이산수학

휴먼지능정보공학전공

학습 내용

- 기본개념
- 관계의 표현
- 관계의 성질
- 관계의 연산
- 파이썬 코딩

기본개념

- 관계
  - 관계(Relation)란 객체들 간의 연관성을 표현하는 구조로서, 수학이나 공학 분야 뿐만 아니라 여러 다른 분야에서도 기본적이고 중요한 개념임
    - 집합 A와 집합 B가 있을 때 A가 B의 부분 집합인 경우 관계가 있음
    - 컴퓨터 프로그램에서 두 변수에 어떤 값이 대입되어 있을 때 일치, 포함, 비교 관계 등을 나타낼 수 있음

기본개념

- 이항관계
  - 서로 다른 두 집합에 속하는 서로 다른 두 원소 사이의 순서쌍의 집합을 관계로 표현함
  - 두 집합 A,B에 대하여 A에서 B로 이항관계 R은 두 집합의 곱집합 A X B 부분 집합
    - 공학과 수학에 있어서의 관계는 집합에서의 원소들 간의 순서(order)를 고려한 것임
  - A x B의 원소인 순서쌍 (a, b)가 주어졌을 때 (a,b) ∈ R 과 aRb는 동치
    - (a,b) ∈ R ←→ aRb: a와 b가 관계가 있을 때
    - (a,b) ∉ R ←→ aRb: a와 b가 관계가 없을 때

기본개념

문제

- 집합 A={ 1, 2, 3} 일 때 질문에 답하세요
- (1) A x A 곱집합을 구하세요
- (2) A에서 A로 가는 관계 R에서 1R1, 2R2, 3R3을 만족하는 관계 R' 의 순서쌍을 구하세요

- (1) A x A = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }
- (2) A x A = R = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }
- R′ = { (1,1), (2,2), (3,3) }

기본개념

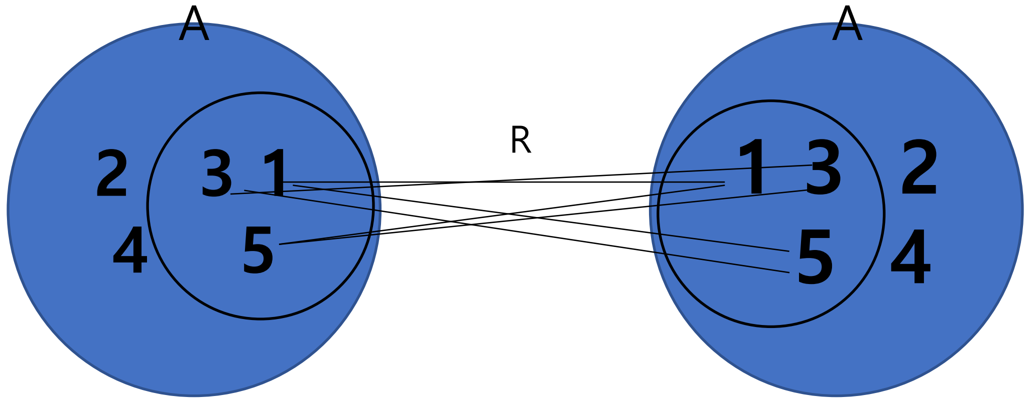
- 정의역, 공변역, 치역
  - 집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 첫 번째 원소가 포함되어 있는 집합을 정의역
    - $dom(R)=\{a|a \in A\}$
  - 집합 A에서 집합 B로 가는 이항관계 R에 속한 순서쌍의 두 번째 원소가 포함되어 있는 집합을 공변역
    - $codom(R)=\{b|b \in B\}$
  - 집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R에 속한 순서쌍의 두 번째 원소들을 모아놓은 집합, 공변역의 부분집합을 치역
    - $ran(R)=\{b|(a,b) \in R\} \subseteq B$

기본개념

문제

- 집합 A={x|1≤x≤5, x는 정수}일 때, A 에서 A 로 가는 관계 R 은 다음과 같다. 질문에 답하세요
- R={(a,b)|a×b는 홀수, a∈A, b∈A
- (1) 관계 R을 순서쌍으로 나타내라.
- (2) 관계 R의 정의역, 공변역, 치역을 구하세요

