§5.3 n维向量空间的正交性

一、内积及其性质

二、正交向量组

三、正交矩阵及其性质

一 内积及其性质

定义1 设有n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$

则 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，

记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$， 即$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$.

一个数

$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha.$$

一 内积及其性质

内积的运算性质

(其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数)：

(1) $(x, y) = (y, x)$;

(2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

(3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(4) $(x, x) \geq 0$，且当 $x \neq 0$ 时有 $(x, x) > 0$.

一 内积及其性质

定义2 设 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$,

称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\boldsymbol{n}$ 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度(或**范数**).

当 $\|\mathrm{x}\|=1$ 时,称 x 为单位向量.

向量的长度具有下述性质:

1. 非负性 当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\|>\mathbf{0}$; 当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{x}\|=\mathbf{0}$;

2. 齐次性 $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$; **3. 三角不等式** $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$;

4. 施瓦茨不等式 $\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|\leq\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

定义3 当 $\|\mathrm{x}\|\neq 0,\|\mathrm{y}\|\neq 0$ 时, $\theta=\arccos\dfrac{[\mathrm{x},\mathrm{y}]}{\|\mathrm{x}\|\|\mathrm{y}\|}$

称为 $\boldsymbol{n}$ 维向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的夹角.

一 内积及其性质

例1 已知$a=(1,0,1)^T, b=(1,-1,0)^T, c=(1,0,-1)^T$,

求(1) $[a+b,a-2b]$; (2)向量a与b的夹角; $(3)[a,c]$.

解(1) $[a+b,a-2b]=[a,a]-2[a,b]+[b,a]-2[b,b]=-3.$

(2) $\cos\theta=\dfrac{[a,b]}{\|a\|\cdot\|b\|}=\dfrac{1\times1+0\times(-1)+1\times0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}.$

(3) $[a,c]=1\times1+0\times0+1\times(-1)=0\Rightarrow a\perp c.$

二 正交向量组

1 正交的概念

当 $(x,y)=0$ 时，称向量 x 与 y 正交 .

由定义知,若 $x=0$,则 x 与任何向量都正交.

2 正交向量组的概念

若一非零向量组 $a_1, a_2, \cdots a_r$ 中的向量两两正交，则称该向量组为正交向量组.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [a_i, a_j] = 0, & i \neq j \\ [a_i, a_i] > 0, & i = 1,2,\cdots r \end{cases}$$

二 正交向量组

3 标准正交向量组的概念

若一n维向量组 $e_1,e_2,\cdots e_r$ 满足：

$(1)\ e_1,e_2,\cdots e_r$两两正交；$(2)\ e_1,e_2,\cdots e_r$都是单位向量；

则称 $e_1,e_2,\cdots e_r$是标准(规范)正交向量组

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [e_i,e_j]=0, & i\neq j \\ [e_i,e_i]=1, & i=1,2,\cdots r \end{cases}$$

二 正交向量组

4 正交向量组的性质

定理1 若 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是正交的向量组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

证明 设有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_r=0$

以 a_1^T 左乘上式两端，得 $\lambda_1\alpha_1{}^T\alpha_1=0$

由 $\alpha_1\neq 0 \Rightarrow \alpha_1{}^T\alpha_1=\|\alpha_1\|^2\neq 0$,

同理可得 $\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$.

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

注：正交向量组必线性无关.

二 正交向量组

例2 已知向量$a_1=(1,1,1)^T,a_2=(1,-2,1)^T$,试求一个非零向量$a_3$,使$a_1,a_2,a_3$两两正交.

分析：显然$a_1\perp a_2$,只需要$a_1\perp a_3,a_2\perp a_3$.

解：设$a_3=(x_1,x_2,x_3)^T$,若$a_1\perp a_3,a_2\perp a_3$,则

$$\begin{aligned}(a_1,a_3)=a_1^Ta_3=x_1+x_2+x_3=0\\(a_2,a_3)=a_2^Ta_3=x_1-2x_2+x_3=0\end{aligned}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}.$$

从而有基础解系$(-1,0,1)^T$,取$a_3=(-1,0,1)^T$即可.

