

Network Flow 1

나정휘

<https://justicehui.github.io/>

목차

- Network Flow
- Ford-Fulkerson Method
- Max-Flow Min-Cut Theorem
- Edmonds-Karp Algorithm
- Bipartite Matching
- König's Theorem
- Dilworth's Theorem
- Dinic's Algorithm
- Min Cost Max Flow
- Circulation
- Push Relabel Algorithm
- Cost Scaling Algorithm

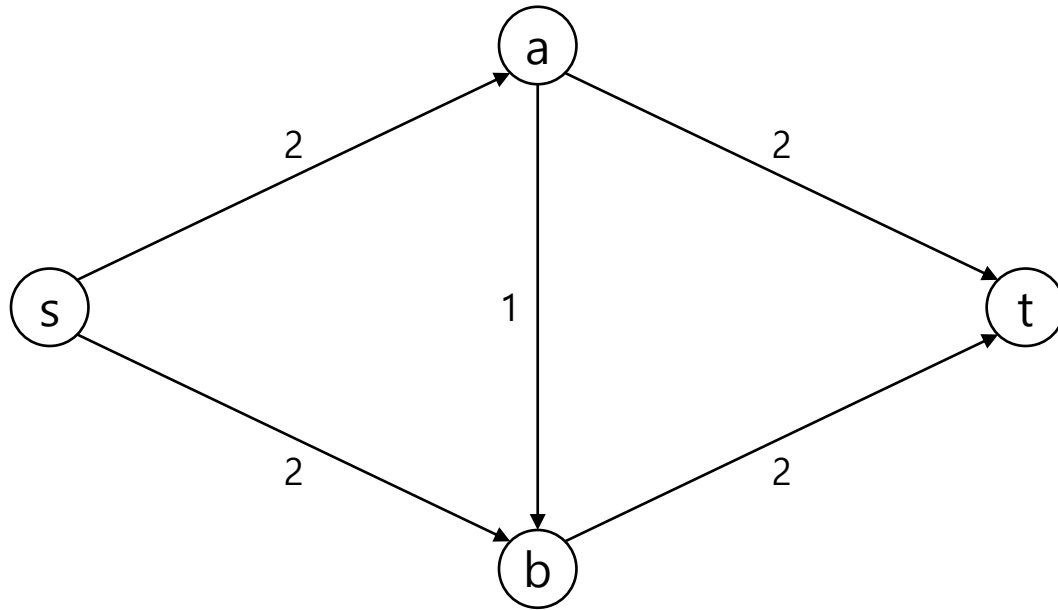
Network Flow

Network Flow

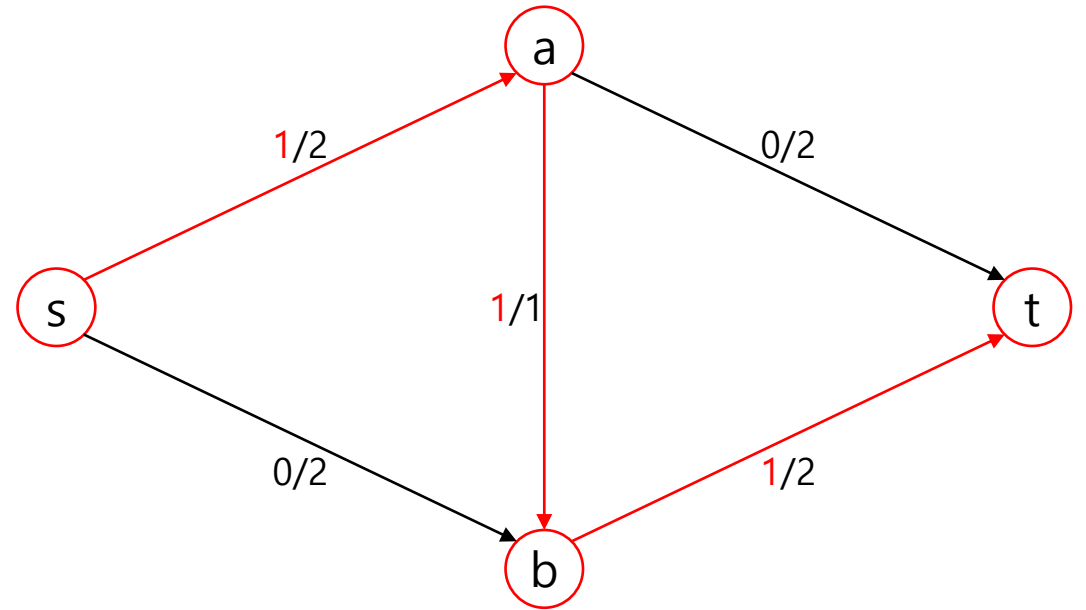
- Flow Network
 - 각 간선마다 용량 $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ 이 있는 방향 그래프 $G = (V, E)$ 를 “유량 네트워크”라고 부름
 - 편의상 각 간선 $e \in E$ 에는 용량이 0인 역방향 간선 e^R 이 존재한다고 하자.
- Flow
 - 유량 네트워크의 두 정점 $s, t \in V$ 가 주어짐
 - 아래 세 조건을 만족하는 함수 $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ 를 “유량”이라고 부름
 - $f(e) \leq c(e)$
 - $f(e^R) = -f(e)$
 - 모든 $v \in V \setminus \{s, t\}$ 에 대해 $\sum_{(u,v)} f(u, v) = \sum_{(v,u)} f(v, u)$
 - source와 sink를 제외한 모든 정점에 대해, 들어오는 유량과 나가는 유량의 합이 동일
 - 유량 f 의 크기는 $|f| = \sum_v f(v, t)$ 로 정의
 - sink로 들어가는 유량 = source에서 나가는 유량

