Chapter. 05

리스크 관리

현대 포트폴리오 이론 (MPT) II

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트

강사. 장순용

I 키포인트

- 포트폴리오 최적화.
- 라그랑주 승수법.
- 최소 리스크 포트폴리오.
- 효율적 투자선.

I 포트폴리오 최적화

- 포트폴리오는 최소 두 개 이상의 자산으로 구성된다. 다음 예를 살펴본다.

예). 두 개의 자산(#1과 #2)으로 구성된 포트폴리오를 가정한다.

자산 1: 수익률 $= r_1$, 표준편차 $= \sigma_1$와 같다.

자산 2: 수익률 $= r_2$, 표준편차 $= \sigma_2$와 같다.

또한 자산 1과 자산 2 사이의 공분산은 $\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2 \rho$으로 나타낸다.

$\Rightarrow \rho$ 는 상관계수이고 가변적인 파라미터이다.

I 포트폴리오 최적화

- 포트폴리오는 최소 두 개 이상의 자산으로 구성된다. 다음 예를 살펴본다.

예). 두 개의 자산(#1과 #2)으로 구성된 포트폴리오를 가정한다.

자산 1의 구성 비율을 $w_1 = \alpha$와 같이 나타낸다.

그러면 자산2의 구성 비율을 $w_2 = 1 - \alpha$이며 정규화 조건 $w_1 + w_2 = 1$가

자연스럽게 충족된다.

$\Rightarrow$ α는 또다른 가변적인 파라미터이다.

I 포트폴리오 최적화

- 포트폴리오는 최소 두 개 이상의 자산으로 구성된다. 다음 예를 살펴본다.

예). 두 개의 자산(#1과 #2)으로 구성된 포트폴리오를 가정한다.

포트폴리오 수익률 r_{port}과 리스크 σ_{port}는 다음과 같다.

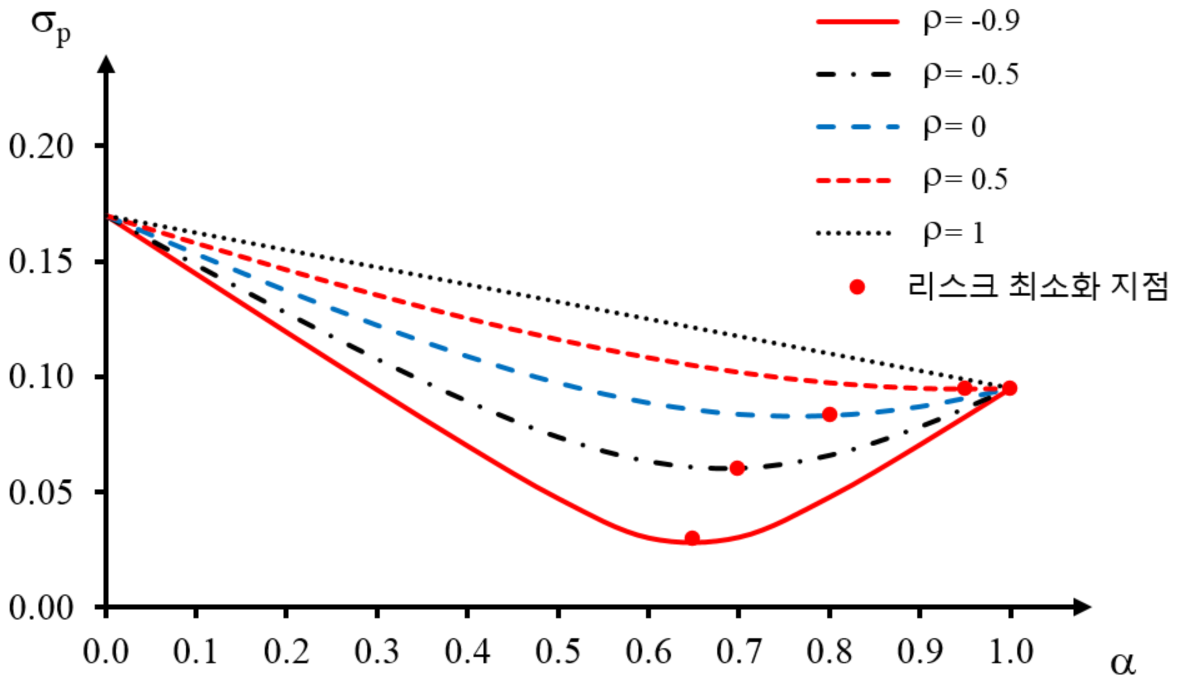
$$r_{port} = w_1 r_1 + w_2 r_2 = \boldsymbol{\alpha}\, r_1 + (1-\boldsymbol{\alpha}) r_2 = \boldsymbol{\alpha}\,(r_1 - r_2) + r_2$$

