

Chapter02

확률 변수와 확률 분포함수

I이산 확률I

FASTCAMPUS
ONLINE

금융공학/퀀트 I

강사. 장순용

I 키포인트

- 확률변수와 확률분포함수.
- 모집단과 모수.
- 기대값 (모평균)의 법칙.
- 모분산의 법칙.

I 확률 변수 (random variable)

- 확률 변수: 확률 실험의 각 결과에 실수를 부여하는 함수.
- 확률 변수의 값은 하나의 수치로 나타낸 사건이다.
예). 동전을 한번 던지는 실험에서 앞면(H)이 나오면 1 뒷면(T)이 나오면 0.

I 확률 변수의 유형

- 이산확률변수 (discrete random variable): 셀 수 있는 가지수의 값을 가지는 확률변수.

예). 주사위를 던져서 나오는 눈의 수: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 연속확률변수 (continuous random variable): 셀 수 없는 (무한대) 가지수의 값을 가지는 확률변수.

예). 1년 연봉, 성인남성의 신장, 등.

I 확률분포함수 (probability distribution function)

- 이산확률분포함수: 이산확률변수가 가지는 값과 이것의 **확률** 사이의 대응 관계.

→ 확률변수는 영문 **대문자**로 확률변수의 값은 영문 **소문자**로 표기한다.

예). 확률변수 X , 확률변수의 값 x .

→ 확률변수 X 의 값이 x 일 확률은 $P(X = x)$ 또는 $P(x)$ 로 표기한다.

I 확률 밀도 함수 (probability density function)

- 연속확률분포함수/확률밀도함수: 이것을 사용하여 연속확률변수의 값이 특정 구간에 속할 확률을 나타냄. (이후 강의에서 자세히 다루기로 함)

I 이산확률의 필수 조건

- 다음 조건이 충족되어야 한다.

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

$$\sum_{all\ x_i} P(x_i) = 1$$

I 모집단과 모수

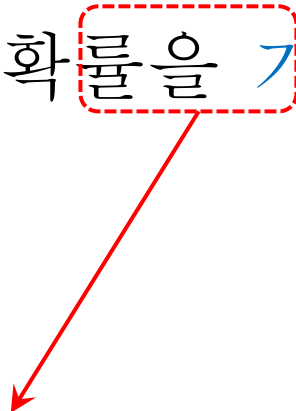
- 모집단 (population): 분석 대상 전체를 의미함. 실존 또는 개념적 존재.
- 모수 (parameter): 모집단을 특성을 나타냄.
예). 모평균, 모분산, 모표준편차, 등.
- 모집단의 특성을 묘사하기 위해서 확률분포함수를 사용할 수 있음.
예). 모평균을 확률분포함수를 사용하여 계산한다.

I 이산확률을 따르는 모집단의 평균 (모평균)

- 모평균은 확률변수 X 의 기대값 (expected value)이라고도 불리우며 $E[X]$ 로 나타낸다.

I 이산확률을 따르는 모집단의 평균 (모평균)

- 모평균은 확률변수 X 의 기대값 (expected value)이라고도 불리우며 $E[X]$ 로 나타낸다.
- 이산확률변수가 가질 수 있는 값들에 확률을 가중치로 곱해서 평균을 구한 것 (≒더한 것)이다.

$$\mu = E[X] = \sum_{all\ x} x P(x)$$


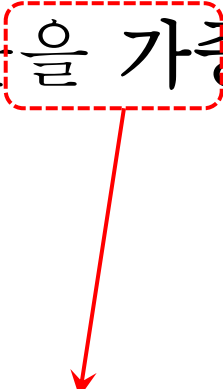
I 기대값 (모평균)의 법칙

- $E[c] = c$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[c X] = c E[X]$
- $E[X + c] = E[X] + c$

⇐ c 는 상수이다.

I 이산확률을 따르는 모집단의 분산 (모분산)

- 확률변수 X 의 모분산을 $Var(X)$ 와 같이 나타내기도 한다.
- 모평균을 기준으로 한 편차의 제곱에 확률을 가중치로 곱해서 평균을 구한 것 (≒더한 것).

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{all\ x} (x - \mu)^2 P(x)$$


I 이산확률을 따르는 모집단의 분산 (모분산)

- 모분산의 간편 수식:

$$\sigma^2 = \left(\sum_{all\ x} x^2 P(x) \right) - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

- 모표준편차: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

I 모분산의 법칙

- $Var(c) = 0$
0이다.

⇐ 상수의 분산은

- $Var(X + c) = Var(X)$

- $Var(c X) = c^2 Var(X)$

- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X, Y)$

$$= Var(X) + Var(Y)$$

⇐ X와 Y가 서로 독립인

경우에만!

I 모평균과 모분산

문제: 동전 던지기 게임이 있다. 앞면이 나오면 $X = 100$ 을 받고 뒷면이 나오면 0을 받는다. 그런데 참가비용은 40이다. 수익의 평균과 표준편차는?

I 모평균과 모분산

문제: 동전 던지기 게임이 있다. 앞면이 나오면 $X = 100$ 을 받고 뒷면이 나오면 0을 받는다. 그런데 참가비용은 40이다. 수익의 평균과 표준편차는?

수익을 나타내는 확률변수 = $X - 40$

수익의 모평균 = $E[X - 40]$

$$= E[X] - 40$$

$$= 100 \times P(X = 100) + 0 \times P(X = 0) - 40$$

$$= 100 \times \frac{1}{2} - 40 = 50 - 40 = 10$$

I 모평균과 모분산

문제: 동전 던지기 게임이 있다. 앞면이 나오면 $X = 100$ 을 받고 뒷면이 나오면 0을 받는다. 그런데 참가비용은 40이다. 수익의 평균과 표준편차는?

$$\begin{aligned}
 \text{수익의 모분산} &= \text{Var}(X - 40) = \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \\
 &= 100^2 \times P(X = 100) + 0^2 \times P(X = 0) - 50^2 \\
 &= 10000 \times \frac{1}{2} - 2500 = 5000 - 2500 = 2500
 \end{aligned}$$

$E[X] = 50$

$$\text{수익의 리스크} = \sqrt{2500} = 50$$

I 끝.

감사합니다.

