fast campus

Chapter. 01

시계열

| 벡터 시계열 모형

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트 |

강사. 장순용

I 키포인트

- 벡터 시계열 모형.
- VAR 모형.
- VECM 모형.

| 벡터 시계열 모형의 필요성

- 이전 시간에 알아본 AR, MA, ARMA, ARIMA 등과 같은 모형은 단일 시계열에 적용되는 “스칼라 시계열 모형”이었다.
- 벡터 시계열은 최소 두 개 이상의 시계열이 서로 상관적 관계를 이루면서 변동하는 것을 나타내는 목적으로 사용할 수 있다.

⇒ 스칼라 시계열보다 더 정확한 모델링이 가능하다.

ㅣ벡터 시계열 모형의 필요성

• 벡터 시계열은 다음과 같이 벡터값의 나열로 표기할 수 있다.

$$\text{시계열} = \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_T}$$

$\Rightarrow$ 만약에 벡터의 크기가 2이면 다음과 같은 상황이다.

$$\overrightarrow{x_t} = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$$

| 벡터 시계열 모형의 필요성

- 또한, 벡터 시계열에서도 스칼라 시계열의 경우와 같이 "약한 고정성의 조건"을 정의할 수 있다. (두 개의 원소가 있는 경우)

1). 벡터 시계열은 고정된 평균 $E[\vec{X}] = \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$을 갖는다.

2). 분산공분산행렬 $\tilde{\Sigma}(\ell)$의 원소는 $\sigma_{ij}(\ell) = Cov(X_{i,t}, X_{j,t-\ell})$와 같고 고정적이다. 크기가 2×2인 행렬은 다음과 같다.

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

ㅣ벡터 시계열 모형의 필요성

3). 벡터 시계열의 상관계수는 다음과 같이 정의한다.

$$\rho_{ij}(\ell) = Corr\left(X_{i,t}, X_{j,t-\ell}\right) = \frac{Cov\left(X_{i,t}, X_{j,t-\ell}\right)}{\sqrt{Var(X_{i,t})}\sqrt{Var(X_{j,t})}} = \frac{Cov\left(X_{i,t}, X_{j,t-\ell}\right)}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}}$$

$\Rightarrow$ $\ell = 0$인 경우에는 대칭성이 $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$와 같이 충족된다.

$\Rightarrow$ $\ell > 0$인 경우에는 대칭성이 충족되지 않고 $\rho_{ij}(\ell) \neq \rho_{ji}(\ell)$이다.

$\Rightarrow$ $\rho_{ij}(\ell) = \rho_{ji}(-\ell)$가 되는 것을 확인할 수 있다. ℓ은 0을 포함하는 정수이다.

$\Rightarrow$ $\rho_{ii}(\ell)$은 개개 스칼라 시계열의 자기상관계수이다.

I VAR(p) 모형

- VAR(p)는 스칼라 시계열 모델 AR(p)를 벡터 시계열로 확장한 것이다.
- 다음과 같은 수식으로 주어지는 모형을 전제한다.

$$\vec{x}_t = \vec{\varepsilon_t} + \vec{\mu} + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{\Phi}_i \left(\vec{x}_{t-i} - \vec{\mu}\right)$$

$\Rightarrow$ 이 모형의 파라미터는 p개의 $\widetilde{\Phi}_i$이다.

$\Rightarrow$ $\vec{\varepsilon_t}$ 는 ε_t를 벡터로 확장한 것이다.

$\Rightarrow$ 두 개의 원소가 있는 경우 $\widetilde{\Phi}_i$는 2×2 행렬이다.

I VAR(p) 모형

- 그러면 가장 단순한 VAR(1)모형에 대해서 알아본다. (두 개의 원소 전제)

$$\overrightarrow{x_t} = \vec{\alpha} + \widetilde{\Phi}\, \vec{x}_{t-1} + \overrightarrow{\varepsilon_t}$$

$\Rightarrow$ 여기에서 벡터 $\vec{\alpha}$와 벡터 $\vec{\varepsilon_t}$ 의 크기는 2이다.

$\Rightarrow$ 행렬 $\widetilde{\Phi}$의 크기는 2×2이다.

I VAR(p) 모형

- 그러면 가장 단순한 VAR(1)모형에 대해서 알아본다. (두 개의 원소 전제)

$$\overrightarrow{x_t} = \vec{\alpha} + \widetilde{\Phi}\, \vec{x}_{t-1} + \overrightarrow{\varepsilon_t}$$

$\Rightarrow$ 위 모형을 풀어서 나타내면 다음과 같다.

$$x_{1,t} = \alpha_1 + \Phi_{11} x_{1,t-1} + \Phi_{12} x_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$x_{2,t} = \alpha_2 + \Phi_{21} x_{1,t-1} + \Phi_{22} x_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

$\Rightarrow$ 원소 $x_{1,t}$는 1 스텝 이전의 $x_{1,t-1}$과 $x_{2,t-1}$를 바탕으로 만들어 진다.

$\Rightarrow$ 또한, 원소 $x_{2,t}$도 1 스텝 이전의 $x_{2,t-1}$과 $x_{1,t-1}$를 바탕으로 만들어 진다.

I VAR(p) 모형

- 그러면 가장 단순한 VAR(1)모형에 대해서 알아본다. (두 개의 원소 전제)

$$\overrightarrow{x_t} = \vec{\alpha} + \tilde{\Phi}\,\vec{x}_{t-1} + \overrightarrow{\varepsilon_t}$$

$\Rightarrow$ 벡터 $\vec{\alpha}$는 독립적인 파라미터는 아니고 다음과 같이 행렬 $\tilde{\Phi}$와 벡터 $\vec{\mu}$로 정해진다.

$$\vec{\alpha} = (\tilde{1} - \tilde{\Phi})\,\vec{\mu}$$

$\Rightarrow$ 위 수식을 대입해서 VAR(1)을 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\overrightarrow{x_t} = \overrightarrow{\varepsilon_t} + \vec{\mu} + \tilde{\Phi}(\vec{x}_{t-1} - \vec{\mu})$$

$\Rightarrow$ 행렬 $\tilde{\Phi}$는 다음과 같은 방식으로 계산할 수 있다: $\tilde{\Phi} = \tilde{\Sigma}(1)[\tilde{\Sigma}(0)]^{-1}$

I VECM(p) 모형

- 또 다른 벡터 시계열 모형으로 VECM(p)이 있는데, 다음과 같은 수식으로 주어진다.

$$\overrightarrow{\Delta x}_t = \overrightarrow{\varepsilon_t} + \overrightarrow{\alpha} + \tilde{\Pi}\,\overrightarrow{x}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \widetilde{\Phi}_i^* \,\overrightarrow{\Delta x}_{t-i}$$

$\Rightarrow$ 이 모형의 파라미터는 $\overrightarrow{\alpha}$, $\widetilde{\Pi}$, 그리고 p개의 $\widetilde{\Phi}_i^*$이다.

I 끝.

감사합니다.

Life Changing Education

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.