이산수학

휴먼지능정보공학전공

부울대수(논리회로)

- 부울대수 기본 개념
- 부울대수 기본 연산과 진리표
- 부울함수 표현과 활용
- 부울함수와 논리회로(논리게이트)

기본개념

- 부울대수(Boolean Algebra)
  - 0과 1을 입력값으로 갖는 논리계산을 형식화한 것
  - 부울대수는 0과 1로 구성된 집합 B
  - 이항연산자 + (sum), • (product)와
  - 단항연산자 ' (complementation)로 구성
  - (B, +, • , ' , 0, 1)로 나타냄

기본개념

- 부울연산
  - 부울변수(Boolean Variable) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
    - 부울값 0 또는 1의 값을 받는 변수
      - x, y, z..
  - 부울연산자
    - 이항연산자: + (sum), • (product)
    - 단항연산자: ' (complementation)
  - 부울식 (Boolean Expression)
    - 부울변수와 부울 연산자로 구성
  - 부울함수(Boolean Function)
    - n개의 부울변수와 부울 연산자로 구성되는 식 : n차 부울함수
    - f: $B^n \rightarrow B$ (단, $B^n = B \times B \times \dots \times B$)
    - f(x, y, w, z) = xy' + yz + w' (4차 부울함수)

기본개념

- 부울보수(Boolean Complement) $\boldsymbol{A'}$ 또는 $\boldsymbol{\overline{A}}$
  - 2진 변수의 값을 반전시키는 단항 연산자

$$0' = \overline{0} = 1 \qquad 1' = \overline{1} = 0$$

- 부울합(Boolean Addition) $\boldsymbol{A+B}$
  - 2진 변수의 값을 더하는 이항 연산자

$$0+0=0 \quad 0+1=1 \quad 1+0=1 \quad 1+1=1$$

- 부울곱(Boolean Multiplication) $\boldsymbol{A \cdot B}$ 또는$\boldsymbol{AB}$
  - 2진 변수의 값을 곱하는 이항 연산자

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 0 \cdot 1 = 0 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$

- 부울연산자 우선순위
  - 부울보수(′)→부울곱(·) →부울합(+)

기본개념

문제

- x =0, y=1, z=0 일 때 부울식 x + yz ‘의 값을 구하세요

- $x + yz' = 0 + 1 \bullet 0' = 0 + 1 \bullet 1 = 0 + 1 = 1$

기본개념

- 부울대수법칙

부울대수법칙	법칙의 이름
$x + x = x \qquad x \cdot x = x$	멱등법칙(Idempotent Law)
$x + 0 = x \qquad x \cdot 1 = x$	항등법칙(Ident i ty Law)
$x + 1 = 1 \qquad x \cdot 0 = 0$	유계법칙(Doundedness Law)
$x + y = y + x \qquad xy = yx$	교환법칙(Commutat ion Law)
$(x')' = x$	이중 보수의 법칙(Double Negat ion Law)
$x + x' = 1 \qquad x \cdot x' = 0$	보수법칙(Contradiction Law)
$(x + y) + z = x + (y + z)$ $(xy)z = x(yz)$	결합법칙(Associat ive Law)
$x \cdot (y + z) = xy + xz$ $x + (yz) = (x + y) + (x + z)$	분배법칙(Distributive Law)
$(x + y)' = x'y' \qquad (xy)' = x' + y'$	드모르간의 법칙(De Morgan'S Law)
$x + xy = x \qquad x(x + y) = x$	흡수법칙
$0' = 1 \qquad 1' = 0$	1과 0의 법칙

기본연산과 진리표

- 결합법칙과 분배법칙
  - 괄호 안의 연산자와 밖의 연산자가 같은 경우 결합법칙 적용
    - 예) $(x + y) + z$
  - 괄호 안의 연산자와 밖의 연산자가 다른 경우 분배법칙 적용
    - 예) $x \cdot (y + z)$
- 분배법칙은 일반 대수법칙과 다름
  - 일반 산술연산에서는 $x + yz \neq (x + y)(x + z)$
  - 부울대수법칙에서는 $x + (yz) = (x + y) \cdot (x + z)$

