微分方程指南

King

2024 年 1 月 7 日

目录

Part I

概念总结

方程表示一种约束关系，它的解就是使方程成立的元素，在微分方程里往往是一个函数，它可能可以表达为显函数，或者只能写为隐函数，甚至于我们只能拿符号代替它的解。能力有限，还没学过复变函数，所以只会初等的解法。

Chapter 1

STARTED 目前对于一般的方程最一般的方法为：幂级数解法

文中一般使用 x 为自变量。

读书想法：

2.8 picard 有界区域内，方程连续导函数连续的方程有唯一解趋于 lipschitz $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<K|y_1-y_2|$? 导函数连续，函数不连续?

Fourier 级数证明三角函数正交性 $\int_{-L}^{L}\sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin(\cos-\cos)$ $\int_{-L}^{L}\sin^2\mathrm{d}x=L$ $\int f\mathrm{d}x=a_0L$ $a_nL=\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x$

Part II

求解析解

一般手算思路： 线性常系数

- $\rightarrow$ 计算齐次方程的特征方程解

无重根 $\rightarrow$ 得到 <u>齐次通解</u> 有重根 $\rightarrow$ 依据重数补齐

- 非齐次- <u>特解</u> ($y = y_h + y_p$)
  - 形式简单 $\rightarrow$ 待定系数
  - $\rightarrow$ 常数变易 $\rightarrow$ 解 Wronski 方程得到 <u>特解</u>

变系数：

- 已知特解

$\rightarrow$ 常数变易
重根：一般方法
d'Alembert /降阶法
$y_2(x) = v(x)y_1(x)$ y_1 为已知形式的解求出隐式解，那么根据初值条件代入，取最小的可能区间
前四章积分因子
非线性可解 Boun 伯努利变化

进阶方法：

- 幂级数

简单的幂级数 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
使用更一般的幂级数 $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$
此时就先解出 r 之后进行 an 的递推
奇点 (singular point) 对于方程化归时存在变系数的情况二阶方程

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1.1}$$

$P(x_0) = 0$ x_0 处为奇点正则：如果化归后后两项存在，称为正则即满足 $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ 和 $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\frac{R(x)}{P(x)}$ 都存在，分别设为 p, q

也就是转化为研究 $y''+\frac{Q(x)}{P(x)}y'+\frac{R(x)}{P(x)}y=0$ 的性质。

此处要求 Q(x) R(x) 是解析的，即它们可以写成级数展开形式这样可以忽略后面高阶项只取第一项 $P(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots$ 使得取极限（有效）可以

由此构造方程

$$x^2y''+x(x\frac{Q(x)}{P(x)})y'+(x^2\frac{R(x)}{P(x)})y=0 \tag{1.2}$$

得到（类似 Euler 方程的结构）

$x^2y''+p_0xy'+q_0y=0$

Euler 方程使用尝试解 $y=x^r$ 因为可以发现如果重根，那么使用 $x^r\ln r$ 可以代入验证发现它满足方程并且 r 还是重根的 r

理由：

1. 使用 Wronski 行列式我们可以使用，那么反过来可以使用 Wronski 解另一个解(将会发现它余下问结果一致)。原理：Abel 定理 $W=\mathrm{e}^{\int-p\mathrm{d}x}$ 现在有 $y=x^r$ 是方程的解，代入解

$$=\mathrm{e}^{\int-p\mathrm{d}x} \tag{1.3}$$

案例：(有重根) $x^2y''-3xy'+4y=0$ 重根 2 一个解是 $y=x^2$ 代入 W

$$x^2y'- \tag{1.4}$$

1.

对于 $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$ 设代入 x^r 得到方程为 $L[x^r]$ 它的形式应该满足

$$x^2(r-1)rx^{r-2}+\alpha xrx^{r-1}+\beta x^r=0 \tag{1.5}$$

$$(r-1)rx^r+\alpha rx^r+\beta x^r=0 \tag{1.6}$$

$$x^r(r^2+(\alpha-1)r+\beta)=0 \tag{1.7}$$

我们发现 x 和 r 可以分开于是方便称呼定义 $L[x^r]=x^rF(r)$ 这里 $F(r):=r^2+(\alpha-1)r+\beta$

对于任意 x 成立，所以也就是求解 r 即求 $F(r) = 0$

对于有重根，那么 $F(r)$ 一定可以写成 $F(r) = (r - r_{1,2})^2$

我们现在要再找一个（除了 x^r）形式的解

可以由 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的重根取 $x\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的启发后者推导一下。我们要求这另外一个形式依然要满足 $F(r) = 0$ 于是构造可以对 L 求偏导得到 $\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = L[\frac{\partial}{\partial r}x^r]$ 得到 $x^r \ln rF + x^r\frac{\partial}{\partial r}F =$