- (1) R={(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)}
- (2) $dom(R)$=$codom(R)$= {1,3,5}
- ran(R) = { 1, 3, 5 }



기본개념

- 카티시안 곱(곱집합)
  - A, B가 집합일 때, 순서쌍의 첫 번째 요소는 집합 A의 원소이고 두 번째 요소는 집합 B의 원소로 구성된 모든 순서쌍의 집합을 A와 B의 카티시안 곱 또는 곱집합이라고 하며 A x B 로 나타냄
    - A x B = { (x,y) | x ∈ A, y ∈ B}
    - 곱집합은 두 개 이상의 집합에 대해서도 확장 가능
    - A1 x A2 x … x An = { (x1, x,2, ,,, xn) | 모든 i, 1 ≦ i ≦ n에 대해 xi ∈ Ai }

기본개념

문제

- 집합 A={ a, b}, B= {1,2,3} 일 때 질문에 답하세요
- (1) A x A 곱집합을 구하세요
- (2) A x B 곱집합을 구하세요
- (3) B x A 곱집합을 구하세요
- (4) B x B 곱집합을 구하세요

- A x A = {(a,a), (a,b),(b,a),(b,b)}
- A x B = { (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) }
- B x A = { (1, a), (1,b), (2, a), (2, b), (3,a), (3,b) }
- B x B = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }

기본개념

- n관계와 역관계
  - 집합 A_1, A_2,…, A_n 이 있을 때, $A1$×$A2$× An의 부분집합을 n항관계라고 한다.
  - 집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R이 있을 때, R에 대한 역관계는 $\boldsymbol{R^{-1}}$= $\{(b,a) \in B \times A | (a,b) \in R\}$로 표현한다.

기본개념

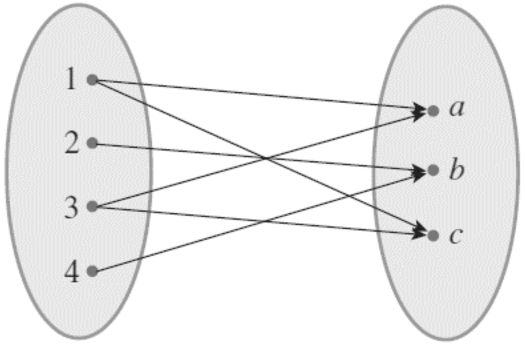
문제

- 집합 A={1,2,3,4,5}, 집합 B={6,7,8,9,10} 이고,A 에서B로 가는 가능한 관계 R 다음과 같을 때 역관계 R^(−1)을 구하세요
- R={(1,6),(1,8),(1,10),(2,7),(2,9),(3,8),(4,7),(4,9),(5,6),(5,8),(5,10)}

- 관계에서 순서쌍의 순서를 바꾼다
- R^{-1}={(6,1),(6,5),(7,2),(7,4),(8,1),(8,3),(8,5),(9,2),(9,4),(10,1),(10,5)}

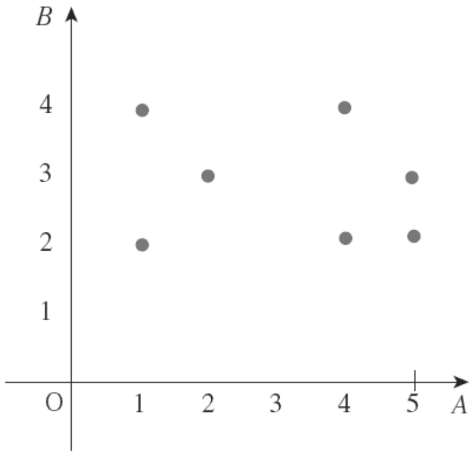
관계의 표현

- 화살도표
  - 집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R이 있을 때, 두 집합 원소 사이의 관계를 화살표로나타내는 방법인 화살표 도표 방법이 있음
    - 화살표 도표를 이용한 관계의 표현은 a가 집합 A의 원소이고, b가 집합 B의 원소라 가정할 때
    - (a, b) ∈ R일 경우 집합 A에있는 원소 a에서 집합 B에 있는 원소 b로 화살표를 그려서 관계를 표현함
      - A = (1,2,3,4}, B={ a,b,c}
      - A x B = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c) }
      - R = { (1,a), (1,c) , (2,b), (3,a), (3,c), (4,b) }



