이산수학

휴먼지능정보공학전공

학습 내용

- 기본개념
- 행렬의 연산
- 여러 가지 행렬
- 행렬식
- 역행렬
- 연립일차방정식
- 파이썬 코딩

기본개념

- 행렬
  - m과 n이 양의 정수일 때, n행(row), m열(column)으로 나열된 실수의 2차원 배열을 행렬이라고 함
  - 행렬의 각 행은 가로의 n 순서쌍을 행벡터, 열은 세로의 m 순서쌍을 열벡터라고 함
  - n개의 행과 n개의 열을 가지는 행렬을 n차 정방행렬이라고하고 좌상우하 대각선 상의에 존재하는 성분을 주대각선에 있다고 함

기본개념

- 행렬
  - n개의 행과 n개의 열의 개수를 같은 경우 정방행렬이라고 한다.
  - 생활에서 일어나는 여러 가지 복잡한 관계에서의 의사결정에 행렬을 이용하여 선형방정식을 통해 문제를 해결 할 수 있다.

기본개념

- 선형시스템
  - 변수x1,x2,…,xn에 관한 유한개의 선형방정식의 집합을 선형시스템이라고 한다.
  - 선형시스템의 모든 해의 집합을 해집합이라고 한다.
  - 일반적으로 선형시스템의 해의 개수는 해가 없거나 유일한해를 가지거나 무한히 많은 개수의 해를 가진다.

행렬의 연산

- 덧셈과 뺄셈
  - 두 행렬 A, B에서 같은 자리에 있는 원소끼리 더하거나 빼는 것을 의미한다.
  - 덧셈 표현은 A+B, 뺄셈 표현은 A-B으로 표기할 수 있는데 단, 두 행렬의 크기가 같아야 덧셈이나 뺄셈 연산을 할 수 있다.

행렬의 연산

문제

- 다음 행렬의 연산값을 구하세요
- $\begin{matrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}$

- $\begin{matrix} 5 & 0 \\ -1 & 6 \end{matrix}$

행렬의 연산

- 스칼라 곱
  - 행렬 A에 실수 k를 곱하는 연산 : Ak = kA= $[ka_{ij}]$

행렬의 연산

문제

- 다음 행렬의 연산값을 구하세요
- $2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

행렬의 연산

- 행렬의 곱셈
  - $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 행렬 A와 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$ 행렬 B가 있고, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}$ 일 때, $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{s}$ 행렬 $A\times B$ 또는 AB로 표현한다.
  - 행렬 A의 열의 크기와 행렬 B의 행의 크기가 같아야 한다.

여러 가지 행렬

- 영행렬
  - $n \times m$ 행렬 A=[a_ij]가 있을 때, 모든 i, j 에 대하여 a_ij=0 인 행렬을 영행렬이라고 한다.
  - O $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

여러 가지 행렬

- n차 정방행렬
  - $n \times m$ 행렬 A=[a_ij]가 있을 때, m= n 인 행렬을 정방행렬이라고 한다.
  - A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

여러 가지 행렬

- 대각행렬
  - 정사각행렬에서 대각원소 a_11 a_22 〖,…,a〗_nn이외의 모든 원소가 0인 행렬을 대각행렬이라고 한다.

  - A=$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

여러 가지 행렬

- 대각합
  - 정방행렬 A의 주대각선 위의 모든 성분들을 대각항이라고 하고 각 대각항의 합을 대각합이라고 함
  - trace(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} +.. a_{nn}

여러 가지 행렬

- 단위행렬
  - 대각행렬에서 대각원소가 모두 1인 행렬을 단위행렬이라고 한다.
  - A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

여러 가지 행렬

- 전치행렬
  - $m \times n$행렬 A=[a_ij]가 있을 때, 행과 열을 바꾼 $n \times m$ 행렬을 전치행렬이라고 한다.
- A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 일 때, A^T =$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$

여러 가지 행렬

문제

- 다음 행렬의 연산값을 구하세요
- $\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 7 \end{matrix}$