Chapter 2

一阶方程

直接积分齐次方程积分因子

2.1 线性方程

形式：$P(x)y' + Q(x)y + R(x) = 0$

思想：等价变化（乘除）使等式左侧化为乘积微分的结果，和化为积的微分

案例：

- $(4+x)^2y' + 2xy = 4x$ 左侧形式特殊：$((4+x)^2)' = 2x$ 化为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((4+x)^2y) = 4x$ 两边积分：$y = \frac{2x^2+C}{(4+x)^2}$
- $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ 乘（尚未知）积分因子：$\mu y' + \frac{1}{2}\mu y = \mu\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ 观察左侧得到方程：$\mu_x = \frac{1}{2}\mu$ 令（只要一个符合的 μ 即可）$\mu = \mathrm{e}^{x/2}$ 得到：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x/2}y) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ 两边积分，通解：$y = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{x/3} + C\mathrm{e}^{-x/2}$
- $2y' + xy = 2$ 即 $y' + \frac{x}{2}y = 1$ $\mu = \mathrm{e}^{x^2/4}$ $\mathrm{e}^{x^2/4}y' + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{x^2/4}y = \mathrm{e}^{x^2/4}$ 即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{x^2/4}) = \mathrm{e}^{x^2/4}$ (积不出来但) 得到形式 $y = \mathrm{e}^{-x^2/4}\int \mathrm{e}^{x^2/4}\mathrm{d}x + C\mathrm{e}^{-x^2/4}$

方法：条件：（方程）

$$y' + py = q$$

过程：同时乘以积分因子 μ

$$\mu y' + \mu p y = q$$

如果可以化为，得到条件

$$\mu_x = p\mu \tag{2.1}$$

于是，$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = p\mathrm{d}x$ （不论常数）可取

$$\mu = \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

乘回方程，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mu y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} y) = \mu q \tag{2.3}$$

最终解的形式为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x} \int \mu q \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} q \mathrm{d}x \tag{2.4}$$

2.2 分离变量、齐次方程

对于简单的方程，将 x,y 分到方程两边，同时积分

形式：(表面非线性实际线性)

思想：转化

案例：

-

2.3 积分因子/恰当方程

1. 恰当方程 转化为全微分方程。

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0 \tag{2.5}$$

其中 M,N 关于 x,y 连续且可微（具有连续的一阶偏导数）

我们希望找到一个恰当的函数 u，使得 $M=\frac{\partial u}{\partial x},\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}$ 也就是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y&=0\\ \mathrm{d}u&=0\end{aligned}\tag{2.6}$$

所以得到隐式解 $u=C$

条件 方程满足：

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

案例

- $(y\cos x+2x\mathrm{e}^y)+(\sin x+x^2\mathrm{e}^y-1)y'=0$ 验证：$\frac{\partial y\cos x+2x\mathrm{e}^y}{\partial y}=\cos x+2x\mathrm{e}^y=\frac{\partial \sin x+x^2\mathrm{e}^y-1}{\partial x}$ 求解原函数：偏积分

  $$u=\int y\cos x+2x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x=-y\sin x+\mathrm{e}^y x^2+C(y)$$

  对另一项（y）偏导

  $$\sin x+x^2\mathrm{e}^y-1=\frac{\partial u}{\partial y}=-\sin x+x^2\mathrm{e}^y+C'$$

  $$C=\int 2\sin x+1\mathrm{d}y=2y\sin x+y$$

  通解：$-y\sin x+\mathrm{e}^y x^2+2y\sin x+y=A$

特殊形式 一些全微分 fn

$$yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x^y\tag{2.7}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-xdy}{y^2}=d(\frac{x}{y})\tag{2.8}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-xdy}{yx}=d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|)\tag{2.9}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-xdy}{x^2+y^2}=d(arctan\frac{x}{y})\tag{2.10}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-xdy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\tag{2.11}$$

$yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y \ln x \mathrm{d}y = \mathrm{d}x^y$ $\frac{y\mathrm{d}x - x dy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$ $\frac{y\mathrm{d}x - x dy}{yx} = d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|)$ $\frac{y\mathrm{d}x - x dy}{x^2+y^2} = d(arctan\frac{x}{y})$ $\frac{y\mathrm{d}x - x dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$

2. 积分因子 区别之前，这里是找到原函数，之前是将方程左侧化为 - 可以求解所有方程，但不一定可以解出不是恰当的方程转化为恰当把 ref 乘以 μ 得到

$$\mu M \mathrm{d}x + \mu N \mathrm{d}y = 0 \tag{2.12}$$

必要条件

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \tag{2.13}$$

找法假设 $\mathrm{d}u = \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$ (不会解方程，化简形式，令某些项为 0) 找一个只与 x 或 y 有关的积分因子只与 x 相关的积分因子 $\mu_x N = \mu(M_y - N_x)$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{(M_y - N_x)}{N} \tag{2.14}$$