기본연산과 진리표

- 드 모르간의 법칙 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})' = \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}'$
  - 진리표를 이용한 증명

x y	x'	y'	$x+y$	$(x+y)'$	xy
0 0	1	1	0	1	1
0 1	1	0	1	0	0
1 0	0	1	1	0	0
1 1	0	0	1	0	0

기본연산과 진리표

- 대수 법칙을 이용한 증명 $xy + (x' + y') = 1$

(1) $xy + (x' + y') = (xy + x') + y'$ ∵ 결합법칙

$= (xy + x' \cdot 1) + y'$ ∵ 항등법칙

$= \{xy + x'(y + y')\} + y'$ ∵ 보수법칙

$= \{xy + x'y + x'y'\} + y'$ ∵ 분배법칙

$= (xy + x'y) + (x'y' + y')$ ∵ 결합법칙

$= y(x + x') + (x'y' + y')$ ∵ 분배법칙

$= y \cdot 1 + (x'y' + y')$ ∵ 보수법칙

$= y + (x'y' + y')$ ∵ 항등법칙

$= y + \{y'(x' + 1)\}$ ∵ 분배법칙

$= y + y' \cdot 1$ ∵ 유계법칙

$= y + y'$ ∵ 항등법칙

$= 1$ ∵ 보수법칙

기본연산과 진리표

문제

- $f(x,y,z)=x'yz'+xyz'+xy'$ 부울함수 값을 진리표를 이용해 구하세요

	①			②			③
x,y,z	x'	y'	z'	$x'yz'$	xyz'	xy'	$f(x,y,z)$
0 0 0	1	1	1	0	0	0	0
0 0 1	1	1	0	0	0	0	0
0 1 0	1	0	1	1	0	0	1
0 1 1	1	0	0	0	0	0	0
1 0 0	0	1	1	0	0	1	1
1 0 1	0	1	0	0	0	1	1
1 1 0	0	0	1	0	1	0	1
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0

기본연산과 진리표

문제

- 부울대수법칙을 이용해 다음 부울식을 최대한 간략히 하세요
- (1) $x'y'z'+x'yz'+x'yz+xy'z'$

- (1) $x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z' = x'y'z' + xy'z' + x'yz' + x'yz$ ∵ 교환법칙
- $= y'z'(x'+x) + x'y(z'+z)$ ∵ 분배법칙
- $= y'z' \cdot 1 + x'y \cdot 1$ ∵ 보수법칙
- $= y'z' + x'y$ ∵ 항등법칙
- $= x'y + y'z'$ ∵ 교환법칙

부울함수 표현과 활용

- 부울함수(Boolean Function)
  - n개의 부울변수와 부울 연산자로 구성되는 식 : n차 부울함수

- 리터럴(literal)
  - n차 부울함수를 구성하는 부울변수나 부울변수의 보수

(1) $f(x, y) = x' + y$

(2) $f(w, x, y, z) = w'x'y'z' + w + xy' + wyz' + xz'$

- 최소항(Minterm)
  - n차 부울함수 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$을 구성하는 논리곱 항들 중 n개의 리터럴 곱으로 구성된 항

부울함수 표현과 활용

문제

- 다음 부울함수들이 가질 수 있는 최소항을 구하라.
- (1) $f(x,y,z)$

- (1) $f(x, y, z)$ 는 3차 부울함수로 가능한 최소항의 개수는 8(=2^3)개다.
- 각 최소항에는 x 와 x' 중 하나, y 와 y' 중 하나, z 와 z' 중 하나를 반드시 포함해야
- 한다.
- $\therefore$ xyz, xyz', $xy'z$, $xy'z'$, $x'yz$, $x'yz'$, $x'y'z$, $x'y'z'$