Network Flow

- Flow Network

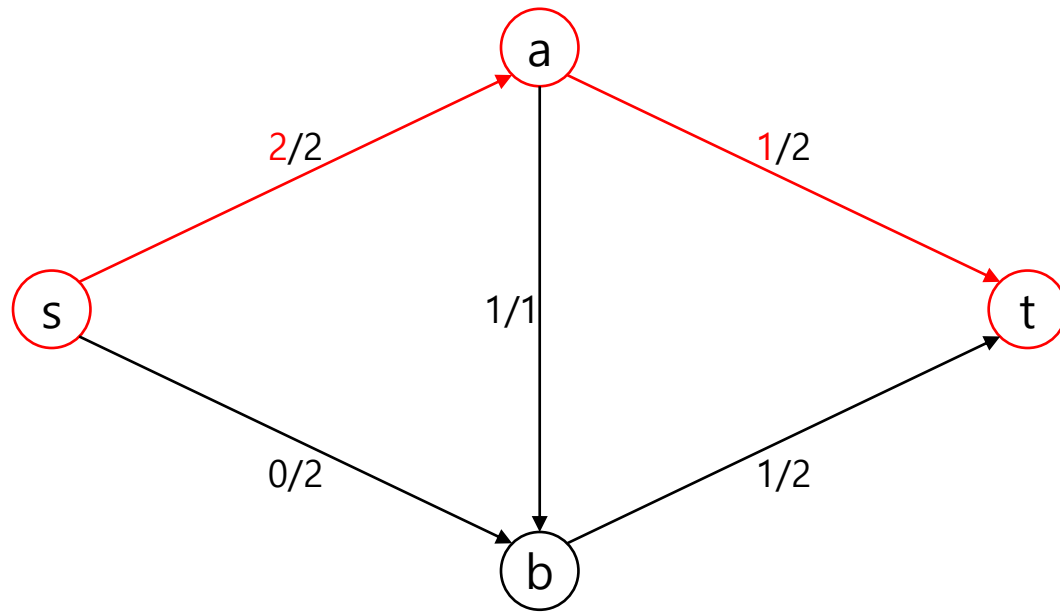


- Flow, $|f| = 1$

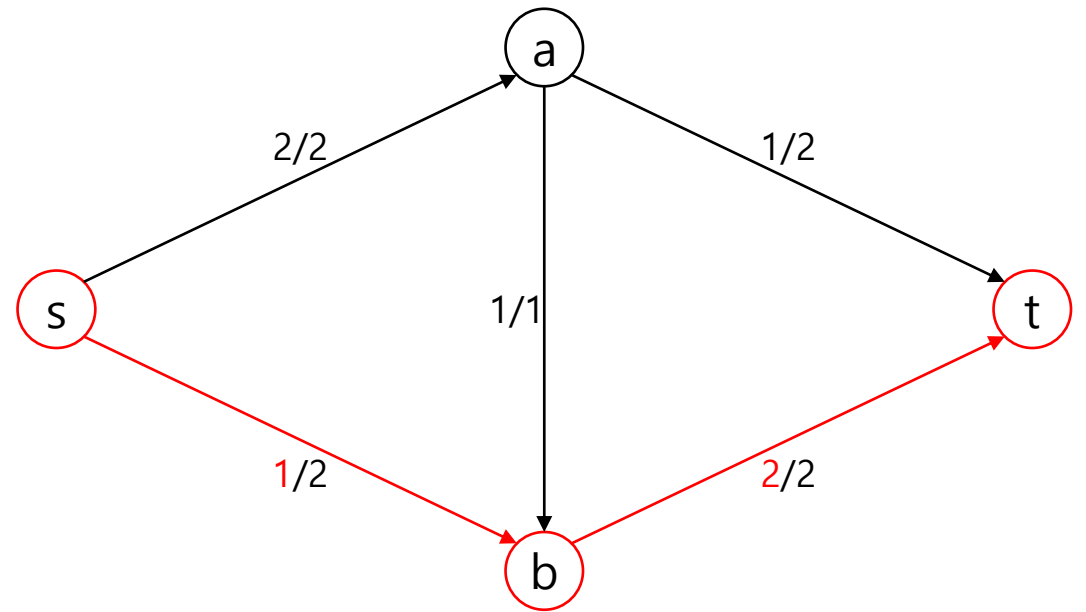


Network Flow

- Flow, $|f| = 2$

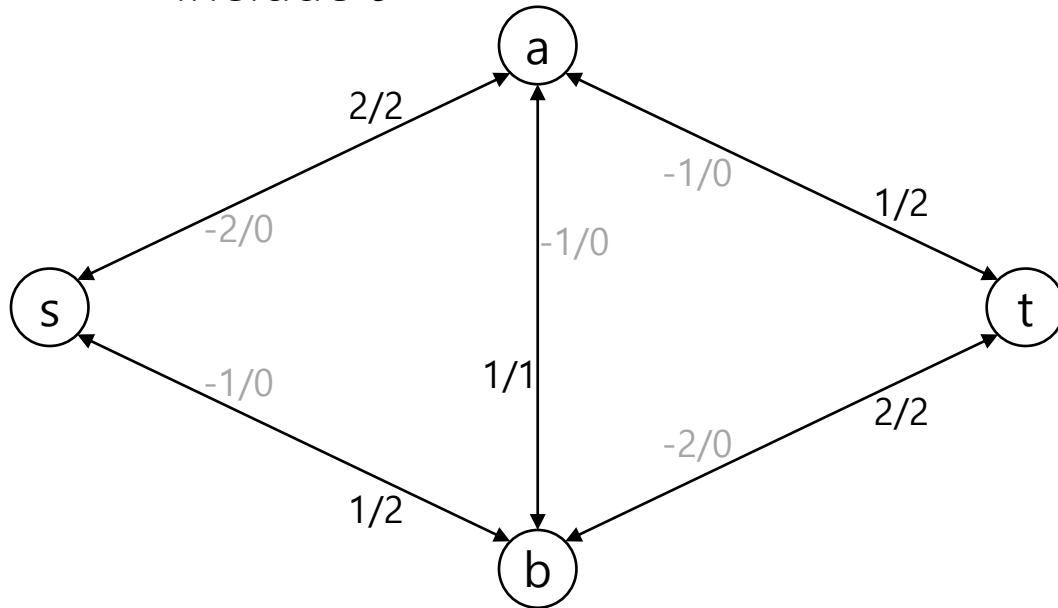


- Flow, $|f| = 3$

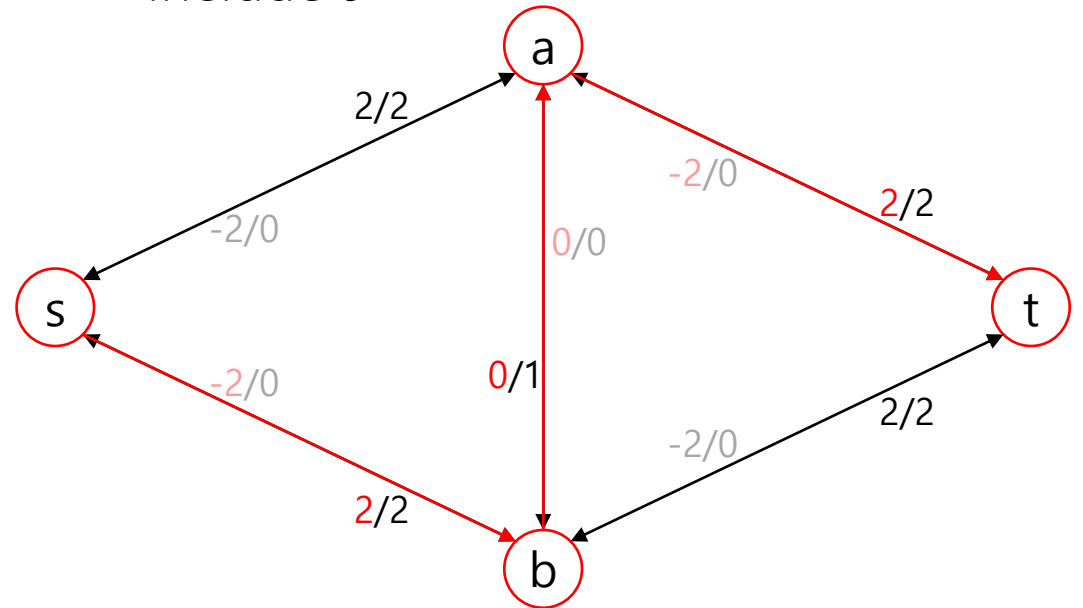


Network Flow

- Flow, $|f| = 3$
 - include e^R



- Flow, $|f| = 4$
 - include e^R

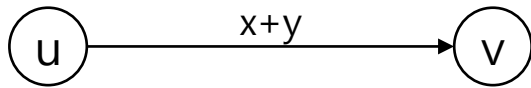
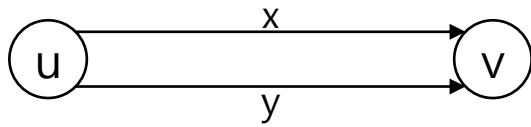


