微分方程指南

King

2023 年 11 月 24 日

目录

Part I

概念总结

方程表示一种约束关系，它的解就是使方程成立的元素，在微分方程里往往是一个函数，它可能可以表达为显函数，或者只能写为隐函数，甚至于我们只能拿符号代替它的解。能力有限，还没学过复变函数，所以只会初等的解法。

Chapter 1

STARTED 目前对于一般的方程最一般的方法为：幂级数解法

文中一般使用 x 为自变量。

Part II

求解析解

一般手算思路线性

- $\rightarrow$ 计算齐次方程的特征方程解

无重根 $\rightarrow$ 得到 <u>齐次通解</u> 有重根 $\rightarrow$ 依据重数补齐

- 非齐次- __ 特解$_{(y=y_h+y_p)}$
  - 形式简单 $\rightarrow$ 待定系数
  - $\rightarrow$ 常数变易 $\rightarrow$ 解 Wronski 方程得到特解

非线性已知特解：$\rightarrow$ 常数变易

重根：一般方法

d'Alembert /降阶法

$y_2(x)=v(x)y_1(x)$ y_1 为已知形式的解

求出隐式解，那么根据初值条件代入，取最小的可能区间

进阶：

幂级数

更一般的幂级数 $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$

此时就先解出 r 之后进行 an 的递推

奇点 (singular point) 对于方程变化的情况二阶方程

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \tag{1.1}$$

$P(x_0)=0$ x_0 处为奇点正则如果后两项存在，称为正则即满足 $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ 和 $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{R(x)}{P(x)}$ 都存在，分别设为 p,q

也就是转化为研究 $y''+\frac{Q(x)}{P(x)}y'+\frac{R(x)}{P(x)}y=0$ 的性质。

此处要求 Q(x) R(x) 是解析的，即它们可以写成级数展开形式这样可以忽略后面高阶项只取第一项 $P(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots$ 使得取极限（有效）可以

由此构造方程

$$x^2y''+x(x\frac{Q(x)}{P(x)})y'+(x^2\frac{R(x)}{P(x)})y=0 \tag{1.2}$$

得到（类似 Euler 方程的结构）

$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0$

Euler 方程使用尝试解 $y = x^r$ 因为可以发现如果重根，那么使用 $x^r \ln r$ 可以代入验证发现它满足方程并且 r 还是重根的 r

理由：

1. 使用 Wronski 行列式

2.

对于 $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ 设代入 x^r 得到方程为 $L[x^r]$ 它的形式应该满足

$$x^2(r-1)rx^{r-2} + \alpha xrx^{r-1} + \beta x^r = 0 \tag{1.3}$$

$$(r-1)rx^r + \alpha rx^r + \beta x^r = 0 \tag{1.4}$$

$$x^r(r^2 + (\alpha - 1)r + \beta) = 0 \tag{1.5}$$

我们发现 x 和 r 可以分开于是方便称呼定义 $L[x^r] = x^rF(r)$ 这里 $F(r) := r^2 + (\alpha - 1)r + \beta$

对于任意 x 成立，所以也就是求解 r 即求 $F(r) = 0$

对于有重根，那么 $F(r)$ 一定可以写成 $F(r) = (r - r_{1,2})^2$

我们现在要再找一个（除了 x^r）形式的解

可以由 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的重根取 $x\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的启发后者推导一下。我们要求这另外一个形式依然要满足 $F(r) = 0$ 于是构造可以对 L 求偏导得到 $\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = L[\frac{\partial}{\partial r}x^r]$ 得到 $x^r \ln rF + x^r\frac{\partial}{\partial r}F =$

Chapter 2

一阶方程

直接积分积分因子

2.1 线性方程

形式：$P(x)y' + Q(x)y + R(x) = 0$ 思想：等价变化（乘除）使等式左侧化为乘积微分的结果，和化为积的微分案例：

- $(4+x)^2y' + 2xy = 4x$ 左侧形式特殊：$((4+x)^2)' = 2x$ 化为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((4+x)^2y) = 4x$ 两边积分：$y = \frac{2x^2+C}{(4+x)^2}$

