fast campus

Chapter. 02

변동성 모형

변동성 예측

FASTCAMPUS ONLINE

금융공학/퀀트

강사. 장순용

I 키포인트

- GARCH 모형 예측.

I GARCH 모형의 예측

- 현재의 시간 스텝을 t라고 할때, 스텝 $t+1$에 대한 예측값은 $\hat{\sigma}_{t+1}^2$과 같이 hat 액센트로 표기하기로 한다.
- I가 과거 데이터(정보)를 의미할 때 예측값은 다음 조건부 기대값으로 구할 수 있다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = E[\sigma_{t+1}^2 | I]$$

I GARCH 모형의 예측

- 그런데, 과거와 현재 시점의 조건부 기대값은 다음과 같다.

$$E[\sigma_t^2|I] = \sigma_t^2$$ (현재의 값 그대로)

$$E[\sigma_{t-1}^2|I] = \sigma_{t-1}^2$$ (과거의 값 그대로)

$$E[\varepsilon_t^2|I] = \varepsilon_t^2$$ (현실화된 값 그대로)

$$E[\varepsilon_{t-1}^2|I] = \varepsilon_{t-1}^2$$ (현실화된 값 그대로)

I GARCH 모형의 예측

- GARCH 모형에 의하면 스텝 $t+1$에서는 다음 관계가 성립된다.

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_t^2 + \alpha_2\,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3\,\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p\,\varepsilon_{t-p+1}^2$$

$$+\beta_1\sigma_t^2 + \beta_2\,\sigma_{t-1}^2 + \beta_3\,\sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q+1}^2$$

- 등호 양편의 조건부 기대값을 구하면 $t+1$ 스탭의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_t^2 + \alpha_2\,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3\,\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p\,\varepsilon_{t-p+1}^2$$

$$+\beta_1\sigma_t^2 + \beta_2\,\sigma_{t-1}^2 + \beta_3\,\sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_q\sigma_{t-q+1}^2$$

I GARCH 모형의 예측

- 이제는 스텝 $t+2$에 대한 예측을 하고자 하는데 impact의 기대값이 다음과 같음에 유의한다.

$$\hat{\varepsilon}_{t+1} = E[\varepsilon_{t+1}|I] = 0$$

$$\hat{\varepsilon}^2_{t+1} = E[\varepsilon^2_{t+1}|I] = \hat{\sigma}^2_{t+1}$$

- 그러므로 스텝 $t+2$에서의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}^2_{t+2} = \alpha_0 + \alpha_1\hat{\sigma}^2_{t+1} + \alpha_2\,\varepsilon^2_t + \alpha_3\,\varepsilon^2_{t-1} + \cdots + \alpha_p\,\varepsilon^2_{t-p+2}$$

$$+\beta_1\hat{\sigma}^2_{t+1} + \beta_2\,\sigma^2_t + \beta_3\,\sigma^2_{t-1} + \cdots + \beta_q\sigma^2_{t-q+2}$$

I GARCH 모형의 예측

- 또 한 스텝 더 나가서, $t+3$에서의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+3}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 + \alpha_2\, \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \alpha_3\, \varepsilon_t^2 + \cdots + \alpha_p\, \varepsilon_{t-p+3}^2$$

$$+\beta_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 + \beta_2\, \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \beta_3\, \sigma_t^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q+3}^2$$

- 마지막으로, 먼 미래 ($\boldsymbol{h} \rightarrow \infty$)의 예측은 unconditional mean으로의 수렴을 의미한다.

$$\hat{\sigma}_{t+\boldsymbol{h}}^2 \rightarrow E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1-\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\right)}$$

I GARCH 모형의 예측

- 이제는, GARCH(1,1) 모형의 예측에 대해서 자세히 알아본다.
- GARCH(1,1)모형은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

- 그리고, $\sigma^2 = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta_1)$와 같은 unconditional mean의 조건을 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta_1 (\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2)$$

I GARCH 모형의 예측

- 스텝 $t + 1$의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2 = \alpha_1 (\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \beta_1(\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \sigma^2 + \alpha_1 (\varepsilon_t^2 - \sigma^2) + \beta_1(\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

- 다음 스텝 $t + 2$의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 - \sigma^2 = (\alpha_1 + \beta_1)(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{t+2}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

I GARCH 모형의 예측

- 한 스탭씩 미래의 예측값을 구해나가면 h 스탭에서는 다음과 같은 예측이 가능하다.

그대로 임

$$\hat{\sigma}^2_{t+h} = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}\left(\boxed{\hat{\sigma}^2_{t+1}} - \sigma^2\right)$$

$\rightarrow 0 < \alpha_1 + \beta_1 < 1$ 와 같은 제약조건이 충족된다면 $(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \rightarrow 0$으로 수렴.

$\rightarrow$ 그러면 $\hat{\sigma}^2_{t+h} \rightarrow \sigma^2$ 와 같이 수렴함을 쉽게 확인할 수 있다.

I 끝.

Life Changing Education

감사합니다.

Fast campus

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.

Fast campus