$$\sigma_{port} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^2 {\sigma_1}^2 + (1-\boldsymbol{\alpha})^2 {\sigma_2}^2 + 2\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\alpha}(1-\boldsymbol{\alpha})\sigma_1\sigma_2}$$

ㅣ포트폴리오 최적화

- 포트폴리오는 최소 두 개 이상의 자산으로 구성된다. 다음 예를 살펴본다.

예). 두 개의 자산(#1과 #2)으로 구성된 포트폴리오를 가정한다.



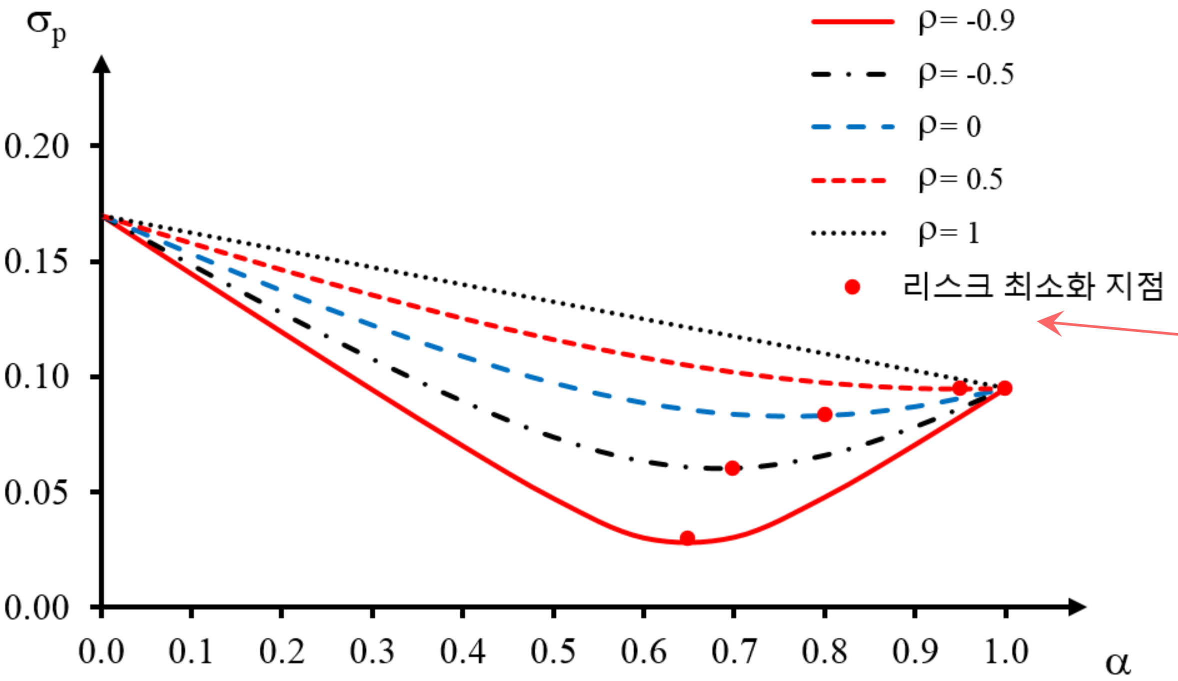
$\sigma_1 = 0.095$ 이고

$\sigma_2 = 0.17$ 이다.

ㅣ포트폴리오 최적화

- 포트폴리오는 최소 두 개 이상의 자산으로 구성된다. 다음 예를 살펴본다.

