사전 논문 (MU Preintegration on Manifold for Efficient Visual-Inertial Maximum-a-Posteriori Estimation", Robotics: Science and Systems (RSS), Rome, 2015.)
https://www.youtube.com/watch?v=CsJkci5lfco
On-Manifold Preintegration for Real-Time Visual-Inertial Odometry (2016)

선 요약)
Preintegration의 기본 원리 및 장점
이러한 IMU 데이터 처리의 어려움을 해결하기 위해 제안된 기법이 Preintegration (사전 적분)이다. Preintegration의 핵심 아이디어는 두 개의 선택된 시점(주로 키프레임, keyframe) 사이에서 발생한 다수의 IMU 측정치들을 단일의 상대적인 운동 제약(relative motion constraint)으로 요약하는 것이다 . 즉, 수백 또는 수천 개의 개별 IMU 측정치들을 하나의 "압축된" 정보로 변환하여 최적화 문제에 사용한다.

Preintegration을 통해 얻는 주요 장점은 다음과 같다:

1. **계산 효율성 증대:** 최적화 문제에서 고려해야 할 변수의 수를 IMU 측정치 수에 비례하지 않고 키프레임 수에 비례하도록 줄일 수 있다. 이는 최적화 계산량을 크게 감소시켜 실시간 전체 스무딩 또는 효과적인 고정 지연 스무딩을 가능하게 한다.
2. **Repropagation 문제 해결:** 전통적인 방식에서는 최적화 과정에서 과거 상태의 추정치가 변경될 때마다 해당 상태 이후의 모든 IMU 측정치를 다시 적분(repropagation)해야 하는 문제가 발생한다. Preintegration은 상대적인 운동만을 적분하므로, 시작 키프레임의 절대 상태가 변경되어도 preintegrated term 자체는 (바이어스 변화에 대한 간단한 보정을 제외하고는) 재계산할 필요가 없어 이러한 반복 계산을 피할 수 있다.

IMU Dead Reckoning (IMU MODEL AND MOTION INTEGRATION)

현재 상태 $(R(t), v(t), p(t))$와 IMU 측정값 $(\tilde{\omega}, \tilde{a})$로부터 다음 시각의 상태 $(R(t+\Delta t), v(t+\Delta t), p(t+\Delta t))$를 계산 <- 추정

물리에서 등가속도 식.

위치: $p(t+\Delta t) = p(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\Delta t^2$

속도: $v(t+\Delta t) = v(t) + \mathbf{a}\Delta t$

각 항의 물리적 의미

1 회전 업데이트

- 현재 회전 $R(t)$에 * 각속도로 인한 회전 변화 $\exp(\omega\Delta t)$를 곱함

2 속도 업데이트 * 이전 속도 $v(t)$

- $+g\Delta t$: 중력에 의한 속도 변화
- $+R(t)a^B\Delta t$: Body frame 가속도를 World frame으로 변환 후 적분

3 위치 업데이트

- 이전 위치 $p(t)$
- $+v(t)\Delta t$: 속도에 의한 이동
- $+\frac{1}{2}g\Delta t^2$: 중력에 의한 이동
- $+\frac{1}{2}R(t)a^B\Delta t^2$: 가속도에 의한 이동

주요 근사

1. **Zero-order hold**: 가속도/각속도가 Δt\Delta t Δt 동안 일정
2. **회전 동안 가속도 방향 고정**: R(t)R(t) R(t)가 적분 구간에서 일정하다고 가정

2. 적분 과정의 수학적 전개

2.1 연속 시간 적분 (이론적) 운동학 방정식 (29)를 적분하면:

$$R_{WB}(t+\Delta t) = R_{WB}(t) \cdot \exp\left(\int_t^{t+\Delta t} {}^B\omega_{WB}(\tau)d\tau\right)$$

$${}^Wv(t+\Delta t) = {}^W v(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}^W a(\tau)d\tau$$

$${}^Wp(t+\Delta t) = {}^W p(t) + \int_t^{t+\Delta t} {}^W v(\tau)d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_t^{\tau} {}^W a(\sigma)d\sigma\right)d\tau$$

