

분위수 자기회귀시차모형의
단기모수 추정 및 추론

연세대학교 대학원
경제학과
박상우

분위수 자기회귀시차모형의
단기모수 추정 및 추론

지도교수 조진서

이 논문을 석사 학위논문으로 제출함

2020년 11월 3일

연세대학교 대학원
경제학과
박상우

박상우의 석사 학위논문을 인준함

심사위원 조 진 서 인

심사위원 김 태 환 인

심사위원 김 주 철 인

연세대학교 대학원

2020년 11월 3일

차례

1 서론	1
2 분위수 자기회귀시차모형	3
3 선행연구의 고찰	5
4 분위수 자기회귀시차 오차수정모형의 단기모수 추정량과 점근 분포	9
4.1 단기모수 추정량	9
4.2 $\tilde{\phi}_n(\tau)$ 의 점근 분포	14
4.3 $\tilde{\theta}_n(\tau)$ 의 점근 분포	21
5 몬테 칼로 모의실험	26
6 실증분석	30
7 결론	48
참고 문헌	49
부록	52
영문 요약	62

표 차례

1	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$ 의 사이즈 (5% 유의수준) .	28
2	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$ 의 사이즈 (5% 유의수준)	29
3	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$ 의 검정력	29
4	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$ 의 검정력	30
5	OLS와 분위수회귀 추정 결과 (CKS)	38
6	OLS와 분위수회귀 추정 결과 (MAT)	39
7	OLS와 분위수회귀 추정 결과 (TSE)	40

그림 차례

1	모수 추정치 (MAT)	41
2	모수 추정치 (TSE)	41
3	롤링 윈도우 방법을 사용한 $\zeta_*(\tau), \beta_*(\tau), \lambda_*(\tau), \delta_*(\tau)$ 의 추정치 (MAT)	42
4	롤링 윈도우 방법을 사용한 $\zeta_*(\tau), \beta_*(\tau), \lambda_*(\tau), \delta_*(\tau)$ 의 추정치 (TSE)	43
5	$\mathcal{W}_n(\beta)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)	44
6	$\mathcal{W}_n(\beta)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)	44
7	$\mathcal{W}_n(\zeta)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)	45
8	$\mathcal{W}_n(\zeta)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)	45
9	$\mathcal{W}_n(\lambda)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)	46
10	$\mathcal{W}_n(\lambda)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)	46
11	$\mathcal{W}_n(\delta)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)	47
12	$\mathcal{W}_n(\delta)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)	47

국문 요약

Cho, Kim and Shin (2015)은 자기회귀시차모형을 확장한 분위수 자기회귀시차모형을 제시하고 모형의 장기모수 추정량과 그 점근 분포를 나타냈다. 본 논문은 Cho, Kim and Shin (2015)의 후속 논문으로, 분위수 자기회귀시차모형을 분위수 자기회귀시차 오차수정모형으로 변환하여 모형의 단기모수 추정량과 그 점근 분포를 구한다. 그리고 제시된 이론의 타당성을 확보하기 위해 몬테 칼로 모의실험을 수행한다. 실증분석으로는, Cho, Kim and Shin (2015)과 동일한 미국의 배당 정책에 관한 분기별 자료를 사용한다. 이 자료를 대상으로 이단계 추정법으로 구한 결과를 기존 Cho, Kim and Shin (2015)의 결과와 비교한다.

핵심 주제어 : 분위수 자기회귀시차모형, 분위수 자기회귀시차 오차수정모형, 분위수회귀, 배당금 평활화, 롤링 윈도우 추정, 이단계 추정.

1 서론

과거부터 지금까지, 비정상적인 시계열 자료에 관한 연구가 많이 이루어져 왔다. 그 중 Pesaran, Hashem and Shin (1998)은 자기회귀시차모형의 이론적 틀을 정립했고 Xiao (2009)는 분위수 공적분에 관한 연구로 시계열 이론의 지평을 넓혔다. 이러한 기존 연구를 바탕으로 Cho, Kim and Shin (2015)은 분위수 자기회귀시차모형에 관한 이론을 구축했다. 구체적으로 말하자면, 분위수 자기회귀시차모형의 장기모수 추정량과 그 점근 분포를 구했고 몬테 칼로 모의실험으로 이론의 타당성을 입증했다. 그리고 미국의 배당금 정책에 관한 자료를 토대로 이론을 실제에 적용했다.

본 논문은 Cho, Kim and Shin (2015)의 후속 연구로써 분위수 자기회귀시차모형을 분위수 자기회귀시차 오차수정모형으로 변환하여 모형의 단기모수 추정량과 점근 분포를 구한다. 그리고 몬테 칼로 모의실험을 수행하여 단기모수 추정량에 대한 월드 검정통계량이 카이제곱분포를 따름을 확인한다.

실증분석으로, Cho, Kim and Shin (2015)과 동일한 자료를 이용하여 이 단계 추정법으로 구한 추정량이 Cho, Kim and Shin (2015)이 구한 추정량과 얼마나 유사한지 살펴본다. Robert Shiller의 홈페이지에 있는 1871년 3분기부터 2010년 2분기까지 S&P 500에 속한 기업들의 수익, 배당금에 관한 자료가 그 대상이다. 본 논문은 매트랩 프로그래밍을 이용하여 Cho, Kim and Shin (2015)의 가우스 프로그래밍 결과를 모방한다. 이단계 추정법으로 구한 결과를 포함해 이 세 결과를 비교 분석함이 주 목적이다.

본 논문의 실증연구에 관한 과거 연구는 Lintner (1956)로부터 시작된다. 그는 기업들이 장기 목표 지불성향을 기준으로 수익의 변화에 따라 배당금을

조정하는 것을 관찰했다. Brav et al. (2005)는 384명의 금융 중역들을 대상으로 무엇이 배당금의 변화와 자사주 재매입을 결정짓는지 설문조사했고 그들이 배당금의 급격한 변화나 감소를 피한다는 사실을 밝혀냈다. 그리고 Leary and Michaely (2011)은 많은 수익을 내는 안정적인 기업들일수록 배당금이 평활하다는 결과를 얻었고 Chen et al. (2012)는 2차 세계대전 이전보다 이후에 배당금이 더 평활화 되었음을 찾아냈다. 그러나 이들은 조건부 평균에 입각한 연구일 뿐 분위에 따라 분석한 연구가 아니다. Cho, Kim and Shin (2015)은 분위수를 도입한 연구를 진행했고 본 논문 또한 마찬가지이다.

앞서 언급한 본 실증분석의 목적대로 이단계 추정법을 도입해 얻은 결과는 Cho, Kim and Shin(2015)의 결과, 동일한 모형을 매트랩으로 구한 결과와 매우 유사하다. 분위에 따라 분석한 추정치와, 롤링 윈도우 방법을 이용해 시간의 흐름에 따라 얻은 그래프의 개형 모두 비슷하게 나온다. 다만, 완전히 동일한 모형은 아니기 때문에 표준오차와 장기모수 추정치가 약간의 차이를 보인다.

본 논문은 구성은 다음과 같다. 2장에서 분위수 자기회귀시차모형을 개략적으로 설명하고 3장에서 기존 연구를 정리한다. 4장에서는 본 논문의 핵심인 분위수 자기회귀시차모형의 단기모수 추정량, 점근 분포를 나타내고 5장에서 몬테 칼로 모의실험을 수행한다. 그리고 6장에서 실증분석, 7장에서 결론을 쓰는 것으로 마무리한다.

2장에 들어가기 앞서, 본 논문의 표기법을 정리하면 다음과 같다. “*”는 모수를 의미하고 “ \Rightarrow ”는 약한 수렴, “ \rightarrow ”는 확률적 수렴, “[a]”는 a 보다 큰 정수 중 가장 작은 정수를 의미한다. 그리고 $[a_{ij}]_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$ 은 m 행 n 열 행렬의 원소, ι_n 은 1이 n 개인 벡터를 의미한다.

2 분위수 자기회귀시차모형

본 논문은 자기회귀시차(autoregressive distributed-lag) 모형을 분위수개념으로 확장한 모형을 다룬다. 일반적으로 자기회귀시차모형은 다음과 같이 정의된다.

$$Y_t = \alpha_* + \sum_{j=1}^p \phi_{j*} Y_{t-j} + \sum_{j=0}^q \boldsymbol{\theta}'_{j*} \mathbf{X}_{t-j} + U_t$$

문현에서는 이를 통상적으로 ARDL(p, q) 모형으로 칭한다. 여기서 $\Delta \mathbf{X}_t$ 를 모평균이 0이고 안정적(stationary)이며, 어고딕(ergodic)한 k 차원 실수공간에 정의된 변수로 상정하고 오차항은 $Y_t - E[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ 으로 둔다. 여기서 \mathcal{F}_{t-1} 은 $\{\mathbf{X}'_t, Y_{t-1}, \mathbf{X}'_{t-1}, \dots\}$ 으로부터 생성된 가장 작은 시그마필드(σ -field)로 정의한다. 상기의 ARDL 모형을 분위수로 확장한 모형은 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$Y_t = \alpha_*(\tau) + \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau) Y_{t-j} + \sum_{j=0}^q \boldsymbol{\theta}'_{j*}(\tau) \mathbf{X}_{t-j} + U_t(\tau) \quad (1)$$

이를 문현에서는 분위수 자기회귀시차(quantile autoregressive distributed-lag) 모형으로 정의하고 통상적으로 QARDL(p, q)로 표시한다. Engle and Granger(1987)에 따르면, 두 변수가 각각 안정적(stationary)이지 못하더라도 공적분 관계에 놓여있을 때 두 변수간의 관계식은 오차수정모형(error correction model)으로 나타낼 수 있다. 본 논문의 가장 주요한 목적은 QARDL(p, q)를 ECM의 형태로 추정하였을 때 ECM모형에 의하여 정의된 단기모수를 추정하고 이의 점근분포를 구하는 것이다. QARDL(p, q)에 의하여 주어진 모

형을 ECM으로 표현하면 부록에서 나타내듯이 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &= \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau)(Y_{t-1} - \boldsymbol{\beta}_*(\tau)' \mathbf{X}_{t-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j^*(\tau) \Delta Y_{t-j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{q-1} \boldsymbol{\theta}_j^*(\tau) \Delta \mathbf{X}_{t-j} + U_t(\tau)\end{aligned}\tag{2}$$

여기서 모수는 다음과 같이 정의되었다.

$$\begin{aligned}\zeta_*(\tau) &:= \sum_{i=1}^p \phi_{i*}(\tau) - 1 \\ \boldsymbol{\beta}_*(\tau) &:= \boldsymbol{\gamma}_*(\tau) \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_{i*}(\tau)\right)^{-1} \\ \phi^*(\tau) &:= - \sum_{h=j+1}^p \phi_{h*}(\tau) \\ \boldsymbol{\theta}^*(\tau) &:= - \sum_{h=j+1}^q \boldsymbol{\theta}_{h*}(\tau)\end{aligned}$$

단, $\boldsymbol{\theta}_0^*(\tau) = \boldsymbol{\theta}_{0*}(\tau)$

상기의 ECM은 Cho, Kim and Shin (2015)에 의하여 제시된 모형으로 우리는 이를 QARDL-ECM(p, q)로 칭한다. Cho, Kim and Shin (2015)은 장기모수를 추정하기 위한 추정량과 이의 점근분포를 제시하였다. 그러나 단기모수를 추정하기 위한 추정량을 제시하지 않았다. 본 논문에서는 이를 밝히는 것을 주목적으로 한다. 이를 통하여 QARDL-ECM(p, q)를 종합적으로 추정할 수 있는 방법론을 제시하려 한다.

3 선행연구의 고찰

이 장에서는 본 논문의 바탕이 된 과거 선행연구들을 살펴본다. Engle and Granger (1987), Pesaran, Hashem and Shin (1998), Pesaran, Shin, Hashem and Smith (2001), Koenker and Bassett (1978), Lin and Benjamin (2017), Cho, Kim and Shin (2015)이 그 대상이다. Engle and Granger (1987)은 Granger (1981)에 의해 처음 소개된 적분, 공적분, 오차수정모형에 관한 이론을 확장하여 공적분 관계를 추정, 검정하는 방법을 제시하였다. 공적분 관계를 추정하는데 있어 이단계 추정량을 도입하였는데 이는 첫 단계에서 공적분 벡터의 모수를 추정하여 구한 잔차를 이용해 만든 오차수정모형의 추정량이다. 논문 저자들은 몬테 칼로 모의실험을 통해 이 추정량이 공적분 관계를 밝혀내는데 적합한 추정량임을 보였다. 또한 논문 저자들은 공적분 관계를 검정하는데 필요한 여러가지 모형을 제시하였다. 1) Durbin Watson 회귀모형 2) Dickey Fuller 회귀모형 3) 강화된 Dickey Fuller 회귀모형 4) 제한된 벡터 자기회귀 모형 5) 강화되고 제한된 벡터 자기회귀모형 6) 제한되지 않은 벡터 자기회귀모형 7) 강화되고 제한되지 않은 벡터 자기회귀모형이 그 대상이다. 몬테 칼로 모의실험으로 사이즈와 검정력을 모형 간에 비교했는데 대체적으로 3) 강화된 Dickey Fuller 회귀모형이 가장 적합함을 보였다. 그리고 여러 거시경제 데이터를 적용해본 결과 소비-소득, 장기 이자율-단기 이자율, 명목 GNP-M2는 공적분 관계가 성립하고 임금-가격, 명목 GNP-M1 또는 M3는 공적분 관계가 아님을 보였다.

Pesaran, Hashem and Shin (1998)은 $I(1)$ 인 변수들의 장기 관계를 분석하였다. 그 결과 불완전한 고전적 ARDL 접근 추정량을 개선하여 추세제거

후 정상적인 (trend stationary) 변수들에 관한 ARDL 접근 추정량을 제시할 수 있었다. 먼저 저자들은, 차분을 통해 구한 ARDL 모형의 단기모수에 관한 통상의 최소자승 (ordinary least squares; 이하, OLS) 추정량이 \sqrt{T} 속도로 일치성이 있고 (T 는 표본의 개수) 공분산행렬은 특이행렬이며 접근적으로 정규분포를 따름을 밝혔다. 또한 장기모수의 OLS 추정량이 단기모수의 OLS 추정량보다 더 빠른 속도로 일치성을 갖고 접근적으로 정규분포를 따름을 보였다. 그런데 기존연구에 따르면, 변수들이 $I(1)$ 일 경우 OLS 추정량과는 달리 고전적 ARDL 접근 추정량은 장기모수에 대한 정확한 추정량이 아니다. 그리하여 저자들은 고전적 ARDL 접근 추정량을 개선해 추세제거 후 정상적인 변수들에 관한 ARDL 접근 추정량을 제시했다. 그리고 이 추정량이 일치 추정량이고 예상되는 접근분포를 따름을 밝혀냈다. 또한 Phillips and Hansen (PH)의 fully modified least squares로 구한 추정량과 ARDL 접근 추정량을 비교하여 ARDL 접근 추정량이 장기관계에 있어 더 적합한 추정량임을 보였다. 편의가 있는지, 표준오차, 평균 제곱근 편차 등이 어느 정도인지를 살펴본 결과 ARDL 접근 추정량이 fully modified least squares로 구한 추정량보다 더 적합하다는 결과를 이끌어낸 것이다.

Pesaran, Shin, Hashem and Smith (2001)는 설명변수와 피설명변수의 장기 관계에 관한 새로운 검정법인 범위 검정 접근을 제시하고 그 타당성을 입증했다. 과거 장기모수 추정량을 구하는데에는 앞서 살펴본 이단계 추정량과 체계화하여 축소시킨 순위 회귀 접근이 사용되었다. 다만 변수들이 $I(1)$ 일 때로 한정해야만 하는 한계가 있었다. 그리고 변수들이 $I(0)$ 나 $I(1)$ 이건 t 통계량, F 통계량이 귀무가설하에 접근적으로 정규분포, F 분포를 따르지 않았기 때문

에 이는 풀어야할 숙제로 남았다. 저자들은 이 문제를 해결하기 위해 장기모수 추정량을 검정하는데 있어 범위 검정 접근을 도입하였다. 이 접근 방법에 따르면, 변수들이 모두 $I(0)$ 일 때의 임계값, 모두 $I(1)$ 일 때의 임계값, 그 사이를 구간으로 설정하여 검정 통계량이 이 구간 밖에 위치하면 받아들인다. 그러나 이 구간 안에 위치하면 몇번 차분해야 안정되는지를 다시 구한 후 채택한다. 몬테 칼로 모의 실험을 통해 이 방법을 사용한 왈드 통계량은 카이제곱분포를 따르고, t 통계량은 정규분포, F 통계량은 F 분포를 따름이 밝혀졌다. 게다가 ARDL 모형에 대해 ARDL 접근 추정량을 구하고 범위 검정 접근으로 검정하면 귀무가설하에 예상된 점근 분포를 따른다는 것 또한 입증했다. 더불어 실증 분석으로 임금이 어떻게 결정되는지 생산성, 실업, 노동조합 변수들을 이용해 논문의 이론을 적용하였다.