부울함수 표현과 활용

- 부울함수 최소항

x	y	2변수 최소항
0	0	$x'y'$
0	1	$x'y$
1	0	xy'
1	1	xy

x	y	z	3변수 최소항
0	0	0	$x'y'z'$
0	0	1	$x'y'z$
0	1	0	$x'yz'$
0	1	1	$x'yz$
1	0	0	$xy'z'$
1	0	1	$xy'z$
1	1	0	xyz'
1	1	1	xyz

w	x	y	z	4변수 최소항
0	0	0	0	$w'x'y'z'$
0	0	0	1	$w'x'y'z$
0	0	1	0	$w'x'yz'$
0	0	1	1	$w'x'yz$
0	1	0	0	$w'xy'z'$
0	1	0	1	$w'xy'z$
0	1	1	0	$w'xyz'$
0	1	1	1	$w'xyz$
1	0	0	0	$wx'y'z'$
1	0	0	1	$wx'y'z$
1	0	1	0	$wx'yz'$
1	0	1	1	$wx'yz$
1	1	0	0	$wxy'z'$
1	1	0	1	$wxy'z$
1	1	1	0	$wxyz'$
1	1	1	1	$wxyz$

부울함수 표현과 활용

문제

- 다음 3차 부울함수를 보고 최소항을 구별하라.
- $f(x,y,z)=xy'+yz'+xyz+x'z'+x'y'z$

- 3차 부울함수므로 부울함수를 구성하는 논리곱 항은 각각 세 개의 리터럴을 포함해야 한다. 주어진 3차 부울함수는 5개의 논리곱 항 xy', yz', xyz, $x'z'$, $x'y'z$ 로 구성되어 있다. 3차 부울함수므로 3개의 리터럴로 구성되어 있는 논리곱 항이 최소항이 된다.
- $\therefore$ 최소항은 xyz 와 $x'y'z$ 다.

부울함수 표현과 활용

- 정규식(DNF : Disjunctive Normal Form)
  - 최소항들의 부울합으로 표현된 부울함수

- 정규식이 아닌 부울함수를 정규식으로 표현하는 방법
  - 각 항에 포함되지 않은 부울변수를 파악한다.
  - 각 항에 포함되지 않은 부울변수에 대해 논리곱에 대한 항등법칙 $x \cdot 1 = x$ 와 논리합에 대한 보수법칙 $x + x' = 1$을 적용해 각 항에 없는 부울변수를 추가한다.
  - 분배법칙 등을 이용해 식을 풀고, 중복되는 항은 멱등법칙에 의해 제거한다.

부울함수 표현과 활용

문제

- 다음 부울함수 정규식인 것을 찾아라.
- (1) $f(x,y)=xy+x'y'$ (2) $f(x,y)=x+x'y$

- (1) $f(x, y) = xy + x'y'$ 는 2차 부울함수고, 이 부울함수를 구성하는 모든 항이 2개의
- 리터럴(literal)로 구성되어 있으므로 정규식(DNF)이다.
- (2) $f(x, y) = x + x'y$ 도 2차 부울함수므로 정규식이 되기 위해서는 모든 항이 2개의
- 리터럴로 구성되어야 한다. 부울함수의 첫 번째 항이 그렇지 않으므로 정규식이
- 아니다.

부울함수 표현과 활용

- $\boldsymbol{f(x,y,z) = x + y'z + x'z' + x'yz}$을 정규식으로 표현

(1) 부울함수를 구성하는 변수 x, y, z 중 각 항에 없는 부울변수가 무엇인지 파악한다.
첫 번째 항인 x는 y와 z에 관한 리터럴(y 또는 y', z 또는 z')이 없다.
두 번째 항인 $y'z$는 x에 관한 리터럴(x또는 x')이 없다.
세 번째 항인 $x'z'$는 y에 관한 리터럴(y 또는 y')이 없다.

(2) 각 항에 포함되지 않은 변수에 대해 논리곱에 대한 항등법칙($x \cdot 1 = x$) 과 논리합에 대한 보수법칙($x + x' = 1$)을 적용하여 각 항에 없는 부울 변수를 추가한다.
첫 번째 항인 x는 y와 z에 관한 리터럴(y 또는 y', z또는 z')이 없으므로,

$$x = x \cdot 1 \cdot 1 = x(y + y')(z + z')$$

두 번째 항인 $y'z$는 x에 관한 리터럴(x또는 x')이 없으므로,

$$y'z = y'z \cdot 1 = y'z(x + x')$$

세 번째 항인 $x'z'$는 y에 관한 리터럴(y 또는 y')이 없으므로,

$$x'z' = x'z' \cdot 1 = x'z'(y + y')$$

부울함수 표현과 활용

$$\therefore f(x,y,z) = x + y'z + x'z' + x'yz$$
$$= x(y+y')(z+z') + y'z(x+x') + x'z'(y+y') + x'yz$$