관계의 표현

- 좌표도표
  - 집합 A에서 집합 B로 가는 관계 R이 있을 때, 집합 A의 원소들을 x축에, 집합 B의 원소들을 y축에 표시하여 관계 R을 표시하는 방법인 좌표도표 방법이 있음
    - 관계를 표현하는 방법은 집합 A의 원소를 x축 위의 점으로 표시함
    - 집합 B의 원소를 y축 위의 점으로 생각함
    - a ∈ A와 b ∈ B가 관계가 있으면 a를 가리키는 x 좌표축과 b를 가리키는 y 좌표축이 만나는 곳에 점으로 표시함
      - A = { 1,2,3,4,5 }, B ={1,2,3,4}
      - R = { (1,2), (1,4), (2,3), (4,2), (4,4), (5,2), (5,3) }



관계의 표현

- 관계행렬
  - 집합 $A=\{a_1,a_2,\ldots, a_m\}$에서 집합 $B=\{b_1,b_2,\ldots, b_n\}$으로 가는 관계 R에 대한 $m\times n$ 행렬 $M_R=[m\_ij]$ 로의 부울형렬로 표현하는 관계행렬 방법이 있음
    - 부울 행렬은 행렬 안에 있는 모든 원소들이 0 또는 1로 표시되는 행렬을 의미함
    - 관계 행렬의 행에는 집합 A의 원소, 열에는 집합 B의 원소를 표시함
    - 행렬의 각 요소의 값은 a ∈ A와 b ∈ B의 관계가 있으면 1, 관계가 없으면 0으로 표현하는 방법임

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

$$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$$

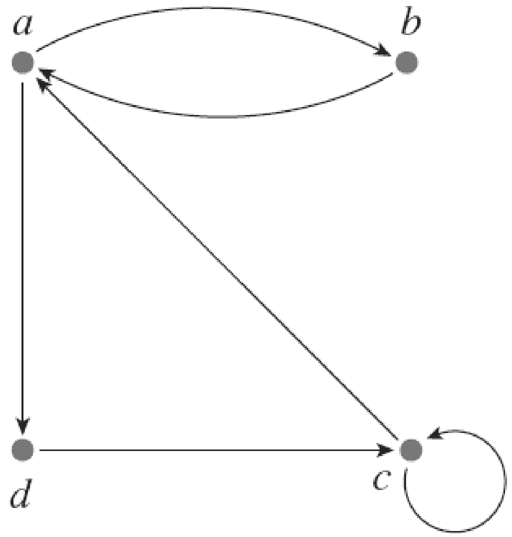
$$M[i, j]=\begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j)\in R, \\ 0 & \text{if } (a_i, b_j)\notin R, \end{cases} \qquad i=1, 2, \cdots, n, \;\; j=1, 2, \cdots, m$$

- R = { (1,2), (1,3), (3,2) }

$$M=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

관계의 표현

- 관계그래프
  - 하나의 집합에 대한 관계 R을 꼭지점과 화살표를 이용해 표기한 그래프 형태로 표현하는 관계그래프 방법이 있음
    - 집합 A,B의 각 원소를 그래프의 정점(vertex)으로 표시함
    - (a, b) $\in$ R일 경우 a에서 b로의 화살표가 있는 연결선(edge)인 방향 그래프로 표현함
      - R = { (a,b), (a,d), (b,a), (c,a), (c,c), (d,c) }



관계의 성질

- 반사관계
  - 모든 $a \in A$ 에 대해 $(a,a) \in R$ 인 관계를 반사관계라고 함
  - 관계 R에 대한 방향 그래프를 그렸을 때 그래프의 모든 정점에서 자기 자신을 가리키는 화살표가 있어야 반사 관계가 성립
    - 집합 A={1, 2, 3}에 대한 관계
    - $R1$={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)}, 순서쌍 (1, 1), (2, 2), (3, 3)을 포함하고 있으므로 반사관계
    - $R2$={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)} 순서쌍 (1, 1)을 포함하지 않으므로 반사관계가 아님