- $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ 乘（尚未知）积分因子：$\mu y' + \frac{1}{2}\mu y = \mu\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ 观察左侧得到方程：$\mu_x = \frac{1}{2}\mu$ 令（只要一个符合的 μ 即可）$\mu = \mathrm{e}^{x/2}$ 得到：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x/2}y) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x/3}$ 两边积分，通解：$y = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{x/3} + C\mathrm{e}^{-x/2}$

- $2y' + xy = 2$ 即 $y' + \frac{x}{2}y = 1$ $\mu = \mathrm{e}^{x^2/4}$ $\mathrm{e}^{x^2/4}y' + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{x^2/4}y = \mathrm{e}^{x^2/4}$ 即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{x^2/4}) = \mathrm{e}^{x^2/4}$ (积不出来但) 得到形式 $y = \mathrm{e}^{-x^2/4}\int \mathrm{e}^{x^2/4}\mathrm{d}x + C\mathrm{e}^{-x^2/4}$

方法：条件：(方程)

$$y' + py = q$$

过程：同时乘以积分因子 μ

$$\mu y' + \mu py = q$$

如果可以化为，得到条件

$$\mu_x = p\mu \tag{2.1}$$

于是，$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = p\mathrm{d}x$ （不论常数）可取

$$\mu = \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} \tag{2.2}$$

乘回方程，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mu y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} y) = \mu q \tag{2.3}$$

最终解的形式为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x} \int \mu q \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\int p\mathrm{d}x} \int \mathrm{e}^{\int p\mathrm{d}x} q \mathrm{d}x \tag{2.4}$$

2.2 分离变量

对于简单的方程，将 x,y 分到方程两边，同时积分

2.3 积分因子/恰当方程

1. 恰当方程 转化为全微分方程。

$$M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0 \tag{2.5}$$

其中 M,N 关于 x,y 连续且可微（具有连续的一阶偏导数）

我们希望找到一个恰当的函数 u ，使得 $M = \frac{\partial u}{\partial x}$，　$N = \frac{\partial u}{\partial y}$ 也就是

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \\ \mathrm{d}u = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

所以得到隐式解 $u = C$

条件　方程满足：

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

案例

- $(y\cos x + 2x\mathrm{e}^y) + (\sin x + x^2\mathrm{e}^y - 1)y' = 0$ 验证：$\frac{\partial y\cos x + 2x\mathrm{e}^y}{\partial y} = \cos x + 2x\mathrm{e}^y = \frac{\partial \sin x + x^2\mathrm{e}^y - 1}{\partial x}$ 求解原函数：偏积分

$$u = \int y\cos x + 2x\mathrm{e}^y \mathrm{d}x = -y\sin x + \mathrm{e}^y x^2 + C(y)$$

对另一项（y）偏导

$$\sin x + x^2\mathrm{e}^y - 1 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x + x^2\mathrm{e}^y + C'$$

$$C = \int 2\sin x + 1\mathrm{d}y = 2y\sin x + y$$

通解：$-y\sin x + \mathrm{e}^y x^2 + 2y\sin x + y = A$

特殊形式 一些全微分 fn

$$yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y \ln x \mathrm{d}y = \mathrm{d}x^y \tag{2.7}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y}) \tag{2.8}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{yx} = d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|) \tag{2.9}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{x^2 + y^2} = d(arctan\frac{x}{y}) \tag{2.10}$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| \tag{2.11}$$

$yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y \ln x \mathrm{d}y = \mathrm{d}x^y$ $\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{y^2} = d(\frac{x}{y})$ $\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{yx} = d(\ln\left|\frac{x}{y}\right|)$ $\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{x^2+y^2} = d(arctan\frac{x}{y})$ $\frac{y\mathrm{d}x - xdy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}d(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$