Network Flow

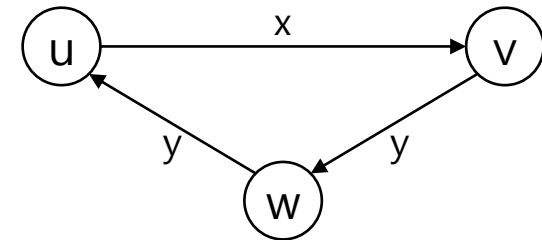
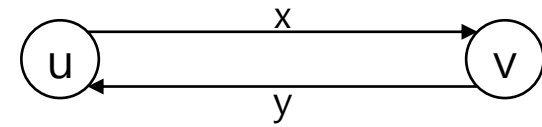
- Maximum Flow
 - 유량 네트워크 $G = (V, E, c)$ 와 정점 s, t 가 주어짐
 - 크기가 최대인 유량 f 를 구하는 문제
- Minimum Cost Maximum Flow
 - 유량 네트워크 $G = (V, E, c)$, 간선의 가중치 $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, 정점 s, t 가 주어짐
 - 크기가 최대이면서 $\sum_{(u,v)} f(u, v) \times w(u, v)$ 가 최소인 유량 f 를 구하는 문제
 - 유량의 비용을 최소화하는 문제
- Assume simple graph
 - self loop, parallel edge가 없는 상황만 생각해도 된다.
 - self loop: 유량의 크기에 변화를 주지 않음
 - parallel edge: 적절한 처리를 통해 없앨 수 있음
 - 따라서 $e \in E$ 이면 $e^R \notin E$

Network Flow

- Parallel edge



- Anti parallel edge

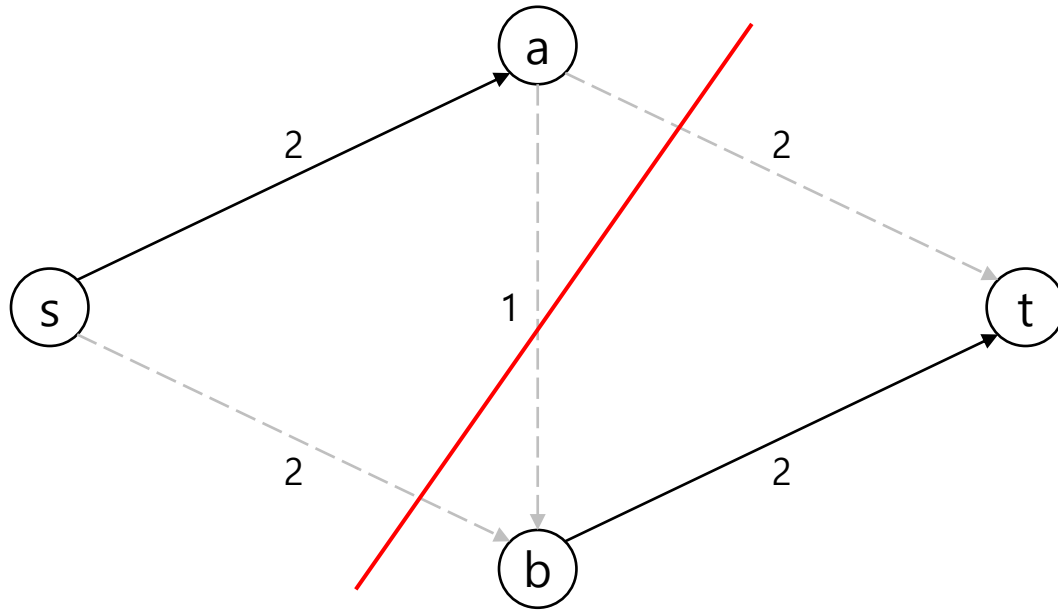


Network Flow

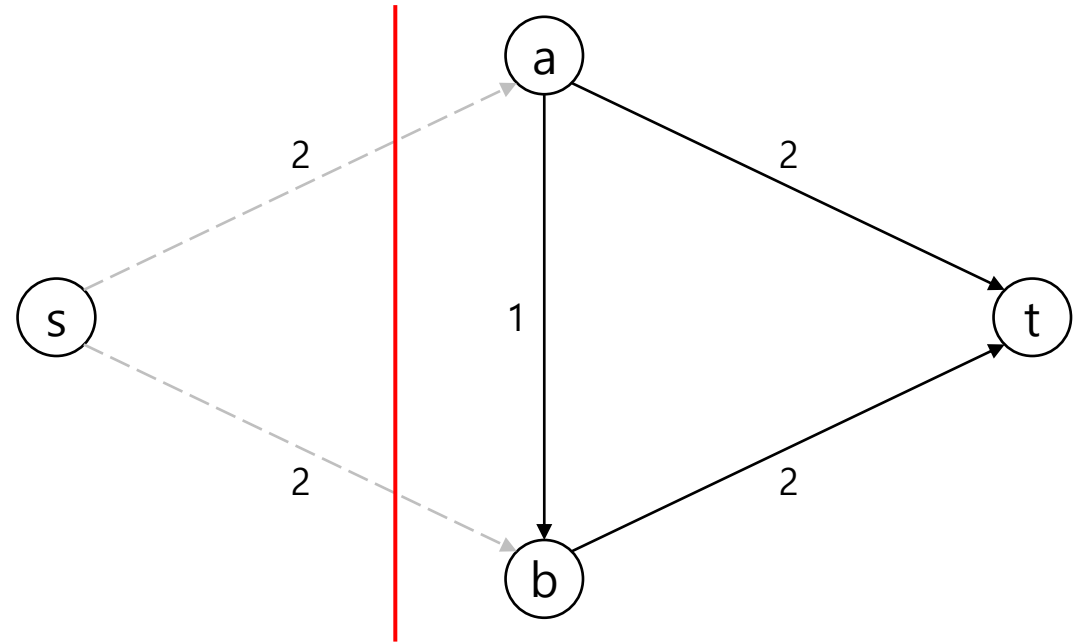
- Minimum Cut
 - 가중치 그래프 $G = (V, E, w)$ 와 정점 s, t 가 주어짐
 - 정점의 부분 집합 $S \subset V$ 가 $s \in S, t \in V \setminus S$ 를 만족하면 $(S, V \setminus S)$ 를 “절단”이라고 부름
 - 절단 $(S, V \setminus S)$ 의 가중치: $c(S) = \sum_{u \in S, v \in V \setminus S} w(u, v)$
 - S 에서 $V \setminus S$ 로 가는 간선의 가중치 합
 - 가중치가 최소인 절단을 “최소 절단”이라고 부름
 - s 와 t 가 연결되지 않도록 최소 비용으로 간선을 제거하는 문제
 - 유량과 관련 없어 보이지만...

Network Flow

- Cut (cost = 5)

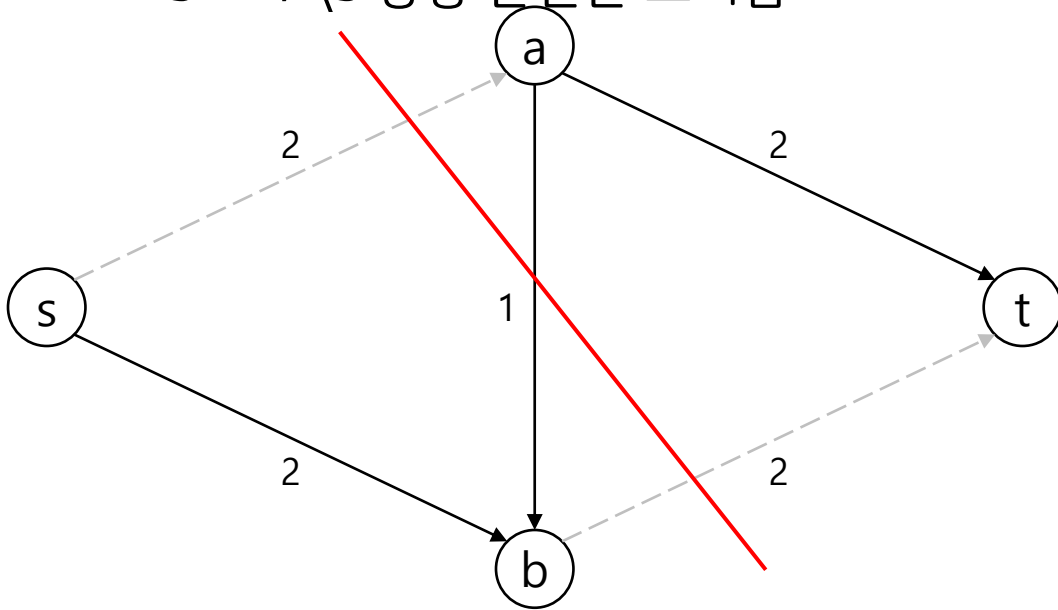


- Minimum Cut (cost = 4)