2.2 이산 시간 근사 (실용적) 핵심 가정: $[t, t+\Delta t]$ 구간에서 각속도와 가속도가 일정하다고 가정 이 가정 하에서:

$$\int_t^{t+\Delta t} \omega(\tau)d\tau = \omega(t) \cdot \Delta t$$

$$\int_t^{t+\Delta t} a(\tau)d\tau = a(t) \cdot \Delta t$$

3. 최종 적분 공식 (식 31)

$$\boxed{\begin{aligned} R(t+\Delta t) &= R(t) \cdot \exp\left((\tilde{\omega}(t) - b^g(t) - \eta^{gd}(t))\Delta t\right) \\ v(t+\Delta t) &= v(t) + g\Delta t + R(t)(\tilde{a}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t))\Delta t \\ p(t+\Delta t) &= p(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2 + \frac{1}{2} R(t)(\tilde{a}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t))\Delta t^2 \end{aligned}}$$

이것이 Preintegration의 기초

이 기본 적분 공식이 중요한 이유:

1. **전통적 방법**: 매번 이 공식을 반복 적용

   ```
   for k = i to j-1:
       R[k+1] = R[k] * exp(omega[k] * dt)
       v[k+1] = v[k] + g*dt + R[k]*a[k]*dt
       p[k+1] = p[k] + v[k]*dt + ...
   ```

   1.1. **문제점**: R[i]가 바뀌면 모든 k에 대해 재계산 필요
   1.2. **Preintegration 아이디어**:
   - Body frame에서 상대적 변화만 미리 계산
   - 나중에 R[i]가 확정되면 한 번만 적용

2. **이론과 실제 Imu 기기에서 가장 큰 차이점: 회전하는 좌표계 (Rotating Frame of Reference)**

   - **단순 물리**: 모든 계산은 고정된 하나의 좌표계(World Frame)에서 이루어진다고 가정.
   - **IMU 현실**: 가속도 측정값 $\tilde{\mathbf{a}}(t)$는 로봇의 몸체에 부착된, 즉 끊임없이 회전하는 좌표계(Body Frame)에서 측정됩니다.
   - 이것을 해결하기 위해 수식에 $\mathbf{R}(t)$가 등장.

   $$\cdots + \mathbf{R}(t)(\tilde{\mathbf{a}}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t))\Delta t$$

   여기서 $\mathbf{R}(t)$의 역할은 Body Frame에서 측정한 가속도 벡터를 World Frame의 가속도 벡터로 '변환(회전)' 시켜주는 것.

   비유: 제가 동쪽을 보며 앞으로 공을 던지는 것과, 북쪽을 보며 앞으로 공을 던지는 것은 결과가 다릅니다. 여기서 $\mathbf{R}(t)$는 제가 지금 '어느 방향을 보고 있는지'를 알려주어, '앞으로'라는 상대적인 움직임을 '동쪽으로' 또는 '북쪽으로'라는 절대적인 움직임으로 바꿔주는 역할.

논문 테그 바로 시작.

IV. IMU 모델과 모션 적분 (IMU Preintegration on Manifold for Efficient Visual-Inertial Maximum-a-Posteriori Estimation)

IMU는 inertial frame에 대한 센서의 rotation rate와 acceleration을 측정합니다. 측정값들, 즉 ${}^B\tilde{a}(t)$와 ${}^B\tilde{\omega}_{WB}(t)$는 additive white noise η와 천천히 변하는 sensor bias b의 영향을 받습니다:

$$ {}^B\tilde{\omega}_{WB}(t) = {}^B\omega_{WB}(t) + b^g(t) + \eta^g(t) \tag{20} $$

$$ {}^B\tilde{a}(t) = R_{WB}^T(t) \cdot ({}^W a(t) - {}^W g) + b^a(t) + \eta^a(t) \tag{21} $$