Koenker and Bassett (1978)은 분위수 회귀 개념을 학계에 처음 도입하였다. 또한 분위수 회귀로 구한 추정량이 특이값에 영향을 받지 않고 점근 이론에 부합한다는 사실을 수학적으로 증명했다. 이 논문이 발표되기 이전, 계량경제학자들은 오차항이 정규분포를 따른다는 매우 제한된 가정을 고수해왔다. 오차항이 정규분포를 따르면, Cramer-Rao 정리를 통해 회귀계수 추정량의 분산이 최소분산이 됨을 증명할 수 있다. 그러나 작은 표본의 경우 대부분 오차항은 정규분포를 따르지 않는다. 따라서 저자들은 이러한 문제점을 해결하기 위해 분위수 회귀 개념을 고안하였고 이를 통해 앞서 설명한 학문적 공헌을 할 수 있었다. 이 논문이 발표된 이후 분위수 회귀는 실증분석에 무수히 많이 활용되었다. 앞서의 이유도 있지만 하위 분위, 중위 분위, 상위 분위가 각각 다른 성질을 가질 때 이를 분석해내는 매우 유용한 방법이기 때문이다. 또한

최근 들어 분위수 회귀를 절단된 자료에 대해 적용하거나 베이지안 통계, 머신러닝과 연관짓는 연구들이 진행되고 있다.

Boqiang and Benjamin (2017)의 중국 내 탄소 배출량의 결정 요인 분석은 분위수 시계열 실증 연구의 대표적인 예이다. 저자들은 피설명변수를 탄소 배출량, 설명변수를 1인당 GDP, 에너지 집중도, 탄소 집중도, 도시화수준으로 두고 연구를 진행했다. 각 변수간에 공적분 검정을 하여 피설명변수와 설명변수들이 공적분 관계임을 확인했다. 그리고 분위수 회귀 과정을 거쳐 어떤 요인이 중국내 탄소 배출량에 영향을 주는지 살펴보았다. 그 결과 분위에 따라 다른 양상이 나타나고 탄소 집중도, 1인당 GDP, 에너지 집중도, 도시화수준 순으로 중국 내 탄소배출량에 영향을 미침이 드러났다. 아직 도시화수준이 낮은 상태라 도시화수준 계수의 추정치는 유일하게 유의하지 않았는데 시간이 지남에 따라 도시화수준 계수 추정치가 유의해지리라 추측할 수 있다. 분위수 시계열 실증 분석에 있어 이 같은 연구 방식은 하나의 정형화된 틀이라 봐도 무방하다.

본 논문의 선행 논문인 Cho, Kim and Shin (2015)은 기존 연구를 바탕으로 QARDL 모형의 장기모수 추정량과 그 접근 분포를 제시하였다. 그리고 1871년 3분기에서 2010년 2분기까지 S &P 500 주식들의 수익, 배당금에 관한 자료로 실증분석을 수행했다. 먼저 저자들은 Xiao (2009)의 분위수 공적분 시계열 모형에 관한 추정법을 이용했고 모수 추정과 관련해 Phillips and Hansen (1990)의 비모수적 접근, Saikkonen (1991)의 강화된 모수적 접근을 활용하였다. 과거 Pesaran and Shin (1997)은 ARDL-ECM의 장, 단기모수 추정량을 모수적 방식으로 구할 수 있음을 보였고 공적분 관련 모수에 관한 ARDL 접근 통계량의

점근 분포를 구했다. Cho, Kim and Shin (2015)은 이 연구를 분위수 개념으로 발전시켜 앞서 설명한 결과를 얻었다. 본 논문은 이를 변형한 QARDL-ECM의 단기모수를 추정, 추론하여 기존연구를 확장하고자 한다. 그리고 동일한 자료를 바탕으로 QARDL-ECM 추정치와 이단계 추정치를 비교, 분석하는 연구를 진행한다.

4 분위수 자기회귀시차 오차수정모형의 단기모수 추정량과 점근 분포

4.1 단기모수 추정량

QARDL-ECM(p, q)의 단기모수는 $\Delta Y_{t-j}, \Delta \mathbf{X}_{t-j}$ 의 계수로 정의된다. 이 절의 목표는 단기모수 추정량을 나타내는 것이다. 이를 위해 식(1)을 다른 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$Y_t = \alpha_*(\tau) + \sum_{j=0}^{q-1} \mathbf{W}'_{t-j} \boldsymbol{\delta}_{j*}(\tau) + \mathbf{X}'_t \boldsymbol{\gamma}_*(\tau) + \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau) Y_{t-j} + U_t(\tau) \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{W}_t = \Delta \mathbf{X}_t$ 이고 식(3)의 모수를 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{j*}(\tau) &:= - \sum_{i=j+1}^q \boldsymbol{\theta}_{i*}(\tau) \\ \boldsymbol{\gamma}_*(\tau) &:= \sum_{j=0}^q \boldsymbol{\theta}_{j*}(\tau) \end{aligned}$$

그리고 이를 변형하여 식(4)를 만들 수 있고 식(4)의 모수 또한 아래와 같다.

$$Y_t = \mu_*(\tau) + \mathbf{X}'_t \boldsymbol{\beta}_*(\tau) + R_t(\tau) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\mu_*(\tau) &:= \alpha_*(\tau)(1 - \sum_{i=1}^p \phi_{i*}(\tau))^{-1} \\ \boldsymbol{\beta}_*(\tau) &:= \boldsymbol{\gamma}_*(\tau)(1 - \sum_{i=1}^p \phi_{i*}(\tau))^{-1}\end{aligned}$$

또한 $R_t(\tau) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{W}'_{t-j} \boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) U_{t-j}(\tau)$ 이 성립한다. $\boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau) := \sum_{l=j+1}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_{l*}(\tau)$ 로 놓고 $(\rho_{0*}(\tau), \rho_{1*}(\tau), \dots), (\boldsymbol{\pi}_{0*}(\tau), \boldsymbol{\pi}_{1*}(\tau), \dots)$ 로부터 $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) L^j = (1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau) L^j)^{-1}$ 이 성립한다. 그리하여 아래의 관계식을 유도할 수 있다.

$$(1 - L)^{-1} \left(\frac{\sum_{j=0}^q \boldsymbol{\theta}_{j*}(\tau) L^j}{(1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau) L^j)} - \frac{\sum_{j=0}^q \boldsymbol{\theta}_{j*}(\tau)}{1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau)} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_{j*}(\tau) L^j$$

식(1), 식(2), 식(3), 식(4)를 이용해 단기모수 추정량을 다음과 같이 정의 한다. 자세한 증명은 부록에 남긴다.

정의 1.

$$\tilde{\phi}_n(\tau) := \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1(\tau) \\ \tilde{\phi}_2(\tau) \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_{p-1}(\tau) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_2(\tau) \\ \hat{\phi}_3(\tau) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p(\tau) \end{bmatrix}$$

□

정의 2.

$$\tilde{\theta}_n(\tau) := \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_0(\tau) \\ \tilde{\theta}_1(\tau) \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_{q-1}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_0(\tau) \\ \hat{\delta}_1(\tau) \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{q-1}(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_n(\tau) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

□

정의 1, 정의 2의 벡터들을 문자로 치환하면 아래와 같다.

$$R_1 = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\phi}_a(\tau) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_2(\tau) \\ \hat{\phi}_3(\tau) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p(\tau) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau) = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\delta}}_0(\tau) \\ \widehat{\boldsymbol{\delta}}_1(\tau) \\ \vdots \\ \widehat{\boldsymbol{\delta}}_{q-1}(\tau) \end{bmatrix} \quad \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_a(\tau) = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_n(\tau) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\widehat{\boldsymbol{\phi}}_a(\tau)$ 는 식(1) Y_{t-j} 계수들 중 $j = 1$ 을 제외한 계수들의 추정량들을 의미한다. Cho, Kim and Shin(2015)은 이 추정량들을 구하였고 본 논문은 이를 바탕으로 QARDL-ECM의 단기모수 추정량 $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_n(\tau)$ 과 그 점근분포를 구한다. 그리고 $\widehat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau)$ 은 식(3) \mathbf{W}'_{t-j} 계수들의 추정량들을 의미하고 $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_n(\tau)$ 는 식(3) \mathbf{X}'_t 계수들의 추정량들을 의미한다. 마찬가지로 이 모든 추정량들은 Cho, Kim and Shin (2015)이 구했고 본 논문은 이를 통해 QARDL-ECM의 단기모수 추정량 $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau)$ 과 그 점근분포를 구한다. QARDL-ECM에 관한 식(2)의 장기모수 추정량과 점근 분포는 Cho, Kim and Shin (2015)이 다뤘다. 본 논문은 Cho, Kim and Shin(2015)이 자세히 기술하지 않은 QARDL-ECM의 단기모수 추정량과 그 점근 분포를 구하는 것을 목적으로 하고 따라서 단기모수 추정량을 정의 1, 정의 2에 제시하였다.

추정량은 위와 같이 정의했으나 추정량의 분포를 구함에 있어 필요한 식들을 다음과 같이 도출한다. 식(3)을 변형하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_t = \mathbf{G}'_t \boldsymbol{\lambda}_*(\tau) + \widehat{\mathbf{Y}}'_t \boldsymbol{\phi}_*(\tau) + U_t(\tau) = \mathbf{Z}'_t \boldsymbol{\alpha}_*(\tau) + U_t(\tau) \quad (5)$$

각 항들을 자세히 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_t &:= (\mathbf{G}'_t, \widehat{\mathbf{Y}}'_t)' := (\mathbf{G}'_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})' \\
&= (1, \mathbf{W}'_t, \dots, \mathbf{W}'_{t-q+1}, \mathbf{X}'_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})', \\
\boldsymbol{\alpha}_*(\tau) &:= (\boldsymbol{\lambda}_*(\tau)', \boldsymbol{\phi}_*(\tau)')' := (\alpha_*(\tau), \boldsymbol{\delta}_*(\tau)', \boldsymbol{\gamma}_*(\tau)', \boldsymbol{\phi}_*(\tau)')' \\
&= (\alpha_*(\tau), \boldsymbol{\delta}_{0*}(\tau)', \dots, \boldsymbol{\delta}_{q-1*}(\tau)', \boldsymbol{\gamma}_*(\tau)', \boldsymbol{\phi}_*(\tau)')'
\end{aligned}$$

그리고 식(5)에서 $\widehat{\mathbf{Y}}_t$ 의 각각의 원소는 다음의 형태를 만족시킨다.

$$Y_{t-i} = \mu_*(\tau) + \mathbf{X}'_t \boldsymbol{\beta}_*(\tau) + \sum_{j=0}^{q-1} \mathbf{W}'_{t-j} \boldsymbol{\xi}_{i,j*}(\tau) + K_{t,i}(\tau), i = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

여기서 $\boldsymbol{\xi}_{i,j*}(\tau) := -\boldsymbol{\beta}_*(\tau)$ 이다. 그러나 $i > j$ 라면 $-\sum_{l=j-i}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_{l*}(\tau)$ 이다.

그리고 $i \leq q$ 이면 다음이 성립한다.

$$K_{t,i}(\tau) := - \sum_{j=q-i}^{\infty} \mathbf{W}'_{t-i-j} \boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) U_{t-i-j}(\tau)$$

반대로 $i > q$ 이면 다음과 같다.

$$K_{t,i}(\tau) := - \sum_{j=0}^{i-q-1} \mathbf{W}'_{t-q-j} \boldsymbol{\beta}_*(\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{W}'_{t-i-j} \boldsymbol{\pi}_{j*}(\tau) + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) U_{t-i-j}(\tau)$$

또한 식(6)을 이용하여 $\widehat{\mathbf{Y}}_t = \boldsymbol{\Gamma}_*(\tau)' \mathbf{G}_t + \mathbf{K}_t(\tau)$ 의 $\boldsymbol{\Gamma}_*(\tau)$, $\mathbf{K}_t(\tau)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\Gamma}_*(\tau) := \begin{bmatrix} \mu_*(\tau) & \mu_*(\tau) & \cdots & \mu_*(\tau) \\ \boldsymbol{\xi}_{1,0*}(\tau) & \boldsymbol{\xi}_{2,0*}(\tau) & \cdots & \boldsymbol{\xi}_{p,0*}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{1,q-1*}(\tau) & \boldsymbol{\xi}_{2,q-1*}(\tau) & \cdots & \boldsymbol{\xi}_{p,q-1*}(\tau) \\ \boldsymbol{\beta}_*(\tau) & \boldsymbol{\beta}_*(\tau) & \cdots & \boldsymbol{\beta}_*(\tau) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{K}_t(\tau) := \begin{bmatrix} K_{t,1}(\tau) \\ K_{t,2}(\tau) \\ \vdots \\ K_{t,p-1}(\tau) \\ K_{t,p}(\tau) \end{bmatrix}$$

식(5)의 QARDL에 관한 추정량은 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n(\tau) := \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\alpha}(\tau)} \sum_{t=1}^n \varrho_\tau(Y_t - \mathbf{Z}'_t \boldsymbol{\alpha}(\tau))$ 으로 구할 수 있다. 여기서 $\varrho_\tau(u)$ 는 $u\psi_\tau(u)$ 를 뜻하고 이를 체크 함수라 한다. 이는 다음을 이용해 도출한다. $\psi_\tau(u) := \tau - I(u \leq 0)$

4.2 $\tilde{\phi}_n(\tau)$ 의 점근 분포

본 장에서는 앞서 구한 추정량들 중 $\tilde{\phi}_n(\tau)$ 의 분포를 구한다. $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau)$ 의 분포는 다음 절에서 다룰 것이다. 그리고 이들 분포를 구함에 있어 필수적인 가정이 존재한다. 분포를 구하는 전 과정에 있어 하기의 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4, 가정 5, 가정 6을 요한다. 이들 가정에 따라 보조정리 1, 보조정리 2, 보조정리 3, 보조정리 4, 보조정리 5, 보조정리 6가 도출되고 결과적으로 정리 1, 정리 2가 성립한다. 보조정리 1, 보조정리 2, 보조정리 3, 보조정리 4, 보조정리 5에 관한 자세한 증명은 부록에 수록하였다. 우선 가정 1을 제시한다.

가정 1.

각각의 $r, \tau \in (0, 1)$ 에 대해, $\mathbf{B}_n(., \tau) \Rightarrow \mathcal{B}(., \tau)$ 이고 $\mathbf{B}_n(r, \tau) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{\lfloor nr \rfloor} [\bar{\mathbf{W}}'_t, \bar{\mathbf{K}}_t(\tau)', \psi_\tau[U_t(\tau)], \psi_\tau[U_t(\tau)]\bar{\mathbf{W}}'_t, \psi_\tau[U_t(\tau)]\bar{\mathbf{K}}_t(\tau)']'$ 이며 $\bar{\mathbf{K}}_t(\tau) = \mathbf{K}_t(\tau) -$

$E[\mathbf{K}_t(\tau)], \bar{\mathbf{W}}_t := [\mathbf{W}'_t, \mathbf{W}'_{t-1}, \dots, \mathbf{W}'_{t-q+1}]'$ 이다. 그리고 $\mathcal{B}(\cdot, \tau) := [\mathcal{B}_{\mathbf{W}}(\cdot)'$, $\mathcal{B}_{\mathbf{K}}(\cdot, \tau)', \mathcal{B}_{\psi}(\cdot, \tau), \mathcal{B}_{\psi, \mathbf{W}}(\cdot, \tau)', \mathcal{B}_{\psi, \mathbf{K}}(\cdot, \tau)']'$ 은 다변수 가우시안 분포를 따르고 $E[\mathcal{B}(\cdot, \tau)] = 0$ 이다. 또한 각각의 $r, \tilde{r} \in (0, 1)$ 에 대해 $E[\mathcal{B}(r, \tau)\mathcal{B}(\tilde{r}, \tau)'] = \Omega(r, \tilde{r}, \tau)$ 이고 $\Omega(r, \tilde{r}, \tau) := \lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{B}_n(r, \tau)\mathbf{B}_n(\tilde{r}, \tau)']$ 는 양정부호 행렬이다. \square

$\mathcal{B}(\cdot, \tau)$ 에서 일치하거나 일정한 표본 경로를 막기 위해 $\Omega(r, \tilde{r}, \tau)$ 는 양정부호 행렬로 상정한다. 또 $[(\bar{\mathbf{W}}'_t, \mathbf{K}_t(\tau)')']$ 이 크기 1의 순응된 믹싱계일 과정을 따르고 유한한 분산을 지니기 위해 가정 1이 제약되었다.

보조정리 1. 가정 1에 따라 다음이 성립한다.

