Chapter02

확률 변수와 확률 분포함수

| 연속 확률 |

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트 |

강사. 장순용

I 키포인트

- 연속 확률변수와 연속 확률밀도함수.
- 연속균등분포함수.

I 연속 확률변수 (continuous random variable)

- 연속 확률변수 (continuous random variable): 셀 수 없는 (무한대) 가지수의 값을 가지는 확률변수.

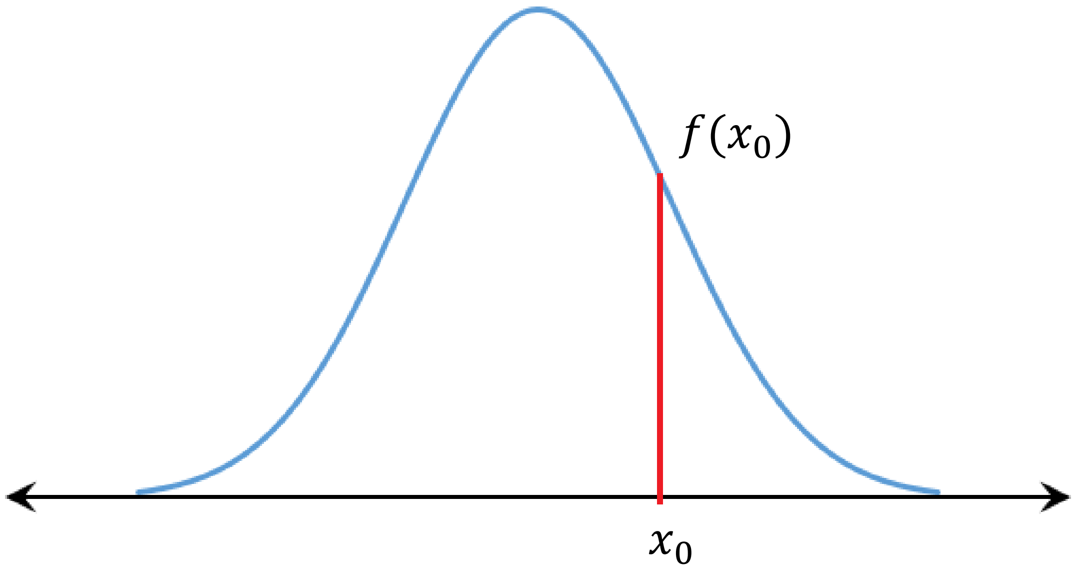
  예). 1년 연봉, 성인남성의 신장, 등.

- 연속 확률변수의 경우 확률은 구간에 대해서 정의되어 있다. 즉 $P(X = x_0)$와 같이 특정 위치에 대한 확률은 의미가 없고, $P(x_1 \leq X \leq x_2)$와 같이 X가 어느 구간에 있을 확률이 의미가 있다.

I 연속 확률밀도 (probability density function)