우리의 표기법에서, 접두사 B는 해당 물리량이 frame B에서 표현됨을 나타냅니다 (Fig. 3 참조). IMU의 pose는 변환 $\{R_{WB}, {}^W p\}$로 설명되며, 이는 점을 sensor frame B에서 W로 매핑합니다. 벡터 ${}^B\omega_{WB}(t) \in \mathbb{R}^3$는 coordinate frame B에서 표현된, W에 대한 B의 순간 angular velocity이며, ${}^W a(t) \in \mathbb{R}^3$는 센서의 acceleration입니다; ${}^W g$는 world coordinates에서의 gravity vector입니다. 우리는 지구 자전으로 인한 효과를 무시하며, 이는 W가 inertial frame이라고 가정하는 것과 같습니다.

이제 목표는 IMU 측정값으로부터 시스템의 motion을 추론하는 것입니다. 이를 위해 다음과 같은 kinematic model [38, 39]을 도입합니다:

$$ \dot{R}_{WB} = R_{WB} \cdot {}^B\omega_{WB}{}^\wedge, \quad {}^W\dot{v} = {}^W a, \quad {}^W\dot{p} = {}^W v \tag{22} $$

이는 B의 pose와 velocity의 진화를 설명합니다. 시간 $t + \Delta t$에서의 state는 Eq. (22)를 적분하여 얻습니다. Euler integration을 적용하면 (이는 ${}^W a$와 ${}^B\omega_{WB}$가 구간 $[t, t + \Delta t]$에서 일정하다고 가정할 때 정확함):

$$ \begin{aligned} R_{WB}(t + \Delta t) &= R_{WB}(t) \cdot \mathrm{Exp}({}^B\omega_{WB}(t)\Delta t) \\ {}^W v(t + \Delta t) &= {}^W v(t) + {}^W a(t)\Delta t \\ {}^W p(t + \Delta t) &= {}^W p(t) + {}^W v(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}^W a(t)\Delta t^2 \end{aligned} \tag{23} $$

Eqs. (20)-(21)을 사용하여, IMU 측정값의 함수로 ${}^W a$와 ${}^B\omega_{WB}$를 계산할 수 있으므로, (23)은 다음과 같이 됩니다:

$$ \begin{aligned} R(t + \Delta t) &= R(t) \cdot \mathrm{Exp}\left((\tilde{\omega}(t) - b^g(t) - \eta^{gd}(t))\Delta t\right) \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + g\Delta t + R(t) \cdot (\tilde{a}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t))\Delta t \\ p(t + \Delta t) &= p(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 + \frac{1}{2}R(t) \cdot (\tilde{a}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t))\Delta t^2 \end{aligned} \tag{24} $$

여기서 가독성을 위해 coordinate frame 첨자를 생략했습니다 (이제부터 표기법은 모호하지 않아야 합니다). Discrete-time noise η^{gd}의 covariance는 sampling rate의 함수이며, continuous-time spectral noise η^g와 다음 관계를 가집니다: $\mathrm{Cov}(\eta^{gd}(t)) = \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\eta^g(t))$, 그리고 같은 관계가 η^{ad}에도 적용됩니다 (cf., [40, Appendix]).

Figure 5: IMU와 camera의 서로 다른 rate를 보여줍니다. IMU 측정값은 더 높은 빈도로 수집되며, keyframe들 사이에서 pre-integration됩니다.

V. IMU MODEL AND MOTION INTEGRATION (On-Manifold Preintegration for Real-Time Visual-Inertial Odometry)

IMU는 일반적으로 3축 가속도계(accelerometer)와 3축 자이로스코프(gyroscope)를 포함하며, 관성 프레임(inertial frame)에 대한 센서의 회전율(rotation rate)과 가속도(acceleration)를 측정할 수 있습니다. 측정값, 즉 ${}^{B}\tilde{a}(t)$와 ${}^{B}\tilde{\omega}_{WB}(t)$는 가산 백색 잡음(additive white noise) η와 천천히 변하는 센서 바이어스(sensor bias) b의 영향을 받습니다:

$$ {}^{B}\tilde{\omega}_{WB}(t) = {}^{B}\omega_{WB}(t) + b^{g}(t) + \eta^{g}(t) \tag{27} $$

$$ {}^{B}\tilde{a}(t) = R_{WB}^{T}(t)({}^{W}a(t) - {}^{W}g) + b^{a}(t) + \eta^{a}(t) \tag{28} $$