예). 두 개의 자산(#1과 #2)으로 구성된 포트폴리오를 가정한다.

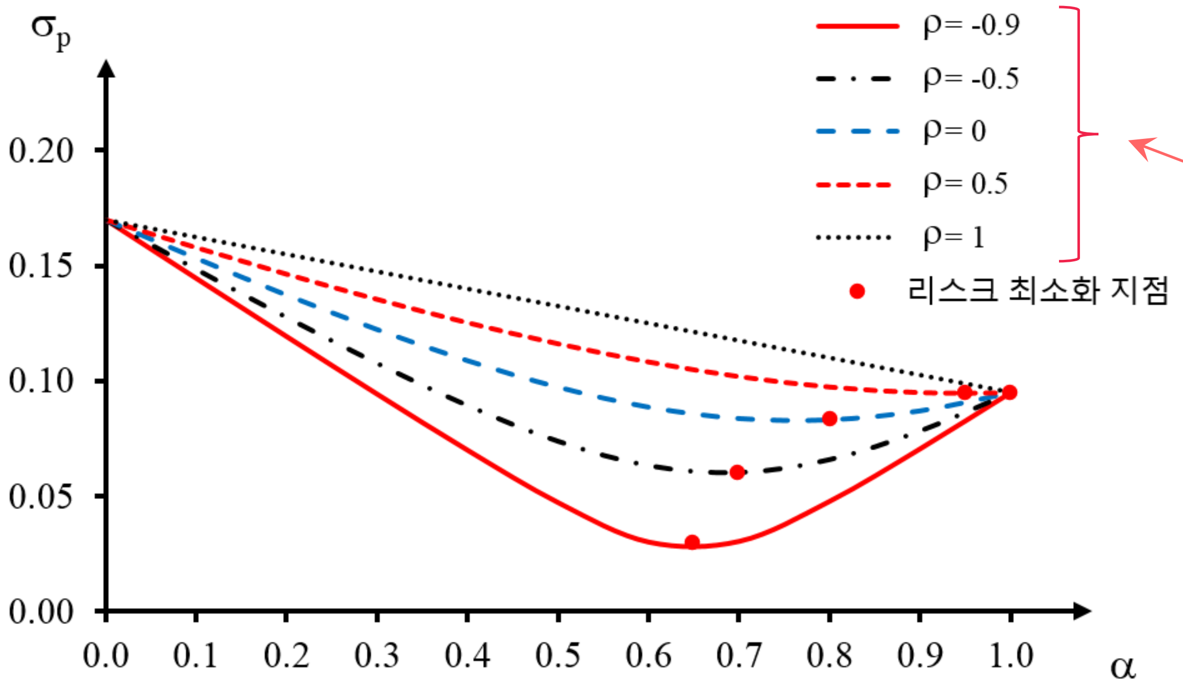


ρ가 고정된 상태에서 리스크를 최소화하는 α 값을 구할 수 있다.

I 포트폴리오 최적화

- 포트폴리오는 최소 두 개 이상의 자산으로 구성된다. 다음 예를 살펴본다.

예). 두 개의 자산(#1과 #2)으로 구성된 포트폴리오를 가정한다.



ρ가 -1에 가까울수록 리스크 감소.

ρ가 +1에 가까울수록 리스크 증가.

ㅣ라그랑주 승수법

- 아무런 제한조건이 없을 때 어느 함수의 극점 (최고점 또는 최저점)을 구하려면 미분이 0이되는 지점을 찾아내면 된다.
- 그런데, 투자가가 제시하는 몇 개의 제한조건과 동시에 최적화 목표를 충족하여 포트폴리오를 다각화 하고자 한다.

⇒ “Constrained optimization”.

⇒ 라그랑주 승수법 “Lagrange multiplier” 적용.

라그랑주 승수법

⇒ $x_1, x_2, \cdots, x_P$와 같은 변수로 값이 정해지는 함수 $f(x_1, x_2, \cdots, x_P)$를 전제.

⇒ 이들 변수에 대해서 한 가지 이상의 제한조건이 적용 된다는 것을 가정한다.