(i) $\sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i} = O_p(\sqrt{n}), i = 0, 1, 2, \dots;$
(ii) 각각의 τ 에 대하여, $\sum_{t=1}^n \bar{\mathbf{K}}_t(\tau) = O_p(\sqrt{n})$ 이고 $\sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) = O_p(n)$ 이다. \square

가정 2.

\mathbf{X}_t 는 k 행 1 열 벡터이고 $\mathbf{W}_t = \Delta \mathbf{X}_t$ 이다. \mathbf{W}_t 는 다변수(multivariate) 안정(stationary) 어고딕(ergodic) 과정을 따르고 $j = 1, 2, \dots, k$ 에 대해 $E[\mathbf{W}_{tj}] = 0, E[\mathbf{W}_{tj}^2] < \infty$ 가 성립한다. \square

가정 3.

U_t 는 독립항등분포를 따르고 유한한 분산값을 갖는다. 확률밀도함수 $f(\cdot)$ 와 누적확률밀도함수 $F(\cdot)$ 를 따르고 $f(\cdot) > 0, f_\tau := f[F^{-1}(\tau)] < \infty$ 이다. \square

가정 4.

각각의 $\tau \in (0, 1)$ 에 대해 $1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau) L^j$ 의 단위근은 단위원 밖에 놓인다.

그리고 $i = 1, 2, \dots, k$ 에서 $\sum_{j=0}^{\infty} |\xi_{0,j,i*}(\tau)| < \infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_{j,i*}(\tau)| < \infty$ 이다. 그리고 $\xi_{0,j,i*}(\tau), \pi_{j,i*}(\tau)$ 은 각각 $\xi_{0,j*}(\tau), \pi_{j*}(\tau)$ 의 i 번째 원소들이다. \square

가정 5.

각각의 $\tau \in (0, 1)$ 에서 $t, s = 1, 2, \dots$ 이고 $U_t(\tau)$ 는 \mathbf{W}_s 와 독립이다. \square

가정 6.

\mathbf{X}_t 은 공적분이 가능하다. \square

\mathbf{X}_t 의 정의로 인해 $n^{-1} \sum_{t=1}^n \psi_{\tau}[U_t(\tau)] \mathbf{X}_t \Rightarrow \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_w(r) d\mathcal{B}_{\psi}(r, \tau)$ 이 성립하고 $n^{-2} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t \Rightarrow \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) \bar{\mathcal{B}}_W(r)' dr$ 이다. $\bar{\mathcal{B}}_W(\cdot)$ 는 $\mathcal{B}_{\mathbf{W}(\cdot)}$ 의 첫 k 개 원소를 의미한다. 그리고 $\psi_{\tau}[U_t(\tau)]$ 는 \mathbf{W}_t 와 독립이므로 장기적 공분산은 0이다. 그리고 가정 3에 의해 2차 적률은 무한대가 될 수 없다. 또한 오차항 U_t 은 독립항등분포를 따른다. 이 오차항이 마팅게일 차분 배열이라 할지라도 결과에는 큰 영향이 없다. 이에 따라 $f_{U_t|\mathbf{Z}_t}(\cdot|\mathbf{Z}_t) = f(\cdot)$ 이 성립한다. 가정 4는 Y_t 와 \mathbf{X}_t 의 장기적 안정 관계를 보장하기 위해 설정되었고 가정 5에 의해 $\mathcal{B}_{\mathbf{W}(\cdot)}, \mathcal{B}_{\psi(\cdot, \tau)}, \mathcal{B}_{\psi W}(\cdot, \tau)$ 이 서로 독립이므로 $E[\psi_{\tau}(U_t(\tau))] = 0, E[\bar{\mathbf{W}}_s] = 0, E[\bar{\mathbf{W}}_s \psi_{\tau}[U_t(\tau)]] = 0, E[\bar{\mathbf{W}}_s \bar{\mathbf{W}}'_s \psi_{\tau}(U_t(\tau)) = 0, E[\bar{\mathbf{W}}_s \psi_{\tau}(U_t(\tau))^2] = 0$ 이 성립한다. 그러나 $\mathbf{K}_s(\tau)$ 는 $U_t(\tau)$ 에 대해 독립일 필요가 없다. $K_{t,i}(\tau)$ 의 정의,

가정 2, 가정 5에 의해 $\mathbf{K}_s(\tau)$ 가 안정적, 어고딕 과정을 따름에도 그려하다. 이로 인해 $\mathcal{B}_{\mathbf{K}}(., \tau)'$ 와 $\mathcal{B}_{\psi\mathbf{K}}(., \tau)'$ 의 공분산이 0임을 보장할 수 없다. 또한 가정 5의 독립성 조건은 강력하지 않다. 그럼에도 모형에 관한 일반적인 분석에 별 영향이 없다. 가정 1은 만약 가정 4가 강화되고 4차 적률이 유한하다면 뒤따르는 결과이다. 그리고 가정 3, 가정 5으로부터 $E[\psi_\tau(U_t(\tau))|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots] = 0$ 임을 추론할 수 있다.

보조정리 2. 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4에 따라 다음이 성립한다.

- (i) $n^{-1} \sum_{t=i}^n \mathbf{W}_{t-i} \mathbf{W}'_{t-j} \rightarrow E[\mathbf{W}_{t-i} \mathbf{W}'_{t-j}], i, j = 0, 1, \dots, q-1;$
- (ii) $\sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i} X'_t = O_p(n)$ 이고 $\sum_{t=1}^n U_{t-i}(\tau) \mathbf{X}_t = O_p(n^{\frac{3}{2}}), i = 0, 1, \dots;$
- (iii) 각각의 τ 에 대해, $n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{K}_t(\tau)' \rightarrow E[\mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{K}_t(\tau)']$
- (iv) 각각의 τ 에 대해, $n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{W}'_{t-i} \rightarrow E[\mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{W}'_{t-i}], i = 0, 1, \dots, q-1;$
- (v) 각각의 τ 에 대해, $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{X}'_t \Rightarrow E[\mathbf{K}_t(\tau)] \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r)' dr$ \square

보조정리 3. 가정 1에 따라 다음이 성립한다.

$$\sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} n^{-\frac{3}{2}} \mathbf{X}_t \\ n^{-2} \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t \\ n^{-1} \psi(\tau)[U_t(\tau)] \mathbf{X}_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) dr \\ \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) \bar{\mathcal{B}}_W(r)' dr \\ \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) d\mathcal{B}_\psi(r, \tau) \end{bmatrix}$$

\square

보조정리 4. 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4에 따라 다음이 성립한다.

$$(i) \quad \mathbf{D}_G := \text{diag}([\sqrt{n}\boldsymbol{\iota}'_{1+qk}, n\boldsymbol{\iota}'_k]'), \quad \mathbf{G} := [\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n]'$$

$$\mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{G} \mathbf{D}_G^{-1} = \sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} n^{-1} & n^{-1} \bar{\mathbf{W}}'_t & n^{-\frac{3}{2}} \mathbf{X}'_t \\ n^{-1} \bar{\mathbf{W}}_t & n^{-1} \bar{\mathbf{W}}_t \bar{\mathbf{W}}''_t & n^{-\frac{3}{2}} \bar{\mathbf{W}}_t \mathbf{X}'_t \\ n^{-\frac{3}{2}} \mathbf{X}_t & n^{-\frac{3}{2}} \mathbf{X}_t \bar{\mathbf{W}}_t & n^{-2} \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0' & \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r)' dr \\ 0 & E[\bar{\mathbf{W}}_t \bar{\mathbf{W}}'_t] & 0' \\ \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) dr & 0 & \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) \bar{\mathcal{B}}_W(r)' dr \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(\mathbf{U}) = \sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} n^{-\frac{1}{2}} \psi_\tau[U_t(\tau)] \\ n^{-\frac{1}{2}} \psi_\tau[U_t(\tau)] \bar{\mathbf{W}}_t \\ n^{-1} \psi_\tau[U_t(\tau)] \mathbf{X}_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{B}_\psi(1, \tau) \\ \mathcal{B}_{\psi w}(1, \tau) \\ \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) d\mathcal{B}_\psi(r, \tau) \end{bmatrix}$$

$$(iii) \quad \mathbf{D}_H^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{K}(\tau) = O_p(1), \quad \mathbf{D}_H := \text{diag}([n\boldsymbol{\iota}'_{1+qk}, n^{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\iota}'_k]');$$

본 장의 목표인 $\tilde{\phi}_n(\tau)$ 의 분포는 $\hat{\phi}_n(\tau)$ 의 분포와 관련이 깊다. 정의 1에서 $\tilde{\phi}_n(\tau)$ 를 $\hat{\phi}_n(\tau)$ 의 2행부터 p 행까지의 요소들로 표현하였기 때문이다. 따라서 이를 구하기 위해 아래의 보조정리 5가 사용된다.

보조정리 5. 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4, 가정 5에 따라 다음이 성립한다.

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau)) \Rightarrow N[0, \Pi(\tau)], \quad \Pi(\tau) := \tau(1-\tau)f_\tau^{-2}E[\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)']^{-1}$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau) := \mathbf{K}_t(\tau) - E[\mathbf{K}_t(\tau)\widehat{\mathbf{W}}_t']E[\widehat{\mathbf{W}}_t\widehat{\mathbf{W}}_t']^{-1}\widehat{\mathbf{W}}_t, \quad \widehat{\mathbf{W}}_t := [1, \bar{\mathbf{W}}_t']' \quad \square$$

그리고 가정을 이용해 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau)) = f_\tau^{-1}E[\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)']^{-1}(n^{-\frac{1}{2}}\widehat{\mathbf{H}}(\tau)'\Psi_\tau(\mathbf{U})) + op(1)$$

여기서 $\widehat{\mathbf{H}}(\tau) := [\widehat{\mathbf{H}}_1(\tau), \dots, \widehat{\mathbf{H}}_n(\tau)']'$ 이고 $\Psi_\tau(\mathbf{U}) := [\psi_\tau[U_1(\tau)], \dots, \psi_\tau[U_n(\tau)]]'$ 이다. 이에 따라 자명하게 아래의 식이 성립한다.

$$n^{-\frac{1}{2}}\widehat{\mathbf{H}}(\tau)'\Psi_\tau(\mathbf{U}) \Rightarrow N[\mathbf{0}, \tau(1-\tau)E[\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)']]$$

이 절에서 다루는 단기모수 추정량은 $\tilde{\phi}_n(\tau) = \mathbf{R}_1\widehat{\phi}_a(\tau)$ 이다. 앞에서 정의한대로 $\mathbf{W}_t = \Delta\mathbf{X}_t$ 이고 $\bar{\mathbf{W}}_t = [\mathbf{W}'_t, \mathbf{W}'_{t-1}, \dots, \mathbf{W}'_{t-(q-1)}]'$ 이다. 또한 $\widehat{\mathbf{W}}_t = [1, \bar{\mathbf{W}}'_t]'$ 이고 $\widehat{\mathbf{W}} = [\widehat{\mathbf{W}}_1, \widehat{\mathbf{W}}_2, \dots, \widehat{\mathbf{W}}_n]'$ 로 주어져 있다. $\widehat{\mathbf{W}}$ 는 $n \times (kq+1)$ 행렬이다. 그리고 $\widehat{K}_{t,i}(\tau)$ 는 $\widehat{\mathbf{W}}_t$ 를 $Y_{t-i} - \mathbf{X}'_t\widehat{\beta}_n(\tau)$ 에 회귀시켜 얻은 분위수 잔차를 뜻한다. 여기서 우리는 i 를 1을 제외한 2부터 p 까지로 한정할 것이다. 이를 표현하면 아래와 같다.

$$\widehat{\mathbf{K}}_a(\tau) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{1,a}(\tau)' \\ \widehat{\mathbf{K}}_{2,a}(\tau)' \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{K}}_{n-1,a}(\tau)' \\ \widehat{\mathbf{K}}_{n,a}(\tau)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{K}_{1,1}(\tau) & \widehat{K}_{1,2}(\tau) & \dots & \widehat{K}_{1,p}(\tau) \\ \widehat{K}_{2,1}(\tau) & \widehat{K}_{2,2}(\tau) & \dots & \widehat{K}_{2,p}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{K}_{n-1,1}(\tau) & \widehat{K}_{n-1,2}(\tau) & \dots & \widehat{K}_{n-1,p}(\tau) \\ \widehat{K}_{n,1}(\tau) & \widehat{K}_{n,2}(\tau) & \dots & \widehat{K}_{n,p}(\tau) \end{bmatrix}$$

따라서 $\tilde{\phi}_n(\tau)$ 의 분포는 다음과 같다.

정리 1. 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4, 가정 5에 따라 다음이 성립한다.

각각의 $\tau \in (0, 1)$ 에 대하여, $\sqrt{n}(\tilde{\phi}_n(\tau) - \phi^*(\tau)) \Rightarrow N[0, \mathbf{R}_1 \Pi_a(\tau) \mathbf{R}'_1]$ 가 성립 한다. 여기서 $\widehat{\Pi}_a(\tau) = \tau(1-\tau)f_\tau^{-2}[(n^{-1}\widehat{\mathbf{K}}_a(\tau)'\widehat{\mathbf{K}}_a(\tau)) - (n^{-1}\widehat{\mathbf{K}}_a(\tau)'\widehat{\mathbf{W}})(n^{-1}\widehat{\mathbf{W}}'\widehat{\mathbf{W}})^{-1}(n^{-1}\widehat{\mathbf{W}}'\widehat{\mathbf{K}}_a(\tau))]$ 이다. \square

이 절에서 구한 추정량과 분산으로 귀무가설, 대립가설을 세우고 왈드 검정통계량을 나타내면 다음과 같다.

$$H_0^{(1)} : \mathbf{P}\phi^*(\tau) = \mathbf{p} \quad \text{vs} \quad H_1^{(1)} : \mathbf{P}\phi^*(\tau) \neq \mathbf{p}$$

$$\mathcal{W}_n(\phi) = n(\mathbf{P}\tilde{\phi}_n(\tau) - \mathbf{p})'(\mathbf{P}\mathbf{R}_1 \widehat{\Pi}_a(\tau) \mathbf{R}'_1 \mathbf{P}')^{-1}(\mathbf{P}\tilde{\phi}_n(\tau) - \mathbf{p})$$

이 왈드 검정통계량은 귀무가설 하에 점근적으로 카이제곱분포를 따른다.

4.3 $\tilde{\theta}_n(\tau)$ 의 점근 분포

이번 장에서는 $\tilde{\theta}_n(\tau) = \hat{\delta}_a(\tau) + \hat{\gamma}_a(\tau)$ 의 분포를 구한다. 먼저 이를 구하는데 필요한 커널밀도함수를 설정하면 다음과 같다.

$$f_\tau := \frac{1}{nh_B(\tau)} \sum_{t=1}^n \phi \left(\frac{U_t(\tau)}{h_B(\tau)} \right)$$

여기서 h_B 는 Bofinger(1975)에 의해 제안된 대역폭이다. 구체적으로 $h_B(\tau) = n^{\frac{1}{5}} [4.5\phi(\Phi^{-1}(\tau))^4 / (2(\Phi^{-1}(\tau))^2 + 1)^2]^{\frac{1}{2}}$ 으로 나타낼 수 있고 $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ 는 각각 표준정규분포 값, 누적 표준정규분포 값이다. 그리고 4장 1절에서 다뤘던 $\hat{\mathbf{Y}}_t = \boldsymbol{\Gamma}_*(\tau)' \mathbf{G}_t + \mathbf{K}_t(\tau)$ 와 보조정리 5의 증명을 이용하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_n(\tau) - \lambda_*(\tau) &= f_\tau^{-1} (\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(\mathbf{U}) - (\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}' \hat{\mathbf{Y}} (\hat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau)) \\ &= f_\tau^{-1} (\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(\mathbf{U}) - \boldsymbol{\Gamma}_*(\tau) (\hat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau)) \\ &\quad - (\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{K}(\tau) (\hat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau)) \end{aligned}$$

여기서 $\hat{\varsigma}_n(\tau) := \hat{\lambda}_n(\tau) + \boldsymbol{\Gamma}_*(\tau) \hat{\phi}_n(\tau)$ 로 놓으면, $\hat{\varsigma}_n(\tau) - \varsigma_*(\tau) := (\hat{\lambda}_n(\tau) - \lambda_*(\tau)) + \boldsymbol{\Gamma}_*(\tau) (\hat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau))$ 가 성립한다. 그리고 이로부터 아래의 식이 도출된다.