(3) 분배법칙 등을 이용해 식을 풀고, 중복되는 항은 멱등법칙에 의해 제거한다.

$$f(x,y,z) = x + y'z + x'z' + x'yz$$
$$= x(y+y')(z+z') + y'z(x+x') + x'z'(y+y') + x'yz$$
$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z + x'yz' + x'y'z' + x'yz$$

$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z + x'yz' + x'y'z' + x'yz$$
$$\therefore f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z + x'yz' + x'y'z' + x'yz$$

부울함수 표현과 활용

문제

- 부울함수법칙을 이용해 다음 부울함수를 정규식으로 만들어라.
- (1) $f(x,y)=x+y'$

- (1) $f(x, y) = x + y'$는 부울변수 x와 y로 구성된 2차 부울함수로, 첫 번째 항인 x가 최소항이 되기 위해서는 y 에 대한 리터럴이 필요하고, 두 번째 항인 y'가 최소항이 되기 위해서는 x에 대한 리터럴이 필요하다. 그러므로 항등법칙과 보수법칙을 이용해 최소항으로 만든다.
- $f(x, y) = x + y' = x \cdot 1 + y' \cdot 1$ $\because$ 항등법칙
- $= x(y + y') + y'(x + x')$ $\because$ 보수법칙
- $= xy + xy' + y'x + y'x\ '$ $\because$ 분배법칙
- $= xy + xy' + xy' + x'y'$ $\because$ 교환법칙
- $= xy + xy' + x'y'$ $\because$ 멱등법칙
- $\therefore f(x, y) = xy + xy' + x'y'$

부울함수 표현과 활용

- 진리표를 사용하여 정규식으로 만드는 방법
  - n변수 진리표에서 부울함수에 포함된 변수를 포함하는 항은 모두 1로 표기한다.
  - 1이 표기된 항을 논리합으로 묶는다.
  - 예) $f(x,y,z) = x + y'z + x'z' + x'yz$

x	y	z	3변수 최소항	$f(x,y,z)$
0	0	0	$x'y'z'$	1
0	0	1	$x'y'z$	1
0	1	0	$x'yz'$	1
0	1	1	$x'yz$	1
1	0	0	$xy'z'$	1
1	0	1	$xy'z$	1
1	1	0	xyz'	1
1	1	1	xyz	1

$$\therefore f(x,y,z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z + x'yz' + x'y'z' + x'yz$$

부울함수 표현과 활용

문제

- 진리표를 이용해 다음 부울함수를 정규식으로 만들어라.
- (1) $f(x,y)=x+y'$

- (1) $f(x,y)=x+y'$ 는 2변수 부울함수므로 2변수 진리표가 필요하다. 진리표에서
- 이 부울함수의 첫 번째 항인 x를 포함하는 항은 xy와 xy'므로 두 항은 1로 표기
- 한다. 또한 두 번째 항인 y'를 포함하는 항은 xy^'와 $x'y$^'므로 두 항을 1로 표기한다.
- 1로 표기된 항을 모두 논리합으로 묶는다.
- $\therefore f(x,y) = xy + xy' + x'y'$

x	y	2변수 최소항	$f(x,y)$
0	0	$x'y'$	1
0	1	$x'y$	0
1	0	xy'	1
1	1	xy	1

부울함수 표현과 활용

- 카르노맵을 이용하여 간략화하는 방법은 다음과 같다.
  - n 차 부울 함수에 대응하는 n변수 카르노맵을 선택한다.
  - 부울함수에 있는 항들 각각에 대응하는 카르노맵 셀(cell)에 1을 표시한다.
  - 인접하는 1들을 2^n, 2^{n-1} , 2^{n-2}, ...순으로 묶는다.
  - 묶음에 있는 공통변수들을 찾아 논리합으로 묶는다.

부울함수 표현과 활용

- 카르노맵을 이용하여 간략화하는 방법은 다음과 같다.