우리의 표기법에서, 접두사 B는 해당 물리량이 프레임 B에서 표현됨을 나타냅니다 (Fig. 2 참조). IMU의 pose는 변환 $\{R_{WB}, {}^{W}p\}$로 설명되며, 이는 센서 프레임 B의 점을 W로 매핑합니다. 벡터 ${}^{B}\omega_{WB}(t) \in \mathbb{R}^{3}$는 좌표계(coordinate frame) B에서 표현된, W에 대한 B의 순간 각속도(instantaneous angular velocity)이며, ${}^{W}a(t) \in \mathbb{R}^{3}$는 센서의 가속도입니다; ${}^{W}g$는 월드 좌표(world coordinates)에서의 중력 벡터(gravity vector)입니다. 우리는 지구 자전으로 인한 효과를 무시하며, 이는 W가 관성 프레임(inertial frame)이라고 가정하는 것과 같습니다.

이제 목표는 IMU 측정값으로부터 시스템의 motion을 추론하는 것입니다. 이를 위해 다음과 같은 운동학 모델(kinematic model) [49, 53]을 도입합니다:

$$ \dot{R}_{WB} = R_{WB}\, {}^{B}\omega_{WB}{}^{\wedge}, \quad {}^{W}\dot{v} = {}^{W}a, \quad {}^{W}\dot{p} = {}^{W}v \tag{29} $$

이는 B의 pose와 velocity의 진화(evolution)를 설명합니다. 시간 $t+\Delta t$에서의 state는 Eq. (29)를 적분하여 얻습니다:

$$ R_{WB}(t+\Delta t) = R_{WB}(t)\mathrm{Exp}\left(\int_{t}^{t+\Delta t} {}^{B}\omega_{WB}(\tau)d\tau\right) $$

$$ {}^{W}v(t+\Delta t) = {}^{W}v(t) + \int_{t}^{t+\Delta t} {}^{W}a(\tau)d\tau $$

$$ {}^{W}p(t+\Delta t) = {}^{W}p(t) + \int_{t}^{t+\Delta t} {}^{W}v(\tau)d\tau + \int_{t}^{t+\Delta t}\left(\int_{t}^{\tau} {}^{W}a(\sigma)d\sigma\right)d\tau $$

$({}^{W}a)$와 $({}^{B}\omega_{WB})$가 시간 간격 $[t, t+\Delta t]$에서 일정하다고 가정하면, 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

$$ R_{WB}(t+\Delta t) = R_{WB}(t)\mathrm{Exp}({}^{B}\omega_{WB}(t)\Delta t) $$

$$ {}^{W}v(t+\Delta t) = {}^{W}v(t) + {}^{W}a(t)\Delta t $$

$$ {}^{W}p(t+\Delta t) = {}^{W}p(t) + {}^{W}v(t)\Delta t + \frac{1}{2}{}^{W}a(t)\Delta t^2 \tag{30} $$

Eqs. (27)–(28)을 사용하여, ${}^{W}a$와 ${}^{B}\omega_{WB}$를 IMU 측정값의 함수로 쓸 수 있으므로, (30)은 다음과 같이 됩니다:

$$ R(t+\Delta t) = R(t)\mathrm{Exp}\left(\left(\tilde{\omega}(t) - b^g(t) - \eta^{gd}(t)\right)\Delta t\right) $$

$$ v(t+\Delta t) = v(t) + g\Delta t + R(t)\left(\tilde{a}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t)\right)\Delta t $$

$$ p(t+\Delta t) = p(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 + \frac{1}{2}R(t)\left(\tilde{a}(t) - b^a(t) - \eta^{ad}(t)\right)\Delta t^2 \tag{31} $$

