Chapter. 01

시계열

특성근과 활용

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트

강사. 장순용

I 키포인트

- 시차 연산자.
- 시차 다항식과 특성근.
- 시계열 모형의 변환.

I 시차 연산자

- 시차 연산자 (Lag Operator)의 정의:

→ 시차 연산자는 시계열의 시간을 뒤로 되돌리는 작용을 한다.

→ 시차 연산자는 L와 같이 표기하고 시계열에 다음과 같이 적용된다:

$$Lx_t = x_{t-1}$$

$$L^n x_t = x_{t-n}$$

$$L\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$$

$$L^n \varepsilon_t = \varepsilon_{t-n}$$

$$\vdots$$

I 시차 연산자

- 시차 연산자를 사용해서 시차 다항식 (Lag Polynomial)을 정의할 수 있다.

$\rightarrow$ AR 시차 다항식 $\Phi(L)$을 다음과 같이 정의한다:

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$

$\rightarrow$ MA 시차 다항식 $\Theta(L)$을 다음과 같이 정의한다:

$$\Theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$$

I 시차 연산자

- 시차 다항식을 사용하여 시계열 모형을 컴팩트 하게 표현할 수 있다:

→ AR 시계열 모형: $\Phi(L)(x_t - \bar{x}) = \varepsilon_t$

→ MA 시계열 모형: $x_t - \bar{x} = \Theta(L)\varepsilon_t$

→ ARMA 시계열 모형: $\Phi(L)(x_t - \bar{x}) = \Theta(L)\varepsilon_t$

I 특성근

- AR 시차 다항식은 다음과 같이 정의하였다.

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$

- 그러면, "AR 시차 다항식의 근을 구한다"의 의미는 "$\Phi(y) = 0$의 해를 구한다"와 같다.

$$1 - \phi_1 y - \phi_2 y^2 - \cdots - \phi_p y^p = 0$$

→ p개의 근이 있다. 이들을 y_i와 같이 표기하기로 한다 $(i = 1, \dots, p)$.

→ y_i의 역수를 특성근 (Characteristic root)이라 정의한다: $\lambda_i = 1/y_i$

I 특성근의 해석

- 특성근을 사용해서 AR 시차 다항식을 표현하면 다음과 같다:

$$\Phi(L) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L)\cdots\left(1 - \lambda_p L\right)$$

- 특성근 λ_i 은 실수(real number)일수도 있고 복소수(complex number) 일 수도 있다.

$\rightarrow$ 복소수 특성근 λ가 있다면, 이것의 켤레복소수 (conjugate) $\bar{\lambda}$도 특성근이 된다.

$\rightarrow$ 복소수 특성근이 있다면 시계열에 반복되는 속성이 있다는 의미이다.

| 특성근의 해석

- MA 시차 다항식의 해도 유사한 방법으로 구할 수 있다:

$$\Theta(y) = 0$$

→ 마찬가지로 이들 해의 역수가 MA 시차 다항식의 특성근이 된다.

I 특성근의 해석

- AR 시차 다항식의 경우 모든 특성근의 modulus가 1 이하 ($|\lambda_i| < 1$) 이면 해당 시계열은 정상이며 MA 모형으로 변환이 가능하다.
- MA 시차 다항식의 경우에도 모든 특성근의 modulus가 1 이하 ($|\lambda_i| < 1$) 이면 MA 시계열은 AR 모형으로 변환이 가능하다.

$\Leftarrow$ MA 모형의 정상성은 별도의 조건을 따른다.

$\Leftarrow$ θ_i가 모두 유한수인 경우 MA 모형은 정상 시계열을 나타낸다.

I 시계열 모형의 변환: AR 모형을 MA 모형으로

- AR 시차 다항식 $\Phi(L)$을 사용해서 시계열 모형을 컴팩트하게 표기하면 다음과 같다.

$$\Phi(L)\,(x_t - \bar{x}) = \varepsilon_t$$

- 등호 양쪽에 역연산자 $\Phi(L)^{-1}$를 적용하고 정리하면 다음과 같다. 이것을 전개하면 바로 MA 모형이 된다.

$$x_t = \bar{x} + \boxed{\Phi(L)^{-1}}\varepsilon_t$$

주의!

I 시계열 모형의 변환: AR 모형을 MA 모형으로

- 예를 들어서 AR(1)모형을 MA(∞)모형으로 변환하는 경우:

→ 역연산자 $\Phi(L)^{-1}$를 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\Phi(L)^{-1} = \frac{1}{\Phi(L)} = \frac{1}{1-\phi_1 L} = 1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \cdots$$

→ 그러므로, 변환결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_t &= \bar{x} + \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t \\ &= \bar{x} + \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \cdots \end{aligned}$$

I 시계열 모형의 변환: AR 모형을 MA 모형으로

- 예를 들어서 AR(1)모형을 MA(∞)모형으로 변환하는 경우:

→ 역연산자 $\Phi(L)^{-1}$를 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\Phi(L)^{-1} = \frac{1}{\Phi(L)} = \frac{1}{1-\phi_1 L} = 1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \cdots$$

→ 그러므로, 변환결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_t &= \bar{x} + \Phi(L)^{-1}\varepsilon_t \\ &= \bar{x} + \varepsilon_t + \underset{\theta_1}{\underset{\downarrow}{\phi_1}}\varepsilon_{t-1} + \underset{\theta_2}{\underset{\downarrow}{\phi_1^2}}\varepsilon_{t-2} + \underset{\theta_3}{\underset{\downarrow}{\phi_1^3}}\varepsilon_{t-3} + \cdots \end{aligned}$$

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.

I 끝.

감사합니다.