⇒ 제한조건은 $g_1(x_1, x_2, \cdots, x_P) = 0,\ g_2(x_1, x_2, \cdots, x_P) = 0, \cdots$ 등과 같이 나타낸다.

⇒ 라그랑주 함수를 다음과 같이 정의한다. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$등이 바로 라그랑주 승수이다.

$$\mathcal{L} = f(x_1, x_2, \cdots, x_P) - \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \cdots, x_P) - \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \cdots, x_P) \cdots$$

ㅣ라그랑주 승수법

⇒ x_i에 대한 미분을 적용해서 라그랑주 함수의 극점 조건을 구한다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} \cdots = 0$$

⇒ 또한 λ_j에 대한 미분을 적용해서 다음과 같은 극점 조건을 구한다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = -g_j(x_1, x_2, \cdots, x_P) = 0$$

⇒ 이렇게 성립되는 여러 개의 등식 조건들은 연립 방정식을 형성한다.

ㅣ라그랑주 승수법을 적용한 포트폴리오 최적화

- MPT에서 다음을 최소화 대상으로 삼을 수 있다.

$$f(\overrightarrow{w}) = f(w_1, w_2, \cdots, w_P) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{P}\sum_{i=1}^{P}\sigma_{ij}w_i w_j$$

$\Rightarrow$ 분산에 비례하는 $\frac{1}{2}\sigma_{port}{}^2$ 가 된다.

$\Rightarrow$ 리스크 즉 표준편차 σ_{port}로 표기하는 리스크의 최소화와 동일한 목표이다.

$\Rightarrow$ 정규화 $\sum_{i=1}^{P} w_i = 1$와 수익률 $r_{port} = \sum_{i=1}^{P} w_i\, r_i$을 고정해 놓는 것이 제약조건.

ㅣ라그랑주 승수법을 적용한 포트폴리오 최적화

- MPT에서 라그랑주 함수는 다음과 같다.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{P}\sum_{i=1}^{P}\sigma_{ij}w_i w_j - \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{P} w_i - 1\right) - \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{P} w_i r_i - r_{port}\right)$$

- $\mathcal{L}$ 에 극점의 조건을 적용하여 연립 선형방정식을 만들 수 있다.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{P}\sigma_{ij}w_j - \lambda_1 - \lambda_2 r_i = 0$$

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_1} = \sum_{i=1}^{P} w_i - 1 = 0$$

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_2} = \sum_{i=1}^{P} w_i r_i - r_{port} = 0$$

ㅣ라그랑주 승수법을 적용한 포트폴리오 최적화

- 이전 슬라이드의 연립 선형방정식을 벡터와 행렬로 표현하고 풀 수 있다.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_P \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ r_{port} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1P} & -1 & -r_1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2P} & -1 & -r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{P1} & \cdots & \cdots & \sigma_{PP} & -1 & -r_P \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_P & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

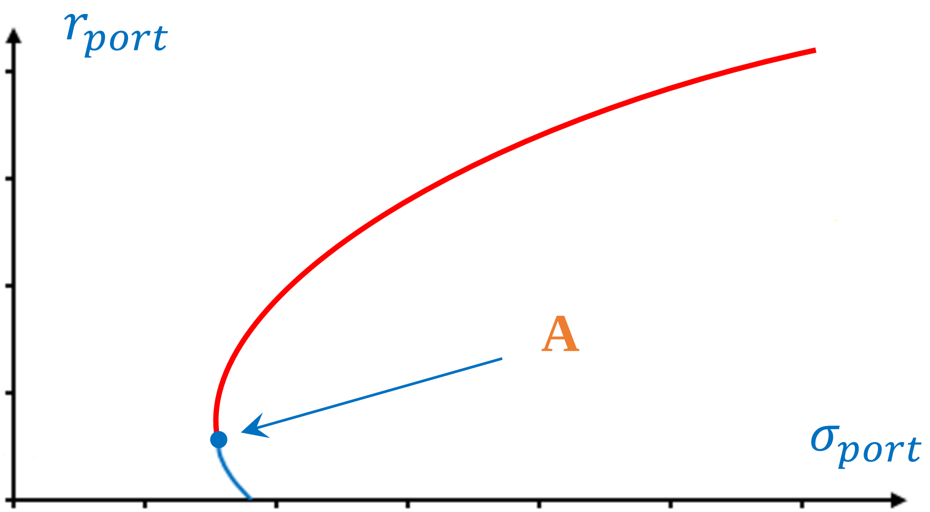
$\Rightarrow$ 연립 선형방정식과 그 해는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\widetilde{M}\,\vec{x} = \vec{y}$$