- $\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{matrix}$

여러 가지 행렬

- 대칭행렬
  - m×m 행렬 A=[a_ij]가 있을 때, A^T = A 인 행렬을 대칭행렬이라고 함

여러 가지 행렬

- 교대행렬
  - m×m 행렬 A=[a_ij]가 있을 때, -A^T = A 인 행렬을 교대행렬이라고 함

여러 가지 행렬

- 삼각행렬
  - m×m 행렬 A=[a_ij]가 있을 때, 주대각선 아래에 있는 모든 항들이 0인 행렬 A를 상부삼각행렬이라고 함
  - m×m 행렬 A=[a_ij]가 있을 때, 주대각선 위에 있는 모든 항들이 0인 행렬 A를 하부삼각행렬이라고 함
  - 상부삼각행렬과 하부삼각행렬을 통칭하여 삼각행렬이라고 함

여러 가지 행렬

- 부울행렬
  - 행렬의 모든 원소 값이 0 또는 1로 구성된 행렬을 부울행렬이라고 한다.
  - 행렬 A=$[a\_ij]$ 와 B=$[b\_ij]$ 에 대해
  - (1) 합(join) : A∨B =$[a\_ij \vee b\_ij]$
  - (2) 교차(meet) : A∧B =$[a\_ij \wedge b\_ij]$
  - (3) 부울곱(boolean product) : A ⊙B
  $m \times n$행렬 A=$[a_{ij}]$ 와 $r \times s$ 부울행렬 B=$[b_{ij}]$ 가 있을 때, $m \times s$ 부울 행렬 A ⊙B =$[c_{ij}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{1j} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{ij} & \cdots & c_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{mj} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = (a_{ij} \wedge b_{ij}) \vee (a_{ij} \vee b_{ij}) \vee \ldots \vee (a_{ij} \wedge b_{ij})$$

여러 가지 행렬

문제

- 다음을 연산하세요
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \vee 0 \vee 0 & 1 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 \vee 1 & 1 \vee 1 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

여러 가지 행렬

- 부울행렬 연산 특징
  - (1) $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$
  - (2) $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$
  - (3) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,"(" $A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$
  - (4) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B)$ $) \wedge$"(" $A \wedge C)$, $A \wedge$ $(B \vee C) =$"(" $A \vee B) \vee$"(" $A \vee C)$

행렬식

- 행렬식
  - n차 정사각행렬에 대응하는 수를 구하는 식을 행렬식이라고 한다.
  - $|\mathbf{A}|$ = det(A) = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

    - A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
    - det(A)=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 에 대한 행렬식

행렬식

- 행렬식
  - n차 정사각행렬에 대응하는 수를 구하는 식을 행렬식이라고 한다.
  - B= $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ 에 대한 행렬식

det(B)= $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$

$$= (b_{11}b_{22}b_{33}+b_{12}b_{23}b_{31}+b_{13}b_{32}b_{21}) \\ -(b_{13}b_{22}b_{33} + b_{23}b_{32}b_{11}+b_{33}b_{21}b_{12})$$

행렬식

문제

- 다음 행렬식을 구하세요
- $\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$
- $\begin{matrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{matrix}$

(1) det(A)= $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 3\times(-1)$ -1×2 $= -3 - 2 = -5$

(2) det(B)= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

=((3×2× (-3) + (-1) ×1×1+ (–2)×4×(– 4))

$-\left((-2) \times 2 \times 1 + 1 \times 4 \times 3 + (-3) \times (-4) \times (-1)\right)$ =17

행렬식

- 정칙행렬
  - n x n 정방행렬 A의 행렬식 | A | 의 값이 0이 아닐 때 A를 정칙행렬이라고 함

행렬식

- 특이행렬
  - n x n 정방행렬 A의 행렬식 | A | 의 값이 0일 때 A를 특이행렬이라고 함

행렬식

- 소행렬
  - n차 정사각행렬에서 r번째 행과 s번째 열을 제거해서 얻은 $(n-1)\times(n-1)$ 행렬을 소행렬이라고 한다.