2. 积分因子 区别之前，这里是找到原函数，之前是将方程左侧化为 - 可以求解所有方程，但不一定可以解出不是恰当的方程转化为恰当把 ref 乘以 μ 得到

$$\mu M\mathrm{d}x + \mu N\mathrm{d}y = 0 \tag{2.12}$$

必要条件

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y}=\frac{\partial \mu N}{\partial x} \tag{2.13}$$

找法假设 $\mathrm{d}u=\mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x$ (不会解方程，化简形式，令某些项为 0) 找一个只与 x 或 y 有关的积分因子只与 x 相关的积分因子 $\mu_x N=\mu(M_y-N_x)$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{(M_y-N_x)}{N} \tag{2.14}$$

$$\mu=\mathrm{e}^{\int\frac{(M_y-N_x)}{N}\mathrm{d}x} \tag{2.15}$$

案例

- $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$ [完整] 验证发现非恰当：$\frac{\partial 3xy+y^2}{\partial y}=3x+2y\neq 2x+y=\frac{\partial x^2+xy}{\partial x}$ 写出积分因子方程：$\mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x$ 即 $\mu_y(3xy+y^2)+\mu(3x+2y)=\mu_x(x^2+xy)+\mu(2x+y)$ 取 $\mu_y=0$ 得 $\mu(x+y)=\mu_x(x^2+xy)\to\mu=x\mu_x$ 于是令 $\mu=x$ 得恰当方程 M 对 x 偏积分 $u=\int 3x^2y+xy^2\mathrm{d}x=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+c(y)$ u 对 y 偏导解为 $x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=C$

3. 原理

   (a) 恰当方程的判据 判断 ref 是 (具有连续一阶偏导) 是恰当微分方程（可以转化为 $\mathrm{d}u=0$）的充分必要条件

   $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

   ref 具有一般性

   充分：满足条件则能够找到一个 u 使得 $M=\frac{\partial u}{\partial x},\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}$

   找 u 对 M 向 x 积分, 取原函数为 u, $u=\int M\mathrm{d}x+C$ (C 与 x 必然无关) 可以认为 $u(x,y)=\int M(x,y)\mathrm{d}x+C(y)$ ~~如果 C 的确只与 y 有关那么~~ (我们希望 $\mathrm{d}u-\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}C=\mathrm{d}C(y)$ 这个 dC 与 dx 无关，就的确说明找到的函数 u 它的全微分是原方程，便得证)

研究 C ，（无法直接得到 dC 只好先算 u 偏导）将所得结果对 y 求偏导

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int M \mathrm{d}x}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = N$ 所以 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M \mathrm{d}x$

证明它与 x 无关于是它就是全微分，使用偏导为 0 验证

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[N - \frac{d}{\mathrm{d}y} \int M \mathrm{d}x] &= \frac{\partial}{\partial x} N - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \int M \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

于是 dC 与 x 无关，得证 u 的全微分是原方程。x,y 对称，证明具有一般性。

必要：如果是恰当方程那么已经存在函数 u ，它的全微分是原方程，那么可以根据 Cla 克莱罗定理 fn 验证两者相等

Chapter 3

高阶方程

Chapter 4

二阶方程

以下方法，齐次方程的特解为 0，只需要考虑非齐次情况

4.1 特征方程：通解

试用范围：齐次方程求通解原理：

具体过程 首先使用 $e^{\lambda x}$ 试探方程的解，得到代数方程，即它的特征方程。使用代数方程解得 λ 得到通解

特殊情况 如果出现重根，相当于少了一些解，因此我们需要补齐至方程阶数的解

，那么可以猜测这些需要添加的解形式和 $e^{\lambda x}$ 类似，可以尝试发现 $xe^{\lambda x}$ 满足方程，则根据重数使用如 $xe^{\lambda_p x}, \cdots, x^{(p-1)}e^{\lambda_p x}$ 的形式扩展解的数目，补满 n 个，假设 λ_p 有 p 重根，就添加额外 p-1 个解如前。

