11.

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&4&2\\2&5&1\\3&6&0\end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&-3\\0&0&-12\end{bmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$ 이므로 선형 독립임.

62 part 3. 1.

$$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$a_1 + a_2 = \begin{bmatrix}a_1+a_2\\3a_1-a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$a_1=1,\ a_2=1$

0이 아닌 해가 존재하므로 선형 종속임.
선형 독립이 아니므로 기저가 아니다.

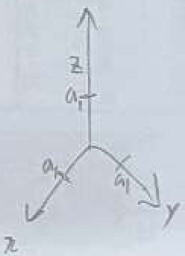
4.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

(1) $a_1 = a_2 = 0$ 이므로 선형 독립이다.

(2) 그림으로 그리면



(1),(2)에 의해 위식은 기저이다.

7.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\1&3&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ 이므로 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ㄴ 계수행 사다리꼴로 나타내면

$\mathrm{rank}(A) + N(A) = 3$
$\quad 3 \qquad\quad 0$
이 되므로 기저가 맞다.

8.

$$\begin{bmatrix}1&1&4&1&2\\0&1&2&1&1\\0&0&0&1&2\\1&-1&0&0&2\\2&1&6&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&0&1&0\\0&1&2&0&-1&0\\0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$\mathrm{Rank}(A) + N(A) = 5$
$\ \ \ \ 3 \qquad\quad 2$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ t = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$ 기저로 가짐.

Part 3.

3. $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(A) \neq 0$ 이므로 선형 독립이다.

4.

$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \mid x는\ 실수 \right\}$

u와 v를 S에 속하는 임의의 벡터라고 하면

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(1) $u+v = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 두 벡터의 합 $u+v$의 두번째 원소가 1의 값을 가지지 않으므로 $u+v$는 S에 속하지 않는다.

(2) $\alpha u = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \neq 1$인 경우를 제외하고는 αu는 S에 속하지 않는다. 그러므로 (1)과 (2)에 따라 S는 부분공간이 되지 않음.

6.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \Downarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Downarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right]$$

$c_3 = 0$
$c_2 = 0$
$c_1 = 0$

7. (1) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

$v = -2u$ 이므로 선형 종속이다.

(2) $u = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$u+v = \begin{bmatrix} -3u_1+6v \\ u_1+4v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

이므로 $u=0,\ v=0$ 이므로 선형 독립이다.