$$\mu = \mathrm{e}^{\int \frac{(M_y - N_x)}{N}\mathrm{d}x} \tag{2.15}$$

案例

- $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ [完整] 验证发现非恰当：$\frac{\partial 3xy+y^2}{\partial y} = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial x^2+xy}{\partial x}$ 写出积分因子方程：$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$ 即 $\mu_y(3xy+y^2) + \mu(3x+2y) = \mu_x(x^2+xy) + \mu(2x+y)$ 取 $\mu_y = 0$ 得 $\mu(x+y) = \mu_x(x^2+xy) \to \mu = x\mu_x$ 于是令 $\mu = x$ 得恰当方程 M 对 x 偏积分 $u = \int 3x^2y + xy^2\mathrm{d}x = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + c(y)$ u 对 y 偏导解为 $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$
- ....

3. 原理

   (a) 恰当方程的判据 判断 ref 是 (具有连续一阶偏导) 是恰当微分方程（可以转化为 $\mathrm{d}u = 0$）的充分必要条件

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ref 具有一般性

充分：满足条件则能够找到一个 u 使得 $M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}$

找 u 对 M 向 x 积分, 取原函数为 u, $u = \int M\mathrm{d}x + C$ (C 与 x 必然无关) 可以认为 $u(x, y) = \int M(x, y)\mathrm{d}x + C(y)$ ~~如果 C 的确只与 y 有关那么~~ (我们希望 $\mathrm{d}u - \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}C = \mathrm{d}C(y)$ 这个 dC 与 dx 无关，就的确说明找到的函数 u 它的全微分是原方程，便得证)

研究 C ，（无法直接得到 dC 只好先算 u 偏导）将所得结果对 y 求偏导

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int M\mathrm{d}x}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = N$ 所以 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\mathrm{d}x$

证明它与 x 无关于是它就是全微分，使用偏导为 0 验证

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}[N - \frac{d}{\mathrm{d}y}\int M\mathrm{d}x] &= \frac{\partial}{\partial x}N - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M\mathrm{d}x \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M\mathrm{d}x \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

于是 dC 与 x 无关，得证 u 的全微分是原方程。x,y 对称，证明具有一般性。

必要：如果是恰当方程那么已经存在函数 u ，它的全微分是原方程，那么可以根据 Cla 克莱罗定理 fn 验证两者相等

2.4 特殊方程

Logistic: $y' = ky$ $y' = h(y) = (r - y)y$ $y' = r(1 - \frac{y}{K})y$

Chapter 3

二阶方程

以下方法，齐次方程的特解为 0，只需要考虑非齐次情况

3.1 特征方程：通解

试用范围：齐次方程求通解原理：

具体过程 首先使用 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 试探方程的解，得到代数方程，即它的特征方程。使用代数方程解得 λ 得到通解

特殊情况 如果出现重根，相当于少了一些解，因此我们需要补齐至方程阶数的解

，那么可以猜测这些需要添加的解形式和 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 类似，可以尝试发现 $x\mathrm{e}^{\lambda x}$ 满足方程，则根据重数使用如 $x\mathrm{e}^{\lambda_p x}, \cdots, x^{(p-1)}\mathrm{e}^{\lambda_p x}$ 的形式扩展解的数目，补满 n 个，假设 λ_p 有 p 重根，就添加额外 p-1 个解如前。

3.2 积分因子/二阶恰当方程

1. 案例
2. 原理 方程为

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{3.1}$$

希望转化为（一阶恰当方程的形式 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$）

$$(P(x)y')' + (f(x)y)' = 0 \tag{3.2}$$

可知

$$P'y' + Py'' + f'y + fy' = 0 \tag{3.3}$$

条件为

$$P' + f' = Q \tag{3.4}$$

$$f' = R \tag{3.5}$$

得到条件

$$P'' - Q' + R = 0 \tag{3.6}$$

实际代入计算

$$f = Q - P' \tag{3.7}$$

3.3 换自变量

Euler 方程 (**??**) 一般形式

Chapter 4

求非齐次特解

4.1 待定系数法

概要 非齐次方程观察右端项，猜测可能形式（采取相同相似形式），代入解出系数。

需要考虑重根和与齐次通解重复的部分。如果有重复。

举枚

- $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$

通解 $\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{4x}$ 猜特解形式 $Y_p = A\mathrm{e}^{2x}$ 代入

$$4A + 6A - 4A = 3 \tag{4.1}$$

通解为 $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$

- $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$ 原特解与齐次通解相同，特解取 $Y_p = Ax\mathrm{e}^{2x}$ 解得 $A = -\frac{2}{5}$

- $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x - 8\mathrm{e}^{x}\cos 2x$ 分别计算

- $y''' - 4y' = x + 3\cos x + \mathrm{e}^{-2x}$ 齐次通解：0,2,-2 $g(x) = x + 3\cos x + \mathrm{e}^{-2x}$