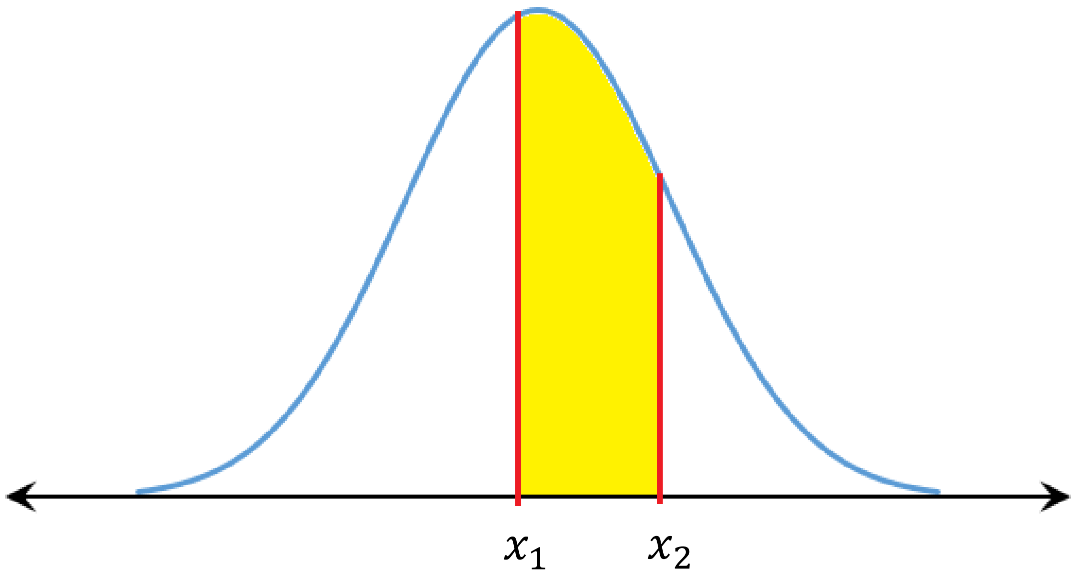
- 이산확률분포함수와는 다르게 이것 자체만으로는 확률의 의미가 없다.
- 이것을 사용하여 연속확률변수의 값이 특정 구간에 속할 확률을 나타낼 수 있다.
- 연속 확률분포함수 또는 확률밀도함수를 $f(x)$와 같이 표기하여 구간의 확률 $P(x)$와는 구분 짓도록 한다.

I 연속 확률밀도 (probability density function)



- $f(x_0)$에는 확률의 의미가 없다.

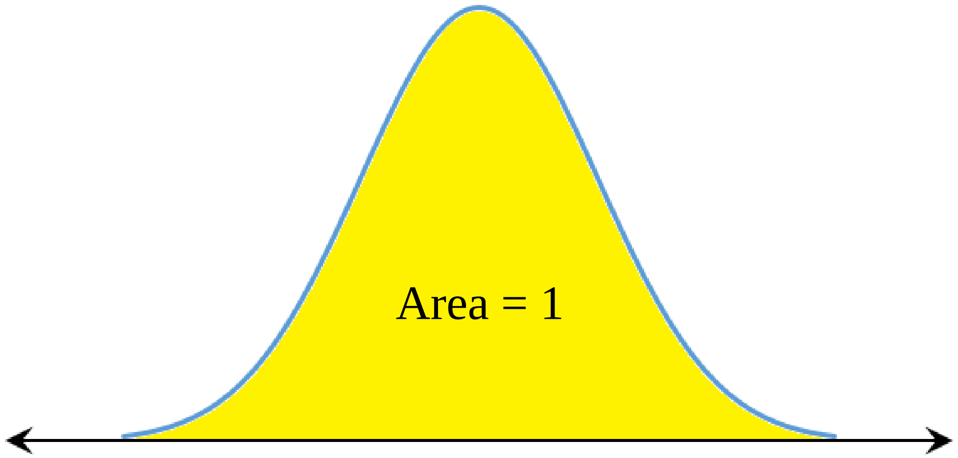
I 연속 확률밀도 (probability density function)



- $P(x_1 \leq X \leq x_2)$와 같이 X가 어느 구간에 있을 확률이 의미가 있다.

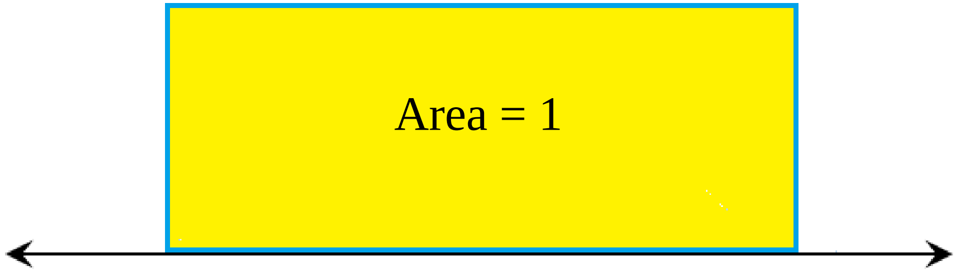
I 연속 확률밀도 (probability density function)

- $0 \leq f(x)$
- $f(x)$가 정의되어 있는 구간에서 $f(x)$ 아래의 총 면적은 1과 같아야 한다.



l 연속 확률밀도 (probability density function)

- $0 \leq f(x)$
- $f(x)$가 정의되어 있는 구간에서 $f(x)$ 아래의 총 면적은 1과 같아야 한다.