여기서 가독성을 위해 좌표계 아래첨자(coordinate frame subscripts)는 생략되었습니다 (이제부터 표기법은 모호하지 않아야 합니다). 이 velocity 및 position의 수치 적분(numeric integration)은 두 측정값 사이의 적분 시간 동안 일정한 방향 $R(t)$를 가정하는데, 이는 0이 아닌 회전율(non-zero rotation rate)을 가진 측정값에 대한 미분 방정식 (29)의 정확한 해(exact solution)는 아닙니다. 실제로는 고빈도 IMU(high-rate IMU)를 사용하면 이 근사(approximation)의 영향을 완화할 수 있습니다. 우리는 이 적분 방식(integration scheme) (31)이 간단하고 모델링 및 불확실성 전파(uncertainty propagation)에 적합하기 때문에 채택합니다. 이 적분 방식이 실제로 매우 잘 작동함을 보여주지만, 더 낮은 IMU 측정 속도(slower IMU measurement rates)의 경우 더 높은 차수의 수치 적분 방법(higher-order numerical integration methods) [54–57]을 고려할 수 있음을 언급합니다.

이산 시간 잡음(discrete-time noise) η^{gd}의 공분산(covariance)은 샘플링 속도(sampling rate)의 함수이며, 연속 시간 스펙트럼 잡음(continuous-time spectral noise) η^{g}와 $\mathrm{Cov}(\eta^{gd}(t)) = \frac{1}{\Delta t}\mathrm{Cov}(\eta^{g}(t))$ 관계를 가집니다. 동일한 관계가 η^{ad}에도 적용됩니다 (cf., [58, Appendix]).

-> 정리

1. 좌표계(Frame) 정의와 관계

1.1 World Frame (W)

- **고정된 관성 좌표계** (Inertial Frame)
- 일반적으로 NED (North-East-Down) 프레임이 사용되며, Nx축은 True North, Nz축은 지구 내부 방향, Ny축은 동쪽을 가리킵니다 [Reference frames and how they are used in inertial navigation · VectorNav]()
- 지구에 고정되어 있고, IMU가 움직여도 변하지 않음
- 중력은 이 좌표계에서 ${}^{W}g = [0, 0, g]^T$ (NED의 경우)

1.2 Body Frame (B)

- **IMU 센서에 고정된 좌표계**

- IMU와 magnetometer 데이터는 Sensor Frame에서 측정됩니다 Coordinate Frames - InertialSense
- IMU가 회전하고 이동할 때 함께 움직임
- 일반적으로 x축은 전방, y축은 우측, z축은 아래 방향

1.3 두 좌표계 간의 관계

- **Rotation Matrix** R_{WB}: Body frame의 벡터를 World frame으로 변환
- **Position** ${}^{W}p$: World frame에서 본 Body frame의 위치

이 센서들이 측정하는 값들은 "관성 프레임(inertial frame)"에 대한 센서 자체의 움직임(회전율과 가속도)입니다.
여기서 **관성 프레임(W)**은 가속하지 않고 회전하지 않는 이상적인 기준 프레임을 의미합니다 (여기서는 지구 자전 효과를 무시하므로, 지구 중심에 고정된 프레임과 같다고 볼 수 있습니다).

센서 자체의 프레임을 **Body Frame (B)**이라고 합니다.

측정된 값들, 즉 $\tilde{a}(t)$와 $\tilde{\omega}_{WB}(t)$는 완벽한 값이 아니라, 실제 물리량에 **가산 백색 잡음(additive white noise)** η와 **천천히 변하는 센서 바이어스(slowly varying sensor bias)** b의 영향을 받습니다.

이 두 가지 노이즈는 센서의 불완전성으로 인해 발생하며, 정확한 상태 추정을 위해서는 반드시 모델링하고 추정해야 합니다. 이제 각 수식을 자세히 살펴보겠습니다.

