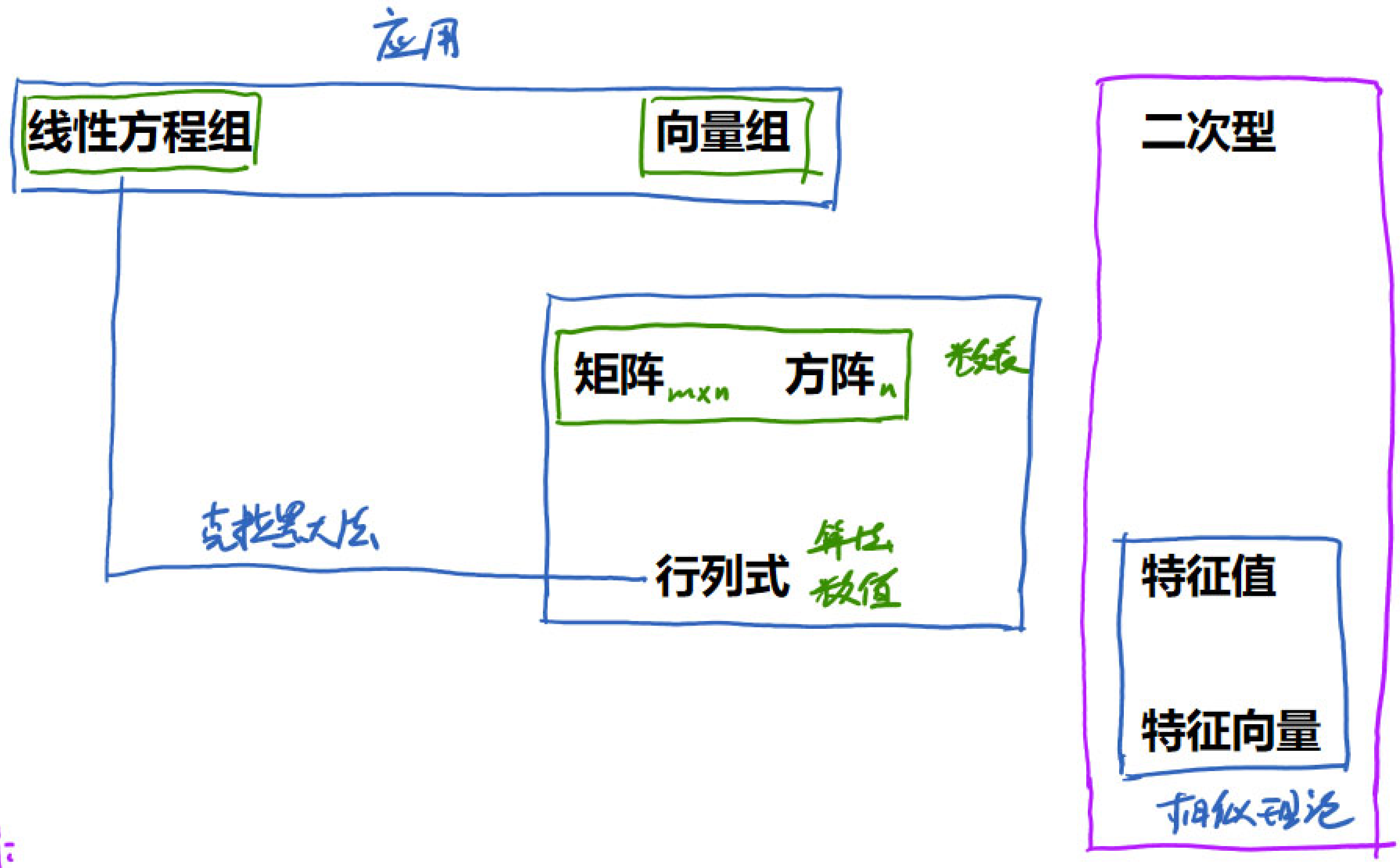
教材线代01 行列式

线代知识框架



例：

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-5x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-8x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-3x_3+2x_4=0 \\ x_2+2x_3-3x_4=0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=3x_3-2x_4 \\ x_2=-2x_3+3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

克拉默法则：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$\tau(2\ 3\ 1)=2$ $\tau(3\ 1\ 2)=2$ $\tau(3\ 2\ 1)=3$ $\tau(2\ 1\ 3)=1$ $\tau(1\ 3\ 2)=1$

知识精讲

一、全排列与逆序数

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 元素的全排列（也简称排列）把元素次序按从小到大的排列称为原排列. $(1\ 2\ 3\ 4)$

2. 逆序数

n 个元素的某一排列中，当某一对元素的先后次序出现“大前小后”时，就说它构成 1 个逆序，排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数，记作 τ.

