

Chapter.01

선형대수학 기초

| 선형방정식

FASTCAMPUS

ONLINE

금융공학/퀀트 I

강사. 장순용

I 키포인트

- 선형연립방정식의 해.
- 역행렬과 가역행렬(假역행렬, pseudoinverse).

I 선형연립방정식


- m 개의 방정식과 n 개의 미지수로 이루어진 선형연립방정식:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \dots a_{1n}x_n &= b_m\end{aligned}$$

I 선형연립방정식

- 행렬을 사용해서 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

⇒ 구하고자 하는 것은 미지수 행렬 (벡터) \mathbf{x} 이다.

I 선형연립방정식

- 그러면, 다음과 같은 경우를 고려해 볼 수 있다.

Case 1: 방정식의 개수 $m =$ 미지수의 개수 n .

Case 2: 방정식의 개수 $m >$ 미지수의 개수 n .

Case 3: 방정식의 개수 $m <$ 미지수의 개수 n .

I 선형연립방정식

- **Case 1**: 방정식의 개수 m = 미지수의 개수 n .

⇒ 다음과 같이 A 의 역행렬을 사용해서 하나의 해 x 를 구할 수 있다.

$$x = A^{-1}b$$

⇒ A 가 다음 조건을 충족하면 역행렬이 존재한다.

$$\det(A) \neq 0$$

I 선형연립방정식

- **Case 2:** 방정식의 개수 $m >$ 미지수의 개수 n . (Over-determined)

⇒ 선형회귀 방정식이 대표적인 예이다.

⇒ A^{-1} 대신에 가역행렬 P 를 사용하여 가장 근접한 해 x' 를 구할 수 있다.

$$P = (A^t A)^{-1} A^t$$

$$x' = P b$$

⇒ 가역행렬 (Pseudoinverse)은 Moore-Penrose 행렬이라고도 불리운다.

⇒ 가역행렬은 “최소자승법 (least squares)” 으로서 도출해 낼 수 있다.

I 선형연립방정식

- **Case 3**: 방정식의 개수 $m <$ 미지수의 개수 n . (Under-determined)

⇒ 해가 하나도 없는 경우도 있다.

⇒ 해가 존재한다면 **무한대**의 수 만큼 있다.

I 선형연립방정식

문제: 다음과 같이 두명의 작업자가 생산에 투입되는 상황을 가정해 본다.
그리면 작업자들의 시간당 생산량을 구하라.

- 첫 번째 작업자가 5시간 투입되고 두 번째 작업자가 8시간 투입되니 생산량은 30이다.
- 첫 번째 작업자가 6시간 투입되고 두 번째 작업자가 4시간 투입되니 생산량은 25이다.

I 선형연립방정식

문제: 다음과 같이 두명의 작업자가 생산에 투입되는 상황을 가정해 본다.
그리면 작업자들의 시간당 생산량을 구하라.

첫 번째 작업자의 시간당 생산량을 x_1 이라 나타내고, 두 번째 작업자의 시간당 생산량을 x_2 이라 나타내기로 한다. 그러면, 주어진 조건을 다음과 같이 표현할 수 있다.

→ 첫 번째 작업자가 5시간 투입되고 두 번째 작업자가 8시간 투입되니 생산량은 30이다.

$$5x_1 + 8x_2 = 30$$

→ 첫 번째 작업자가 6시간 투입되고 두 번째 작업자가 4시간 투입되니 생산량은 25이다.

$$6x_1 + 4x_2 = 25$$

I 선형연립방정식

문제: 다음과 같이 두명의 작업자가 생산에 투입되는 상황을 가정해 본다.
그리면 작업자들의 시간당 생산량을 구하라.

그러면 선형연립방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix}$$

A x b

I 선형연립방정식

문제: 다음과 같이 두명의 작업자가 생산에 투입되는 상황을 가정해 본다.
그리면 작업자들의 시간당 생산량을 구하라.

그리고 역행렬을 적용한 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.143 & 0.286 \\ 0.214 & -0.179 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.86 \\ 1.96 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

| 끝.

감사합니다.