1. 자이로스코프 측정값 모델 (각속도)

$$ {}^{B}\tilde{\omega}_{WB}(t) = {}^{B}\omega_{WB}(t) + b^{g}(t) + \eta^{g}(t) \tag{27} $$

* ${}^{B}\tilde{\omega}_{WB}(t)$: IMU 자이로스코프에서 측정된 (tilde 표시) 각속도(angular velocity) 값입니다.

- 좌측 상단의 B는 이 각속도 벡터가 **Body Frame (B)에서 표현**되었다는 것을 의미합니다.
- **아래첨자 WB는 월드 프레임(W)에 대한 바디 프레임(B)의 각속도라는 것을 의미**합니다.
- 즉, 센서 자체가 월드 프레임 기준 얼마의 속도로 회전하고 있는지를 나타냅니다.
- ${}^{B}\omega_{WB}(t)$: 바디 프레임(B)에서 표현된, 월드 프레임(W)에 대한 바디 프레임(B)의 **실제 (ground truth) 각속도**입니다. 이것이 우리가 IMU를 통해 측정하고 싶어 하는 순수한 물리량.
- $b^{g}(t)$: 자이로스코프의 **바이어스(bias)**입니다. 센서가 아무런 회전이 없을 때도 0이 아닌 값을 출력하거나, 시간이 지남에 따라 측정값이 서서히 변화하는 경향을 나타내는 오차입니다. 이는 천천히 변하는 값으로 모델링됩니다.
- $\eta^{g}(t)$: 자이로스코프의 **가산 백색 잡음(additive white noise)**입니다. 센서의 본질적인 랜덤 노이즈로, 보통 고주파의 빠른 변화를 보이며 평균이 0인 가우시안 분포를 따른다고 가정됩니다.
- **요약**: 자이로스코프의 측정값은 **실제 각속도**에 **바이어스**와 **랜덤 노이즈**가 더해진 형태로 나타납니다. 모든 항은 **Body Frame (B)**에서 표현됩니다.

2. 가속도계 측정값 모델 (선형 가속도)

$$ {}^B\tilde{a}(t) = R_{WB}^T(t)({}^W a(t) - {}^W g) + b^a(t) + \eta^a(t) \tag{28} $$

* ${}^B\tilde{a}(t)$: IMU 가속도계에서 **측정된 (tilde 표시)** 선형 가속도 값입니다. 이 역시 **Body Frame (B)에서 표현**됩니다.

- $R_{WB}^T(t)$: 월드 프레임(W)에서 바디 프레임(B)으로 변환하는 회전 행렬(Rotation Matrix)입니다.
- $R_{WB}(t)$는 바디 프레임(B)에서 월드 프레임(W)으로 변환하는 회전 행렬입니다. 따라서 $R_{WB}^T(t)$는 그 역행렬($R_{BW}(t)$)로서, 월드 프레임에서 바디 프레임으로의 변환을 수행합니다. 즉, 월드 프레임에 있는 벡터를 바디 프레임으로 가져오는 역할을 합니다.
- ${}^W a(t)$: 월드 프레임(W)에서 표현된, 센서의 **실제 (ground truth) 가속도**입니다. 여기서 '가속도'는 외력에 의한 순수한 가속도를 의미합니다.
- ${}^W g$: 월드 프레임(W)에서 표현된 **중력 벡터(gravity vector)**입니다. 가속도계는 중력을 항상 측정하기 때문에, 순수한 운동에 의한 가속도를 얻기 위해서는 중력 가속도(${}^W g$)를 빼주어야 합니다.
- $({}^W a(t) - {}^W g)$: 월드 프레임에서 표현된, 중력이 제거된 물체(센서)의 순수한 운동 가속도입니다. 이 값을 $R_{WB}^T(t)$를 곱하여 바디 프레임으로 변환합니다.
- $b^a(t)$: 가속도계의 **바이어스(bias)**입니다.
- $\eta^a(t)$: 가속도계의 **가산 백색 잡음(additive white noise)**입니다.
- **요약**: 가속도계의 측정값은 **월드 프레임에서의 실제 가속도(중력 제외)**를 바디 프레임으로 변환한 값에 바이어스와 랜덤 노이즈가 더해진 형태로 나타납니다.
- 다만 "각가속도" 대신 **"선형 가속도"**라는 용어가 더 적합합니다.
- ${}^B\tilde{a}(t)$ (가속도 측정값): * Body frame에서 표현됩니다.
- **World frame에서의 순수한 가속도 (${}^W a(t)$)**에서 중력 (${}^W g$)을 뺀 값을 (가속도계는 중력을 항상 측정하므로 제거해야 함),
- **World frame에서 Body frame으로의 회전 행렬($R_{WB}^T(t)$)** 을 곱하여 Body frame으로 변환한 결과이다.
- 여기에 가속도계의 **바이어스($b^a(t)$)**와 **랜덤 노이즈($\eta^a(t)$)**가 더해져 최종 측정값이 됩니다.
- ${}^B\tilde{\omega}_{WB}(t)$ (자이로스코프 측정값): * Body frame에서 표현됩니다.
- 월드 프레임에 대한 바디 프레임의 **실제 각속도(${}^B\omega_{WB}(t)$)**에 자이로스코프의 **바이어스($b^g(t)$)**와 **랜덤 노이즈($\eta^g(t)$)**가 더해져 최종 측정값이 됩니다.