4.2 积分因子/二阶恰当方程

1. **TODO** 案例

2. 原理 方程为

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{4.1}$$

希望转化为（一阶恰当方程的形式 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$）

$$(P(x)y')' + (f(x)y)' = 0 \tag{4.2}$$

可知

$$P'y' + Py'' + f'y + fy' = 0 \tag{4.3}$$

条件为

$$\begin{aligned} P' + f' &= Q \\ f' &= R \end{aligned}$$

得到条件

$$P'' - Q' + R = 0 \tag{4.4}$$

实际代入计算

$$f = Q - P' \tag{4.5}$$

4.3 TODO 换自变量

Euler 方程 (6.5) 一般形式

Chapter 5

求非齐次特解

5.1 待定系数法

概要 非齐次方程观察右端项，猜测可能形式（采取相同相似形式），代入解出系数。

需要考虑重根和与齐次通解重复的部分。如果有重复。

举枚

- $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$

通解 $\mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{4x}$ 猜特解形式 $Y_p = A\mathrm{e}^{2x}$ 代入

$$4A + 6A - 4A = 3 \tag{5.1}$$

通解为 $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$

- $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$ 原特解与齐次通解相同，特解取 $Y_p = Ax\mathrm{e}^{2x}$ 解得 $A = -\frac{2}{5}$
- $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x - 8\mathrm{e}^{x}\cos 2x$ 分别计算
- $y''' - 4y' = x + 3\cos x + \mathrm{e}^{-2x}$ 齐次通解：0,2,-2 $g(x) = x + 3\cos x + \mathrm{e}^{-2x}$

  1. 与 0 重 $Y_{p1} = x(A_0 + A_1 x)$

2. $Y_{p2} = B\cos x + C\sin x$
3. 与 - 2 重 $Y_{p3} = Ex\mathrm{e}^{-2x}$

- $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$ 齐次通解：$(r^2+1)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm\mathrm{i}$ $y_h = \cos x + \sin x + x\cos x + x\sin x$ 特解：$Y_p = x^2(A\cos x + B\sin x)$

5.2 常数变易法

使用已经解得的通解，视常数为含自变量的函数，代入方程继续求解。

简化思路：[核心] 有 n 个系数需要确定，所以需要 n 方程，可以自由取这些方程。

技巧 使用 Wronski 行列式

1. **TODO** 为什么

   约束方程，令所有 $c_i' y_i^n = 0$ ，本质上是代入方程后使每次求导让系数求导的项为 0。

   最后结果是 Wronski 行列式

$$\begin{aligned}\sum c_i' y_i^1 &= 0\\ \sum c_i' y_i^2 &= 0\\ &\cdots\\ \sum c_i' y_i^{n-1} &= 0\end{aligned}$$

   可化为：

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

   之后利用 Crammer 法则求解 $c_i = \frac{|W(i)|}{|W|}$ 。

5.3 归零因子法（A）

概要 化非齐次方程为齐次方程消去方程右边项代价是方程阶数升高

举例 使用 D 微分算子

- $(D-2)^2(D+1)y=3\mathrm{e}^{2x}-x\mathrm{e}^{-x}$ 右侧第一项 e^{2x} ：D-2 第二项 $x\mathrm{e}^{-x}$ ：$(D+1)^2$ 于是归零因子为：$(D+1)^2(D-2)$ 两边同乘归零因子得到：$(D+1)^3(D-2)^4y=0$ 就解 7 阶齐次方程，注意可能有增根 7 阶通解：$\mathrm{y_h=(c_1)}

Chapter 6

幂级数解法

6.1 幂级数

形式：

$$\sum_{i=0}^{\infty} = a_n(x-x_0)^n$$

原理定理保证：ref

收敛半径的计算

- 比值

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = (x-x_0)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{6.1}$$