행렬식

- 소행렬식
  - n차 정사각행렬의 소행렬 $\boldsymbol{Mrs}$에 대한 행렬식을 소행렬식이라 한다.

행렬식

문제

- 다음 소행렬과 소행렬식을 구하세요

- $\begin{matrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{matrix}$

M_11:1행과 1열을 제외한 원소들로 구성

det(M_11) =6×6−4×3 =24

M_12 =1행과 2열을 제외한 원소들로 구성

det(M_12) =2×6−4×1 =8

M_13 =1행과 3열을 제외한 원소들로 구성

det(M_13) =2×3−6×1 =0

M_21 =:2행과 1열을 제외한 원소들로 구성

det(M_21) =1×6−3×3 =−3

M_22 = 2행과 2열을 제외한 원소들로 구성

det(M_22) =5×6−3×1 =27

M_23 = 2행과 3열을 제외한 원소들로 구성

det(M_23) =5×3−1×1 =14

M_31 = 3행과 1열을 제외한 원소들로 구성

det(M_31) =1×4−6×3 =−14

M_32 = 3행과 2열을 제외한 원소들로 구성

det(M_32) =5×4−2×3 =14

M_33 = 3행과 3열을 제외한 원소들로 구성

det(M_33) =5×6−1×2 =28

행렬식

- 여인수 및 여인수행렬
  - n차 정사각행렬 A=[a_ij] 에서 원소 a_ij에 관련된 수와 그 수에 대한 행렬
  - $\boldsymbol{A}_{ij}$=$(-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{M}_{ij})$

행렬식

문제

- 행렬의 여인수를 구하고 여인수행렬을 구하세요
- A $=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

- $A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11})=\det(M_{11})=\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \times 6 - 4 \times 3 = 24$
- $A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12})=-\det(M_{12})=-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(2 \times 6 - 4 \times 1) = -8$
- $A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13})=\det(M_{13})=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 6 \times 1 = 0$

행렬식

- 여인수 및 여인수행렬
  - $A_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{\mathbf{21}})$=-$\det(M_{21})$=$-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \times 6 - 3 \times 3) = 3$
  - $A_{22} = (-1)^{2+2}\det(M_{22})$=$\det(M_{22})$=$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 3 \times 1 = 27$
  - $A_{23}= (-1)^{2+3}\det(M_{\mathbf{23}})$=-$\det(M_{23})$=-$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(5 \times 3 - 1 \times 1) = -14$
  - $A_{31} = (-1)^{3+1}\det(M_{31})$=$\det(M_{31})$=$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 6 \times 3 = -14$
  - $A_{32}= (-1)^{3+2}\det(M_{\mathbf{32}})$=-$\det(M_{32})$=-$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(5 \times 4 - 2 \times 3) = -14$
  - $A_{33} = (-1)^{3+3}\det(M_{33})$=$\det(M_{33})$=$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 1 \times 2 = 28$
  - $\therefore [A_{ij}] = \begin{bmatrix} 24 & -8 & 0 \\ 3 & 27 & -14 \\ 14 & -14 & 28 \end{bmatrix}$

행렬식

- 여인수를 이용한 행렬식
  - det(A)= $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j}$+…+ $a_{nj}A_{nj}$: j열을 선택한 경우

    = $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}$+…+ $a_{in}A_{in}$: i행을 선택한 경우

행렬식

문제

- 다음 행렬의 행렬식을 구하세요
- A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

- 1 행을 선택했을 경우

det(A)=$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$= 5 \cdot (-1)^{1+1}\det(M_{11}) + 5 \cdot (-1)^{1+2}\det(M_{12}) + 3 \cdot (-1)^{1+3}\det(M_{13})$

$= 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot (6 \cdot 6 - 4 \cdot 3) - (2 \cdot 6 - 4 \cdot 1) + 3 \cdot (2 \cdot 3 - 6 \cdot 1) = 112$

행렬식

- 여인수를 이용한 행렬식
- · 2 열을 선택했을 경우

det(A)=$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

$= 1 \cdot (-1)^{1+2}\det(M_{12})+6 \cdot (-1)^{2+2}\det(M_{22})+3 \cdot (-1)^{3+2}\det(M_{32})$