---

mobile 에서 IMU 회전 표현

```
실제 각속도: [0.1, 0.2, 0.5] rad/s (roll, pitch, yaw)
바이어스:    [0.01, -0.02, 0.03] rad/s
```

```
백색 잡음:   [±0.005, ±0.005, ±0.005] rad/s (랜덤)
측정값:      [0.115, 0.175, 0.535] rad/s (대략)
```

---

mobild에서 IMU 가속도 표현

Case 1: 정지 상태의 IMU (수평)

```
World Frame:
- 실제 가속도: [0, 0, 0] m/s²
- 중력: [0, 0, 9.81] m/s²
- 중력 제거: [0, 0, -9.81] m/s²

Body Frame (수평 정렬):
- 측정값: [0, 0, -9.81] m/s² (+ 노이즈)
```

Case 2: 위로 가속하는 IMU

```
World Frame:
- 실제 가속도: [0, 0, -2] m/s² (위쪽)
- 중력: [0, 0, 9.81] m/s²
- 중력 제거: [0, 0, -11.81] m/s²

Body Frame:
- 측정값: [0, 0, -11.81] m/s² (+ 노이즈)
```

논문 다시 보면

The goal now is to infer the motion of the system from IMU measurements. For this purpose we introduce the following kinematic model [49, 53]:

$$\dot{R}_{WB} = R_{WB}\, {}_{B}\omega^{\wedge}_{WB}, \qquad {}_{W}\dot{\mathbf{v}} = {}_{W}\mathbf{a}, \qquad {}_{W}\dot{\mathbf{p}} = {}_{W}\mathbf{v}, \qquad (29)$$

이제 목표는 IMU 측정을 통해 시스템의 움직임을 추론하는 것입니다. 이를 위해 다음과 같은 Kinematic Model 표현

5. Kinematic Model (운동학 모델)

5.1 회전 진화

$$\dot{R}_{WB} = R_{WB} \cdot {}^{B}\omega_{WB}{}^{\wedge} \tag{29a}$$

이는 회전의 미분방정식으로, Body frame의 각속도가 World frame에 대한 회전을 어떻게 변화시키는지 설명한다.

$(R_{WB})^T$ 이거는 **Body Frame으로 변환**인 거고 실제로 이것을 구하는게 IMU Navigation의 핵심 문제다.