- 根值

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = (x-x_0)\sqrt[n]{|a_n|} \tag{6.2}$$

变换求和哑元，保证 x 的次方相同于是可以把 x 约掉，只解出系数的递推关系

如果 x 次方相同，仇和其实不一样，把多出来的项取出来，令它们为 0，使得下标相同，去掉求和，得递推。

性质 条件：收敛级数，$f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$

- 可加减乘除（保持收敛）
- 连续的 $f(x)$ 在收敛区间上有各阶导数。
- 是解析的 $\to$ 可泰勒展开
- 两个级数相等，对应次方的系数相等

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

P Q R 多项式 $\to$ 解析的

常点: ordinary point $P(x_0)$

Wronski $W[Y, y](x_0)$

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{6.3}$$

6.2 特殊方程

1. Airy
$$x^2 y' - y = 0 \tag{6.4}$$
2. Legrendre
3. Berssel ?

6.3 Euler 方程

形式：

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad x > 0 \tag{6.5}$$

引入中间变量 t

$$x = \mathrm{e}^t, \quad t = \ln x$$

于是各项关系为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{6.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}) = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{x}(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x^2}(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})$$

代入得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta y = 0 \tag{6.7}$$

案例

1.

Chapter 7

Laplace 变换求解

Part III

性质定理

要害点注：存在唯一：Picard 序列线性相关：Wronski 行列式收敛级数

Chapter 8

形式定义

微分算子:

$$L[y] := \sum_{i}^{n} a_i y^{(i)} = \tag{8.1}$$

特征多项式:

$$Z(r) := \sum_{i}^{n} a_i r^i \tag{8.2}$$

特征方程:

$$Z(r) = 0 \tag{8.3}$$

$$a_n(r-r_1)^{s_1} \cdots (r-r_k)^{s_k}(r-(\lambda_1+\mathrm{i}\mu_1))^{\tau_1}(r-(\lambda_1-\mathrm{i}\mu_1)^{\tau_1} \cdots (r-(\lambda_l \pm \mathrm{i}\mu_l)^{\tau_l} = 0 \tag{8.4}$$

阶数

$$n = Deg \quad Z = s_1 + \cdots + s_k + 2(\tau_1 + \tau_l) \tag{8.5}$$

Chapter 9

存在唯一性定理

多项式、代数基本定理

将一般的 $f(x, y^{(n)}, \cdots, y) = 0$ 作因式分解如下：

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' a_0 y &= 0 \\ a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y &= 0 \\ (b_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_1)(b_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_2) \cdots (b_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_n) y &= 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

可以分解因式由？保证，然后可以利用代数基本定理确保我们必定得到。

直观上看，取最右边与 y 乘的项，得到为 0，于是（每一项可以交换下）

$$(b_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + c_i) y = 0 \tag{9.2}$$

可以解出 n 个解。(同时可以从一个角度说明使用 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 尝试方程的合理性：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{c_i}{b_i} y$ 可以解出指数形式解) fn 完备

线性方程：整体非线性：局部解

皮卡序列

核心：把初值条件代入反复积分函数叙列趋近

方法 条件：初值田间

步骤

1. 代入初值

2. 积分

$$\varphi_{n+1} = \int_0^t f(s, \varphi_n(s))\mathrm{d}s$$

案例

-

Lipschitz 条件函数连续存在导函数有界
(分段？) 偏导拆连续且存在？Langrange 中值定理
先收敛，再唯一
反例？

Chapter 10

线性性质

线性：方程中只有 y (因变量) 的一次项，换而言之没有 $y''^2, y^3, y'^4, \cdots$ 类似的项。

10.1 叠加原理

解的线性组合仍然是解，于是可以使用线性独立的构成所有解（通解）

Chapter 11

Wronski 行列式判断线性相关性

11.1 TODO

现在假设解得齐次（通）解 $y_1, \cdots, y_n$ ，代入方程得到

$$\begin{aligned} a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1 &= 0 \\ &\cdots \\ a_n y_n^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_n' + a_0 y_n &= 0 \end{aligned}$$

