Chapter.07

금융상품

블랙-숄즈 방정식과 해 II

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트

강사. 장순용

I 키포인트

- 블랙-숄즈 공식.
- 풋-콜 패리티 관계.
- 블랙-숄즈 경계조건.

I 풋-콜 패리티 관계

- 풋-콜 패리티 관계는 다음과 같다.

$$\underbrace{P(t)}_{\text{풋옵션}} + \underbrace{S(t)}_{\text{기초자산}} = \underbrace{C(t)}_{\text{콜옵션}} + \underbrace{K}_{\text{행사가격}} e^{-\underbrace{r_0}_{\text{이자율}}(T-t)}$$

- 이 관계를 블랙-숄즈 공식에서 도출해 내도록 한다.

I 풋-콜 패리티 관계

1). 먼저, $N(x)$함수의 피적분함수 $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$는 표준정규확률분포함수로써 0을 중심으로 좌우 대칭적인 형상을 보이는 것에 주목한다.

$\Rightarrow$ 이러한 특성을 사용하여 다음과 같은 관계를 도출해 낼수 있다.

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{d_1} f(y)\,dy = \frac{1}{2} + \int_{0}^{d_1} f(y)\,dy$$

$$N(-d_1) = \int_{-\infty}^{-d_1} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy - \int_{-d_1}^{0} f(y)\,dy = \frac{1}{2} - \int_{0}^{d_1} f(y)\,dy$$

$$N(d_1) + N(-d_1) = 1$$

I 풋-콜 패리티 관계

2). 동일한 방식으로 $N(d_2) + N(-d_2) = 1$인 것을 확인할 수 있다.

3). 블랙-숄즈 공식을 사용해서 다음과 같은 계산을 한다.

$\Rightarrow$ 마지막 스텝에는 $N(d_1) + N(-d_1) = 1$과 $N(d_2) + N(-d_2) = 1$을 적용한다.

$$C(t) - P(t) = S(t)N(d_1) - K\,e^{-r_0(T-t)}N(d_2) + S(t)N(-d_1) - K\,e^{-r_0(T-t)}N(-d_2)$$

$$= S(t)[N(d_1) + N(-d_1)] - K\,e^{-r_0(T-t)}[N(d_2) + N(-d_2)]$$

$$= S(t) - K\,e^{-r_0(T-t)}$$

$\Rightarrow$ 위의 결과를 정리하면 $P(t) + S(t) = C(t) + Ke^{-r_0(T-t)}$와 같다.

확인 성공!

I 블랙-숄즈 경계조건: 만기일

- 다음과 같은 관계를 상기해 본다.

$$\frac{\text{양의 수}}{0} \to +\infty$$

$$\frac{\text{음의 수}}{0} \to -\infty$$

l 블랙-숄즈 경계조건: 만기일

- 만기일($t = T$)에는 다음과 같은 상황이다.

$$d_1 = d_2 = \frac{Log\left(\frac{S}{K}\right) + 0}{0} = \frac{Log\left(\frac{S}{K}\right)}{0}$$

$\Rightarrow S > K$이면 $Log\left(\frac{S}{K}\right)$는 양수이고 $d_1 = d_2 = +\infty$ 이다.

$\Rightarrow S < K$이면 $Log\left(\frac{S}{K}\right)$는 음수이고 $d_1 = d_2 = -\infty$ 이다.

- 그런데 누적확률 $N(+\infty) = 1$이고 $N(-\infty) = 0$이다.

ㅣ블랙-숄즈 경계조건: 만기일

- 그러므로 만기일($t = T$)에 $S < K$일 경우 옵션의 가격은 다음과 같다.

$$C = S\,N(d_1) - K\,e^0 N(d_2) = S\,N(-\infty) - K\,N(-\infty) = 0$$

$$P = -S\,N(-d_1) + K\,e^0 N(-d_2) = -S\,N(+\infty) + K\,N(+\infty) = K - S$$

- 또한 만기일($t = T$)에 $S > K$일 경우 옵션의 가격은 다음과 같다.