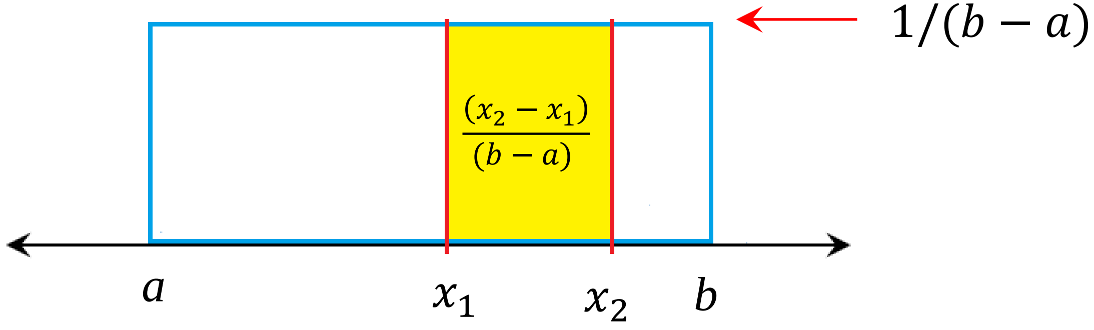
I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

- 연속 균등확률분포함수는 구간 $[a, b]$에 대해서 정의되어 있다:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}$$

$\rightarrow$ 이외의 구간에서는 $f(x) = 0$이다.

- 확률밀도가 균등하므로 확률은 구간 $[x_1, x_2]$의 폭에 비례한다.



| 연속 균등분포 (Uniform distribution)

- "확률변수 X가 연속균등확률분포를 따른다" $\Leftrightarrow$ $X \sim Unif(a, b)$
- 평균 $= E[X] = \int_a^b \frac{x}{(b-a)} dx = \frac{1}{2}(a+b)$
- 분산 $= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_a^b \frac{x^2}{(b-a)} dx - \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

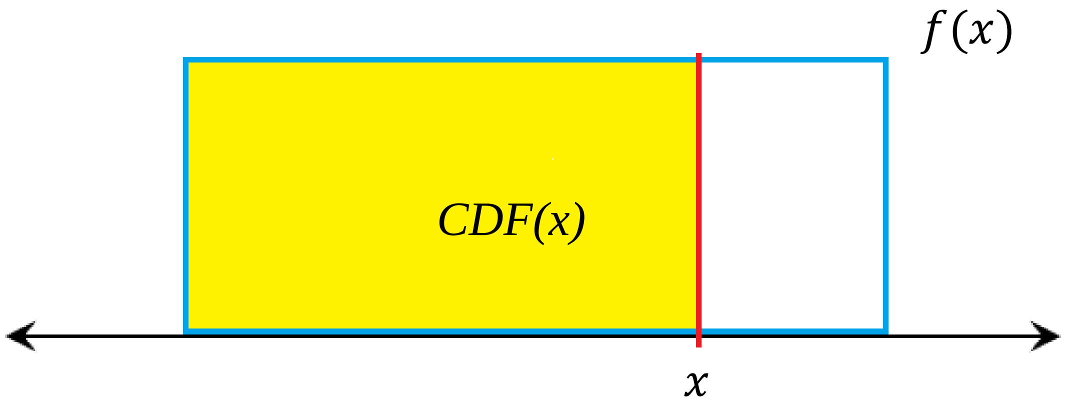
$$\frac{1}{12}(b-a)^2$$

- 표준편차 $= \frac{1}{\sqrt{12}}(b-a)$

l 연속 균등분포의 누적확률 (Cumulative Distribution Function, CDF)

- 연속균등분포의 누적확률 $CDF(x)$는 구간 $(-\infty, x]$ 에서 $f(x)$ 아래의 면적과 같다. 즉, $CDF(x) = P(-\infty < X \leq x)$이다.