$=(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (34) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= -(2 \cdot\cdot 6-4 \cdot 3) + 6(5 \cdot 6 - 3 \cdot 1) - 3 \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = 112$

- · 3 열을 선택했을 경우

det(A)=$a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

$= 3 \cdot (-1)^{1+3}\det(M_{13})+4 \cdot (-1)^{2+3}\det(M_{23})+6 \cdot (-1)^{3+3}\det(M_{33})$

$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 3(2 \cdot 3 - 6 \cdot 1) - 4(5 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + 6 \cdot (5 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = 112$

역행렬

- 역행렬
  - 정사각행렬 A에 대해 AB = BA = I를 만족하는 행렬B를 역행렬이라고 한다.
    - A A^{-1}=A^{-1} A=I

역행렬

문제

- 다음 행렬의 역행렬을 구하세요
- A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

- 행렬 A의 역행렬 A^{-1}=$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$라고 할때.
    - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} w+2y & x+2z \\ w+3y & x+3z \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $w+2y=1,\ x+2z=0,\ w+3y=0,\ x+3z=1$
- $(w+2y)-(w+3y)$=1−0 $\quad\therefore\quad y=-1, w=3$
- $(x+2z)-(x+3z)$=0−1 $\quad\therefore\quad z=1, x=-2$
- $\therefore\ \mathrm{A}^{-1}$=$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

역행렬

- 역행렬
  - 행렬식을 이용한 역행렬을 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{det(A)}}\left[\boldsymbol{A_{ij}}\right]^{\boldsymbol{T}} \qquad (\text{단, } \boldsymbol{det(A) \neq 0})$$

역행렬

- 수반행렬
  - $[\boldsymbol{Aij}\ ]^{\boldsymbol{T}}$ 여인수 행렬 A_ij에 대한 전치행렬을 수반행렬이라 한다

역행렬

문제

- 다음 행렬의 역행렬을 구하세요
- A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- 행렬 A의 행렬식을 구하기 위해 3행 선택

$$\det(A) = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 3A_{31}A_{33}$$

$$= 3 \cdot (-1)^{3+1} \det(M_{31}) - (-1)^{3+3}\det(M_{33})$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\big(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)\big) - (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2) = 20$$

역행렬

- 역행렬

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det(M_{21}) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(2\cdot(-1) - 3\cdot 0) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\det(M_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 3\cdot 3 = -10$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\det(M_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(1\cdot 0 - 2\cdot 3) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\det(M_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot(-1) = 5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\det(M_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1\cdot 1 - 3\cdot 2) = 5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\det(M_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot 2 = -5$$

여인수행렬$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, 수반행렬 $[\boldsymbol{A_{ij}}]^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

역행렬

- 가역행렬
  - 역행렬이 존재하는 행렬

역행렬

- 특이행렬
  - 역행렬이 존재하지 않는 행렬

연립일차방정식

- 일차방정식
  - $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b가 실수일 때, 다음과 같이 표현되는 식을 1차 방정식 또는 선형방정식이라고 한다.
    - $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$
    - $a_1, a_2, \ldots, a_n$은 계수, b는 상수, $x_1, x_2, \ldots, x_n$은 미지수
  - 일차방정식 해
    - 1차방정식의 미지수 $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$를 만족하는 $s_1, s_2, \ldots, s_n$

연립일차방정식

- 연립일차방정식
  - 1차 방정식 m개로 구성된 방정식을 연립일차방정식이라고 한다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \ldots + \ a_m x_n = b_m \end{cases}$$

A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, X= $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$

- A : 계수행렬(Coefficient Matrix) / B : 상수행렬(Constant Matrix)

연립일차방정식

- 첨가행렬
  - 연립 1차 방정식의 계수행렬 A와 상수행렬 B를 다음과 같은 형태로 구성한 행렬을 첨가행렬이라고 한다.
  - $$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