  1. 与 0 重 $Y_{p1} = x(A_0 + A_1 x)$

2. $Y_{p2} = B\cos x + C\sin x$
3. 与 - 2 重 $Y_{p3} = Ex\mathrm{e}^{-2x}$

- $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$ 齐次通解：$(r^2+1)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mathrm{i}$ $y_h = \cos x + \sin x + x\cos x + x\sin x$ 特解：$Y_p = x^2(A\cos x + B\sin x)$

4.2 常数变易法

使用已经解得的通解，视常数为含自变量的函数，代入方程继续求解。

简化思路：[**核心**] 有 n 个系数需要确定，所以需要 n 方程，可以自由取这些方程。

技巧 使用 Wronski 行列式

1. 为什么

   约束方程，令所有 $c_i' y_i^n = 0$ ，本质上是代入方程后使每次求导让系数求导的项为 0。

   最后结果是 Wronski 行列式

$$\begin{aligned} \sum c_i' y_i^1 &= 0 \\ \sum c_i' y_i^2 &= 0 \\ &\cdots \\ \sum c_i' y_i^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

   可化为：

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

   之后利用 Crammer 法则求解 $c_i = \frac{|W(i)|}{|W|}$ 。

4.3 归零因子法（A）

概要 化非齐次方程为齐次方程消去方程右边项代价是方程阶数升高

举例 使用 D 微分算子

- $(D-2)^2(D+1)y = 3\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{-x}$ 右侧第一项 e^{2x} ：D-2 第二项 $x\mathrm{e}^{-x}$ ：$(D+1)^2$ 于是归零因子为：$(D+1)^2(D-2)$ 两边同乘归零因子得到：$(D+1)^3(D-2)^4y=0$ 就解 7 阶齐次方程，注意可能有增根 7 阶通解：$y_h=(c_1)

Chapter 5

幂级数解法

5.1 幂级数

形式：

$$\sum_{i=0}^{\infty} = a_n(x - x_0)^n$$

原理定理保证：ref

收敛半径的计算

- 比值

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = (x-x_0)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{5.1}$$

- 根值

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = (x-x_0)\sqrt[n]{|a_n|} \tag{5.2}$$

变换求和哑元，保证 x 的次方相同于是可以把 x 约掉，只解出系数的递推关系

如果 x 次方相同，求和其实不一样，把多出来的项取出来，令它们为 0，使得下标相同，去掉求和，得递推。

性质 条件：收敛级数，$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$

- 可加减乘除（保持收敛）
- 连续的 $f(x)$ 在收敛区间上有各阶导数。
- 是解析的 $\to$ 可泰勒展开
- 两个级数相等，对应次方的系数相等

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

P Q R 多项式 $\to$ 解析的

常点: ordinary point $P(x_0)$

Wronski $W[Y, y](x_0)$

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{5.3}$$

5.2 特殊方程

1. Airy

$$y'' - xy = 0 \tag{5.4}$$

2. Legrendre
3. Berssel ?

5.3 Euler 方程

形式：

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad x > 0 \tag{5.5}$$

引入中间变量 t

$$x = \mathrm{e}^t, \quad t = \ln x$$

于是各项关系为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x^2}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})$$

代入得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta y = 0 \tag{5.7}$$

案例

1.

Chapter 6

Laplace 变换求解

存在条件：分段连续，（小于）指数增长公式：

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

性质：指数平移：$\mathscr{L}[f(t+a)] = \mathrm{e}^{-as}F(s)$ $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = F(s-a)$

Part III

性质定理

要害点注：存在唯一：Picard 序列线性相关：Wronski 行列式收敛级数

Chapter 7

形式定义

微分算子:

$$L[y] := \sum_{i}^{n} a_i y^{(i)} = \tag{7.1}$$

特征多项式:

$$Z(r) := \sum_{i}^{n} a_i r^i \tag{7.2}$$

特征方程:

$$Z(r) = 0 \tag{7.3}$$

$$a_n(r-r_1)^{s_1}\cdots(r-r_k)^{s_k}(r-(\lambda_1+\mathrm{i}\mu_1))^{\tau_1}(r-(\lambda_1-\mathrm{i}\mu_1)^{\tau_1}\cdots(r-(\lambda_l\pm\mathrm{i}\mu_l)^{\tau_l}=0 \tag{7.4}$$

阶数

$$n = Deg \quad Z = s_1 + \cdots + s_k + 2(\tau_1 + \tau_l) \tag{7.5}$$

Chapter 8

存在唯一性定理

多项式、代数基本定理

将一般的 $f(x, y^{(n)}, \cdots, y) = 0$ 作因式分解如下：

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' a_0 y &= 0 \\ a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y &= 0 \\ (b_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_1)(b_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_2) \cdots (b_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_n) y &= 0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