$x \backslash y$	y	y'
x	xy	xy'
x'	$x'y$	$x'y'$

$x \backslash yz$	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	xyz	$xy'z$	$xy'z'$	xyz'
x'	$x'yz$	$x'y'z$	$x'y'z'$	$x'yz'$

$wx \backslash yz$	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
wx	$wxyz$	$wxy'z$	$wxy'z'$	$wxyz'$
$w'x$	$w'x'yz$	$w'x'y'z$	$w'x'y'z'$	$w'x'yz'$
$w'x'$	$w'x'yz$	$w'x'y'z$	$w'x'y'z'$	$w'x'yz'$
wx'	$wx'yz$	$wx'y'z$	$wx'y'z'$	$wx'yz'$

부울함수 표현과 활용

- 카르노맵 인접
  - 카르노맵에서 1이 상하좌우로 위치한 경우
  - 카르노맵의 가장 첫 번째 행과 마지막 행, 첫 번째 열과 마지막 열

$x \backslash yz$	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	1			1
x'	1			1

$wx \backslash yz$	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
wx	1			1
$w'x$				
$w'x'$				
wx'	1			1

부울함수 표현과 활용

문제

다음 정규식을 카르노맵을 이용해 간략화하라.

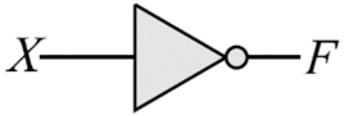
(2) $f(x,y,z)=xyz+x'yz+xy'z+x'yz'+xyz'$

- 2) $f(x,y,z)=xyz+x'yz+xy'z+x'yz'$
- ① 3변수 카르노맵을 사용한다.
- ② 부울함수에 포함된 항들을 카르노맵에 1로 표기한다.
- ③ 인접한 항들을 찾기 위해 2^3 (=8)개의 1이 인접해 있는지확인한다. 8개의 1로 묶을수 없으므로 2^2 (=4) 개의 1이 인접해 있는지 확인하고 인접하는 1끼리 묶는다.
- xyz 에 대한 1은 $x'yz$를 묶기 위해 중복되어 묶인다.
- ④ 각 묶음에 공통으로 있는 변수를 찾아 논리합으로 묶는다.
- 묶음 (a)의 공통변수 : y
- 묶음 (b)의 공통변수 : xz
- $\therefore f(x,y,z)=xz+y$

x \ yz	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	1	1		1
x'	1	(b)		1

부울함수와 논리회로

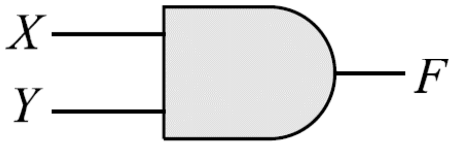
- NOT 게이트
  - 하나의 입력을 받아 논리부정 연산 후 하나의 출력을 낸다.



입력	출력
X	F
0	1
1	0

부울함수와 논리회로

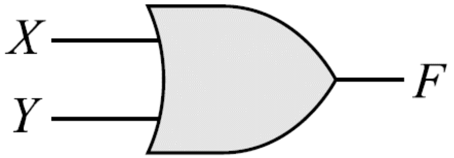
- AND 게이트
  - 두 개의 입력을 받아 논리곱 연산 후 하나의 출력을 낸다.



입력		출력
X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

부울함수와 논리회로

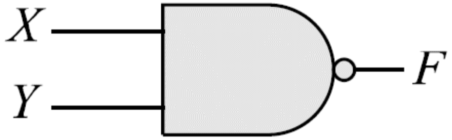
- OR 게이트
  - 두 개의 입력을 받아 논리합 연산 후 하나의 출력을 낸다.