연립일차방정식

- 가우스행렬
  - 계수행렬의 대각원소들을 모두 1로 만들고, 대각원소를 기준으로 아래쪽 원소들은 모두 0으로 만든 후 위쪽 원소들은 계수들로 남겨놓은 형태의 첨가행렬을 가우스 행렬이라고 한다.
  - $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array}\right]$

연립일차방정식

- 가우스행렬
  - 계수행렬의 대각원소들을 모두 1로 만들고, 대각원소를 기준으로 아래쪽 원소들은 모두 0으로 만든 후 위쪽 원소들은 계수들로 남겨놓은 형태의 첨가행렬을 가우스 행렬이라고 한다.
  - $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_m \end{array}\right]$

연립일차방정식

- 가우스 소거법
  - 한 행에 0 이 아닌 상수를 곱한다.
  - 상수배한 행과 다른 행을 더해 원소를 0으로 만든다.
  - 필요에 따라 행을 교환할 수도 있다.

연립일차방정식

문제

- 다음 일차방정식을 가우스 소거법으로 해를 구하세요
- $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

- 첨가 행렬 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$
- ① 1행 ×(−1)+2행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -4 & -18 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$
- ② 1행 ×(−3)+3행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -6 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & 27 \end{array}\right]$

연립일차방정식

- 가우스 소거법
- ④ 2행 ×(−3)+3행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & \frac{21}{2} & \frac{51}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$
- ⑤ 3행 ×(−2) : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
- 그러면 다음과 같은 연립 1차 방정식이 나온다.
- $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2} \\ x_3 = 3 \end{cases}$
- $x_3 = 3$을 $x_2 - \frac{7}{2}x_3 = -\frac{17}{2}$에 대입하면 $x_2 - \frac{7}{2} \cdot 3 = -\frac{17}{2}$이므로 $x_2 = 2$가 되고
- $x_2 = 2$, $x_3 = 3$을 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$에 대입하면 $x_1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9$ 이므로 $x_1 = 1$이 된다.
- $\therefore x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

연립일차방정식

- 가우스 조르단 소거법
  - 가우스 행렬의 계수행렬 부분을 단위행렬로 만들어 해를 얻는 방법

연립일차방정식

문제

- 다음 일차방정식을 가우스 소거법으로 해를 구하세요
- $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

- 첨가 행렬 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$
- ① 1행 ×(−2)+2행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -4 & -18 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$
- ② 1행 ×(−3)+3행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -6 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & 27 \end{array}\right]$

연립일차방정식

- 가우스 조르단 소거법
  - ③2행$\times \frac{1}{2}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$
  - ③2행$\times \frac{1}{2}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$
  - ④ 2행 $\times(-3)$+3행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & \frac{21}{2} & \frac{51}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$
  - ⑤ 3행 $\times(-2)$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ (※ 가우스 행렬)

연립일차방정식

- 가우스 조르단 소거법
  - ⑥2행 $\times(-1)$+1행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & \frac{7}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
  - ⑦3행$\times\left(-\frac{11}{2}\right)+1$행: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -\frac{11}{2} & -\frac{33}{2} \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
  - ⑧ 3행 $\times\frac{7}{2}$+2행 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{217}{2} \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
  - $\therefore x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

파이썬 프로그래밍 - 행렬

```
import numpy as np

#행렬생성
a = np.array([[1,2],[3,4]])
b = np.array([[5,6],[7,8]])
#행렬 덧셈 a+b
#행렬 곱셈 a.dot(b)
#행렬 차수 np.ndim(a)
#행렬 모양 a.shape
#전치행렬 np.transpose(a)
#영행렬 np.zeros(2,2)
#단위행렬 np.eye(2)
#역행렬 np.linalg.pinv(a)
#대각행렬 np.diag(np.diag(a))
#대각합 np.trace(a)
#행렬식 int(np.linalg.det(a))
c = np.array([[4,2],[2,2]])
d = np.array([10,6])
#연립방정식 np.linalg.solve(c,d)
```

학습 내용 요약

- 기본개념
- 행렬의 연산
- 여러 가지 행렬
- 행렬식
- 역행렬
- 연립일차방정식
- 파이썬 코딩