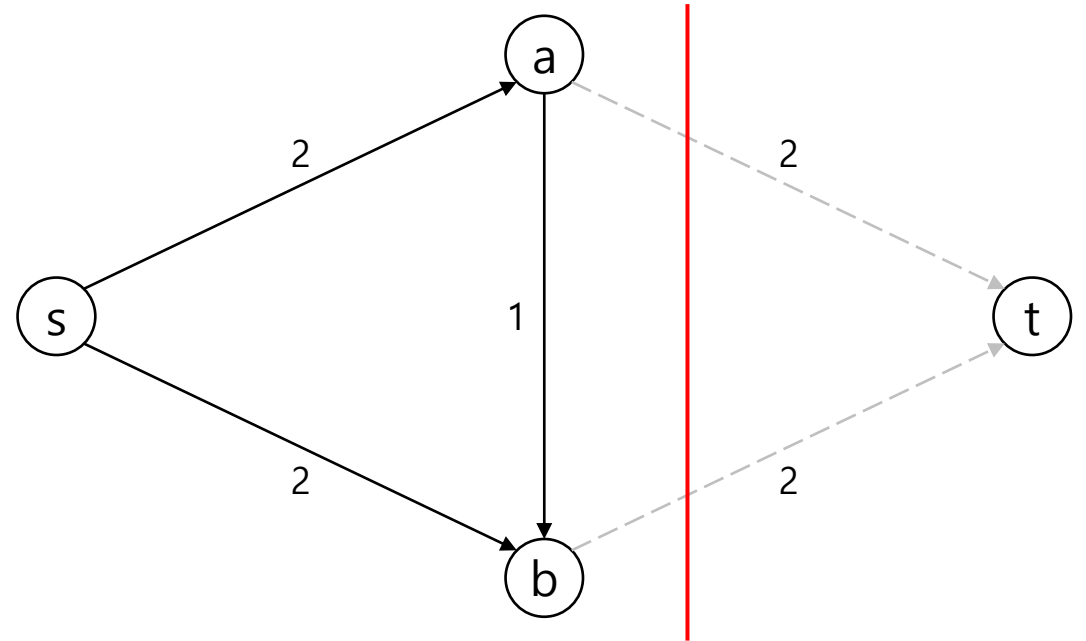


Network Flow

- Minimum Cut (cost = 4)
 - $S \rightarrow V \setminus S$ 방향 간선만 고려함



- Minimum Cut (cost = 4)



Network Flow

- Network Flow 1에서 다루는 내용
 - Ford-Fulkerson Method / Edmonds-Karp Algorithm
 - 최대 유량을 $O(VE^2)$ 에 구하는 방법
 - Max-Flow Min-Cut Theorem
 - 최대 유량 = 최소 절단이라는 사실
- Network Flow 2에서 다루는 내용
 - Bipartite Matching
 - 이분 그래프의 최대 매칭을 $O(VE)$ 에 구하는 방법
 - DAG의 최소 경로 덮개를 $O(VE)$ 에 구하는 방법
 - Konig's Theorem, Dilworth's Theorem
 - 이분 그래프의 최소 정점 커버, 최대 독립 집합을 $O(VE)$ 에 구하는 방법
 - DAG의 최대 반사슬을 $O(VE)$ 에 구하는 방법

Network Flow

- Network Flow 3에서 다루는 내용
 - Dinic's Algorithm
 - 최대 유량을 $O(V^2E)$ 에 구하는 방법
 - Minimum Cost Maximum Flow
 - 최소 비용 최대 유량을 $O(VEf)$ 에 구하는 방법 (Successive Shortest Path Algorithm)
- 다루지 않지만 고인물들은 알고 있는 내용
 - Circulation
 - 네트워크 플로우의 일반화 버전, 정점마다 demand/supply가 존재
 - 각 정점마다 $d : V \rightarrow \mathbb{R}$ 이 있어서, $\sum_{(u,v)} f(u,v) - \sum_{(v,u)} f(v,u) = d(v)$ 를 만족해야 함
 - Push Relabel Algorithm
 - 최대 유량을 $O(V^3)$ 또는 $O(V^2\sqrt{E})$ 에 구하는 방법
 - Cost Scaling Algorithm
 - 최소 비용 최대 유량을 $O(V^3 \log VC)$ 에 구하는 방법

질문?