$$C = S\,N(d_1) - K\,e^0 N(d_2) = S\,N(+\infty) - K\,N(+\infty) = S - K$$

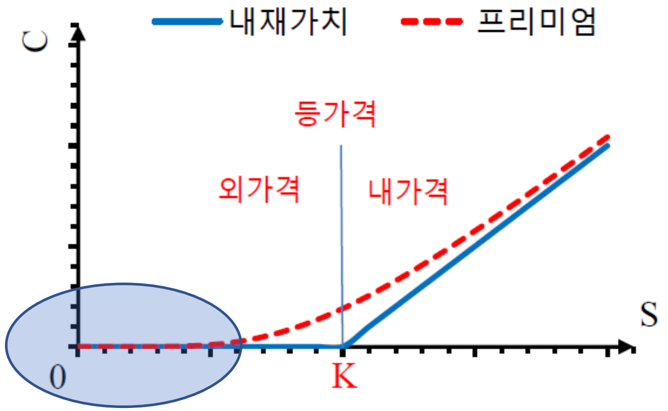
$$P = -S\,N(-d_1) + K\,e^0 N(-d_2) = -S\,N(-\infty) + K\,N(-\infty) = 0$$

$\Rightarrow$ 지금까지의 결과를 정리하면 $C = Max(0, S - K)$와 $P = Max(0, K - S)$이다.

확인 성공!

I 블랙-숄즈 경계조건: 만기일 이전

- 만기전에 $S \rightarrow 0$이면 콜옵션은 외가격이며 0으로 수렴해야 한다.



콜옵션 Long 포지션의 프리미엄.

$\Rightarrow$ 블랙-숄즈 공식이 이와 같은 경계조건을 지키는지 확인해 본다.

I 블랙-숄즈 경계조건: 만기일 이전

- 만기전에 $S \to 0$이면 콜옵션은 외가격이며 0으로 수렴해야 한다.

$\Rightarrow$ $S \to 0$가 되는 경우에는 $Log\left(\frac{S}{K}\right) \to -\infty$가 되며 $d_1 = d_2 = -\infty$와 같다.

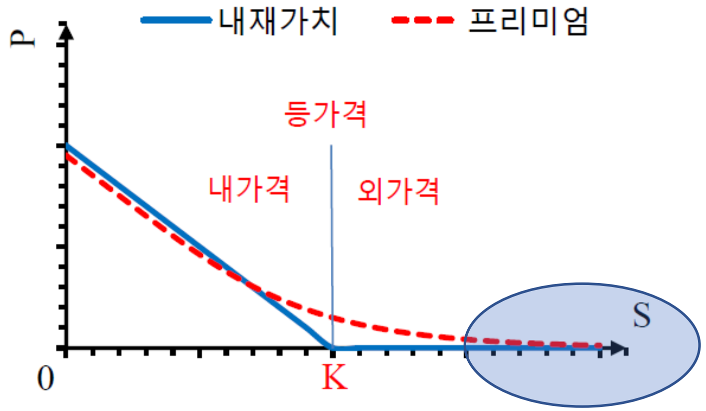
$\Rightarrow$ 이것을 블랙-숄즈 공식에 대입하면 다음과 같은 경계조건을 도출할 수 있다.

$$C = S\,N(d_1) - K\,e^{-r_0(T-t)}N(d_2) = S\,N(-\infty) - K\,e^{-r_0(T-t)}N(-\infty) = 0 - 0 = 0$$

확인 성공!

ㅣ블랙-숄즈 경계조건: 만기일 이전

- 만기전에 $S \rightarrow +\infty$이면 풋옵션은 외가격이며 0으로 수렴해야 한다.



풋옵션 Long 포지션의 프리미엄.

$\Rightarrow$ 블랙-숄즈 공식이 이와 같은 경계조건을 지키는지 확인해 본다.

| 블랙-숄즈 경계조건: 만기일 이전

- 만기전에 $S \to +\infty$이면 풋옵션은 외가격이며 0으로 수렴해야 한다.

$\Rightarrow$ $S \to +\infty$가 되는 경우에는 $Log\left(\frac{S}{K}\right) \to +\infty$가 되며 $d_1 = d_2 = +\infty$ 와 같다.

$\Rightarrow$ 이것을 블랙-숄즈 공식에 대입하면 다음과 같은 경계조건을 도출할 수 있다.

$$P = -S\,N(-d_1) + K\,e^{-r_0(T-t)}N(-d_2) = -S\,N(-\infty) + K\,e^{-r_0(T-t)}N(-\infty) = -0 + 0 = 0$$

확인 성공!

I 끝.

Life Changing Education

감사합니다.

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.