二 正交向量组

思考：

线性无关向量组 → 正交向量组 → 标准向量组

基 → 正交基 → 标准正交基

二 正交向量组

一组基

下面介绍施密特正交化方法： $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关,

(1) 正交化，取 $b_1 = a_1,\quad b_2 = a_2 - \dfrac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1,$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一组正交基

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

那么 $b_1, \cdots, b_r$ 两两正交,且 $b_1, \cdots, b_r$ 与 $a_1, \cdots a_r$ 等价.

(2) 单位化，取 $e_1 = \dfrac{b_1}{\|b_1\|},\quad e_2 = \dfrac{b_2}{\|b_2\|},\ \cdots\cdots, e_r = \dfrac{b_r}{\|b_r\|},$

一组标准正交基

二 正交向量组

上述由线性无关向量组$a_1,\cdots,a_r$构造出正交向量组$b_1,\cdots,b_r$的过程,称为施密特正交化过程.

例3 用施密特正交化方法，将向量组

$$a_1=(1,1,1,1),a_2=(1,-1,0,4),a_3=(3,5,1,-1)$$

标准正交化.

解 先正交化，取 $b_1=a_1=(1,1,1,1)$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$$

$$=(1,-1,0,4)-\frac{1-1+4}{1+1+1+1}(1,1,1,1)=(0,-2,-1,3)$$

二 正交向量组

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2$$

$$= (3,5,1,-1) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) - \frac{-14}{14}(0,-2,-1,3) = (1,1,-2,0)$$

再单位化，得标准正交向量组如下

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(0,-2,-1,3) = \left(0, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

例4 已知$a_1=(1,1,1)^T$,求非零向量a_2,a_3使a_1,a_2,a_3两两正交.

解 a_2,a_3应满足方程$a_1^T x=0$,即

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

它的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

二 正交向量组

把基础解系正交化，即合所求．亦即取

$$a_2=\xi_1,\quad a_3=\xi_2-\frac{[\xi_1,\xi_2]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1.$$

其中$[\xi_1,\xi_2]=1,[\xi_1,\xi_1]=2,$于是得

$$a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

二 正交向量组

例6 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$解空间的一组标准正交基.

第一步：求出基础解系ξ_1,ξ_2.

↓

第二步：对基础解系进行正交化b_1,b_2

↓

第三步：进行单位化, 得到e_1,e_2

↓

得到标准正交基底$\{e_1,e_2\}$

三 正交矩阵及其性质

定义3 若n阶方阵A满足 $A^T A = E \left(即A^{-1} = A^T\right)$,则称$A$为正交矩阵.

正交矩阵还具有下述性质:

(1) 若A为正交矩阵，则 $A^{\mathrm{T}}A = E$；

(2) 若A为正交矩阵，则 $|A| = \pm 1$；

(3) 若A，B为同阶数的正交矩阵，则AB为正交矩阵；

(4) 方阵A为正交矩阵的充要条件是A的列(行)向量都是单位向量且两两正交.

三 正交矩阵及其性质

例6　判别下列矩阵是否为正交阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ 考察矩阵的第一列和第二列,

由于 $1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\neq 0$, 所以它不是正交矩阵.

三 正交矩阵及其性质

(2) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

由于 $$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以它是正交矩阵.

三 正交矩阵及其性质

定义4 若P为正交阵，则线性变换$y = Px$ 称为正交变换.

性质 正交变换保持向量的长度不变

证明 设$y = Px$为正交变换,

则有 $\|y\| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T P^T Px} = \sqrt{x^T x} = \|x\|.$

注：保持三角形的形状不变，这就是正交变换的优良特性.

三 正交矩阵及其性质

例7 设a是n维列向量，$a^T a = 1$，试证$A = E - 2aa^T$为对称正交矩阵.

证明：$\because A^T = (E - 2aa^T)^T = E - 2aa^T = A$，所以$A$为对称阵.

又$A^T A = (E - 2aa^T)^T(E - 2aa^T)$

$$= E - 4aa^T + 4(aa^T)(aa^T)$$

$$= E - 4aa^T + 4a(a^T a)a^T$$

$$= E - 4aa^T + 4aa^T = E.$$

故A为正交矩阵.

感谢聆听