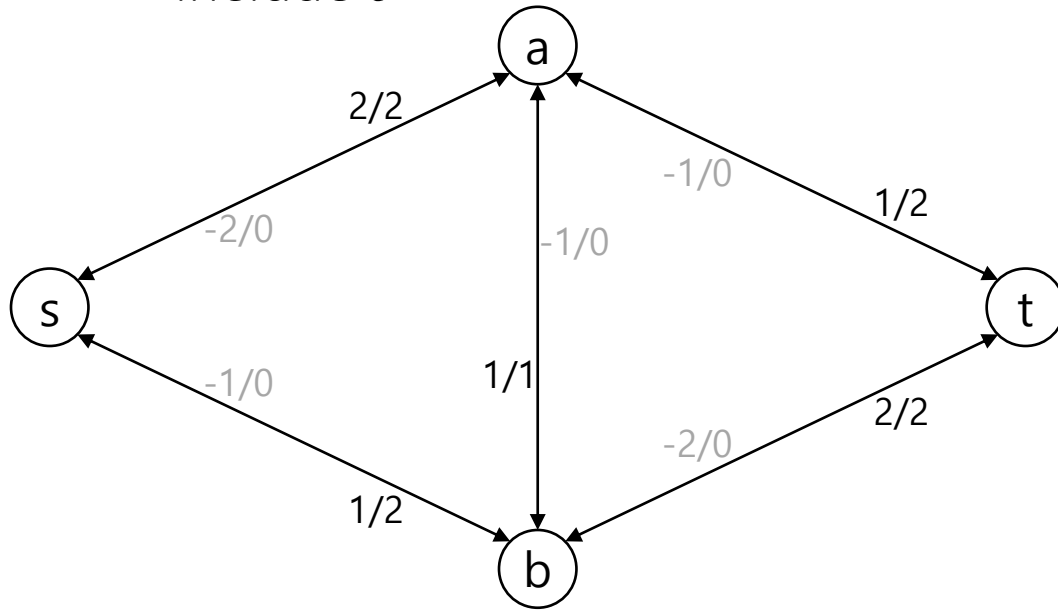
Ford-Fulkerson Method

Ford-Fulkerson Method

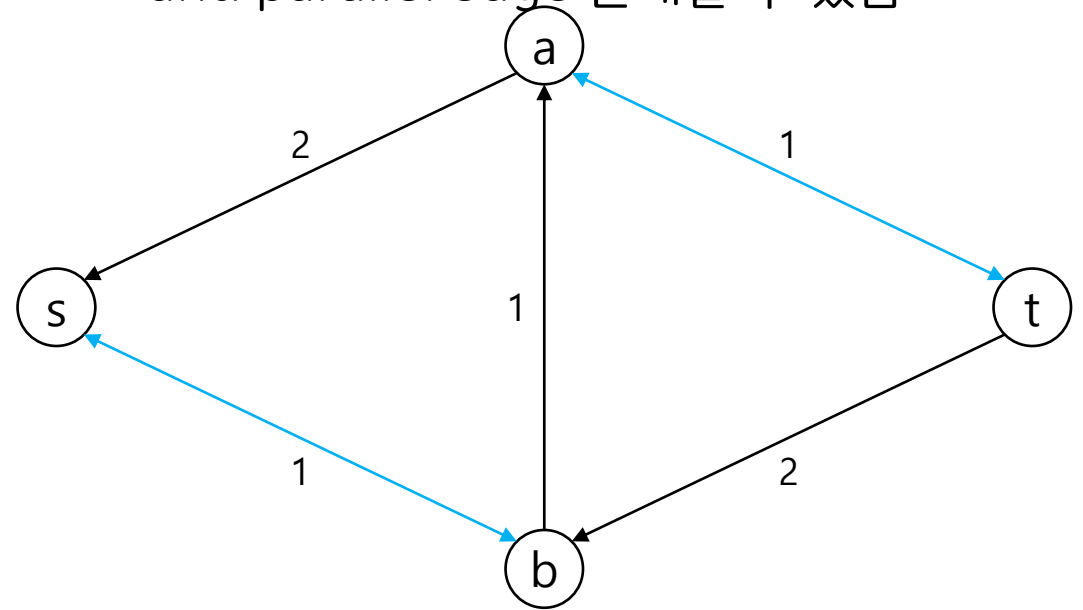
- Residual Network
 - 잔여 그래프 $G_f = (V, E_f, c_f)$: 유량을 f 만큼 보냈을 때, 용량이 남은 간선들로 구성된 그래프
 - $E_f = \{e; e \in E, f(e) < c(e)\} \cup \{e; e^R \in E, f(e^R) > 0\}$
 - $c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & e \in E \\ f(e^R), & e^R \in E' \end{cases}$ 따라서 $c_f(e)$ 는 항상 양수임을 알 수 있음
- Augmenting Path
 - 잔여 그래프에 있는 임의의 $s - t$ 단순 경로를 “증가 경로”라고 부름
 - 증가 경로 P 를 구성하는 간선을 e_1, e_2, \dots, e_k 라고 하면
 - P 를 따라서 유량을 $f_P = \min\{c_f(e_1), c_f(e_2), \dots, c_f(e_k)\}$ 만큼 흘릴 수 있음
 - 이때 유량의 크기는 $f_P > 0$ 만큼 증가함
 - 만약 f 가 최대 유량이면 G_f 에 $s - t$ 경로가 존재하지 않음

Ford-Fulkerson Method

- Flow, $|f| = 3$
 - include e^R

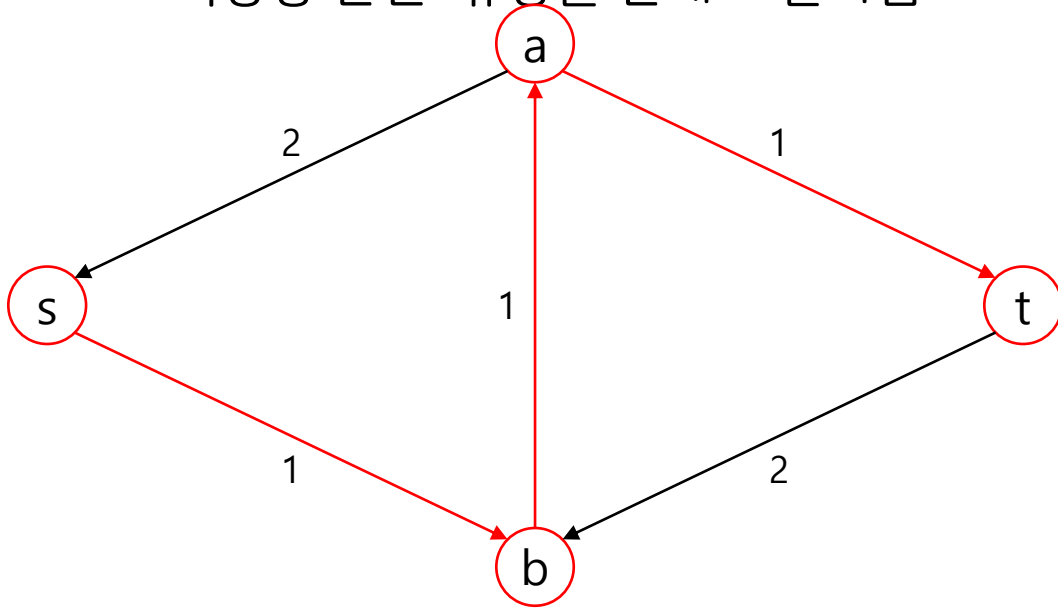


- Residual Graph
 - anti parallel edge 존재할 수 있음

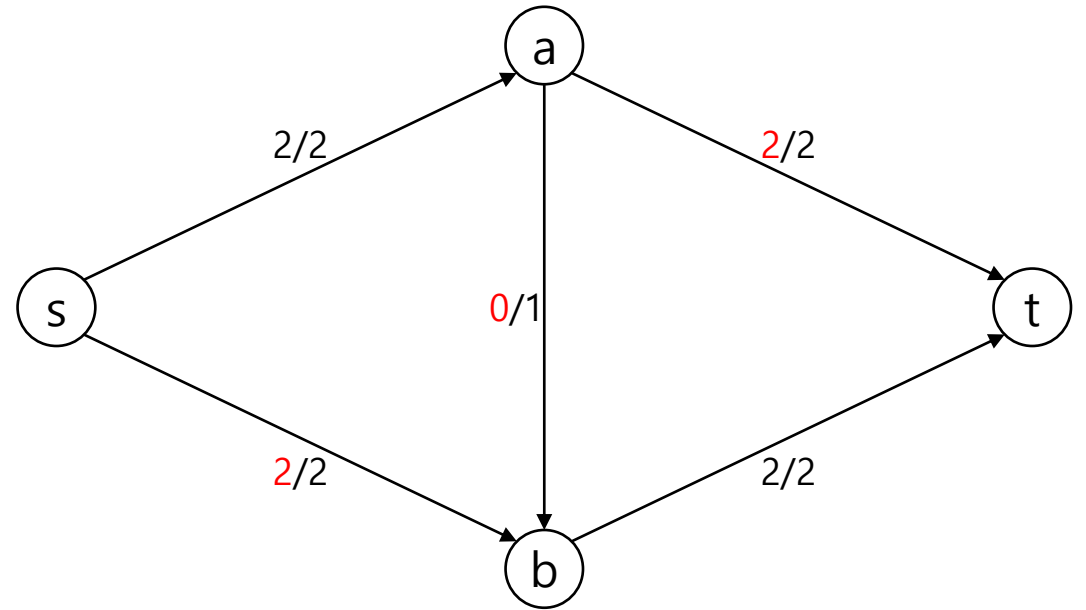


Ford-Fulkerson Method

- Augmenting Path
 - 역방향 간선: 유량을 반대로 밀어냄



- Flow, $|f| = 4$



Ford-Fulkerson Method

- Ford-Fulkerson Method
 - $f \leftarrow 0$
 - while G_f 에 $s - t$ 단순 경로 P 가 존재하면
 - $f \leftarrow f + f_P$
 - f 는 최대 유량
- 이게 진짜 될까?
 - 알고리즘은 항상 종료함
 - 매번 $|f|$ 가 최소 1씩 증가하고 최대 유량은 유한하므로 종료함
 - f 가 최대 유량이면 G_f 에 증가 경로가 존재하지 않음
 - 이미 증명함
 - G_f 에 증가 경로가 존재하지 않으면 f 는 최대 유량
 - 이걸 증명해 보자.