관계의 성질

- 비반사관계
  - 모든 $a \in A$ 에 대해 $(a,a) \notin R$ 인 관계를 반사관계라고 함
  - R이 비반사 관계이면 R의 원소 중에는(a, a), a ∈ A인 원소가 하나도 존재하지 않음
    - 집합 A={1, 2, 3}에 대한 관계
    - R1={(1,1),(1,2),(2,1), (2,3),(3,2)} (1, 1)이 존재하므로 비반사관계가 아님
    - R2={(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)} (1, 1), (2, 2), (3, 3)이 모두 존재하지 않으므로 비반사관계

관계의 성질

- 대칭관계
  - 어떤 $a,b \in A$ 에 대해서 $(a,b) \in R$ 이면 $(b,a) \in R$ 인 관계를 대칭관계라고 함
  - 대칭 관계인 R을 방향 그래프로 나타내면, 하나의 정점에서 다른 정점으로 화살표가 나가면 반대로 다른 정점에서 그 정점으로의 화살표도 반드시 있어야 함
    - 집합 A={1, 2, 3}에 대한 관계
    - R1={(1,1),(1,2),(2,1), (2,3),(3,2),(3,3)}
(1, 1)의 대칭 (1, 1) (1, 2)의 대칭 (2, 1), (2, 1)의 대칭 (1, 2) (2, 3)의 대칭 (3, 2), (3, 2)의 대칭
(2, 3) (3, 3)의 대칭 (3, 3)　　　∴ 대칭 관계
    - R2={(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)} (1, 2)의 대칭 (2, 1)이 존재하지 않으므로 대칭관계가 아님

관계의 성질

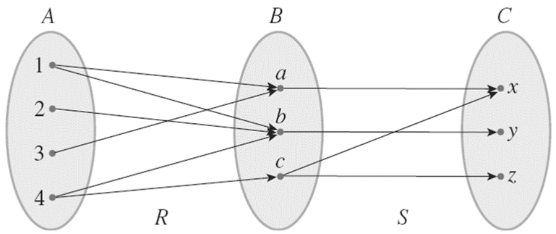
- 반대칭관계
  - 어떤 $a,b \in A$에 대해 $(a,b) \in R$일 때 $(b,a) \in R$이면 $a=b$인 관계를 반대칭관계라고 함
  - $a \neq b$고 (a,b) ∈ 이면 $(b,a) \notin R$인 관계
  - 대칭 관계와 반대칭 관계는 서로 반대의 개념을 가짐
  - 대칭 관계도 되고 반대칭 관계도 성립되는 경우도 있음
    - 집합 A={1, 2, 3}에 대한 관계
    - $R1$={(1,1),(1,2),(2,1), (1,3),(3,2)}
1≠2인데, (1, 2)의 대칭인 (2, 1)이 존재하므로 반대칭관계가 아님
    - $R2$={(1,2),(1,3),(2,2),(3,2)}
1≠2일 때, (1, 2)의 대칭 (2, 1)이 존재하지 않는다.
1≠ 3일 때, (1, 3)의 대칭 (3, 1)이 존재하지 않는다.
3≠2일 때, (3, 2)의 대칭 (2, 3)이 존재하지 않는다. ∴ 반대칭관계