可以分解因式由？保证，然后可以利用代数基本定理确保我们必定得到。

直观上看，取最右边与 y 乘的项，得到为 0，于是（每一项可以交换下）

$$(b_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_i) y = 0 \tag{8.2}$$

可以解出 n 个解。(同时可以从一个角度说明使用 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 尝试方程的合理性：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{c_i}{b_i} y$ 可以解出指数形式解) fn 完备

线性方程：整体非线性：局部解

皮卡序列

核心：把初值条件代入反复积分函数叙列趋近

方法 条件：初值田间

步骤

1. 代入初值

2. 积分

$$\varphi_{n+1} = \int_0^t f(s, \varphi_n(s))\mathrm{d}s$$

案例

•

Lipschitz 条件函数连续存在导函数有界
(分段？) 偏导拆连续且存在？Langrange 中值定理
先收敛，再唯一
反例？

8.1 存在

收敛级数

Chapter 9

线性性质

线性：方程中只有 y (因变量) 的一次项，换而言之没有 $y''^2, y^3, y'^4, \cdots$ 类似的项。

9.1 叠加原理

解的线性组合仍然是解，于是可以使用线性独立的构成所有解（通解）

Chapter 10

Wronski 行列式判断线性相关性

现在假设解得齐次（通）解 $y_1, \cdots, y_n$ ，代入方程得到

$$\begin{aligned} a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1 &= 0 \\ \cdots & \\ a_n y_n^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_n' + a_0 y_n &= 0 \end{aligned}$$

共 n 个方程。它们系数为原微分方程系数万们可以用矩阵改写为 $Ax = 0$ 的形式

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

因此根据线性方程的性质，我们要求 $|A| = 0$ （理由是 $a_0, \cdots, a_n$ 不全为 0，所以 A 存在线性相关部分），即（一般我们使用下面的形式所以上面写转置，而转置矩阵的行列式相等因此是无所谓的细节，为便于观察）

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{10.2}$$

此即 Wronski 行列式，可以方便地在微分方程求解中判断解是否线性相关。

线性相关原始定义为：存在线性组合结果为 0。即一般的函数应当使用如下判据：$c_1y_1 + \cdots + c_ny_n = 0$ 当且仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

如果不是微分方程的解，使用 Wronski 行列式可能会有问题如：
（此处存疑）

Chapter 11

Abel 定理

效果：不需要解方程就可以得到 Wronski 行列式

内容：$W = \mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}$

证明： 设 $y_1, \cdots, y_n$ 是方程的解

$$\begin{aligned} a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1 &= 0 \\ &\cdots \\ a_n y_n^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_n' + a_0 y_n &= 0 \end{aligned}$$

用二阶方程齐次说明 $y'' + py' + qy = 0$ y_1, y_2 为方程的解，我们有（它们代入方程成立）：

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \tag{11.1}$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \tag{11.2}$$

将 ref 于是得到

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' + p(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0 \tag{11.3}$$

我们知道

$$W'[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = y_2 y_1'' - y_1 y_2'' \tag{11.4}$$

代入 W 得到

$$W' = -pW \tag{11.5}$$

$$W = \mathrm{e}^{\int -p\mathrm{d}x} \tag{11.6}$$

得证 ■

11.1 引申定理

如果 Wronski 行列式一点为 0，则函数处处为 0。? (于是线性相关不是通解)

证明： 假如有一点为 0，设 Wronski 在某点代入为 0。即 $W(x_0) = 0$ 于是可以代入 Wronski 定义

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{11.7}$$

也就是说，存在一个非全零的线性组合使得里面的项得到 0。而这个线性组合的系数也就对应原方程。（以上内容可从 Wronski 上文原始的定义的来源想明白）

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

我们希望通过构造法证明定理成立，也就是说明的确可以找到这个处处为 0 的函数。从已有的构造新函数，自然想到就取上面这个线性组合的结果即构

造 $y_s = a_0 y_1 + a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n$ [1] 因为线性叠加原理，这也是方程的解。由 $W(x_0) = 0$ 可以分别得到 y_s 的本身和 1 到 n 的各阶导数为 0。于是可以说明它就是 0，理由是解的唯一性（只有一个，因此不论方法我找到的就是解）所以得到定理内容，如果 W(x) 在一点为 0，那么处处为 0。

[1] s pecial 无特殊之处

Chapter 12

幂级数收敛

Chapter 13

奇点

找正则每一项是有限的

无穷远意义?