$$\vec{x} = \widetilde{M}^{-1}\,\vec{y}$$

| 라그랑주 승수법을 적용한 포트폴리오 최적화

- r_{port}를 정해놓고 σ_{port}를 구하는 방식으로 다음 그래프를 그릴 수 있다.

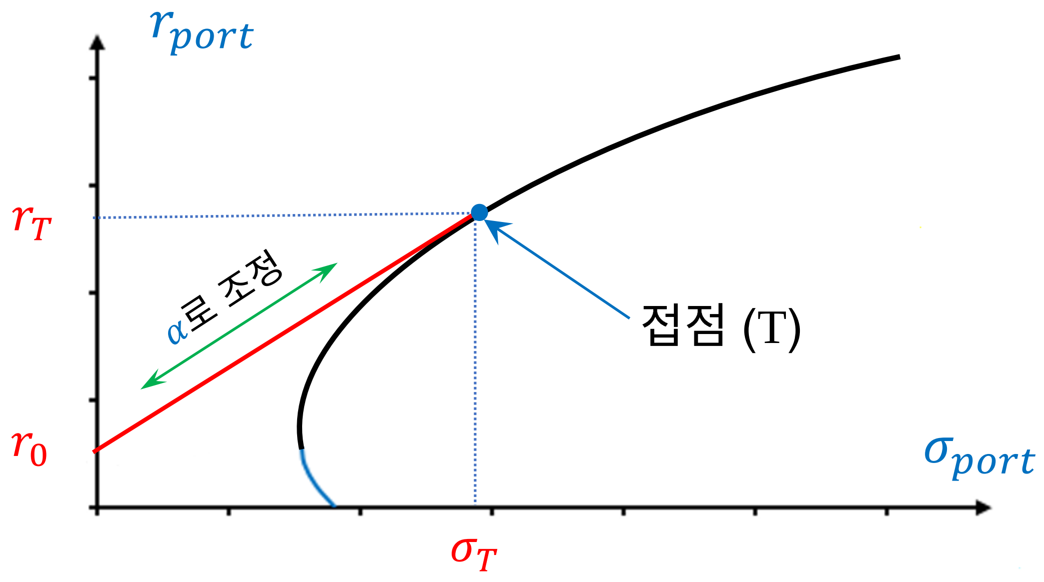


$\Rightarrow$ 화살표가 가리키는 A 포인트는 "전역 최소 리스크 포트폴리오"이다.

$\Rightarrow$ A 포인트에서 시작하는 곡선의 상위 부분(적색)을 "효율적 투자선"이라 부른다.

ㅣ포트폴리오와 현금

- 자본금에서 일부 α를 포트폴리오에 투자하고 나머지 $(1-\alpha)$를 현금으로 두는 경우 (α는 0과 1사이의 수치)를 가정한다.



$\Rightarrow$ 현금의 비율을 임으로 정해 놓고 최적화된 투자를 할 수 있다.

ㅣ포트폴리오와 현금

- 자본금에서 일부 α를 포트폴리오에 투자하고 나머지 $(1-\alpha)$를 현금으로 두는 경우 (α는 0과 1사이의 수치)를 가정한다.

$\Rightarrow$ "혼합 포트폴리오"라 부르도록 한다.

$\Rightarrow$ 접점을 "T 포인트"라 표기한다면 혼합 포트폴리오의 특성은 다음과 같다.

$$r_{tot} = (1-\alpha)\, r_0 + \alpha\, r_T$$

$$\sigma_{tot} = \alpha\, \sigma_T$$

$\Rightarrow$ T 포인트는 샤프비율이 가장 큰 지점이며 (σ_T, r_T)에 해당한다.

| 끝.

감사합니다.