

Chapter 07
금융상품

| 블랙-솔즈 방정식과 해 |

FASTCAMPUS
ONLINE

금융공학/퀀트 I

강사. 장순용

I 키포인트

- 블랙-솔즈 옵션가격 모형.
- 블랙-솔즈 전제조건.
- 블랙-솔즈 공식.

I 블랙-숄즈 옵션가격 모형

- 블랙-숄즈 모형은 “블랙-숄즈 편미분 방정식”으로 요약할 수 있다.
콜옵션/풋옵션의 구분없이 옵션의 가격을 V 로 통일해서 나타내기로 한다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r_0 S \frac{\partial V}{\partial S} - r_0 V = 0$$

- ⇒ 콜옵션/풋옵션의 차이는 만기일의 payoff 조건에 의해서 결정된다.
- ⇒ 옵션가격 V 는 다음과 같은 변수와 파라미터의 함수이다.
- ⇒ 변수는 항상 변하는 수치이며 파라미터는 한 번 정해 놓으면 “될수있으면” 변하지 않는 수치이다.

$$V(\underbrace{S, t}_{\text{변수}}; \underbrace{\sigma, K, T, r_0}_{\text{파라미터}})$$

I 블랙-숄즈 전제조건

1). 기초자산의 가격변동은 랜덤워크인 “기하 브라운 운동” 으로 묘사할 수 있다.

- ⇒ 자산가격의 확률적 특성은 대수정규분포 (log normal)을 따른다.
- ⇒ 이것은 “수익률이 정규분포를 따른다”와 동일한 의미이다.
- ⇒ 파라미터로는 수익률의 평균 μ 와 표준편차 σ 가 있다.
- ⇒ 표준편차 σ 는 변동성(volatility)의 대표적인 척도이기도 하다.

I 블랙-솔즈 전제조건

2). 무위험 이자율 r_0 을 가정한다.

⇒ 만기일 까지의 무위험 이자율이 변동하지 않는 것을 전제한다.

3). 기초자산이 주식이라면 배당금은 없다고 가정한다.

⇒ 이것은 불가결의 전제조건은 아니며, 비교적 쉽게 배당금 지불 효과를 옵션가격에 포함시킬 수 있다.

⇒ 이 조건을 전제해서 쉽게 이해할 수 있는 해를 구한다.

I 블랙-숄즈 전제조건

4). 동적인 델타 헤지가 가능하다는 가정을 한다.

⇒ 블랙-숄즈 모형에서는 소위 “델타 헤지”를 적용한다.

⇒ 그런데 이 델타 헤지는 시간이 지남에 따라서 동적으로 조정해 주어야 한다.

5). 기초자산을 매매하는데 추가 비용이 없다.

⇒ 매수호가와 매도호가의 차이 (스프레드)는 무시한다.

⇒ 매매시 추가될 수 있는 수수료도 무시한다.

6). 무위험 차익거래가 불가능하다 (no arbitrage 원칙).

I 블랙-숄즈 공식

- 콜옵션의 가격 C 와 풋옵션의 가격 P 는 다음과 같은 블랙-숄즈 공식으로 계산할 수 있다.

$$C(t) = S(t)N(d_1) - K e^{-r_0(T-t)}N(d_2)$$

$$P(t) = -S(t)N(-d_1) + K e^{-r_0(T-t)}N(-d_2)$$

← $N(x)$ 는 표준정규 누적확률이다.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

← $N(x)$ 은 다음과 같은 한계값을 갖는다: $N(-\infty) = 0$, $N(0) = \frac{1}{2}$, $N(+\infty) = 1$.

I 블랙-숄즈 공식

- 콜옵션의 가격 C 와 풋옵션의 가격 P 는 다음과 같은 블랙-숄즈 공식으로 계산할 수 있다.

$$C(t) = S(t)N(d_1) - K e^{-r_0(T-t)}N(d_2)$$

$$P(t) = -S(t)N(-d_1) + K e^{-r_0(T-t)}N(-d_2)$$

↵ d_1 과 d_2 는 다음과 같다. 이들은 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ 와 같이 연관된다.

$$d_1 = \frac{\text{Log}\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_0 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\text{Log}\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r_0 - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

| 끝.

감사합니다.

