 列车在平行线上以20m/s的速度行驶,制动时获得加速度 $a=-0.4\,\mathrm{m/s^2}$ 求制动后列车的运动规律.

解 设列车在制动后t s行驶了s m, 即求$s = s(t)$.

已知
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -0.4 & ① \\ s\Big|_{t=0} = 0,\quad \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 20 & ② \end{cases}$$

由①式得 $s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$ ③ 通解

利用②式和③式可得 $C_1 = 20,\quad C_2 = 0$

因此所求运动规律为 $s = -0.2t^2 + 20t$ 特解

4. 初值问题

（1） 用来确定任意常数的条件称为初值条件.

n阶方程的初值条件:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}$$

（2）求微分方程满足初值条件的特解这样一个问题叫做初值问题.

例如:

两个引例 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\\ y\big|_{x=1}=2,\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\,t^2}=-0.4\,,\\ s\big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20\end{cases}$ 都是初值问题.

5. 积分曲线

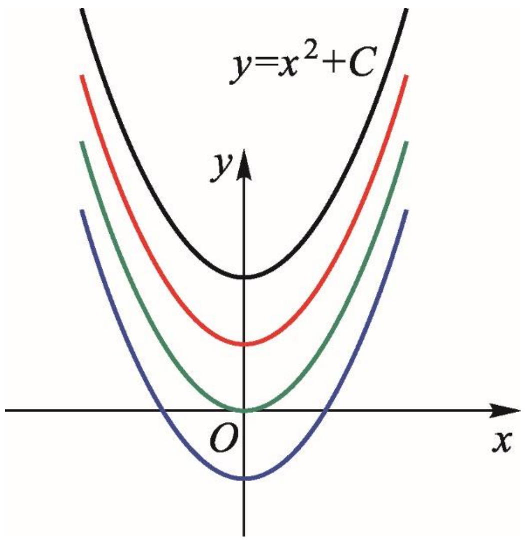
(1)微分方程的解的图形是一条曲线,称之为微分方程的积分曲线.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

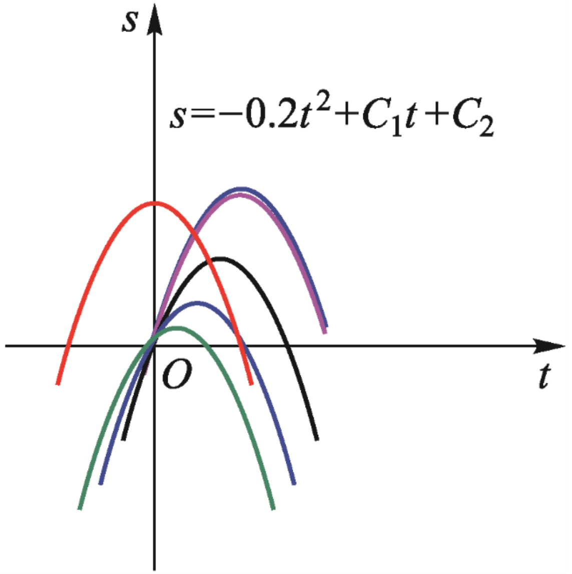
二阶: $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

(2) 通解的图象是一族曲线, 称为微分方程的**积分曲线族**.



例1的积分曲线



例2的积分曲线

例3 验证函数$x=C_1\cos k t+C_2\sin k t$ $(C_1,C_2$为常数$)$是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\ t^2}+k^2x=0$$

的解, 并求满足初值条件$x\big|_{t=0}=A,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$的特解.

解

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kC_1\sin k t+kC_2\cos k t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2C_1\cos k t-k^2C_2\sin k t,$$

将$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$和$x$的表达式代入原方程,

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0.$$

故$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$是原方程的解.

$$\because \quad x\Big|_{t=0} = A, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \therefore \quad C_1 = A, \quad C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A\cos kt.$