共 n 个方程。它们系数为原微分方程系数万们可以用矩阵改写为 $Ax = 0$ 的形式

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

因此根据线性方程的性质，我们要求 $|A| = 0$ （理由是 $a_0, \cdots, a_n$ 不全为 0，所以 A 存在线性相关部分），即（一般我们使用下面的形式所以上面

写转置，而转置矩阵的行列式相等因此是无所谓的细节，为便于观察）

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{11.2}$$

此即 Wronski 行列式，可以方便地在微分方程求解中判断解是否线性相关。

线性相关原始定义为：存在线性组合结果为 0。即一般的函数应当使用如下判据：$c_1y_1 + \cdots + c_ny_n = 0$ 当且仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

如果不是微分方程的解，使用 `Wronski` 行列式可能会有问题如：
（此处存疑）

Chapter 12

Abel 定理

效果：不需要解方程就可以得到 Wronski 行列式

内容：$W = \mathrm{e}^{\int -p(x)\mathrm{d}x}$

证明： 设 $y_1, \cdots, y_n$ 是方程的解

$$\begin{aligned} a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1 &= 0 \\ &\cdots \\ a_n y_n^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_n' + a_0 y_n &= 0 \end{aligned}$$

用二阶方程齐次说明 $y'' + py' + qy = 0$ y_1, y_2 为方程的解，我们有（它们代入方程成立）：

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \tag{12.1}$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \tag{12.2}$$

将 ref 于是得到

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' + p(y_2 y_1' - y_1 y_2') = 0 \tag{12.3}$$

我们知道

$$W'[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = y_2 y_1'' - y_1 y_2'' \tag{12.4}$$

代入 W 得到

$$W' = -pW \tag{12.5}$$

$$W = \mathrm{e}^{\int -p\mathrm{d}x} \tag{12.6}$$

得证 □

12.1 引申定理

如果 Wronski 行列式一点为 0，则函数处处为 0。? (于是线性相关不是通解)

证明： 假如有一点为 0，设 Wronski 在某点代入为 0。即 $W(x_0) = 0$ 于是可以代入 Wronski 定义

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{12.7}$$

也就是说，存在一个非全零的线性组合使得里面的项得到 0。而这个线性组合的系数也就对应原方程。（以上内容可从 Wronski 上文原始的定义的来源想明白）

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12.8}$$

我们希望通过构造法证明定理成立，也就是说明的确可以找到这个处处为 0 的函数。从已有的构造新函数，自然想到就取上面这个线性组合的结果即构

造 $y_s = a_0y_1 + a_1y_1 + \cdots + a_ny_n$ [1] 因为线性叠加原理，这也是方程的解。由 $W(x_0) = 0$ 可以分别得到 y_s 的本身和 1 到 n 的各阶导数为 0。于是可以说明它就是 0，理由是解的唯一性（只有一个，因此不论方法我找到的就是解）所以得到定理内容，如果 W(x) 在一点为 0，那么处处为 0。

[1] s pecial 无特殊之处

Chapter 13

幂级数收敛

Chapter 14

奇点

找正则每一项是有限的
无穷远意义?

Part IV

求数值解

Chapter 15

Euler 方法（欧拉折线）

适用：初值条件问题 IVP
原理：解的唯一性
思想：直线近似，缩小步长逼近
效果：一阶？
方法：

- 已有条件：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{15.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{15.2}$$

(初值条件)

- 过程：取步长 h 从方程得到在 (x_0, y_0) 的导数 $y' = f(x_0, y_0)$ 使用直线方程 $y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$ 代入 $x_0 + h$ 计算得到 y 重复

- 公式

$$y_{n+1} = y_n + fh \tag{15.3}$$

性质：收敛性略 #（不会）