질문?

Max-Flow Min-Cut Theorem

Max-Flow Min-Cut Theorem

- 지금까지 알아낸 것
 - f 가 최대 유량이면 G_f 에 증가 경로가 존재하지 않음
 - G 가 단순 그래프이므로 G_f 에도 루프와 평행 간선 없음, 역평행 간선은 존재 가능
 - $e \in E_f$ 이면 e 와 e^R 중 정확히 하나만 E 에 존재
 - $e \notin E_f$ 이면 $f(e) = c(e)$ 이고, $e^R \notin E_f$ 이면 $f(e) = 0$
 - G_f 에 서로 역평행인 간선 e, e^R 가 존재하면 $0 < f(e) < c(e)$
- 증명하고 싶은 것
 - G_f 에 증가 경로가 존재하지 않으면 f 는 최대 유량

Max-Flow Min-Cut Theorem

- 용어 정의
 - 유량 네트워크 G_f 와 절단 $(S, V \setminus S)$ 에 대해
 - $\delta_f^+(S) = \{(u, v); (u, v) \in E_f, u \in S, v \in V \setminus S\}$: S 에서 $V \setminus S$ 로 가는 간선
 - $\delta_f^-(S) = \{(u, v); (u, v) \in E_f, u \in V \setminus S, v \in S\}$: $V \setminus S$ 에서 S 로 가는 간선
 - 절단의 비용 $c(S) = \sum_{e \in \delta_f^+(S)} c(e)$
 - 절단의 유량 $f(S) = \sum_{e \in \delta_f^+(S)} f(e) - \sum_{e \in \delta_f^-(S)} f(e)$: S 에서 $V \setminus S$ 로 가는 유량

Max-Flow Min-Cut Theorem

- 몇 가지 성질
 - 유량 네트워크 G_f 와 절단 $(S, V \setminus S)$ 에 대해
 - 간선의 용량보다 더 많이 유량을 보낼 수 없으므로 $f(S) \leq c(S)$ 임을 알 수 있음
 - 잘 생각해 보면 $f(S) = |f|$ 임을 알 수 있음
 - 어떤 증가 경로 P 가 $S \rightarrow V \setminus S$ 방향으로 k 번 이동했다면 $S \leftarrow V \setminus S$ 방향으로 $k - 1$ 번 이동함
 - 각 증가 경로는 $f(S)$ 를 $(k - (k - 1)) \times F_p$ 만큼 증가시키므로 $f(S) = |f|$ 가 성립함
 - 최소 절단 $(S', V \setminus S')$ 에 대해 $|f| = f(S') \leq c(S')$
 - $|f| = c(S)$ 이면 f 와 $(S, V \setminus S)$ 는 각각 최대 유량, 최소 절단
 - 최대 유량 $f' \neq f$ 가 있다고 가정하면 $c(S) = |f| \leq |f'| \leq c(S') \leq c(S)$ 이므로 f 도 최대 유량

Max-Flow Min-Cut Theorem

- Ford-Fulkerson Method 증명의 완성
 - 증가 경로가 없는 G_f 에서 s 로부터 도달 가능한 정점 집합을 S 라고 하면 $|f| = c(S)$
 - 정의에 의해 $S \rightarrow V \setminus S$ 간선은 존재하지 않음 ($\delta_f^+(S) = \emptyset$)
 - $e \in \delta_f^-$ 가 $e \in E$ 를 만족하는 경우: $e^R \notin E_f$ 이므로 $f(e) = 0$
 - $e^R \in \delta_f^-$ 가 $e^R \notin E$ 를 만족하는 경우: $e \notin E_f$ 이므로 $f(e) = c(e)$
 - $|f| = f(S) = \sum_{e^R \in \delta_f^-(S), e^R \notin E_f} f(e) - \sum_{e \in \delta_f^-(S), e \in E_f} f(e) = \sum c(e) - \sum 0 = c(S)$
- Max-Flow Min-Cut Theorem
 - f 가 최대 유량이면 G_f 에 증가 경로가 존재하지 않음
 - G_f 에 증가 경로가 존재하지 않으면 $(S, V \setminus S)$ 는 최소 절단이고 f 는 최대 유량

Max-Flow Min-Cut Theorem

- 정리
 - G_f 에 증가 경로가 존재하지 않으면 f 는 최대 유량
 - 이때 s 에서 도달할 수 있는 정점의 집합을 S 라고 하면 $(S, V \setminus S)$ 는 최소 절단

질문?

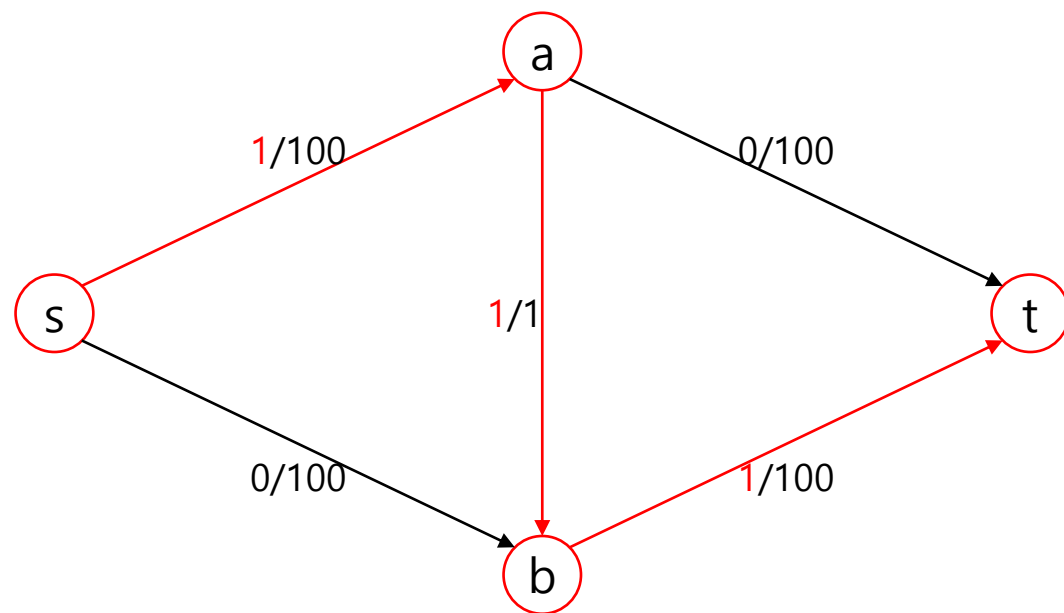
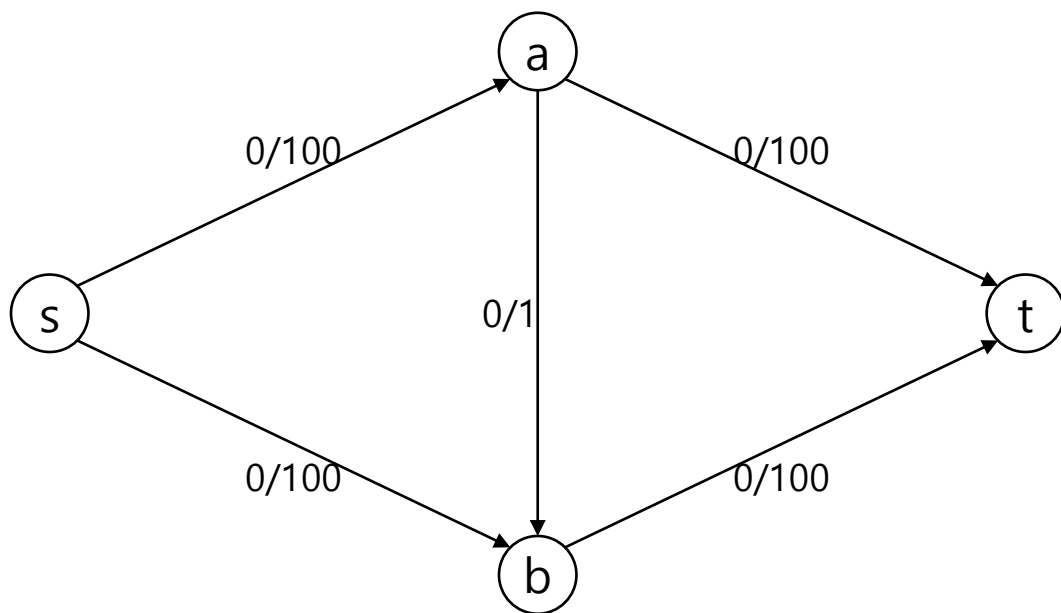
Edmonds-Karp Algorithm