-> 논문에서의 접근: MAP 추정 **Maximum a Posteriori (MAP) Estimation:**

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^*, \mathbf{b}^* = \arg\min_{\mathbf{X},\mathbf{b}} \Bigg[& \sum_k \|r_{\text{prior}}(x_k)\|^2_{\Sigma_{\text{prior}}} \\ & + \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}} \|r_{\text{visual}}(x_i, x_j)\|^2_{\Sigma_{\text{visual}}} \\ & + \sum_{(i,j)\in\mathcal{K}} \|r_{\text{IMU}}(x_i, x_j, b_i)\|^2_{\Sigma_{\text{IMU}}} \Bigg]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{R}_{ij} &\overset{\text{eq.(7)}}{\simeq} \prod_{k=i}^{j-1} \left[\mathrm{Exp}\left((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k - \mathbf{b}_i^g) \Delta t \right) \mathrm{Exp}\left(-\mathrm{J}_r^k\, \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\, \Delta t \right) \right] \\ &\overset{\text{eq.(11)}}{=} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ij} \prod_{k=i}^{j-1} \mathrm{Exp}\left(-\Delta \tilde{\mathrm{R}}_{k+1j}^{\mathsf{T}}\, \mathrm{J}_r^k\, \boldsymbol{\eta}_k^{gd}\, \Delta t \right) \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ij} \mathrm{Exp}\left(-\delta \boldsymbol{\phi}_{ij} \right)\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{v}_{ij} &\overset{\text{eq.(4)}}{\simeq} \sum_{k=i}^{j-1} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} (\mathbf{I} - \delta \boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge}) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t - \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \\ &\overset{\text{eq.(2)}}{=} \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \left[\Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t - \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t \right] \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ij} - \delta \mathbf{v}_{ij}\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p}_{ij} &\overset{\text{eq.(4)}}{\simeq} \sum_{k=i}^{j-1} \Big[(\Delta \tilde{\mathbf{v}}_{ik} - \delta \mathbf{v}_{ik}) \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} (\mathbf{I} - \delta \boldsymbol{\phi}_{ik}^{\wedge}) (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a) \Delta t^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \Big] \\ &\overset{\text{eq.(2)}}{=} \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} + \sum_{k=i}^{j-1} \Big[-\delta \mathbf{v}_{ik} \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} (\tilde{\mathbf{a}}_k - \mathbf{b}_i^a)^{\wedge} \delta \boldsymbol{\phi}_{ik} \Delta t^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathrm{R}}_{ik} \boldsymbol{\eta}_k^{ad} \Delta t^2 \Big] \\ &\doteq \Delta \tilde{\mathbf{p}}_{ij} - \delta \mathbf{p}_{ij},\end{aligned} \tag{37}$$

여기서 상태 $x_i = \{R_{WB,i}, p_i, v_i\}$를 동시에 추정.

Substituting the expressions (35), (36), (37) back in the original definition of $\Delta \mathtt{R}_{ij}, \Delta \mathbf{v}_{ij}, \Delta \mathbf{p}_{ij}$ in (33), we finally get our *preintegrated measurement model* (remember $\mathrm{Exp}\left(-\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\right)^{\mathsf{T}} = \mathrm{Exp}\left(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\right)$):

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{\mathtt{R}}_{ij} &= \mathtt{R}_i^{\mathsf{T}}\mathtt{R}_j \mathrm{Exp}\left(\delta\boldsymbol{\phi}_{ij}\right) \\
\Delta\tilde{\mathbf{v}}_{ij} &= \mathtt{R}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i - \mathbf{g}\Delta t_{ij}\right) + \delta\mathbf{v}_{ij} \\
\Delta\tilde{\mathbf{p}}_{ij} &= \mathtt{R}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_i\Delta t_{ij} - \frac{1}{2}\mathbf{g}\Delta t_{ij}^2\right) + \delta\mathbf{p}_{ij} \qquad (38)
\end{aligned}
$$

A. Preintegrated IMU Measureme를 설명하기 위한 MAP에 대한 공부는 다음에 계속....

논문의 핵심 기여

Preintegration의 장점:

- $R_{WB,i}$가 최적화 과정에서 변해도
- Body frame에서 미리 계산한 ΔR_{ij}는 재사용 가능
- 계산 효율성 대폭 향상!