Part IV

求数值解

Chapter 14

Euler 方法（欧拉折线）

适用：初值条件问题 IVP
原理：解的唯一性
思想：直线近似，缩小步长逼近
效果：一阶?
方法：

- 已有条件：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{14.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{14.2}$$

(初值条件)

- 过程：取步长 h 从方程得到在 (x_0, y_0) 的导数 $y' = f(x_0, y_0)$ 使用直线方程 $y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$ 代入 $x_0 + h$ 计算得到 y 重复

- 公式

$$y_{n+1} = y_n + fh \tag{14.3}$$

性质：收敛性略 #（不会）

Part V

方程组

可以把高阶化为一阶线性方程组以下只考虑常系数情况（变系数的特殊情形，如欧拉方程，可以使用特定的试探解）伴随矩阵：转置且共轭共轭复数基本知识 $< x, \alpha y >= \bar{\alpha} < x, y >$

变成特征值问题方法理论理由：对于一般的方程齐次

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} \tag{14.4}$$

使用尝试解

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \vec{\xi} e^{\lambda t} \tag{14.5}$$

于是方程变成

$$\mathbf{A}\vec{\xi} e^{\lambda t} = \lambda \vec{\xi} e^{\lambda t} \tag{14.6}$$

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda \vec{x} \tag{14.7}$$

变成特征值问题。找到相应特征值就是指数

额外补充一定有完备特征值（n 阶有 n 个特征不同值）的情况：

- 实对称
- 厄米（对称取复共轭为自身）
- ?

特殊情况特征值重根

- 重根的特征向量：几何重数等于代数重数再找线性无关的特征向量
- 线性无关的特征向量数量不足：几何重数小于代数重数找齐线性无关的特征向量，构造新的解如 $te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots$.

? 广义的特征向量

非齐次常数变易法：

$$\mathbf{x}_p = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 = v_1 \mathbf{x}_1 + v_2 \mathbf{x}_2 = \Phi \mathbf{v} \tag{14.8}$$

依然可以使用 Laplace 求解（需要指定初值）

矩阵指数

Part VI

幂级数解法

应对变系数方程，一般而言指数解就不满足了。对于一般的二阶方程，解析解是很难的，想要写出表达式需要不同凡响的，或者是在无尽的变化寻找方程约束下的结构，探索特别的规律。

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

Chapter 15

Euler 方程

指数可能不管用，不过可以找一些特殊的形式我们已经知道的，把所有的一致总结下来以后也能发现共同性。比如解是 x^r 的。Euler 就研究过这样的方程，可以想象解是 x^r 的方程可以构造出来 $(x^r)' = rx^{r-1}$， $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$ Euler 方程如是定义：

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0 \tag{15.1}$$

(不考虑 $x = 0$) 代入 x^r 得到

$$r(r-1)x^r + \alpha rx^r + \beta x^r = 0 \tag{15.2}$$

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0 \tag{15.3}$$

可得两个解 $r_{1,2} = \frac{1-\alpha\pm\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2}$ 具体讨论而言：

- $r_1 \neq r_2$ $y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$
- $r_1 = r_2$ 新造一个解两种理解思路
  1. 回套 e^x 重根情况 $x^r = \mathrm{e}^{r\ln x}$ 之前是 $x\mathrm{e}^x, \ldots$ 那么猜测现在是 $\mathrm{e}^{r\ln x}\ln x, \ldots$ 代入验证得

1. 数学变化将 x^r 看作二元函数（相当于提高了 r 的地位，把它当做一个参量）对 x 的求导结果已经满足，现在可以对 r 求导得到形式。

应当说是上面的方程可以写成 $x^r(r-r_1)^2=0$ ，假如不把 r 看作常数而是一个变量处理，那么这个对方程两边对 r 求导可得到 $x^r\ln x+2(r-r_1)$

步步深入：常点奇点正则奇点如：$x^2y''+2y'+xy=0$ x=0 处为奇点，非正则 lim legrande $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ $1-x^2=0\Rightarrow x=\pm 1$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{-2x}{1+x}=-2 \tag{15.4}$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{-2x}{1-x^2}=-2 \tag{15.5}$$

$$\tag{15.6}$$

递推公式

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}-2x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1}+n(n+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

欧拉方程

相差常数?

Part VII

Laplace 变换总结

适用条件指数增长条件;
公式查表
难点：因式分解
特殊情况

- 阶梯函数 $u_{ab}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上取值为 1 ，其它点为 0 。
- 脉冲函数 $\delta(x)$

从方波函数拓展而来，将区间缩小至一点。gat 单位脉冲函数，仅仅在一点有取值，值为无穷大性质：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$ 特例：$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$

- 伽马函数 $\Gamma(t) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{-(t-1)}\mathrm{d}x$ 是阶乘函数的连续形式

用这个形式更好理解：

$$
\begin{aligned}
\Gamma(t+1) &= \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^t \mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-t}) \\
&= \left[-x^t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}(x^t) \\
&= t\int_0^{\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t \\
&= t\Gamma(t)
\end{aligned}
\tag{15.7}
$$

取整数时与阶乘定义相同。

意义：将微分方程变成代数式子（正变换再逆变换得到答案）要求：有初值条件

Part VIII

MIT

Chapter 16

MIT 18.03

课程设计分离变量+积分曲线方向场线性方程

变量代换法：Variant substution Bernoulli $y'' + p(x)y' = q(x)y^n$

Homogen $y' = f(\frac{y}{x})$ 例子：$xy = \sqrt{x^2 + y^2}$ $y' = \frac{x^2 y}{x^3 + yx^2}$