逆序数为奇数的排列叫做$\boxed{\text{奇排列}}$，逆序数为偶数的排列叫做$\boxed{\text{偶排列}}$.

一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

若一个排列经过奇数次对换可得到原排列，则该排列的逆序数一定为奇数若一个排列经过偶数次对换可得到原排列，则该排列的逆序数一定为偶数.

【例 1】求下列逆序数

(1)求排列 32514 的逆序数.

大前：0 1 0 3 1 = 5

小后：2 1 2 0 0 = 5

$\tau(1324)$ = 奇

1234 = 偶

(2)求上述排列对换 1 和 3 得到 12534 的逆序数.

小后：0 0 2 0 0 = 2

二、n 阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} ①\text{取数相乘} \\ ②\text{冠以符号} \\ ③\text{全部相加} \end{cases}$$

①取数相乘 (不同行 不同列) $a_{1j_1}\,a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 　$n,\ n-1\ \cdots\ 1$ $= n!$ 种.

②冠以符号 $(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

③全部相加 $\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$

【例 2】根据定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{13}a_{22}a_{31}$

(3阶) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

☆(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

☆(4) $\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ \iddots & & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)$：$n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 1,\ 0$

三、行列式的性质

1. 转置

行列式与它的转置行列式相等. $\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}$

2. 交换

交换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零. $\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$

推论 如果交换行列式行或列 m 次,则新行列式等于原来行列式的 $(-1)^m$ 倍.

【例 3】行列式 $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$ 方法一: $=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

方法二: 逐行(列)交换 $=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$$\begin{vmatrix}0&0&0&\lambda_1\\0&0&\lambda_2&0\\0&\lambda_3&0&0\\\lambda_4&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&0&0&\lambda_2\\0&0&\lambda_3&0\\0&\lambda_4&0&0\end{vmatrix}=\cdots$$

3. 倍乘

行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一数 k,等于用数 k 乘此行列式. $\to |kA_n|=k^n|A_n|$

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

推论 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零. $\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}=0$

4. 拆分

若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 倍加

把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}\\ka_{11}&ka_{12}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

利用行列式的性质化三角形行列式

【例 4】计算行列式 $\begin{vmatrix} 3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$.

行(列)和相等加到(行)

解：原式 $= \begin{vmatrix} 6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} \times(-1)$

$= 6\begin{vmatrix} 1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}$

$= 6\times 2^3 = 48.$

【例 5】记 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{11}\\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m}\\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix}$, 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{mm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B\end{vmatrix} = |A||B|.$$

$= (a'_{11}\cdot a'_{22}\cdots a'_{mm})\cdot(b'_{11}\cdots b'_{nn})$

结论：

(1) $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B\end{vmatrix} = |A||B|$;

(2) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & C\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C\end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$.

$\begin{vmatrix} 0&0&5&6\\0&0&7&8\\1&2&1&1\\3&4&1&1\end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 5&0&0&6\\7&0&0&8\\1&1&2&1\\1&3&4&1\end{vmatrix}$

四、行列式按行(列)展开

对比 $\begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\cdots\lambda_n$

1. 展开定理

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot M_{11} \to$ 余子式

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = (-1)^{(i-1)+(j-1)}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = (-1)^{i+j}M_{ij}\cdot a_{ij}$

$i+j-2$

$= A_{ij}\cdot a_{ij}$

A_{ij}：代数余子式

对换：$\begin{vmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\0&7&0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0&7&0\\4&5&6\\1&2&3\end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 7&0&0\\5&4&6\\2&1&3\end{vmatrix} = (-1)^2\times 7\times\begin{vmatrix} 4&6\\1&3\end{vmatrix}$

逐行(列)：$\begin{vmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\0&7&0\end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} 0&7&0\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix} = (-1)^3\begin{vmatrix} 7&0&0\\2&1&3\\5&4&6\end{vmatrix} = (-1)^3\times 7\times\begin{vmatrix} 1&3\\4&6\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$

$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$ $= a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$

余子式：M_{ij}

代数余子式：$(-1)^{i+j} M_{ij} = A_{ij}$

元素可以不相同.