Edmonds-Karp Algorithm

- Ford-Fulkerson Method의 시간 복잡도
 - 증가 경로를 찾아서 유량을 보낼 때마다 $|f|$ 가 최소 1씩 증가
 - 증가 경로를 찾는 건 DFS/BFS 등으로 $O(E)$ 에 가능
 - 최악의 경우 $O(Ef)$ 가 되고 이건 다항 시간이 아님
- 다항 시간에 최대 유량을 구할 수 있을까?

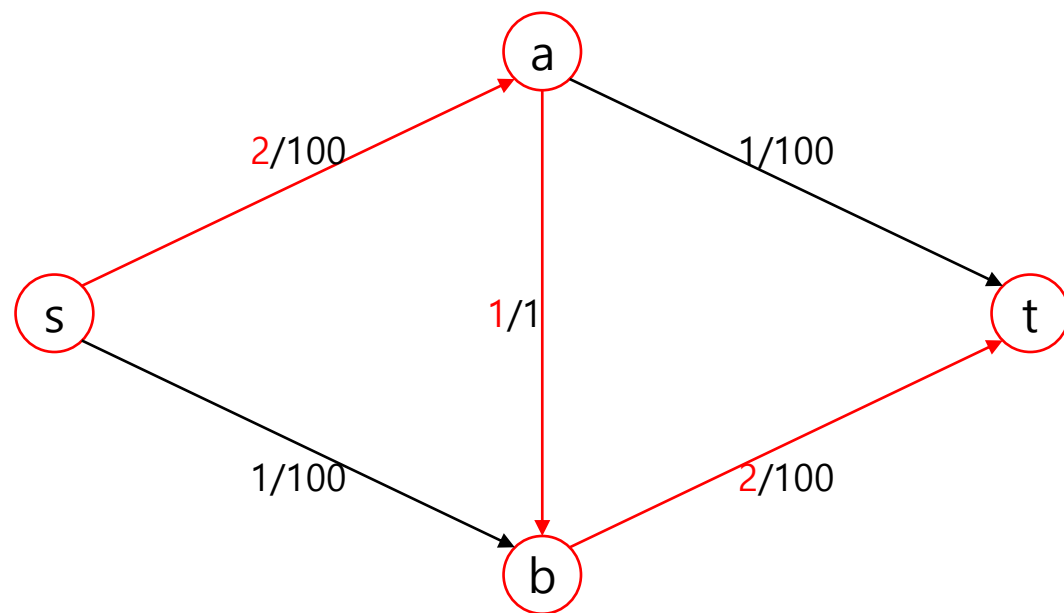
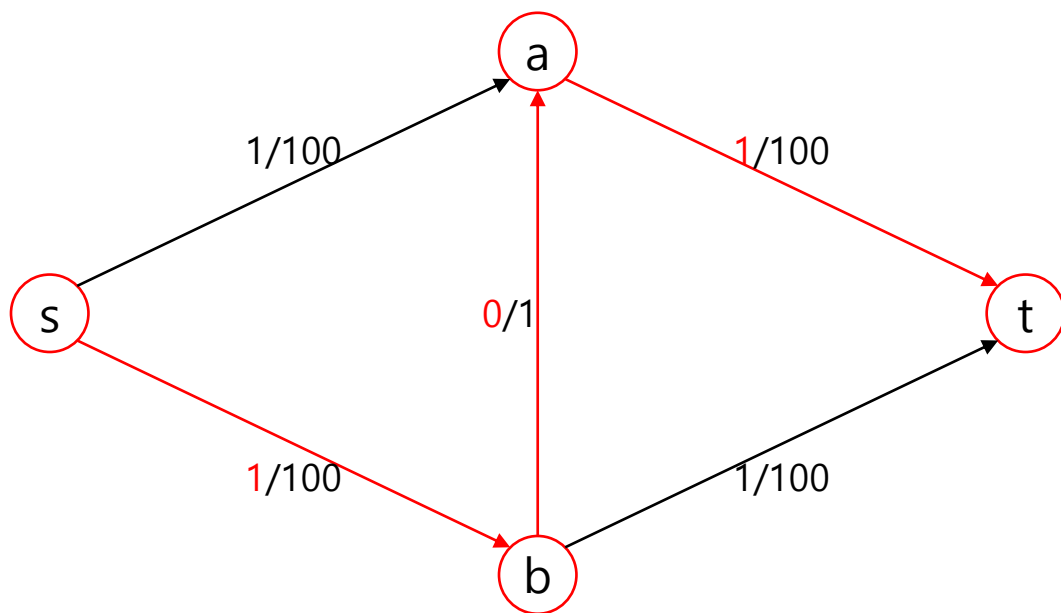
Edmonds-Karp Algorithm

- Ford-Fulkerson Method의 worst case



Edmonds-Karp Algorithm

- Ford-Fulkerson Method의 worst case



Edmonds-Karp Algorithm

- Edmonds-Karp Algorithm
 - 매번 가장 짧은 증가 경로로 유량을 보내면 $O(VE^2)$
 - 증가 경로의 길이는 매번 단조 증가함 - 뒤에서 증명
 - 경로의 길이로 가능한 것은 최대 $V - 1$ 가지
 - 증가 경로의 길이가 고정되어 있을 때, 증가 경로를 찾을 때마다 최소 1개의 간선이 꼭 참
 - 증가 경로의 길이가 고정되어 있을 때 증가 경로는 최대 E 번 찾게 됨
 - 따라서 증가 경로를 찾는 횟수는 최대 $O(VE)$
 - 가장 짧은 증가 경로는 BFS를 이용해 $O(E)$ 시간에 찾을 수 있으므로 전체 시간 복잡도는 $O(VE^2)$