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\widehat{\zeta}_n(\tau) - \zeta_*(\tau)) &= \sqrt{n}f_\tau^{-1}\mathbf{D}_G^{-1}(\mathbf{D}_G^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{G}\mathbf{D}_G^{-1})^{-1}\mathbf{D}_G^{-1}\mathbf{G}'\Psi_\tau(\mathbf{U}) - \\ &\quad \sqrt{n}\mathbf{D}_G^{-1}(\mathbf{D}_G^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{G}\mathbf{D}_G^{-1})^{-1}\mathbf{D}_G^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{K}(\tau)(\widehat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau))\end{aligned}$$

여기서 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_n(\tau) - \zeta_*(\tau) &= \begin{bmatrix} \widehat{\alpha}_n(\tau) - \alpha_*(\tau) \\ \widehat{\delta}_{0,n}(\tau) - \delta_{0,*}(\tau) \\ \vdots \\ \widehat{\delta}_{q-1,n}(\tau) - \delta_{q-1,*}(\tau) \\ \widehat{\gamma}_n(\tau) - \gamma_*(\tau) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \mu_*(\tau) & \mu_*(\tau) & \cdots & \mu_*(\tau) \\ \xi_{1,0*}(\tau) & \xi_{2,0*}(\tau) & \cdots & \xi_{p,0*}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1,q-1*}(\tau) & \xi_{2,q-1*}(\tau) & \cdots & \xi_{p,q-1*}(\tau) \\ \beta_*(\tau) & \beta_*(\tau) & \cdots & \beta_*(\tau) \end{bmatrix} (\widehat{\phi}_n(\tau) - \phi_*(\tau))\end{aligned}$$

또한 위 식을 통해 다음의 정리가 성립된다.

보조정리 6. 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4, 가정 5, 가정 6에 따라 다음이 성립한다.

각각의 $\tau \in (0, 1)$ 에 대하여, $\sqrt{n}(\widehat{\gamma}_n(\tau) - \gamma_*(\tau)) \Rightarrow N[0, \beta_*(\tau)\boldsymbol{\iota}_p' \boldsymbol{\Pi}(\tau) \boldsymbol{\iota}_p \beta_*(\tau)']$

] 이다. □

이제 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau)$ 의 분포를 구하기 위해 다음의 식을 이용한다.

$$f_\tau^{-1}(\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\Psi_\tau(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_n(\tau) - \alpha_*(\tau) \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{0,n}(\tau) - \boldsymbol{\delta}_{0,*}(\tau) \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{q-1,n}(\tau) - \boldsymbol{\delta}_{q-1,*}(\tau) \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_n(\tau) - \boldsymbol{\gamma}_*(\tau) \end{bmatrix}$$

여기서 1행을 제외한 2행부터 마지막 행까지를 이용해 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau)$ 를 나타낼 수 있다.

위 행렬의 분산 공분산행렬을 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} A_{1 \times 1} & \mathbf{B}_{1 \times kq} & \mathbf{C}_{1 \times k} \\ \mathbf{D}_{kq \times 1} & \mathbf{E}_{kq \times kq} & \mathbf{F}_{kq \times k} \\ \mathbf{G}_{k \times 1} & \mathbf{H}_{k \times kq} & \mathbf{I}_{k \times k} \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathbf{E}_{kq \times kq}$ 와 $\mathbf{F}_{kq \times k}, \mathbf{H}_{k \times kq}, \mathbf{I}_{k \times k}$ 를 이용하여 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau) = \hat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_a(\tau)$ 의 분포를 구할 것이다. 우선 $Var(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau)) = Var(\hat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau)) + Var(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_a(\tau)) + 2 \times Cov(\hat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau), \hat{\boldsymbol{\gamma}}_a(\tau))$ 로 나타낼 수 있다. $Var(\hat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau)) = \mathbf{E}_{kq \times kq}$ 이며 보조정리 6에 기반하여 다음이 성립한다.

$$Var(\hat{\gamma}_a(\tau)) = \begin{bmatrix} n\beta_*(\tau)\boldsymbol{\iota}'_p\Pi(\tau)\boldsymbol{\iota}_p\beta_*(\tau)' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

위 행렬은 $kq \times kq$ 행렬이다. 0이 아닌 값을 갖는 첫 k 행 k 열 행렬은 앞서 보였던 $I_{k \times k}$ 와 동일하다. $2 \times Cov(\hat{\delta}_a(\tau), \hat{\gamma}_a(\tau))$ 는 $kq \times kq$ 꼴의 행렬에 1행 1열부터 kq 행 k 열까지 $2 \times \mathbf{F}_{kq \times k}$ 가 쓰이고 k 행 kq 열까지 $2 \times \mathbf{H}_{k \times kq}$ 가 쓰인다. 겹치는 첫 k 행 k 열은 대칭성에 의해 동일한 값을 갖는다. 그리고 나머지 원소는 다 0이다. 이로써 $\frac{1}{n}Var(\tilde{\theta}_n(\tau)) = \mathbf{M}(\tau)$ 의 대략적 모습을 확인하였다.

$\tilde{\theta}_n(\tau) = \hat{\delta}_a(\tau) + \hat{\gamma}_a(\tau)$ 는 $f_\tau^{-1}(\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\Psi_\tau(\mathbf{U})$ 와 밀접한 관계가 있어 이것의 공분산행렬을 구함이 우선 목적이다. 우선 보조정리 4를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}f_\tau^{-1}(\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\Psi_\tau(\mathbf{U}) &= \sqrt{n}f_\tau^{-1}\mathbf{D}_G^{-1} \\ &\times \sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} n^{-1} & n^{-1}\bar{\mathbf{W}}'_t & n^{-\frac{3}{2}}\mathbf{X}'_t \\ n^{-1}\bar{\mathbf{W}}_t & n^{-1}\bar{\mathbf{W}}_t\bar{\mathbf{W}}'_t & n^{-\frac{3}{2}}\bar{\mathbf{W}}_t\mathbf{X}'_t \\ n^{-\frac{3}{2}}\mathbf{X}_t & n^{-\frac{3}{2}}\mathbf{X}_t\bar{\mathbf{W}}_t & n^{-2}\mathbf{X}_t\mathbf{X}'_t \end{bmatrix}^{-1} \sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} n^{-\frac{1}{2}}\psi_\tau(U_t(\tau)) \\ n^{-\frac{1}{2}}\psi_\tau(U_t(\tau))\bar{\mathbf{W}}_t \\ n^{-1}\psi_\tau(U_t(\tau))\mathbf{X}_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

또한 다음 관계가 성립한다.

$$\sum_{t=1}^n \begin{bmatrix} n^{-1} & n^{-1}\bar{\mathbf{W}}_t' & n^{-\frac{3}{2}}\mathbf{X}_t' \\ n^{-1}\bar{\mathbf{W}}_t & n^{-1}\bar{\mathbf{W}}_t\bar{\mathbf{W}}_t' & n^{-\frac{3}{2}}\bar{\mathbf{W}}_t\mathbf{X}_t' \\ n^{-\frac{3}{2}}\mathbf{X}_t & n^{-\frac{3}{2}}\mathbf{X}_t\bar{\mathbf{W}}_t & n^{-2}\mathbf{X}_t\mathbf{X}_t' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0' & \int_0^1 \bar{\mathbf{B}}_W(r)' dr \\ 0 & E[\bar{\mathbf{W}}_t\bar{\mathbf{W}}_t'] & 0' \\ \int_0^1 \bar{\mathbf{B}}_W(r) dr & 0 & \int_0^1 \bar{\mathbf{B}}_W(r)\bar{\mathbf{B}}_W(r)' dr \end{bmatrix} =: \mathbf{Q}$$

그리고 $E[\psi_\tau(U_t(\tau))^2] = \sigma_*^2$ 라 두고 $E[\psi_\tau(U_t(\tau))] = 0$ 인 것을 활용하면 다음과 같은 관계를 유도할 수 있다.

$$\sqrt{n}f_\tau^{-1}(\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\Psi_\tau(\mathbf{U}) \stackrel{\text{A}}{\sim} N[0, f_\tau^{-2}\sigma_*^2\mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1}]$$

정규분포를 따르는 이유는 가정 3에서 오차항들을 iid로 상정했고 일차적률을 0, 이차적률을 유한이라 설정했기 때문이다. 이 행렬을 앞서 설명한 꼴로 재배치하면 QARDL-ECM의 두번째 단기모수 추정량 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau)$ 의 분포를 나타낼 수 있다. 그것이 정리 2이다.

정리 2. 가정 1, 가정 2, 가정 3, 가정 4, 가정 5, 가정 6에 따라 다음이 성립한다.
각각의 $\tau \in (0, 1)$ 에 대하여, $\sqrt{n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau) - \boldsymbol{\theta}^*(\tau)) \Rightarrow N[\mathbf{0}, \mathbf{M}(\tau)]$ 가 성립한다.
여기서 $\mathbf{M}(\tau) = \frac{1}{n}[Var(\hat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau)) + Var(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_a(\tau)) + 2 \times Cov(\hat{\boldsymbol{\delta}}_a(\tau), \hat{\boldsymbol{\gamma}}_a(\tau))]$ 이다.

□

4장 2절과 마찬가지로 이렇게 구한 추정량과 분산을 이용해 귀무가설, 대립가설을 세우고 왈드 검정통계량을 구할 수 있다.

$$H_0^{(2)} : \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}^*(\tau) = \mathbf{q} \quad \text{vs} \quad H_1^{(2)} : \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}^*(\tau) \neq \mathbf{q}$$

$$\mathcal{W}_n(\boldsymbol{\theta}) = n(\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau) - \mathbf{q})'(\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{M}}(\tau)\mathbf{Q}')^{-1}(\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n(\tau) - \mathbf{q})$$

이 왈드 검정통계량 또한 귀무가설 하에 점근적으로 카이제곱분포를 따른다.

5 몬테 칼로 모의실험

이 장에서는 앞서 구한 추정량, 분포가 합당한지에 관해 검증한다. 몬테 칼로 모의실험을 통해 왈드값에 대응하는 p 값에 대한 사이즈가 5% 기각역을 기준으로 5%에 근접하는지 확인할 것이다. 또한 표본의 수를 증가시키면서 검정력이 어떻게 변하는지도 살펴본다. 몬테 칼로 모의실험 내용을 다룬에 앞서 Cho, Kim and Shin (2015)의 QARDL 코드를 바탕으로 코드를 확장, 변형했음을 밝힌다. 실증분석을 다룬 장에서도 QARDL 코드를 기반으로 코드를 확장, 변형하였다. 이제, QARDL(2,1) 모형을 만든다.

$$Y_t = \alpha_*(\tau) + \phi_1(\tau)Y_{t-1} + \phi_2(\tau)Y_{t-2} + \theta_1(\tau)X_t + \theta_2(\tau)X_{t-1} + U_t(\tau)$$

구체적으로 위 식은 $X_t := X_{t-1} + W_t$, $W_t := \rho_*R_{t-1} + (1 - \rho_*^2)R_t$, $R_t \sim IID N(0, 1)$, $\alpha_* = 1$, $\phi_1 = 0.1$, $\phi_2 = 0.05$, $\theta_1 = 0.2$, $\theta_2 = 0.1$, $\rho_* = 0.5$ 이고 분위수는 0.25, 0.5, 0.75 이다. 위 식을 오차수정모형으로 변형한 식의 단기모수는 4장 1절에서 본 바와 같이 $\phi^*(\tau) = -0.05$, $\theta^*(\tau) = 0.2$ 이다.

이렇게 만든 식을 바탕으로 표본이 각각 50, 200, 400, 600, 800, 1000, 2000개일 때 5000번 반복하여 5% 기각역 하에 사이즈를 구한다. 오차항이 표준정규분포를 따르는 경우, 자유도 5인 t분포를 따르는 경우 둘 다 살펴 볼 것이다. 월드 검정통계량을 $\mathcal{W}_n^{(j)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(j)}(\Theta)$ 와 같이 나타내고 $\Phi^*(\tau) = [\phi^*(0.25), \phi^*(0.5), \phi^*(0.75)]'$, $\Theta^*(\tau) = [\theta^*(0.25), \theta^*(0.5), \theta^*(0.75)]'$, $j = 1, 2, 3, 4$ 로 둔다. 이 때, 귀무가설, 대립가설은 다음과 같다.

$$H_0^{(j)}(\Phi) : \mathbf{S}_j \Phi^*(\tau) = s_j \text{ vs } H_1^{(j)}(\Phi) : \mathbf{S}_j \Phi^*(\tau) \neq s_j$$

$$H_0^{(j)}(\Theta) : \mathbf{S}_j \Theta^*(\tau) = s_j \text{ vs } H_1^{(j)}(\Theta) : \mathbf{S}_j \Theta^*(\tau) \neq s_j$$

여기서 $\mathbf{S}_1 = [1, -1, 0], \mathbf{S}_2 = [0, 1, -1], \mathbf{S}_3 = [1, 0, -1], \mathbf{S}_4 = [\mathbf{S}'_1, \mathbf{S}'_2]'$ 이고 $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, s_4 = [0, 0]'$ 으로 둔다.

월드 검정통계량의 성질에 따라 귀무가설이 성립할 때 $\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta)$ 은 자유도 1인 카이제곱분포를 따른다. 그리고 $\mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$ 는 자유도 2인 카이제곱분포를 따른다. 표 1, 표 2를 보면 반복이 5000번일 때 표본수가 증가함에 따라 사이즈가 5%에 가까워짐을 알 수 있다. 따라서 4장에서 구한 QARDL-ECM의 단기모수 추정량과 그 분포는 타당성을 갖는다.

이제 검정력에 관해 살펴본다. 귀무가설 하에서 $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ 이고 $s_4 = [0, 0]'$ 이다. Φ 의 경우 대립가설을 $s_1 = s_2 = s_3 = 0.2, s_4 = [0.2, 0.2]'$ 으로 두고 Θ 의 경우 $s_1 = s_2 = s_3 = 0.3, s_4 = [0.3, 0.3]'$ 으로 두었다. 3000번 반복한다 할 때 표본이 50, 100, 200, 300, 400, 500개로 증가함에 따라 검정력은

증가한다. 표본이 500개일 때 검정력이 거의 대부분 100에 근접함을 알 수 있다. 이는 우리의 직관과 부합한다. Φ , Θ 둘 다 $H_0^{(3)}(\cdot)$ 의 경우 $H_0^{(1)}(\cdot), H_0^{(2)}(\cdot)$ 에 비해 검정력이 더 작다. 첫번째 분위수와 세번째 분위수에 관한 것이므로 두 분위수 값의 차이가 크기 때문에 검정력이 작은 것이다. 그리고 $H_0^{(4)}(\cdot)$ 는 가장 빠르게 검정력이 100에 수렴한다. s_4 의 두 원소 모두에 대립가설일 때의 값을 부여했기 때문에 하나일 때보다 더 민감하게 반응한다 해석할 수 있다.

분포	검정 \ 표본 크기	50	200	400	600	800	1000	2000
$U_t \sim N(0, 1)$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi)$	1.40	2.92	3.15	3.77	4.32	4.26	4.51
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi)$	1.02	2.62	3.54	4.18	4.41	4.18	4.43
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi)$	0.26	1.96	2.52	3.58	3.37	3.74	3.82
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$	0.33	1.96	2.62	3.69	3.74	4.11	3.91
$U_t \sim t_5$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi)$	0.88	2.80	3.45	4.30	4.41	4.18	4.43
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi)$	0.71	2.44	3.46	3.37	3.91	4.14	4.55
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi)$	0.15	1.80	3.21	3.18	3.41	3.93	4.04
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$	0.14	1.65	2.95	3.23	3.48	3.86	3.74

표 1: $\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$ 의 사이즈 (5% 유의수준)

(i) 반복 : 5000번

(ii) DGP : $Y_t = \alpha_* + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \theta_1 X_t + \theta_2 X_{t-1} + U_t$, $X_t := X_{t-1} + W_t$,

$$W_t := \rho_* R_{t-1} + (1 - \rho_*^2) R_t, R_t \sim IID N(0, 1)$$

(iii) 모형 : $\Delta Y_t = \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau)(Y_{t-1} - \beta_*(\tau)' X_{t-1}) + \phi_1^*(\tau) \Delta Y_{t-1} + \theta_0^*(\tau) \Delta X_t + U_t(\tau)$

(iv) $s_1 = s_2 = s_3 = 0, s_4 = [0, 0]'$

(v) $\alpha_* = 1, \phi_1 = 0.1, \phi_2 = 0.05, \theta_1 = 0.2, \theta_2 = 0.1, \rho_* = 0.5$

분포	검정 \ 표본 크기	50	200	400	600	800	1000	2000
$U_t \sim N(0, 1)$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta)$	2.37	3.74	3.83	4.18	4.48	4.36	4.66
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta)$	2.71	3.29	4.14	4.66	3.94	4.35	4.34
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta)$	0.70	2.98	3.32	3.97	3.99	4.08	4.21
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$	1.00	2.89	3.61	4.25	4.03	4.12	3.94
$U_t \sim t_5$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta)$	2.34	3.12	3.54	4.27	3.61	4.50	4.51
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta)$	1.68	3.05	3.49	4.12	3.95	4.02	4.99
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta)$	0.43	2.27	2.89	3.46	3.80	3.87	4.24
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$	0.58	2.19	2.88	3.48	3.42	3.77	4.64

표 2: $\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$ 의 사오]즈 (5% 유의수준)

방식은 표 1과 같다.