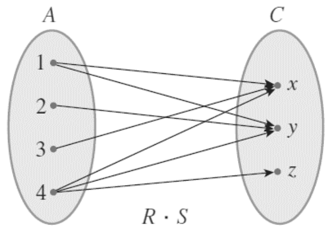
관계의 성질

- 추이관계
  - 어떤 $a,b,c \in A$ 에 대해 $(a,b) \in R$이고 $(b,c) \in R$이면 $(a,c) \in R$인 관계를 추이관계라고 함
    - 집합 A={1, 2, 3}에 대한 관계 R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}
    - (1, 1)에 대해 두 번째 원소인 1로 시작하는 순서쌍과의 추이관계 고려
    - (1, 1)∈R 이고, (1, 1)∈R이므로 (1, 1) ∈R,
(1, 1)∈R 이고, (1, 2)∈R이므로 (1, 2) ∈R,
(1, 1)∈ R이고, (1, 3) ∈R이므로 (1, 3) ∈R,
    - (1, 2)에 대해 두 번째 원소인 2로 시작하는 순서쌍과의 추이관계 고려
(1, 2)∈R 이고, (2, 1)∈R이므로 (1, 1) ∈R,
(1, 2)∈ R이고, (2, 2) ∈R이므로 (1, 2) ∈R,
(1, 2)∈ R이고, (2, 3) ∈R이므로 (1, 3) ∈R
    - (1, 3)에 대해 두 번째 원소인 3으로 시작하는 순서쌍과의 추이관계 고려
3을 첫 번째 원소로 갖는 순서쌍이 없으므로 추이관계 고려할 필요 없음
    - (2, 1)에 대해 두 번째 원소인 1로 시작하는 순서쌍과의 추이관계 고려
    - (2, 1)∈R 이고, (1, 1)∈R이므로 (2, 1) ∈R,
(2, 1)∈R 이고, (1, 2)∈R이므로 (2, 2) ∈R,
(2, 1)∈ R이고, (1, 3) ∈R이므로 (2, 3) ∈R,
    - (2, 2)에 대해 두 번째 원소인 2로 시작하는 순서쌍과의 추이관계 고려
    - (2,2)∈R 이고, (2, 1)∈R이므로 (2, 1) ∈R,
    - (2, 2)∈R 이고, (2, 2)∈R이므로 (2, 2) ∈R,
    - (2, 2)∈ R이고, (2, 3) ∈R이므로 (2, 3) ∈R.
    - (2, 3)에 대해 두 번째 원소인 3으로 시작하는 순서쌍과의 추이관계 고려
3을 첫 번째 원소로 갖는 순서쌍이 없으므로 추이관계 고려할 필요 없다. ∴ 추이 관계

관계의 연산

- 합성관계
  - 집합 A,에서 집합 B로 가는 관계 R이 있고, 집합 B에서 집합 C로 가는 관계 S가 있을 때, 집합 A에서 집합 C로 가는 관계를 합성관계라고 함
  - 합성 관계는 주어진 두 관계로부터 새로운 관계를 이끌어내는 것임
  - 이미 존재하고 있는 관계 R과 S로부터 새로운 관계 R·S를 만들어 냄
  - 합성 관계에서 관계 R과 S는 연관성이 있어야 하는데, R의 치역이 S의 정의역이 될 경우에만 합성 명제 R·S 를 만들 수 있음
    - A = {1,2,3,4} , B={a,b,c}, C={x,y,z}, 집합 A에서 집합B로의 관계를 집합B에서 집합C로의 관계를 S라 하면 R과 S가 다음과 같을때 합성관계 R · S
    - R = { (1,a), (1,b), (2,b), (3,a), (4,b), (4,c) }
    - S = { (a, x), (b,y), (c, x), (c,z) }
    - R·S = { (1,x), (1,y), (2,y), (3,x), (4,x), (4, y), (4, z) }





관계의 연산

- 합성관계의 거듭제곱
  - 집합 A에 대한 관계 R에 대하여 n=1, 2, 3....일 때, 거듭제곱 관계
    - 합성관계의 거듭제곱 $\boldsymbol{R^n}$ 집합 A에 대한 관계 R에 대하여 n=1, 2, 3....일 때, 거듭제곱

이산수학 – 문제해결 - 파이썬코딩

# 파이썬 관계 	
 	
a=tuple(i for i in range(1,6))
print(a)
b=tuple(i for i in range(1,6))
print(b)
d=1
 	
for i in a:
    for j in b:
        c = i*j
        if c%2==1:
            print(d,"회 출력",i,",",j,"=","홀수")
            d=d+1
print("관계 순서쌍의 개수",d-1,"개")
	# 출력결과
	
	(1, 2, 3, 4, 5)
	(1, 2, 3, 4, 5)
	1 회 출력 1 , 1 = 홀수
	2 회 출력 1 , 3 = 홀수
	3 회 출력 1 , 5 = 홀수
	4 회 출력 3 , 1 = 홀수
	5 회 출력 3 , 3 = 홀수
	6 회 출력 3 , 5 = 홀수
	7 회 출력 5 , 1 = 홀수
	8 회 출력 5 , 3 = 홀수
	9 회 출력 5 , 5 = 홀수
	관계 순서쌍의 개수 9 개

학습 내용 요약

- 기본개념
- 관계의 표현
- 관계의 성질
- 관계의 연산
- 파이썬 코딩