【例 6】计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 0 & b_2 \\ -1 & 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix}$.

“么”型 “⋰”

通法：按“么”的横展开

$= \underbrace{(-1)\times(-1)^{1+4}}_{=1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \underbrace{b_1 \times (-1)^{2+4}}_{=b_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{b_2 \times (-1)^{3+4}}_{=-b_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \underbrace{b_3 \times (-1)^{4+4}}_{=b_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{\frac{3\times2}{2}} \times (-1)^3 + b_1 \cdot (-1)^{\frac{3\times 2}{2}} (-1)^2 - b_2 \cdot (-1)^{\frac{3\times2}{2}} (-1) + b_3 (-1)^{\frac{3\times2}{2}} \cdot 1$

$= 1 - b_1 - b_2 - b_3$

【例 4】(续)计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

$\times(-1)$

“通法”

边化0，边展开

$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2\times(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$\times(-1)$

$= 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 12 = 48.$

2. 代数余子式

$$\begin{array}{c c} & \\ & \\ i & \\ & \\ & \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

A_{ij} 与 a_{ij} 大小无关
与 a_{ij} 位置有关

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k_1 A_{i1} + k_2 A_{i2} + \cdots + k_n A_{in}$$

特别地：$A_{i1} + A_{i2} + \cdots + A_{in} = \begin{vmatrix} & \cdots & \\ 1 & 1 \cdots & 1 \\ & \cdots & \end{vmatrix}$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, i\neq j$$

或

若 $i=j$，则 原式 $=|A|$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j.$$

【例 7】设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 中 (i,j) 元的余子式记作 M_{ij}，代数余子式记作 A_{ij}，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

$\because A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$\therefore M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$

解：(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=4.$ $\boxed{\text{边化0，边展开}}$

例：$A_{12}+A_{22}+A_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

(2) $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$

$=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0.$

五、范德蒙行列式 (3阶)

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

$=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})$

$\cdot(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})$

$\cdots$

(x_2-x_1)

例：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}$

方法一：加边法

$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}=(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)$

$\cdot(3-0)(3-1)(3-2)$

$\cdot(2-0)(2-1)$

$\cdot(1-0)$

$=4!\prod_{1\leq i<j\leq 4}(j-i)=\prod_{0\leq i<j\leq 4}(j-i)$

方法二：$D=1\cdot2\cdot3\cdot4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{vmatrix}=4!\prod_{1\leq i<j\leq 4}(j-i)$

$j=4$，$\prod_{1\leq i<4}(4-i)=(4-1)(4-2)(4-3)$

$j=3$，$\prod_{1\leq i<3}(3-i)=(3-1)(3-2)$

$j=2$，$\prod_{1\leq i<2}(2-i)=(2-1)$

题型通法总结

题型考点01 数值型行列式的计算

1.普通数值型行列式：

（1）边化零边展开 (通法)

（2）利用分块矩阵的行列式结论；

例：$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & c_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1d_1-b_1c_1)\cdot(a_2d_2-b_2c_2)$

（3）利用特征值的乘积、矩阵的秩、方程组的解等相关结论. 后面章节讲解

2.特殊数值型行列式：

（1）行和相等加列，列和相等加行；

（2）爪形行列式，用中间爪消侧爪，化为三角形行列式；

（3）么形行列式，按么的横直接展开；

（4）梭形行列式，展开得递推关系. (第二阶段讲)

（5）加变法.

3.代数余子式之和：

（1）用系数替换原行列式对应的行或列；

（2）伴随矩阵. (下节课讲)

4.范德蒙行列式的相关计算（了解）：凑范德蒙行列式，利用结论求解.