분포	검정 \ 표본 크기	50	100	200	300	400	500
$U_t \sim N(0, 1)$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi)$	37.93	53.33	75.33	87.46	95.6	98.53
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi)$	38.00	50.50	75.70	89.00	95.10	98.40
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi)$	37.10	42.73	57.6	71.16	81.16	89.56
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$	64.46	82.06	97.03	99.43	99.90	100.0
$U_t \sim t_5$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi)$	48.16	61.93	86.80	94.60	98.80	99.60
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi)$	46.13	62.16	84.2	95.06	98.6	99.56
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi)$	42.16	48.90	67.33	80.03	89.30	93.90
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$	73.03	87.80	98.46	99.90	100.0	100.0

표 3: $\mathcal{W}_n^{(1)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Phi), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Phi)$ 의 검정력

반복 : 3000번, 나머지는 표 1과 같다.

분포	검정 \ 표본 크기	50	100	200	300	400	500
$U_t \sim N(0, 1)$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta)$	39.30	64.40	89.10	96.80	99.16	99.83
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta)$	39.63	63.23	88.33	96.66	99.36	99.93
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta)$	36.00	50.50	72.96	85.56	93.50	97.36
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$	67.56	89.56	99.43	100.0	100.0	100.0
$U_t \sim t_5$	$\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta)$	39.06	58.26	81.86	93.63	97.83	99.26
	$\mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta)$	37.26	58.10	83.40	93.93	98.16	99.43
	$\mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta)$	34.46	44.96	63.66	78.06	87.10	92.53
	$\mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$	63.26	84.90	98.03	99.76	99.96	100.0

표 4: $\mathcal{W}_n^{(1)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(2)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(3)}(\Theta), \mathcal{W}_n^{(4)}(\Theta)$ 의 검정력

반복 : 3000번, 나머지는 표 1과 같다.

6 실증분석

실증분석에 관해 본 논문은 Cho, Kim and Shin (2015)과 동일한 자료를 사용한다. 앞으로 Cho, Kim and Shin (2015)을 약자인 CKS로 칭하기로 한다. CKS는 가우스 프로그래밍을 이용하여 OLS, 분위수회귀 결과를 산출했는데 본 논문은 매트랩 프로그래밍을 이용해 OLS, 분위수회귀 결과를 산출하여 CKS 결과와 비교한다. 이를 MAT라 칭한다. 그리고 이단계 추정법으로 OLS, 분위수회귀 결과를 구해 CKS, MAT 결과와 비교한다. 이는 TSE라 칭한다. 다음 단락부터 본 실증연구의 배경, 경제학적 의미를 밝히고 CKS, MAT, TSE 결과를 상호비교할 것이다.

배당 정책에 관해 28명의 경영자를 인터뷰한 Lintner(1956)는 기업들이 장기 목표 지불성향을 기준으로 수익의 변화에 따라 배당금을 조절하는 것을

관찰했다. 그리고 기업들이 짧은 기간 동안 배당금의 급격한 변화를 피한다는 것 또한 확인했다. 이 발견은 경영자들이 장기 목표 지불성향을 위해, 예상하지 못한 기업 수익의 변화에 대응하여 배당금 조절을 한다는 의미를 함축한다.

Brav et al. (2005)는 384명의 금융 중역들을 설문조사하여 배당금과 자사 주 재매입 결정을 유발하는 요인을 찾아내고자 했다. 그 결과, 주당 배당금의 감소를 피하고 (93.8%동의), 배당금 흐름이 평활화길 바란다는 (89.6%동의) 답을 들을 수 있었다. 이는 배당금을 줄일 경우 부정적 결과가 있을지 모른다는 (88.1%동의) 이유 때문이다. Leary and Michaely(2011)는 규모가 크고 오랜기간 존속하여 자금난이 없는 미국 기업들일수록 배당금을 평활하게 유지함을 밝혀냈다. 또한 Chen et al. (2012)은 2차 세계대전 이전보다 이후에 기업들이 배당금을 평활하게 함을 발견했다. 그리고 배당금이 평활하면 배당금 성장을 예측하기 어렵고, 배당 수익이 유지됨을 밝혀냈다.

이 모든 선행연구는 평균에 대한 분석이고 여러 분위를 대상으로 한 분석이 아니다. CKS는 바로 이 점에 착안하여 실증분석을 진행했다. 우선 OLS 모형은 다음과 같다.

$$\Delta D_t = \alpha_* + \zeta_* D_{t-1} + \gamma_* E_{t-1} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{j*} \Delta D_{t-j} + \delta_* \Delta E_t + U_t$$

위 식에서 D_t 는 배당금, E_t 는 수익을 뜻한다. 그리고 ζ_* 는 배당금의 평활화 정도 (ECM), $\beta_* = -\frac{\gamma_*}{\zeta_*}$ 는 장기 목표 지불성향, λ_* 는 가속도 효과, δ_* 는 충격 반응에 대한 모수를 뜻한다. CKS는 이를 분위수 개념으로 확장하여 다음 식의

모수를 추정하고자 했다.

$$\Delta D_t = \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau)D_{t-1} + \gamma_*(\tau)E_{t-1} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{j*}(\tau)\Delta D_{t-j} + \delta_*(\tau)\Delta E_t + U_t(\tau)$$

CKS는 Robert Shiller의 홈페이지에 있는 1871년 3분기 - 2010년 2분기의 Standard and Poors 500 주식의 실질 배당금, 실질 수익 분기별 자료를 이용했고 ARDL(p, q)모형에서 시차 $p=3, q=1$ 이 적합함을 추정을 통해 보였다. 본 논문은 앞서 언급한대로 위와 똑같은 자료, 모형을 가지고 매트랩으로 분석한 결과 (MAT)를 보였다. 이단계 추정법에 관한 TSE는, 먼저 장기 모수 추정에 관한 식 $D_{t-1} = \beta_* E_{t-1} + \epsilon_{t-1}$ 에서 잔차인 ϵ_{t-1} 을 추출하여 다음 식에 대해 OLS를 시행한다.

$$\Delta D_t = \alpha_* + \zeta_* \epsilon_{t-1} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{j*} \Delta D_{t-j} + \delta_* \Delta E_t + U_t$$

TSE의 OLS 결과와 CKS, MAT의 OLS 결과를 상호 비교해보자. CKS의 경우 표 5 (a)에서 볼 수 있듯이 ECM 계수가 -0.04이다. 이는 조정 속도가 4%에 불과함을 의미한다. 그리고 장기 목표 지불성향은 0.36이고 가속도, 충격 반응 모수는 0.48, 0.01이다. 해석해 보면, 배당금의 변화는 수익의 변화보다 과거 배당금 수치에 더 영향 받는다는 것을 의미한다. MAT의 OLS 결과 (표 6 (a))는 표준오차에 미세한 차이가 있으나 CKS의 OLS 결과와 거의 일치한다. TSE의 OLS 추정치는 (표 7 (a)) β_* 를 제외하고 CKS, MAT 결과와 거의 비슷하다. β_* 의 추정치가 0.31로 나타났는데 CKS, MAT와 매우 유사한 모형이라 할지라도 똑같지는 않기 때문에 추정치에 차이가 있다고 해석할 수 있다.

앞서 언급한 대로 CKS는 ARDL(3,1)모형을 QARDL(3,1)모형으로 바꿔서 분석했다. CKS와 똑같은 자료, 모형을 가지고 매트랩으로 분석한 결과(MAT)를 나타냈고 앞서 언급한 방식대로 TSE를 만들어 분위수회귀 결과를 비교했다. 분위수를 도입한 TSE를 나타내면 다음과 같다.

$$\Delta D_t = \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau)\epsilon_{t-1} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{j*}(\tau)\Delta D_{t-j} + \delta_*(\tau)\Delta E_t + U_t(\tau)$$

CKS, MAT, TSE 각각의 분위수회귀 결과를 비교하는 것이 본 장의 가장 중요한 목적이다. 그리고 이 장의 경제학적 의미를 도출하기 위해 다음 2가지 논제를 다룬다.

- 논제 1 : 4가지 모수의 추정치가 분위수에 따라 다른지를 확인하고 특히 분위에 따른 배당금 평활화 정도, 장기 목표 지불성향에 관한 추정치를 주목한다.
- 논제 2 : 롤링 윈도우 방법을 통해 시간의 변화에 따라 분위별로 다른 양상이 나타나는지 확인한다.

이제 분위수 회귀 결과를 나타낸 표 5,6,7, 90% 신뢰구간을 포함한 그림 1,2에 대해 살펴보자. 이번 경우는 CKS와 MAT결과가 거의 동일하여 CKS에 관한 설명은 생략한다. 그림 1에서 ECM 모수의 추정치 $|\hat{\zeta}(\tau)|$ 은 낮은 분위에서 6%의 조정속도를 갖고 분위가 높아짐에 따라 점차 감소한다. TSE에 관한 그림 2도 마찬가지이다. 배당금의 평활화 정도가, 낮은 분위에서보다 중상 정도의

분위에서 더 크다는 의미이고 앞서 살펴본대로 수익이 높고 안정된 기업일수록 배당금 평활화 정도가 더 크다는 가설과 일치한다. 두번째로, 장기 목표 지불성향 $\hat{\beta}(\tau)$ 은 MAT에서 분위가 올라감에 따라 증가하고 0.3 정도의 분위부터 상위 분위까지는 비슷한 값을 보이나 가장 높은 분위에서 다시 감소한다. TSE의 경우, $\hat{\beta}(\tau)$ 가 계속 증가하다 가장 높은 분위에서 감소한다. 중위 분위를 제외하면 MAT와 비슷한 추세를 보인다고 해석할 수 있다. 세째로 $\hat{\lambda}(\tau)$ 는 MAT, TSE 모두 분위가 높아짐에 따라 계속 감소한다. 이는 분위수회귀를 해야할 필요성을 드러내는 결과이다. 그리고 $\hat{\delta}(\tau)$ 는 MAT, TSE 모두에서 분위가 높아짐에 따라 감소한다. 가장 높은 분위에서는 거의 0이하로 내려간다. 높은 분위에서 현재 소득의 흐름이 배당금의 변화에 거의 영향이 없음을 보여주는 결과라 볼 수 있다.

표본에 포함되는 기간이 140년이 넘으므로 배당 정책 방식을 시간에 따라서 분석해 볼 수 있다. 이를 수행하는데 롤링 윈도우 방법을 이용한다. 각 윈도우는 320개의 분기를 포함하고 개수는 239개이다. 90% 신뢰구간을 포함한 MAT에 대한 그래프와 TSE에 대한 그래프가 그림 3,4 이다.

CKS의 경우 $|\hat{\zeta}_*(\tau)|$ 의 분위수 추정치는 시간이 지남에 따라 크게 변한다. 예상한대로 시간이 지남에 따라 배당금 평활화가 커지고 있다. 분위별로 보면, 초기에는 $|\hat{\zeta}(0.75)| > |\hat{\zeta}(0.5)| > |\hat{\zeta}(0.25)|$ 이고 후기에는 $|\hat{\zeta}(0.25)| > |\hat{\zeta}(0.5)| \approx |\hat{\zeta}(0.75)|$ 의 관계를 갖는다. 그리고 초기가 후기보다 분위별 비대칭성이 강한 것도 확인할 수 있다. MAT는 CKS와 동일한 모형이기 때문인지 모든 양상이 거의 같다. TSE는 초기에 $|\hat{\zeta}(0.75)| > |\hat{\zeta}(0.5)| > |\hat{\zeta}(0.25)|$ 로 CKS, MAT와 거의 동일한 양상이고 후기에는 순서에 $|\hat{\zeta}(0.5)| > |\hat{\zeta}(0.25)| \approx |\hat{\zeta}(0.75)|$ 와 같은

변화가 있다. 그러나 순서에 변화가 있더라도 값 자체는 셋 다 비슷하다. CKS, MAT도 후기 값들은 차이가 거의 없어 충분히 나타날 수 있는 결과라 판단된다.

$\beta_*(\tau)$ 의 분위수 추정치는 CKS, MAT, TSE 모두 시간이 지남에 따라 감소 한다. 이는 장기 목표 지불성향이 현재에 다다를수록 점점 감소한다는 Fama and French (2001)의 분석 결과와 일치한다. 분위별로 보면 CKS와 MAT의 결과가 이번에도 동일하다. 초기에는 $\hat{\beta}(0.75) > \hat{\beta}(0.5) > \hat{\beta}(0.25)$ 이고 후 기에는 $\hat{\beta}(0.25) > \hat{\beta}(0.5) > \hat{\beta}(0.75)$ 관계를 갖는다. TSE의 결과는 초기에 $\hat{\beta}(0.75) > \hat{\beta}(0.5) > \hat{\beta}(0.25)$ 이고 후기에 $\hat{\beta}(0.25) \approx \hat{\beta}(0.5) \approx \hat{\beta}(0.75)$ 인데 그 래프 개형이 많이 다름을 확인할 수 있다. 이단계 추정법을 통한 TSE의 분위수 회귀 결과와 한번에 얻은 CKS, MAT의 분위수 회귀 결과가 가장 차이가 나는 부분이 장기계수 $\hat{\beta}(\tau)$ 이기 때문에 이는 그에 따른 결과라 볼 수 있다. 하지만 시간에 따른 추세가 CKS, MAT와 비슷하게 나타나 어느 정도 관련성이 있다고 볼 수 있다.

$\hat{\lambda}(\tau)$ 의 경우 CKS, MAT, TSE 모두 시간에 따라 유사한 양상을 띤다. 다만, 증가, 감소가 혼재되어 있어 눈에 띄는 특징이 보이지 않는다. 분위별로 봤을 때 CKS, MAT, TSE가 모두 초기에 $\hat{\lambda}(0.25) > \hat{\lambda}(0.5) > \hat{\lambda}(0.75)$ 이고 후기에는 $\hat{\lambda}(0.75) > \hat{\lambda}(0.5) \approx \hat{\lambda}(0.25)$ 이다.

$\hat{\delta}(\tau)$ 는 CKS, MAT, TSE 모두 시간에 따라 감소한다. 가장 최근에 와서는 거의 0에 수렴해 영향을 미치는 계수가 아니라고도 보여진다. 그리고 분위에 따라 눈에 띄게 다르지 않다.

마지막 단계로, 0.25, 0.5, 0.75 각 분위에 따른 비대칭성이 시간이 지남에 따라 어떻게 변하는지 분석한다. 그림 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12가 그것이다. 먼저

장기 목표 지불성향 $\beta_*(\tau)$ 에 대해서 다음과 같은 귀무가설을 세운다. H_{01}^β : $\beta_*(0.25) = \beta_*(0.5)$, H_{02}^β : $\beta_*(0.5) = \beta_*(0.75)$, H_{03}^β : $\beta_*(0.25) = \beta_*(0.75)$, H_{04}^β : $\beta_*(0.25) = \beta_*(0.5) = \beta_*(0.75)$ 이에 관하여 앞서 몬테 칼로 모의실험과 같이 다음의 월드 검정을 시행한다. $\mathcal{W}_n^{(1)}(\beta), \mathcal{W}_n^{(2)}(\beta), \mathcal{W}_n^{(3)}(\beta), \mathcal{W}_n^{(4)}(\beta)$. $\beta_*(\tau)$ 뿐만 아니라 다른 3가지 모수를 추정해 만든 월드값의 p -값 그래프를 비교 분석할 것이다. 그림 5, 6의 그래프를 보면, CKS와 MAT는 초기에 비대칭성이 강하고 후기에 가서 비대칭성이 완화된다. TSE의 경우, 모수의 추정치와 그 분산이 CKS, MAT와 약간 달라 다른 형태의 그래프가 산출되었다. 그러나 초기에 비대칭성이 강하고 후기에 비대칭성이 완화되는 추세는 CKS, MAT와 유사하다. 그림 7, 8에 관한 $\zeta_*(\tau)$ 의 경우 $\mathcal{W}_n^{(2)}(\zeta)$ 를 제외하고 CKS, MAT, TSE 모두 초기에 비대칭성이 강하고 후기에 완화된다. $\mathcal{W}_n^{(2)}(\zeta)$ 조차도 그래프 개형이 셋 다 비슷해 의도한대로 결과가 나왔다.

그림 9, 10의 $\lambda_*(\tau)$ 와 관련해, CKS, MAT, TSE 모두 비대칭성에 대해 확실히 판단하기 어렵다. 등락을 반복하다보니 뚜렷한 패턴이 없기 때문이다. 그리고 이 경우에 CKS, MAT와 TSE의 그래프 개형이 다른 편이다. 초기에 CKS, MAT의 비대칭성이 강한 반면, TSE는 비대칭성이 약하다. 이 또한 추정치, 분산이 모형 간에 약간 차이가 나다보니 나타나는 결과로 보인다. 그림 11, 12의 $\delta_*(\tau)$ 와 관련해서는, CKS, MAT, TSE의 그래프가 유사한 형태를 띤다.

