Chapter. 02

선형대수학 응용

# Yule-Walker 방정식과 AR 시계열 모형

FASTCAMPUS ONLINE

금융공학/퀀트

강사. 장순용

# I 키포인트

- AR 시계열 모형.
- Yule-Walker 방정식.

# I AR 시계열 모형 (Auto-Regressive Model)



- AR(p) 모형:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_{\boldsymbol{p}} x_{t-\boldsymbol{p}} + \varepsilon_t$$

→ 현재의 값 $x_t$가 **p** 스텝 이전의 값 $x_{t-\boldsymbol{p}}$까지와 연관된다.

→ 불확실 요소 $\varepsilon_t$를 “impact” or “innovation” 이라고 부른다.

→ $\varepsilon_t$ 는 정규확률분포를 따른다는 가정을 한다: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

→ $\phi_0$ 는 독립 parameter가 아니다: $\phi_0 = \mu(1 - \phi_1 \cdots - \phi_p)$.

# I 모형에 내포되어 있는 자기상관계수



- AR(1) 모형에 내포되어 있는 자기상관계수를 다음과 같이 구해본다.

a. AR(1) 모형은 다음과 같다.

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

b. 그런데 $\phi_0 = \mu(1 - \phi_1)$ 이니까 다음과 같은 형태로 정리할 수 있다.

$$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

c. 위의 등식의 양쪽에 $(x_{t-1} - \mu)$를 곱하고 합을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_t (x_{t-1} - \mu)(x_t - \mu) = \phi_1 \sum_t (x_{t-1} - \mu)(x_{t-1} - \mu) + \sum_t \varepsilon_t (x_{t-1} - \mu)$$

d. 위의 등식의 양쪽을 $N\sigma^2$로 나누어 주고 정리한다. 마지막 항은 $\sum_t \varepsilon_t (x_{t-1} - \mu) = 0$과 같다.

$$\rho(1) = \phi_1 \rho(0) = \phi_1$$

# ㅣ모형에 내포되어 있는 자기상관계수



- AR(1) 모형에 내포되어 있는 자기상관계수를 다음과 같이 구해본다.

e. 시차를 키우면서 자기상관계수를 계산하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\rho(\ell) = (\phi_1)^{\ell}$$

- AR(2) 모형에 내포되어 있는 자기상관계수는,

$$\rho(\ell) = \phi_1 \rho(\ell-1) + \phi_2 \rho(\ell-2) + \frac{{\sigma_\varepsilon}^2 \delta_{\ell,0}}{\sigma^2}$$

- 마지막으로 AR(p) 모형에 일반화 하면 다음과 같다.

$$\rho(\ell) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \, \rho(|\ell - i|) + \frac{{\sigma_\varepsilon}^2 \delta_{\ell,0}}{\sigma^2}$$

# I Yule-Walker 방정식



- AR모형의 모수와 자기상관계수의 관계를 행렬 으로 요약하면:

$$\begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \rho(3) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \vdots \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \rho(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

and

$$\sum_{\ell=1}^{p} \phi_\ell \, \rho(\ell) + \frac{{\sigma_\varepsilon}^2}{\sigma^2} = 1$$

$\Rightarrow$ 자기상관계수를 측정하여 모형의 모수를 계산하는 방법을 제공한다!

# Yule-Walker 방정식



- 다음과 같이 역행렬을 사용해서 모수값을 구할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(0) & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & \rho(0) & \rho(1) & \cdots & \vdots \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \rho(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \rho(3) \\ \vdots \\ \rho(p) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 그리고, 다음 관계를 활용하면 ${\sigma_\varepsilon}^2$도 쉽게 구할 수 있다.

$$\sum_{\ell=1}^{p} \phi_\ell \, \rho(\ell) + \frac{{\sigma_\varepsilon}^2}{\sigma^2} = 1$$

# I 끝.



# 감사합니다.

FAST CAMPUS
ONLINE
**장순용 강사.**