입력		출력
X	*Y*	*F*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

부울함수와 논리회로

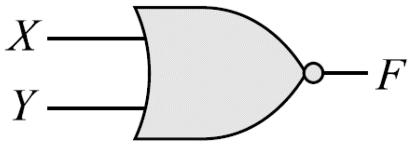
- NAND 게이트
  - AND 게이트와 NOT 게이트를 결합한 논리소자로, 두 개의 입력을 받아 논리곱 연산 후 논리부정한 결과를 출력



입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

부울함수와 논리회로

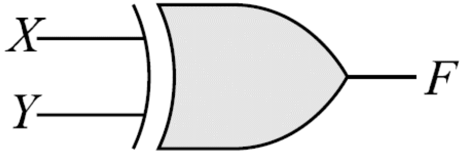
- NOR 게이트
  - OR 게이트와 NOT 게이트를 결합한 논리소자로, 두 개의 입력을 받아 논리합 연산 후 논리부정한 결과를 출력



입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

부울함수와 논리회로

- XOR 게이트
  - eXclusive OR 연산자 ⨁에 대한 논리소자
  - 두 입력이 같은 값이 입력되면 0, 다른 값이 입력되면 1이 출력된다.



입력		출력
X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X \oplus Y = X'Y + XY'$$

부울함수와 논리회로

- XNOR 게이트
  - XOR 게이트와 NOT 게이트를 결합한 논리소자
  - 두 개의 입력을 받아 XOR 연산 후 논리부정한 결과를 출력

$$X \odot Y = (X \oplus Y)' = (X'Y + XY')'$$

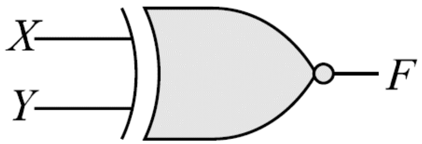
$= (X'Y)' \cdot (XY')'$ ∵드모르간의 법칙

$= (X + Y')(X' + Y)$ ∵드모르간의 법칙

$= XX' + XY + X'Y' + YY'$ ∵분배법칙

$= 0 + XY + X'Y' + 0$ ∵보수법칙

$= XY + X'Y'$ ∵항등법칙



입력		출력
X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

부울함수와 논리회로

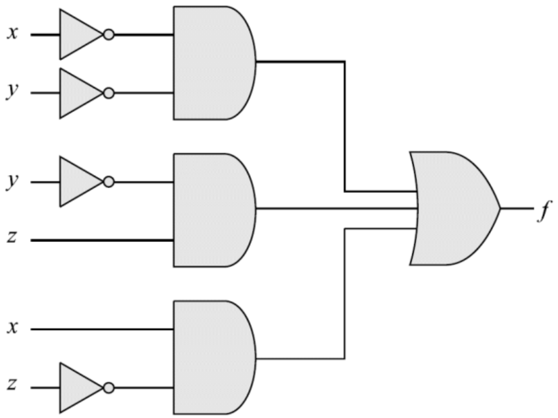
문제

- 부울함수 $f(x,y,z)=x'y'+y'z+xz'$ 에 대해 다음을 답하라.
- (1) 주어진 부울함수를 논리회로로 나타내라.
- (2) 주어진 부울함수의 정규식을 구하여라
- (3) 주어진 부울함수의 정규식을 카르노맵으로 간략화하고 그 결과를 논리회로로 나타내라

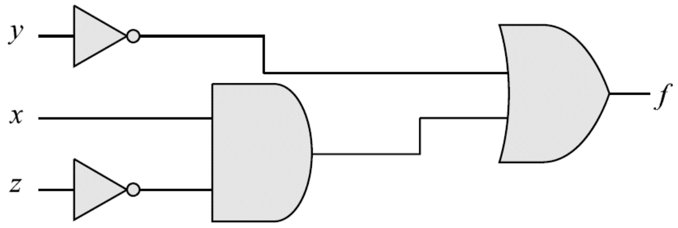
• (1)$f(x,y,z) = x'y' + y'z + xz'$를 논리회로로 나타내면 다음과 같다.

• (2)$f(x,y,z) = x'y' + y'z + xz'$를 정규식으로 나타내면 다음과 같다. $f(x,y,z)= xy'z + xy'z' + xyz' + x'y'z + x'y'z'$

• (3)$f(x,y,z)$=x^′ y^′+y^′ z+xz′를 간략히 하면 다음과 같다. ∴ $f(x,y,z)=xz'+y'$



$x \backslash yz$	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x		1	1	1
x'		1	1	



맺음말

- 부울대수 기본 개념
- 부울대수 기본 연산과 진리표
- 부울함수 표현과 활용
- 부울함수와 논리회로(논리게이트)