실증분석 장의 내용을 요약하면, 첫째, 하위 분위보다 중상위 분위에서 배당금 평활화 정도가 더 크다는 것. 둘째, 시간이 지남에 따라 배당금 평활화 정도가 커지고, 충격반응 계수가 0에 근접하는 것. 셋째, 장기 목표 지불성향이 최근에 와서 30% 이하로 하락하여 영향력이 미미해진 것. 넷째, 분위에 따른

비대칭성이 크게 존재한다는 것이다. CKS, MAT, TSE 각각의 경우를 비교하여, 몇몇 다른 점도 존재했지만 공통점이 많이 존재한다는 것 또한 밝혀냈다.

(a) OLS 추정 결과				
	ζ_*	β_*	λ_*	δ_*
	-0.04 (0.005)	0.36 (0.013)	0.48 (0.039)	0.01 (0.007)

(b) 분위수회귀 추정 결과				
분위수	$\zeta_*(\tau)$	$\beta_*(\tau)$	$\lambda_*(\tau)$	$\delta_*(\tau)$
0.05	-0.06 (0.014)	0.27 (0.030)	0.58 (0.043)	0.02 (0.015)
0.10	-0.06 (0.006)	0.33 (0.020)	0.55 (0.051)	0.02 (0.012)
0.20	-0.04 (0.009)	0.37 (0.050)	0.55 (0.057)	0.02 (0.007)
0.30	-0.04 (0.007)	0.40 (0.027)	0.53 (0.053)	0.02 (0.010)
0.40	-0.03 (0.008)	0.36 (0.041)	0.48 (0.059)	0.02 (0.012)
0.50	-0.03 (0.008)	0.35 (0.043)	0.47 (0.066)	0.03 (0.013)
0.60	-0.03 (0.006)	0.38 (0.023)	0.50 (0.067)	0.02 (0.013)
0.70	-0.04 (0.006)	0.36 (0.022)	0.45 (0.065)	0.02 (0.012)
0.80	-0.04 (0.008)	0.39 (0.024)	0.37 (0.053)	0.01 (0.008)
0.90	-0.04 (0.009)	0.39 (0.033)	0.30 (0.063)	-0.00 (0.008)
0.95	-0.04 (0.008)	0.39 (0.039)	0.30 (0.050)	-0.00 (0.009)

표 5: OLS와 분위수회귀 추정 결과 (CKS)

- (i) 소괄호 안은 표준오차를 뜻하고 장기계수는 델타방법을 통해 계산된다.
- (ii) OLS 추정 모형 : $\Delta D_t = \alpha_* + \zeta_* D_{t-1} + \gamma_* E_{t-1} + \lambda_* \Delta D_{t-1} + \delta_* \Delta E_t + U_t = \alpha_* + \zeta_*(D_{t-1} - \beta_* E_{t-1}) + \lambda_* \Delta D_{t-1} + \delta_* \Delta E_t + U_t$
- (iii) 분위수 추정 모형 : $\Delta D_t = \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau) D_{t-1} + \gamma_*(\tau) E_{t-1} + \lambda_*(\tau) \Delta D_{t-1} + \delta_*(\tau) \Delta E_t + U_t(\tau) = \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau) (D_{t-1} - \beta_*(\tau) E_{t-1}) + \lambda_*(\tau) \Delta D_{t-1} + \delta_*(\tau) \Delta E_t + U_t(\tau)$

(a) OLS 추정 결과				
	ζ_*	β_*	λ_*	δ_*
	-0.04 (0.005)	0.36 (0.025)	0.48 (0.043)	0.01 (0.005)

(b) 분위수회귀 추정 결과				
분위수	$\zeta_*(\tau)$	$\beta_*(\tau)$	$\lambda_*(\tau)$	$\delta_*(\tau)$
0.05	-0.06 (0.01)	0.27 (0.019)	0.58 (0.082)	0.02 (0.01)
0.10	-0.06 (0.008)	0.33 (0.022)	0.55 (0.066)	0.02 (0.007)
0.20	-0.04 (0.007)	0.37 (0.032)	0.55 (0.053)	0.02 (0.006)
0.30	-0.04 (0.006)	0.40 (0.029)	0.53 (0.046)	0.02 (0.005)
0.40	-0.03 (0.006)	0.36 (0.037)	0.48 (0.044)	0.02 (0.005)
0.50	-0.03 (0.005)	0.35 (0.037)	0.47 (0.044)	0.03 (0.005)
0.60	-0.03 (0.006)	0.38 (0.029)	0.50 (0.044)	0.02 (0.005)
0.70	-0.04 (0.006)	0.36 (0.024)	0.45 (0.047)	0.02 (0.005)
0.80	-0.04 (0.006)	0.39 (0.025)	0.37 (0.051)	0.01 (0.006)
0.90	-0.04 (0.008)	0.39 (0.034)	0.30 (0.063)	0.00 (0.007)
0.95	-0.04 (0.01)	0.33 (0.038)	0.44 (0.078)	-0.01 (0.009)

표 6: OLS와 분위수회귀 추정 결과 (MAT)

방식은 표 5와 같다.

(a) OLS 추정 결과				
	ζ_*	β_*	λ_*	δ_*
	-0.04 (0.005)	0.31 (0.007)	0.51 (0.042)	0.01 (0.005)

(b) 분위수회귀 추정 결과				
분위수	$\zeta_*(\tau)$	$\beta_*(\tau)$	$\lambda_*(\tau)$	$\delta_*(\tau)$
0.05	-0.06 (0.01)	0.28 (0.011)	0.52 (0.078)	0.02 (0.009)
0.10	-0.06 (0.008)	0.28 (0.01)	0.57 (0.066)	0.02 (0.008)
0.20	-0.04 (0.007)	0.29 (0.009)	0.59 (0.053)	0.03 (0.006)
0.30	-0.03 (0.006)	0.31 (0.008)	0.56 (0.046)	0.02 (0.005)
0.40	-0.03 (0.006)	0.32 (0.007)	0.49 (0.043)	0.02 (0.005)
0.50	-0.03 (0.005)	0.33 (0.007)	0.47 (0.043)	0.02 (0.005)
0.60	-0.03 (0.006)	0.34 (0.007)	0.51 (0.044)	0.02 (0.005)
0.70	-0.04 (0.006)	0.37 (0.008)	0.43 (0.046)	0.02 (0.005)
0.80	-0.04 (0.007)	0.40 (0.009)	0.43 (0.051)	0.008 (0.006)
0.90	-0.04 (0.008)	0.40 (0.01)	0.36 (0.063)	0.003 (0.008)
0.95	-0.04 (0.01)	0.35 (0.012)	0.42 (0.076)	-0.007 (0.009)

표 7: OLS와 분위수회귀 추정 결과 (TSE)

- (i) 소괄호 안은 표준오차를 뜻하고. 장기계수는 OLS의 경우 $Y_{t-1} = \beta_* \mathbf{X}_{t-1} + \epsilon_{t-1}$ 에 의해 계산되고 분위수회귀의 경우 $Y_{t-1} = \beta_*(\tau) \mathbf{X}_{t-1} + \epsilon_{t-1}(\tau)$ 에 의해 계산된다.
- (ii) OLS 추정 모형 : $\Delta D_t = \alpha_* + \zeta_* \epsilon_{t-1} + \lambda_* \Delta D_{t-1} + \delta_* \Delta E_t + U_t$
- (iii) 분위수 추정 모형 : $\Delta D_t = \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau) \epsilon_{t-1} + \lambda_*(\tau) \Delta D_{t-1} + \delta_*(\tau) \Delta E_t + U_t(\tau)$

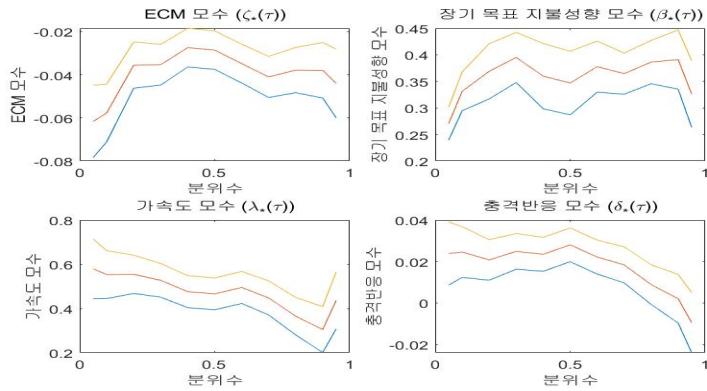


그림 1: 모수 추정치 (MAT)

분위수 : 0.05, 0.10, 0.20, ..., 0.95, 신뢰구간 : 90%

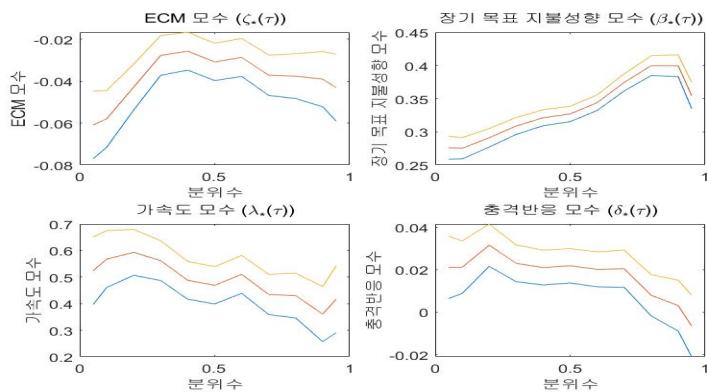


그림 2: 모수 추정치 (TSE)

분위수 : 0.05, 0.10, 0.20, ..., 0.95, 신뢰구간 : 90%

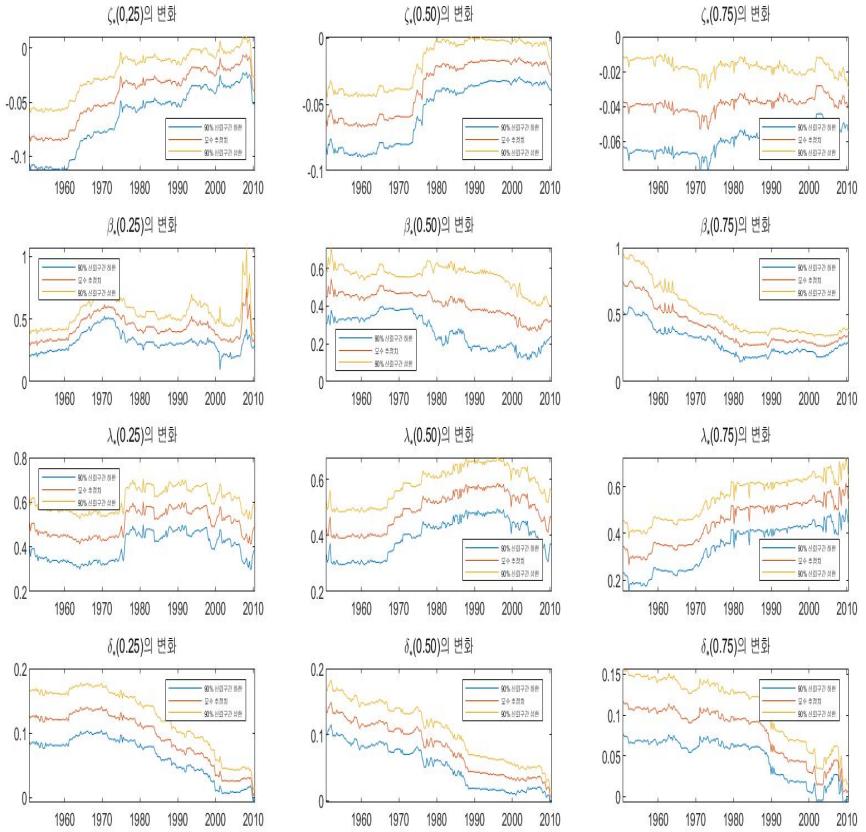


그림 3: 룰링 윈도우 방법을 사용한 $\zeta_*(\tau)$, $\beta_*(\tau)$, $\lambda_*(\tau)$, $\delta_*(\tau)$ 의 추정치 (MAT)

각각의 윈도우는 320개의 관측치로 구성되었고 분위수는 0.25, 0.5, 0.75이다. 첫번째 윈도우는 1871년 1분기에서 1950년 4분기까지이다.

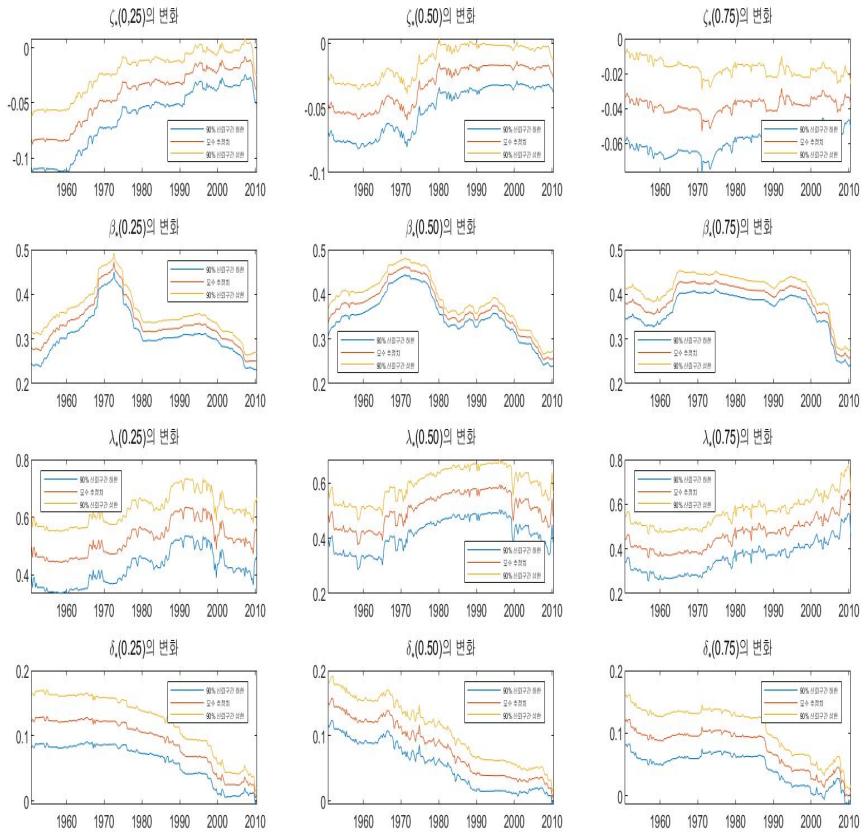


그림 4: 롤링 윈도우 방법을 사용한 $\zeta_*(\tau)$, $\beta_*(\tau)$, $\lambda_*(\tau)$, $\delta_*(\tau)$ 의 추정치 (TSE)

방식은 그림 3과 같다.

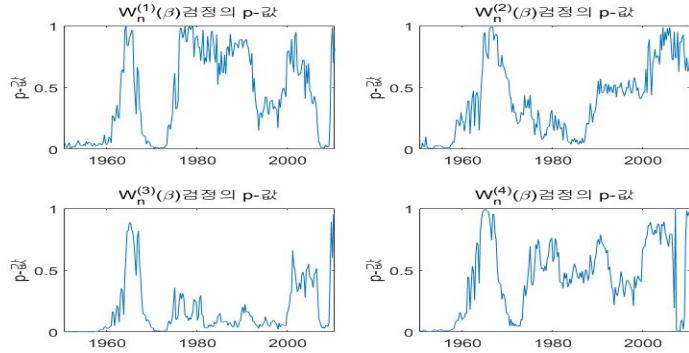


그림 5: $\mathcal{W}_n(\beta)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)

위 그림은 MAT 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. $\beta_*(0.25) = \beta_*(0.5)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(1)}(\beta)$, $\beta_*(0.5) = \beta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(2)}(\beta)$, $\beta_*(0.25) = \beta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(3)}(\beta)$, $\beta_*(0.25) = \beta_*(0.5) = \beta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(4)}(\beta)$ 을 대상으로 한다. 320개의 시계열 표본으로 239회 측정되었다.

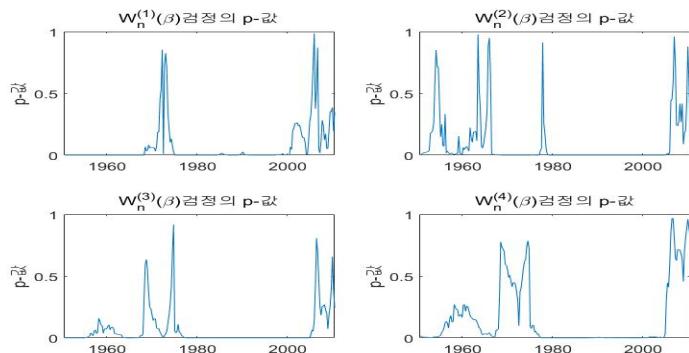


그림 6: $\mathcal{W}_n(\beta)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)

위 그림은 TSE 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. 나머지는 그림 5와 동일하다.