于是

建模方程：对数螺旋线

自治方程解的性质：Automous

复数和复指数

Wronskian + 存在唯一性 Existence and Uniquness Therom

非线性

正交性定义, 一个在初值为 1, 一个导数在初值为 1 初值 $Y = y_0 Y_1 + y_0' Y_2$

可以

Chapter 17

Laplace

从幂级数引入解释清楚了从 0 开始到无穷自然而然的从离散到连续的案例 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ 看作是的函数 $n \to x$ 比如取

continous analog from power series

变换不仅改变了函数关系而且换了自变量算子仅仅改变了函数映射

巧妙的案例：先算常数 $\frac{1}{s}$ 之后直接尝试 $\mathrm{e}^{at}f(t)$ 三角函数直接代入虚数得到答案 exponential shift formula 变换条件：存在 C k 使得 $|f(t)| < C\mathrm{e}^{kt}$ 成立不能增长太快导致无法收敛在生活中一般不会得到这样的结果

先假设初值条件解方程得到结果 give lip service to the initial conditions (whereas before we don't have to do that) depending on your point of view, that's a grave defect, or it's so what.

Y equals some rational partial fractions

start from definitions integral by parts f 满足指数型条件因此此处分布积分上限 $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\mathrm{e}^{st}} = 0$

求解非连续输入，突变（导数剧变是本质）

17.1 convolution

put on your thinking caps(as they say in elementary school)

1. formula way neat form

2. curious way $F(x) = \sum c_n = \sum a_{n-i}b_i$

Anyone who is smart enough to be curious abour the answer of the question is smart enough to figure out what the formula is.

It's a mouthful to swallow. just varying the bad news Laplace is commutative, so $f * g = f * g$

rejoicing

listen to what i say instead of scribbing everything down equvocative waste not want not make it unique bid a tearful farewell to it do everything is routine

coddle the egg 文火 trade with one complecity way back prehistoric time peep

gemotry give you number way You have to be guiding genius to interpret the answer stuff like that

autonomous no independent parametric curve it prescribe the \ give the velovity vector velocity field

hardboiled egg

let's abbreviate?

1880 195060 λmr

constant coeffient

alegbra

if you sit try to hack away

demote variable parameter unknown constant

elimination - same equation

they come with viewing distance color salmon

proper(belonging)/char/eigen $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$

double-talk scoundrel

Chapter 18

Equations

18.1 求解

未使用化简高阶方程来引入 - 这也是有意义的

相互关联系统问题：水库到水

elimation method(substitude)

fundamental matrix

picture

非齐次 $\mathbf{x}_p = \mathbf{X}\mathbf{v}$

性质：有基本解组 $\mathbf{X} := (x_1|x_2|\cdots|x_n)$

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}' \tag{18.1}$$

$$|\mathbf{X}| = \det(\mathbf{X}) \neq 0 \tag{18.2}$$

方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \vec{r} \tag{18.3}$$

代入

$$\mathbf{X}'\vec{v} + \mathbf{X}\vec{v}' = \mathbf{A}\mathbf{X}\vec{v} + \vec{r} \tag{18.4}$$

$$\mathbf{X}\vec{v}' = \vec{r} \tag{18.5}$$

$$\vec{v} = \int \mathbf{X}^{-1}\vec{r}\mathrm{d}t \tag{18.6}$$

$\mathbf{X}$ 一定有逆（基本矩阵是解的矩阵，$|\mathbf{X}| \neq 0$ ）求逆技巧：对于 2×2 ，交换对角线，左下右上变号，除以行列式如果 $\mathbf{X}$ 于是得到

$$\vec{x}_p = \mathbf{X} \int \mathbf{X}^{-1} \mathbf{v} \mathrm{d}r \tag{18.7}$$

通解

$$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p = \mathbf{X}\vec{c} + \mathbf{X} \int \mathbf{X}^{-1} \mathbf{v} \mathrm{d}r \tag{18.8}$$

对于情况

举例

18.2 矩阵指数

no the fundamental matrix 类比 $x' = ax$ 此时解的形式未 $\vec{x} = \mathrm{e}^{At}$ 我们定义矩阵指数为

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} := \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \cdots \tag{18.9}$$

满足方程（对一般的计算意义不大，可以使用计算机）举例

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \tag{18.10}$$

得到双曲函数

初值问题结果

$$\vec{x} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \vec{x}_0 \tag{18.11}$$

注意 **不**满足 power law （加法变乘法）

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}} \mathrm{e}^{B} \tag{18.12}$$

需要满足可交换 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

- $\mathbf{A} = c\mathbf{I}$
- $\mathbf{B} - \mathbf{A}$
- $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

Cal $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$

- series (too hard)
- $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

18.3 画解的图像

18.4 解耦

面对方程 $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$

1. eigenvalue&vector 特征值方法
2. $e^{\mathbf{A}t}\vec{x}_0, \quad \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)$

There has been no gain in simpilicity or no gain in ease of calculation. The only difference is the language is changed.

