Chapter. 01

선형대수학 기초

행렬의 분해

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트

강사. 장순용

I 키포인트

- 고유값 분해 (Eigenvalue Decomposition, ED).
- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD).

I 고유값 분해 (ED)

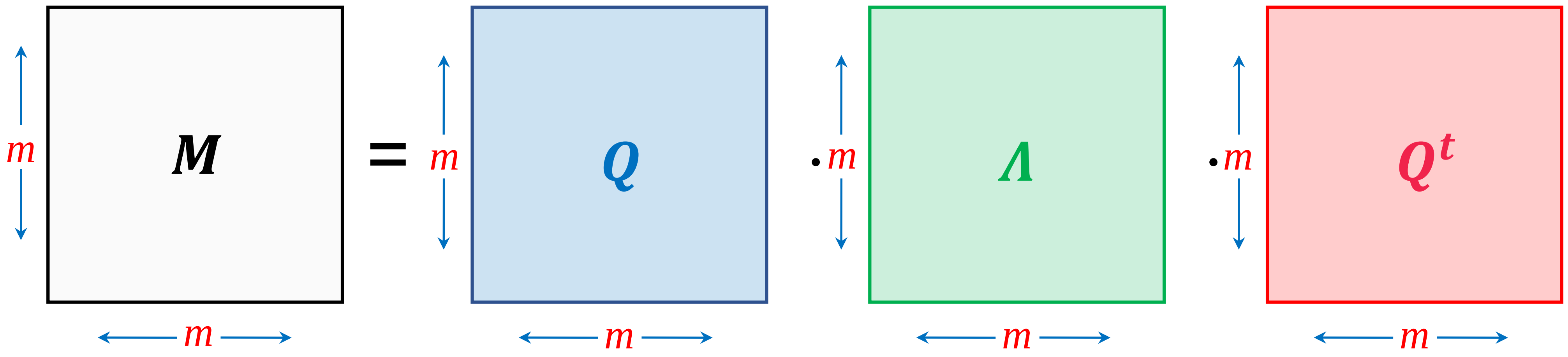
- 직사각 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{Q}^t$와 같은 형태로 분해한다.

$\Rightarrow$ 행렬의 크기는 모두 같다:

$$Size(\boldsymbol{M}) = Size(\boldsymbol{Q}) = Size(\boldsymbol{\Lambda}) = m \times m$$

I 고유값 분해 (ED)

- 직사각 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{Q}^t$와 같은 형태로 분해한다.



I 고유값 분해 (ED)

- 직사각 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{Q}^t$와 같은 형태로 분해한다.

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Lambda}$ 는 대각행렬이며, 대각 원소가 바로 “고유값” 이다.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

I 고유값 분해 (ED)

- 직사각 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{Q}^t$와 같은 형태로 분해한다.

⇒ $\boldsymbol{Q}$의 개개 컬럼을 벡터로 가져온 것이 “고유벡터” 이다.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \boldsymbol{q_1} & \cdots & \boldsymbol{q_m} \\ \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$$

⇒ 고유벡터와 고유값 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{q_i} = \lambda_i\,\boldsymbol{q_i}$$

⇒ 고유벡터 사이에는 다음과 같은 직교 관계가 성립된다.

$$\boldsymbol{q_i} \cdot \boldsymbol{q_j} = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{Q}^t\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$$

I 특이값 분해 (SVD)

- 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U\Sigma V}^t$와 같은 형태로 분해한다.

$\Rightarrow$ 행렬의 크기는 다음과 같다:

$$Size(\boldsymbol{M}) = m \times n$$

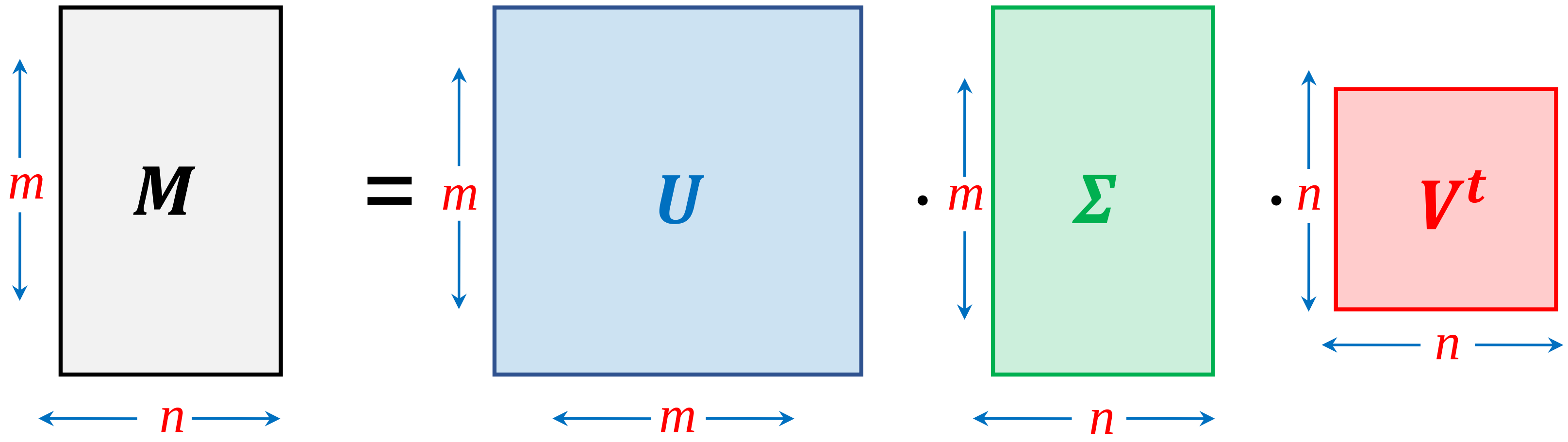
$$Size(\boldsymbol{U}) = m \times m$$

$$Size(\boldsymbol{\Sigma}) = m \times n$$

$$Size(\boldsymbol{V}) = n \times n$$

I 특이값 분해 (SVD)

- 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U\Sigma V^t}$와 같은 형태로 분해한다.



I 특이값 분해 (SVD)

- 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U\Sigma V^t}$와 같은 형태로 분해한다.

⇒ $\boldsymbol{\Sigma}$의 대각 원소가 바로 “특이값” 이다.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 \end{bmatrix}$$

⇒ 이 특이값들은 양수이며 대→소의 순서로 정렬되어 있는 것이 원칙이다.

I 특이값 분해 (SVD)

- 행렬 $\boldsymbol{M}$을 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^t$와 같은 형태로 분해한다.

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{U}$의 개개 컬럼을 벡터로 가져온 것은 “왼쪽 특이벡터” 이다.

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{V}$의 개개 컬럼을 벡터로 가져온 것은 “오른쪽 특이벡터” 이다.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_m \\ \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 특이벡터와 특이값 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i = \sigma_i\,\boldsymbol{u}_i$$

$\Rightarrow$ 특이벡터 사이에는 다음과 같은 직교 관계가 성립된다.

$$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^t = \boldsymbol{V}^t\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^t = \boldsymbol{U}^t\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$$

I 끝.

Life Changing Education

감사합니다.

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.