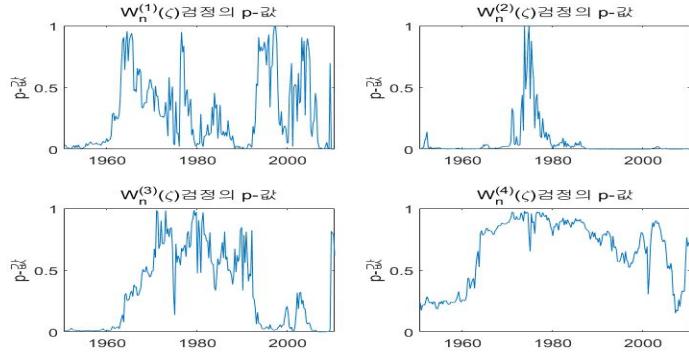


그림 7: $\mathcal{W}_n(\zeta)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)

위 그림은 MAT 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. $\zeta_*(0.25) = \zeta_*(0.5)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(1)}(\zeta)$, $\zeta_*(0.5) = \zeta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(2)}(\zeta)$, $\zeta_*(0.25) = \zeta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(3)}(\zeta)$, $\zeta_*(0.25) = \zeta_*(0.5) = \zeta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(4)}(\zeta)$ 을 대상으로 한다. 320개의 시계열 표본으로 239회 측정되었다.

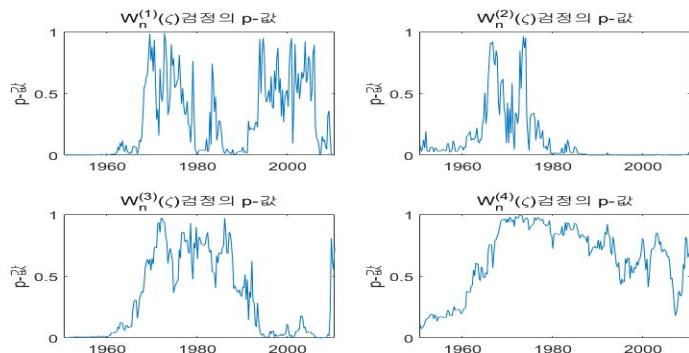


그림 8: $\mathcal{W}_n(\zeta)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)

위 그림은 TSE 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. 나머지는 그림 7과 동일하다.

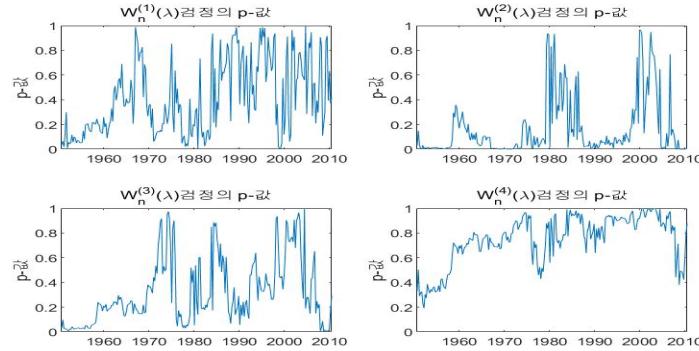


그림 9: $\mathcal{W}_n(\lambda)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)

위 그림은 MAT 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. $\lambda_*(0.25) = \lambda_*(0.5)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(1)}(\lambda)$, $\lambda_*(0.5) = \lambda_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(2)}(\lambda)$, $\lambda_*(0.25) = \lambda_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(3)}(\lambda)$, $\lambda_*(0.25) = \lambda_*(0.5) = \lambda_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(4)}(\lambda)$ 을 대상으로 한다. 320개의 시계열 표본으로 239회 측정되었다.

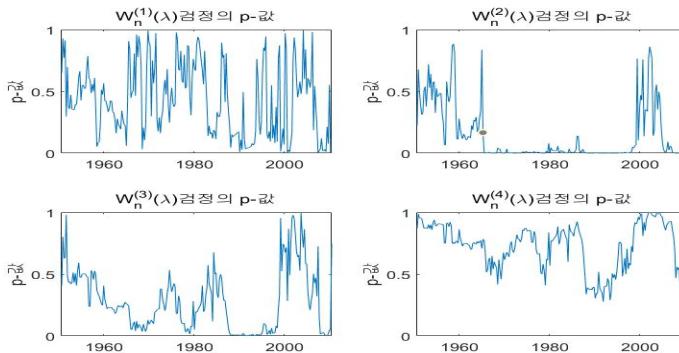


그림 10: $\mathcal{W}_n(\lambda)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)

위 그림은 TSE 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. 나머지는 그림 9와 동일하다.

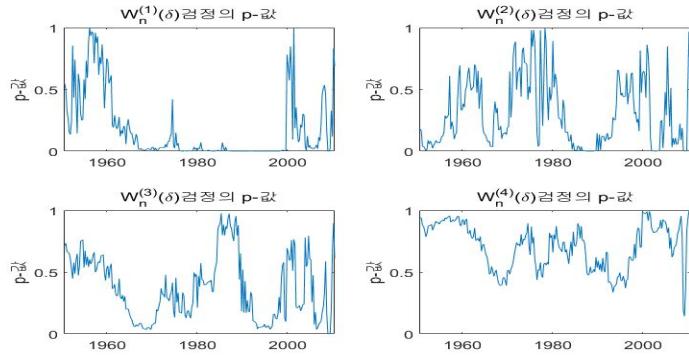


그림 11: $\mathcal{W}_n(\delta)$ 검정통계량의 p -값 (MAT)

위 그림은 MAT 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. $\delta_*(0.25) = \delta_*(0.5)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(1)}(\delta)$, $\delta_*(0.5) = \delta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(2)}(\delta)$, $\delta_*(0.25) = \delta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(3)}(\delta)$, $\delta_*(0.25) = \delta_*(0.5) = \delta_*(0.75)$ 에 관한 $\mathcal{W}_n^{(4)}(\delta)$ 을 대상으로 한다. 320개의 시계열 표본으로 239회 측정되었다.

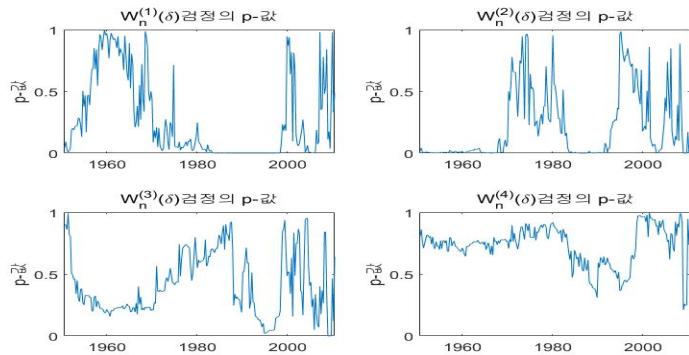


그림 12: $\mathcal{W}_n(\delta)$ 검정통계량의 p -값 (TSE)

위 그림은 TSE 모형에 대한 월드 검정통계량의 p -값을 나타낸 그래프이다. 나머지는 그림 11과 동일하다.

7 결론

Cho, Kim and Shin (2015)은 Xiao (2009), Pesaran, Hashem and Shin (1998)의 시계열, 자기회귀시차모형에 관한 이론을 바탕으로 분위수 자기회귀시차모형의 장기모수 추정량과 그 점근 분포를 제시했다. 후속 연구로써 본 논문은 이를 확장해 QARDL 모형을 변형한 QARDL-ECM의 단기모수 추정량과 그 점근 분포를 제시했다.

본 논문은 이론의 타당성을 확보하기 위해 몬테 칼로 모의실험을 통해 5% 유의수준에서의 실증적 기각확률을 구했고 표본이 커짐에 따라 5%에 수렴함을 확인했다. 데이터를 반복 생성한 후 왈드값을 산출하여, 왈드 검정통계량이 점근적으로 카이제곱분포를 따름을 이용한 것이다.

실증연구로 본 논문은 Cho, Kim and Shin (2015)과 동일한 자료로 이단계 추정을 수행했다. Cho, Kim and Shin (2015)과 동일한 모형을 매트랩으로 구한 결과까지 총 3개의 결과를 비교분석했는데 대체로 비슷한 값이 산출되었고 그래프 상에서 비슷한 추세를 보였다. 다만, 이단계 추정의 첫 단계에서 구한 장기모수 추정치는 다른 두개에서 구한 장기모수 추정치와 약간의 차이가 있었다. 비슷하더라도 완전히 똑같은 모형은 아니기 때문에 나타난 결과로 보인다.

이렇게 해서 본 논문은 Cho, Kim and Shin (2015)이 마저하지 못한 연구를 수행했다. QARDL 모형을 이용해 실증분석을 하고자 하는 경제학자들의 궁금증을 해소하고, 더 정확한 추정, 검정을 가능케 하는데 가장 큰 의의가 있다.

참고 문헌

Brav, A., J. Graham, C. Harvey and R. Michaely, 2005, Payout policy in the 21st Century, Journal of financial economics 77, 483-527.

Chen, L., Z. Da and R. Priestley, 2012, Dividend smoothing and predictability, Management science 58.10, 1834-1853.

Cho, J.S., T. Kim and Y. Shin, 2015, Quantile cointegration in the autoregressive distributed-lag modeling framework, Journal of econometrics 188.1, 281-300.

Engle, R. and C.W.J. Granger, 1987, Co-integration and error correction: representation, estimation and testing, Econometrica 55, 251-276.

Fama, E.F. and H. Babiak, 1968, Dividend policy: An empirical analysis, Journal of the American statistical association 63.324, 1132-1161.

Hamilton J., 1994, Time Series Analysis, Princeton university press.

Koenker, R. and G. Bassett, 1978, Regression quantiles, Econometrica 46, 33-50.

Leary, M.T. and R. Michaely, 2011, Determinants of dividend smoothing: empirical evidence, Review of financial studies 24, 3197-3249.

Lin, Boqiang and N.I. Benjamin, 2017, Influencing factors on carbon emissions in China transport industry: A new evidence from quantile regression analysis, Journal of cleaner production 150, 175-187.

Lintner and J., 1956, Distribution of incomes of corporations among dividends, retained earnings and taxes, American economic review 46.2, 97-113.

Pesaran, M.H. and Y. Shin, 1998, An autoregressive distributed-lag modelling approach to cointegration analysis, Econometric society monographs 31, 371-413.

Pesaran, M.H., Y. Shin and R.J. Smith, 2001, Bounds testing approaches to the analysis of level relationships, Journal of applied econometrics 16.3, 289-326.

R. Shiller, 2005, Irrational exuberance, Princeton university press.

H. White, 2011, Asymptotic theory for econometricians, Orlando academic press.

Xiao and Z., 2009, Quantile cointegrating regression, Journal of econometrics
150.2, 248-260.

부록

하기에 제시된 증명의 많은 부분은 Cho, Kim and Shin (2015)의 증명을 빌려와 본 논문의 구성에 맞추어 재구성하였다. 그들의 증명을 단순히 인용하는 것으로는 증명의 가독성을 확보할 수 없어서 부득이 그들의 증명을 본 논문의 구성에 맞추어 활용하였다.

증명

정의 1.

먼저 식(1)의 양변에 Y_{t-1} 을 빼고 식(2)와 비교한다. 그 결과 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\triangle Y_t &= \alpha_*(\tau) + (\phi_{1*}(\tau) - 1)Y_{t-1} + \phi_{2*}(\tau)Y_{t-2} + \dots + \phi_{p*}(\tau)Y_{t-p} \\ &\quad + \sum_{j=0}^q \boldsymbol{\theta}_{j*}(\tau)' \mathbf{X}_{t-j} + U_t(\tau) \\ &= \alpha_*(\tau) + \zeta_*(\tau)(Y_{t-1} - \boldsymbol{\beta}_*(\tau)' \mathbf{X}_{t-1}) + \phi_1^*(\tau)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \phi_2^*(\tau)(Y_{t-2} \\ &\quad - Y_{t-3}) + \dots + \phi_{p-1}^*(\tau)(Y_{t-(p-1)} - Y_{t-p}) + \sum_{j=0}^{q-1} \boldsymbol{\theta}_j^*(\tau) \triangle \mathbf{X}_{t-j} + U_t(\tau)\end{aligned}$$

단기모수를 구함에 있어 $\zeta_*(\tau)$ 에 대한 정보를 얻어야 하므로 식(3)과 식(4)로부터 식(2)에서 $\zeta_*(\tau) = \sum_{j=1}^p \phi_{j*}(\tau) - 1$, $-\zeta_*(\tau) \boldsymbol{\beta}_*(\tau)' = \boldsymbol{\gamma}_*(\tau)'$ 임을 알 수 있고 이를 통해 단기모수 $\phi^*(\tau)$ 를 나타낼 수 있다. 이를 추정량으로 나타낸 것이

정의 1이다. ■

정의 2.

단기모수 $\theta^*(\tau)$ 를 구하는데 있어 식(3)을 이용한다. 식(3)을 전개하고 정의 1을 구하는 과정에서 구한 $-\zeta_*(\tau)\beta_*(\tau)' = \gamma_*(\tau)'$ 를 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 이 단기모수를 추정량 형태로 나타내면 정의 2와 같다. ■

보조정리 1.

$r = 1$ 로 둠으로서 가정 1에 의해 $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n \bar{W}_t \Rightarrow \mathcal{B}_W(1)$ 과 $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n \bar{\mathbf{K}}_t(\tau) \Rightarrow \mathcal{B}_K(1, \tau)$ 이 성립한다. 또한 어고딕 성질로 인해 $n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) \rightarrow E[\mathbf{K}_t(\tau)]$ 임을 알 수 있다. ■

보조정리 2.

(i) 어고딕 성질을 가정 2에 적용함으로써 보조정리 2의 (i)을 얻을 수 있다.

(ii) Hamilton (1994, p.562~p.563)의 명제 18.1(d)에 관한 증명을 주목 한다. Hamilton (1994)의 \mathbf{U}_{t-s} 와 $\boldsymbol{\xi}_{t-1}$ 는 본 논문의 \mathbf{W}_{t-i} 와 \mathbf{X}_t 와 동일하다. 그리고 가정 1에 따라 $\sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i} \mathbf{X}'_t = O_{\mathbb{P}}(n)$ 이고 똑같이 가정 1에 의해, $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{\lfloor n(\cdot) \rfloor} \mathbf{W}_t \Rightarrow \bar{\mathcal{B}}_W(\cdot)$ 이 성립한다. 그리고 연속사상 정리와 가정 2, 가정 3에

의해 $\sum_{t=1}^n U_{t-i}(\tau) \mathbf{X}_t = O_{\mathbb{P}}(n)$ 를 도출할 수 있다. 지금의 경우 $\sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t = O_{\mathbb{P}}(n^{\frac{3}{2}})$ 이면 $\sum_{t=1}^n U_{t-i}(\tau) \mathbf{X}_t = O_{\mathbb{P}}(n^{\frac{3}{2}})$ 이다.

(iii) 먼저 $K_{t,i}(\tau)$ 가 안정적, 어고딕 과정을 따름을 염두에 둔다. $i \leq q$ 일 때 다음이 성립한다.

$$K_{t,i}(\tau) = - \sum_{j=q-1}^{\infty} \boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau)' \mathbf{W}_{t-i-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) U_{t-i-j}(\tau)$$

$\rho_{j*}(\tau)$ 의 정의와 가정 4에 따라, $\sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) U_{t-i-j}(\tau)$ 은 안정적, 어고딕하다. 가정 4와 Brockwell and Davis (1991, p.22)의 정리 4.4.1로부터 $\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau)' \times \mathbf{W}_{t-i-j}$ 가 안정적임을 알 수 있고 그것과 White (2001)의 정리 3.35를 같이 생각해보면 $\sum_{j=q-1}^{\infty} \boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau)' \mathbf{W}_{t-i-j}$ 가 어고딕 합이 추론 가능하다. 따라서 $K_{t,i}(\tau)$ 는 $i \leq q$ 일 때 안정적이고 어고딕하다. 그리고 $i > q$ 일 때 아래의 식이 성립한다.

$$K_{t,i}(\tau) = -\boldsymbol{\beta}_*(\tau)' \sum_{j=0}^{i-q-1} \mathbf{W}_{t-q-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_{j*}(\tau)' \mathbf{W}_{t-i-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) U_{t-i-j}(\tau)$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_{j*}(\tau)' \sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) \sum_{t=1}^n U_{t-i-j}(\tau)$ 은 같은 논리로 안정적, 어고딕하다. 더욱이 $\sum_{j=0}^{i-q-1} \mathbf{W}_{t-q-j}$ 는 안정적, 어고딕한 유한한 합의 연속을 의미한다. 결론적으로 $K_{t,i}(\tau)$ 는 $i > q$ 일 때 안정적이고 어고딕 하다. 그리고 가정 1은 $E[K_{t,i}(\tau)] < \infty$ 를 암시하고 어고딕 정리를 $\mathbf{K}_t(\tau)$ 에 적용하면

$n^{-1} \sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau) K_{t,j}(\tau) \rightarrow E[K_{t,i}(\tau) K_{t,j}(\tau)]$ $i, j = 1, 2, \dots, p$ 임이 도출되고 결과적으로 보조정리 2 (iii) 이 성립한다.