Another method saves no work at all, only amounts changes to a language.

fundamental articles

1. engineer: decoupling

change variables 经典换元

$$u = ax + by \tag{18.13}$$

$$v = cx + dy \tag{18.14}$$

变成形式

$$u' = k_1 u$$
$$v' = k_2 v$$

彼此之间无关（分离变量）原来必须要同时解两个方程，现在可以分开分析 flow $\propto$ S

$$x' = 2(y - x)$$
$$2y' = 2(x - y)$$

寻找 u,v 使用物理问题的直觉思考：

$$u = x + 2y \quad \text{total water}$$
$$v = x - y \quad \text{height difference}$$

解耦方程：

$$u' = x' + 2y' = 0$$
$$v' = -3v$$

解得

1. General method 条件：实数完备的特征值 real&complete 复数、不完备无法解耦
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18.15}$$
符号游戏：
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{18.16}$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 \end{pmatrix} \tag{18.17}$$
$$\vec{x} = \mathbf{E}\vec{u} \tag{18.18}$$
找线性变换 $\rightarrow$ $\mathbf{E}$ 事实上，可以认为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ 分别是 uv 坐标下的 $(1,0),(0,1)$

特征：$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\vec{\alpha}_i=\vec{0}$ 一般定义：$\mathbf{A}\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$

$$\begin{aligned}\mathbf{AE}&=\mathbf{A}[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2]\\&=[\mathbf{A}\vec{\alpha}_1,\mathbf{A}\vec{\alpha}_2]\\&=[\lambda_1\vec{\alpha}_1,\lambda_2\vec{\alpha}_2]\\&=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2]\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\\&=\mathbf{E}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{18.19}$$

原方程变为

$$\vec{x}'=\mathbf{A}\vec{x}\tag{18.20}$$

$$(\mathbf{E}\vec{u})'=\mathbf{AE}\vec{u}\tag{18.21}$$

$$\mathbf{E}'\vec{u}+\mathbf{E}\vec{u}'=\mathbf{E}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\vec{u}\tag{18.22}$$

$$\mathbf{E}\vec{u}'=\mathbf{E}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\vec{u}\quad\text{E is constant matrix}\tag{18.23}$$

$$\vec{u}'=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\vec{u}\tag{18.24}$$

$$\tag{18.25}$$

As usual/As we all know

Chapter 19

非线性

sketch

Ex: nonlinear pendulum

19.1 自治系统

vertex rod

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - c_1 l\dot{\theta} \tag{19.1}$$

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\sin(\theta) = 0 \tag{19.2}$$

引入新变量

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -k\sin(\theta) - c\omega$$

找解

Part IX

台湾

字好看：圆体声音温柔

希望能再讲一些定理性质的严格性部分

被名字欺骗 review of calculus，实际上将具有实在的内容

Chapter 20

re

微积分基本定理：什么是积分 + 什么是微分

1. $g(t)=\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \Rightarrow \dot{g}(t)=f(t)$

使用符号表示为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t)$ 要先做运算因此避免积分使用相同的字母

1. $\int_a^b f(\tau)\mathrm{d}\tau = h(b)-h(a), \dot{h}(t)=f(t)$ $\int_\alpha^t f(\tau)\mathrm{d}\tau = h(t)$

指数律

Chapter 21

2

线性算子 $\mathscr{L}[y] := \dot{y} + p(t)y + q(t)$

直接使用 $y(t) = z(t)\mathrm{e}^{-pt}$ 作为一个切入点 enter point 类似 Laplace

dedc $z = \int q(t)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}t$

函数边界，应当是 $(-\infty, \infty)$ 而不是 $[-\infty, \infty]$ 不包含无穷大连续性问题

得到 $z(t) = \int_\alpha^t q(t)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}t$ running integal 于是简单的世界

修正 $z(t) = \int_\alpha^t q(t)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}t + z(\alpha)$ $y(t) = \int_\alpha^t q(t)\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}\tau + z(\alpha)\mathrm{e}^{pt} = \int_\alpha^t q(t)\mathrm{e}^{p\tau}\mathrm{d}\tau + y(\alpha)\mathrm{e}^{-p(\alpha-t)}$

齐次 Homogenous 非齐次完全的解 $y = y_h + y_p$

$\dot{y}(t) + py(t) = 1$

ROC s 的范围 s 复数范围电路 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)] \int_{0^-}^\infty f(t)\mathrm{d}t$

激波函数 impluse 面积为 1 从 pluse 推广

$\dot{y}(t) + y(t) = 0$ $\dot{y}(t) + y(t) = \delta(t)$ $y(0^+) = 1$ 改变了初值