Edmonds-Karp Algorithm

- Edmonds-Karp Algorithm
 - 증가 경로의 길이는 매번 단조 증가함
 - G_f 에서 증가 경로 P 를 찾아서 유량을 보낸 상태를 $f' = f + f_P$ 라고 하자.
 - G_f 에서 v 에서 t 까지의 거리를 $d_f(v)$ 라고 하자. $d_{f'}(v) \geq d_f(v)$ 를 보일 것이다.
 - 모든 정점을 $d_{f'}(v)$ 오름차순으로 정렬해서 $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$ 라고 하자.
 - t 와 가까운 정점부터 수학적 귀납법을 이용해 증명한다.
 - $d_{f'}(v_i) = \infty$ 이면 $d_f(v_i) \leq \infty$ 이므로 $d_{f'}(v) < \infty$ 인 정점만 고려하면 됨
 - $d_{f'}(v_1 = t) = d_f(v_1)$ 은 자명함
 - $G_{f'}$ 에서 v_i 에서 t 로 가는 최단 경로에서 v_i 직후에 방문하는 정점을 $v_j (i > j, d_{f'}(v_j) \geq d_f(v_j))$ 라고 하자.
 - $(v_i, v_j) \in E_f$ 였다면 $d_{f'}(v_i) = d_{f'}(v_j) + 1 \geq d_f(v_j) + 1 \geq d_f(v_i)$
 - $(v_i, v_j) \notin E_f$ 였다면 $(v_j, v_i) \in P$ 이므로 $d_f(v_j) = d_f(v_i) + 1$
 - $d_{f'}(v_i) = d_{f'}(v_j) + 1 \geq d_f(v_j) + 1 = d_f(v_i) + 2 \geq d_f(v_i)$

질문?

Edmonds-Karp Algorithm

- 정리

- Ford-Fulkerson Method의 시간 복잡도는 $O(Ef)$
- 하지만 매번 가장 짧은 증가 경로를 찾으면 $O(VE^2)$
 - 매번 증가 경로의 길이가 단조 증가하기 때문

- 구현

- 실제로 구현할 때는 루프, 평행 간선 따로 처리하지 않아도 잘 돌아감
- 만약 무향 그래프에서 최대 유량을 구해야 하는 경우, 역방향 간선의 용량도 c 로 설정하면 됨
 - https://www.inf.ufpr.br/elias/papers/2004/RT_DINF003_2004.pdf
 - ex. BOJ 6086

```

struct maximum_flow{
    struct edge_t{ int v, c, r; };
    vector<vector<edge_t>> gph;
    vector<int> dst, prv, idx;
    maximum_flow(int n) : gph(n), dst(n), prv(n), idx(n) {}
    void add_edge(int s, int e, int c1, int c2=0){
        gph[s].push_back({e, c1, (int)gph[e].size()});
        gph[e].push_back({s, c2, (int)gph[s].size()-1}); // reverse edge
    }
    int augment(int s, int t){
        fill(dst.begin(), dst.end(), -1);
        queue<int> que; que.push(s); dst[s] = 0;
        while(!que.empty()){
            int v = que.front(); que.pop();
            for(int i=0; i<gph[v].size(); i++){
                const auto &e = gph[v][i];
                if(e.c > 0 && dst[e.v] == -1){
                    que.push(e.v); dst[e.v] = dst[v] + 1;
                    prv[e.v] = v; idx[e.v] = i;
                }
            }
        }
        if(dst[t] == -1) return 0;

        int flow = 1e9;
        for(int i=t; i!=s; i=prv[i]){
            const auto &e = gph[prv[i]][idx[i]];
            flow = min(flow, e.c);
        }
        for(int i=t; i!=s; i=prv[i]){
            auto &e = gph[prv[i]][idx[i]];
            e.c -= flow; gph[e.v][e.r].c += flow;
        }
        return flow;
    }
    int run(int s, int t){
        int flow = 0, path = 0;
        while((path = augment(s, t)) != 0) flow += path;
        return flow;
    }
};

```

질문?

Applications

Applications

- BOJ 6086 최대 유량
 - 무향 그래프의 최대 유량을 구하는 문제
 - `G.add_edge(u, v, c, c)`

Applications

- BOJ 14286 간선 끊어가기 2
 - 최소 절단의 가중치를 구하는 문제 = 최대 유량을 구하는 문제

Applications

- BOJ 17412 도시 왕복하기 1
 - 1번 정점에서 2번 정점으로 가는 경로 중, 간선이 겹치지 않는 서로 다른 경로의 최대 개수
 - 서로소 경로의 개수를 최대화하는 문제
- 모든 간선의 용량을 1로 잡으면 됨
 - 간선의 용량이 1이면 각 간선은 최대 1번 사용
 - 경로 1개마다 유량이 1 만큼 증가하므로 경로의 최대 개수는 최대 유량의 크기와 같음
- flow decomposition: 그래프의 최대 유량을 경로들의 집합으로 분해할 수 있음
- 이때 모든 간선의 용량이 1이므로 각 간선은 최대 1개의 경로에 들어감

Applications

- BOJ 2316 도시 왕복하기 2
 - 정점과 간선이 겹치지 않는 서로 다른 경로의 최대 개수
 - 정점의 용량을 제한할 수 있을까?
 - 각 정점을 2개로 분할: $v_i \rightarrow v_{in}(i), v_{out}(i)$
 - 간선 $(s, e) \rightarrow (v_{out}(s), v_{in}(e))$
 - 정점 용량은 간선 $(v_{in}(i), v_{out}(i))$ 로 표현
 - 보통 정점 분할이라고 부름

Applications

- BOJ 11375 열혈강호
 - N명의 직원과 M개의 작업
 - 각 직원은 최대 한 개의 작업만 할 수 있고, 각 작업은 한 명이 담당함
 - 각 직원이 할 수 있는 작업이 주어졌을 때 완료할 수 있는 작업의 최대 개수
- 그래프 모델링
 - source와 직원을 가중치가 1인 간선으로 연결
 - 직원과 작업을 가중치가 1인 간선으로 연결
 - 작업과 sink를 가중치가 1인 간선으로 연결
- s에서 t로 가는 경로 = 직원이 작업을 하는 것
- 최대 유량 = 직원과 작업을 최대한 많이 매칭하는 것

Applications

- BOJ 11376 열혈강호 2
 - N명의 직원과 M개의 작업
 - 각 직원은 최대 두 개의 작업만 할 수 있고, 각 작업은 한 명이 담당함
 - 각 직원이 할 수 있는 작업이 주어졌을 때 완료할 수 있는 작업의 최대 개수
- 그래프 모델링
 - source와 직원을 가중치가 2인 간선으로 연결
 - 직원과 작업을 가중치가 1인 간선으로 연결
 - 작업과 sink를 가중치가 1인 간선으로 연결
- s에서 t로 가는 경로 = 직원이 작업을 하는 것
- 최대 유량 = 직원과 작업을 최대한 많이 매칭하는 것

Applications

- BOJ 11377 열혈강호 3
 - N명의 직원과 M개의 작업
 - K명의 직원은 최대 2개, 나머지 $N-K$ 명은 최대 1개의 작업을 할 수 있음
 - 각 작업은 한 명이 담당함
 - 각 직원이 할 수 있는 작업이 주어졌을 때 완료할 수 있는 작업의 최대 개수
- 일을 2개 할 수 있는 K명을 어떻게 정하지?

Applications

- BOJ 11377 열혈강호 3
 - 일을 최대 x 개 할 수 있는 직원: source에서 직원까지 가는 경로의 용량이 x 가 되어야 함
 - 일단 source와 모든 직원을 용량이 1인 간선으로 연결하자.
 - “추가 근무 관리자”라는 직원을 새로 만들어서 관리자가 직원들에게 적절히 2번째 작업을 분배
 - source에서 관리자로 가는 용량 K 짜리 간선
 - 관리자는 각 직원에게 최대 1개의 추가 작업을 줄 수 있음
 - 따라서 관리자에서 직원으로 가는 용량 1짜리 간선

질문?