(iv) 가정 2에 의해 $\mathbf{K}_t(\tau)$ 와 \mathbf{W}_{t-i} 는 안정적, 어고딕 과정을 따른다.

$\mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{W}'_{t-i}$ 가 White (2001)의 정리 3.35에 의해 도출되기 때문이다. 더욱이 가정 1에 의해 $E[K_{t,i}(\tau)^2] < \infty$ 이고 $E[W_{t-j,l}^2] < \infty$, $j = 1, \dots, p, l = 1, 2, \dots, k$ 임이 성립한다. 즉, 보조정리 2 (iv)의 결과는 어고딕 성질로부터 도출된다.

(v) 먼저, $i \leq q$ 의 경우를 보면 다음과 같다.

$$\sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau) \mathbf{X}'_t = - \sum_{j=q-1}^{\infty} \boldsymbol{\xi}_{0,j*}(\tau)' \sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i-j} \mathbf{X}'_t + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) \sum_{t=1}^n U_{t-i-j}(\tau) \mathbf{X}'_t$$

보조정리 2 (ii)에 의해 $\sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i-j} \mathbf{X}_t = O_{\mathbb{P}}(n)$ 이고 $\sum_{t=1}^n U_{t-i-j}(\tau) \mathbf{X}_t = O_{\mathbb{P}}(n^{\frac{3}{2}})$ 이 성립한다. 그리고 가정 4로부터 $\sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau) \mathbf{X}'_t = O_{\mathbb{P}}(n^{\frac{3}{2}})$ 를 유도할 수 있다. 게다가 $U_{t-i-j}(\tau)$ 와 \mathbf{X}_t 는 $U_{t-i-j}(\tau)$ 의 정의에 의해 독립이다. 이것과 Hamilton (1994, p.505 ~ 506)의 정리 17.3에 의해 $\sum_{t=1}^n (U_{t-i-j}(\tau) - E[U_{t-i-j}(\tau)]) X_t = O_{\mathbb{P}}(n)$ 이 성립함을 추론할 수 있다. 이것은 또한 $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau) \mathbf{X}'_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) E[U_{t-i-j}(\tau)] n^{\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}'_t = E[K_{t,i}(\tau)] \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r)' dr$ 를 이끌어낸다.

이제 $i > q$ 의 경우를 살펴본다. 보조정리 2 (ii)에 의해 아래와 같은 식이 성립

한다.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau) \mathbf{X}'_t &= -\boldsymbol{\beta}_*(\tau)' \sum_{j=0}^{i-q-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-q-j} \mathbf{X}'_t + \\ &\quad \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_{j*}(\tau)' \sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i-j} \mathbf{X}'_t + \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) \sum_{t=1}^n U_{t-i-j}(\tau) \mathbf{X}'_t \end{aligned}$$

앞과 동일한 논리로 $\sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-q-j} \mathbf{X}'_t = O_{\mathbb{P}}(n)$, $\sum_{t=1}^n \mathbf{W}_{t-i-j} \mathbf{X}'_t = O_{\mathbb{P}}(n)$,
 $\sum_{t=1}^n U_{t-i-j}(\tau) \mathbf{X}'_t = O_{\mathbb{P}}(n^{\frac{3}{2}})$ 을 보일 수 있다. 게다가 가정 4로부터 $\sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau)$
 $\times \mathbf{X}'_t = O_{\mathbb{P}}(n^{\frac{3}{2}})$, $n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n K_{t,i}(\tau) \mathbf{X}'_t = n^{-\frac{3}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j*}(\tau) \sum_{t=1}^n U_{t-i-j}(\tau) \mathbf{X}'_t + o_{\mathbb{P}}(1)$
임이 유도된다. 남은 증명은 $i \leq q$ 의 경우와 동일한 방식이다. ■

보조정리 3.

가정 1에 의해, $n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{\lfloor n(\cdot) \rfloor} \mathbf{W}_t \Rightarrow \bar{\mathcal{B}}_W(\cdot)$ 가 성립한다. 그리고 연속사상 정리를
응용하면 보조정리 3의 도출 가능하다. ■

보조정리 4.

(i) 보조정리 1 (i), 보조정리 2 (i), (ii)에 의해 다음이 성립한다.

$$\left\{ n^{-1} \sum_{t=1}^n \bar{\mathbf{W}}_t, n^{-1} \sum_{t=1}^n \bar{\mathbf{W}}_t \bar{\mathbf{W}}'_t, n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \bar{\mathbf{W}}_t \mathbf{X}'_t \right\} \Rightarrow \left\{ 0, E[\bar{\mathbf{W}}_t \bar{\mathbf{W}}'_t], 0 \right\}$$

그리고 보조정리 3으로 인해 아래처럼 나타낼 수 있다. 그에따라 보조정리 4

(i) 이 성립한다.

$$\left\{ n^{-\frac{3}{2}} \mathbf{X}_t, n^{-2} \mathbf{X}'_t \mathbf{X}_t \right\} \Rightarrow \left\{ \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) dr, \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) \bar{\mathcal{B}}_W(r) dr \right\}$$

(ii) 가정 1에 의해 다음이 성립한다.

$$\left\{ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n \psi_\tau[U_t(\tau)], n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^n \psi_\tau[U_t(\tau)] \bar{\mathbf{W}}_t \right\} \Rightarrow \{\mathcal{B}_\psi(1, \tau), \mathcal{B}_{\psi W}(1, \tau)\}$$

더욱이, 보조정리 3에 의해 $n^{-1} \sum_{t=1}^n \psi_\tau[U_t(\tau)] \Rightarrow \int_0^1 \bar{\mathcal{B}}_W(r) d\mathcal{B}_\psi(r, \tau)$ 이 만족되어 모든 결과를 종합하면 보조정리 4 (ii) $\mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(U)$ 의 점근적 극한을 나타낼 수 있다.

(iii) $\mathbf{D}_H^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{K}(\tau) = [n^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) \tilde{\mathbf{W}}'_t, n^{-\frac{3}{2}} \sum_{t=1}^n \mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{X}'_t]$ 임을 주목하자. 이와 함께 보조정리 1 (ii), 보조정리 2 (iv), (v)에 의해 보조정리 4 (iii)은 타당한 명제이다. ■

보조정리 5.

먼저 우리는 다음의 식에 주목한다.

$$\varrho_\tau \{Y_t - \mathbf{Z}'_t \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n(\tau)\} = \varrho_\tau \{U_t(\tau) - \mathbf{D}_n^{-1} \hat{\mathbf{v}}_n(\tau)' \mathbf{Z}_t\}$$

위 식의 $\hat{\mathbf{v}}_n(\tau)$ 는 $\mathbf{D}_n \{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n(\tau) - \boldsymbol{\alpha}_*(\tau)\}$ 이고, \mathbf{D}_n 은 $\text{diag}([\sqrt{n}\boldsymbol{\iota}'_{1+qk}, n\boldsymbol{\iota}'_{k+p}]')$ 이다. 그리고 $\sum_{t=1}^n \varrho_\tau \{Y_t - \mathbf{Z}'_t \boldsymbol{\alpha}\}$ 를 $\boldsymbol{\alpha}$ 에 관하여 최소화한 것은 다음을 \mathbf{v} 에 관해

최소화한 것과 같다.

$$Q_{\tau,n}(\mathbf{v}) = \sum_{t=1}^n [\varrho_\tau \{U_t(\tau) - (\mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{v})'\mathbf{Z}_t\} - \varrho_\tau \{U_t(\tau)\}]$$

그리고 이 목적함수를 아래처럼 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_{\tau,n}(\mathbf{v}) &= - \sum_{t=1}^n \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t \psi_\tau[U_t(\tau)] \\ &\quad + \sum_{t=1}^n \{U_t(\tau) - \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t\} I[\mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t < U_t(\tau) < 0] \\ &\quad - \sum_{t=1}^n \{U_t(\tau) - \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t\} I[0 < U_t(\tau) < \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t] \end{aligned}$$

여기서 $\varrho_\tau(x - y) - \varrho_\tau(x) = -y\psi_\tau(x) + (x - y)[I(0 > x > y) - I(0 < x < y)]$

으로 상정한다. 그리고 우리는 Perasan and Shin (1998)과 Xiao (2009)의 연구

결과를 이용하여 위 식 우변에 각 요소의 점근적 결과를 유도해낼 수 있다.

먼저 가정1, 가정 2, 가정 3, 가정 5가 Xiao (2009)의 가정 A,B,C를 나타냄을

알고, Xiao (2009)의 결과를 이용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^n \{U_t(\tau) - \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t\} I[\mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t < U_t(\tau) < 0] \\ &= \frac{1}{2} f_\tau \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z}) \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{v} I[\mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t < 0] + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &\quad \sum_{t=1}^n \{U_t(\tau) - \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t\} I[0 < U_t(\tau) < \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t] \\ &= \frac{1}{2} f_\tau \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z}) \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{v} I[\mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{Z}_t > 0] + o_{\mathbb{P}}(1) \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{Z} := [\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n]'$ 이다. 따라서 $Q_{\tau,n}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} (\sum_{t=1}^n \mathbf{Z}_t \psi_\tau[U_t](\tau)) + \frac{1}{2} f_\tau \mathbf{v}' \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{v} + o_{\mathbb{P}}(1)$ 으로 $\mathbf{D}_n^{-1} \hat{\mathbf{v}}_n(\tau) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_n(\tau) - \boldsymbol{\alpha}_*(\tau) = f_\tau^{-1} (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \Psi_\tau(U) + o_{\mathbb{P}}(1)$ 를 이끌어낼 수 있다.

이제, \mathbf{Z} 를 $[\mathbf{G}, \hat{\mathbf{Y}}]$ 로 분해한다. 이 때 $\mathbf{G} := [\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_n]'$ 이고 $\hat{\mathbf{Y}} := [\hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2, \dots, \hat{\mathbf{Y}}_n]'$ 이다. 그렇다면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_n(\tau) - \boldsymbol{\phi}_*(\tau) = f_\tau^{-1} [\hat{\mathbf{Y}}' \mathbf{P}_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{Y}}]^{-1} \hat{\mathbf{Y}}' \mathbf{P}_{\mathbf{G}} \Psi_\tau(U)$$

여기서 $\mathbf{P}_{\mathbf{G}} := \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}'$ 이고, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n(\tau) - \boldsymbol{\alpha}_*(\tau) = [(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_n(\tau) - \boldsymbol{\lambda}_*(\tau))', \hat{\boldsymbol{\phi}}_n(\tau) - \boldsymbol{\phi}_*(\tau)]'$ 이다. 또한 $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} \boldsymbol{\Gamma}_*(\tau) + \mathbf{K}(\tau)$ 이며 $\mathbf{K}(\tau) := [\mathbf{K}_1(\tau), \dots, \mathbf{K}_n(\tau)]'$ 이다. 그리고 $\mathbf{P}_{\mathbf{G}} \mathbf{G} = 0$ 이기 때문에 다음이 성립한다.

$$\hat{\mathbf{Y}}' \mathbf{P}_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{K}(\tau)' \mathbf{K}(\tau) - \mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G}(\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{K}(\tau)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}' \mathbf{P}_{\mathbf{G}} \Psi_\tau(U) = \mathbf{K}(\tau)' \Psi_\tau(U) - \mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G}(\mathbf{G}' \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(U)$$

그리고 보조정리2 (iii) 에 의해 $n^{-1} \mathbf{K}(\tau)' \mathbf{K}(\tau) \rightarrow E[\mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{K}_t(\tau)']$ 이다. 또한 보조정리 4 (iii) 에 의해 $\mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G} \mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1} (\mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{G} \mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1}) \mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{K}(\tau) = O_{\mathbb{P}}(n)$ 이 성립한다. 구체적으로 $n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G} \mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1} \Rightarrow [E[\mathbf{K}_t(\tau)] E[\mathbf{K}_t(\tau) \bar{\mathbf{W}}_t'] E[\mathbf{K}_t(\tau)] \int_0^1 \bar{\boldsymbol{\beta}}_W(r)' dr]$ 이고 $n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{D}_{\mathbf{G}} = \mathbf{D}_{\mathbf{H}}$ 이므로, 보조정리 4 (i)에 의해 $\mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G} \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^{-1} (\mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{G} \mathbf{D}_{\mathbf{G}}^{-1})^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{K}(\tau) \rightarrow_{\mathbb{P}} E[\mathbf{K}_t(\tau) \widehat{\mathbf{W}}_t'] E[\widehat{\mathbf{W}}_t \widehat{\mathbf{W}}_t']^{-1} E[\widehat{\mathbf{W}}_t \mathbf{K}_t(\tau)']$ 로 귀결되는 것이다. 그리고 이에 따라 아래의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} n^{-1} \hat{\mathbf{Y}}' \mathbf{P}_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{Y}} &\rightarrow_{\mathbb{P}} E[\mathbf{K}_t(\tau) \mathbf{K}_t(\tau)'] - E[\mathbf{K}_t(\tau) \widehat{\mathbf{W}}_t'] E[\widehat{\mathbf{W}}_t \widehat{\mathbf{W}}_t']^{-1} E[\widehat{\mathbf{W}}_t \mathbf{K}_t(\tau)'] \\ &= E[\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau) \widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)'] \end{aligned}$$

같은 방식으로 보조정리 4 (i), (ii), (iii)에 의해 $\mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G} \mathbf{D}_G^{-1} (\mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{G} \mathbf{D}_G^{-1})^{-1}$
 $\mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(U) = O_{\mathbb{P}}(\sqrt{n})$ 이 성립한다. 이를 통해 다음의 식이 도출 가능하다.

$$\begin{aligned} & n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}(\tau)' \mathbf{G} \mathbf{D}_G^{-1} (\mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \mathbf{G} \mathbf{D}_G^{-1})^{-1} \mathbf{D}_G^{-1} \mathbf{G}' \Psi_\tau(U) \\ &= E[\mathbf{K}_t(\tau) \widehat{\mathbf{W}}_t'] E[\widehat{\mathbf{W}}_t \widehat{\mathbf{W}}_t']^{-1} (n^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{W}}' \Psi_\tau(U)) + o_{\mathbb{P}}(1) \end{aligned}$$

앞서 서술된 내용과 가정 1에 의해 다음이 만족되고 결국 보조정리 5가 도출된다.

$$\begin{aligned} n^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{Y}}' \mathbf{P}_G \Psi_\tau(U) &= n^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}(\tau)' \Psi_\tau(U) - E[\mathbf{K}_t(\tau) \widehat{\mathbf{W}}_t'] E[\widehat{\mathbf{W}}_t \widehat{\mathbf{W}}_t']^{-1} \\ &\quad \times n^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{W}}' \Psi_\tau(U) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{H}}(\tau)' \Psi_\tau(U) + o_{\mathbb{P}}(1) \\ &\stackrel{\text{A}}{\sim} \left\{ 0, \tau(1-\tau) E[\widehat{\mathbf{H}}_t(\tau) \widehat{\mathbf{H}}_t(\tau)'] \right\} \end{aligned}$$

■

보조정리 6

보조정리 6의 증명은 본문 4장 3절에 기술하였다. ■

정리 1.

정리 1의 증명은 본문 4장 2절에 기술하였다. ■

정리 2.

정리 2의 증명은 본문 4장 3절에 기술하였다. ■

영문 요약

Short-Run Parameter Estimation and Inference on the Quantile Autoregressive Distributed-Lag Model

Cho, Kim and Shin (2015) extended autoregressive distributed-lag model into the quantile autoregressive distributed-lag (QARDL) model. They analyzed its long-run estimators and also obtained their asymptotic distributions. This paper follows Cho, Kim and Shin's (2015) research. I first convert QARDL model into qardl error correction model and derive its short-run estimators along with their asymptotic distributions. I next affirm theroretical results of this study by Monte Carlo simulations. For empirical application, finally I use the same data as analyzed by Cho, Kim and Shin (2015) and analyze the dividend policy implications in the U.S companies. I apply two step estimation of this study and compare the results with those in Cho, Kim and Shin (2015).

Keywords : QARDL, QARDL-ECM, Quantile Regression, Dividend Smoothing, Time-varying Rolling Estimation, Two-step Estimation.