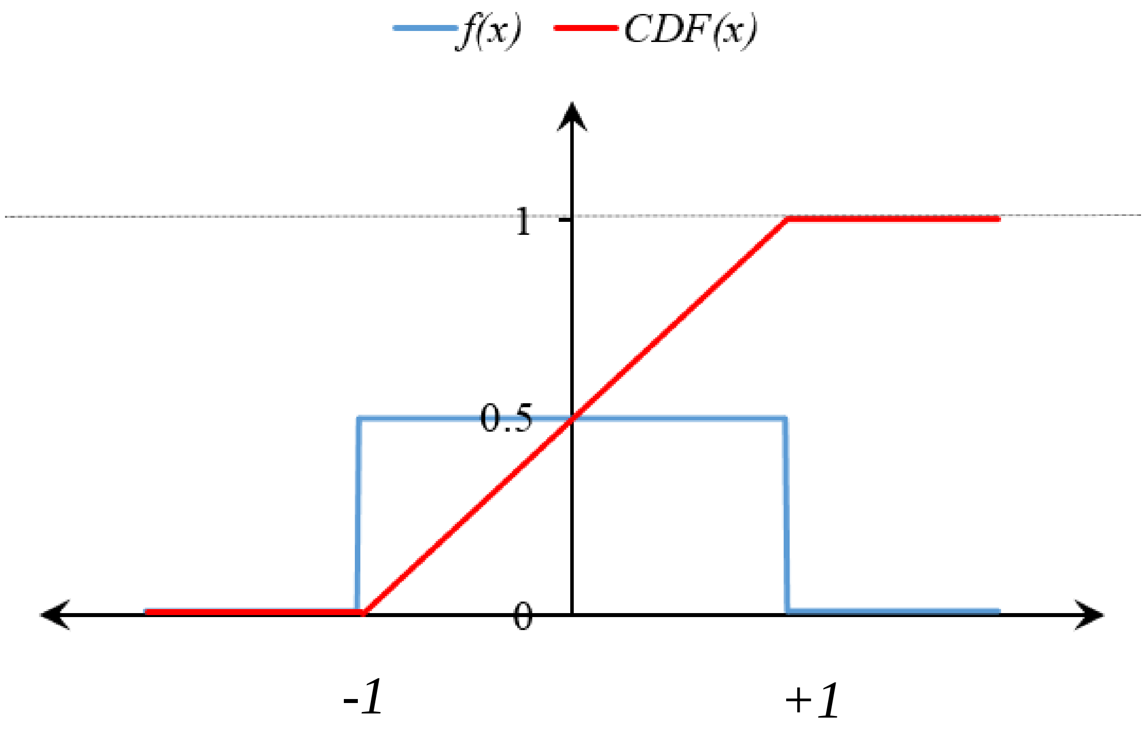
$$CDF(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$



l 연속 균등분포의 누적확률 (Cumulative Distribution Function, CDF)

- $CDF(x)$ 는 x가 증가하면 1로 수렴한다.

예). $a = -1,\ b = +1$



I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

1). 백열전구가 사용시간 6000시간과 7000시간 사이에서 타버릴 확률은?

ㅣ연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

1). 백열전구가 사용시간 6000시간과 7000시간 사이에서 타버릴 확률은?

확률밀도 함수는 $f(x) = \dfrac{1}{(7000-5000)} = 0.0005$이다. 그러므로

$$P(6000 \le X \le 7000) = (7000 - 6000) \times f(x) = 1000 \times 0.0005 = 0.5$$

I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

2). 백열전구의 수명이 5500시간 이하일 확률은?

I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

2). 백열전구의 수명이 5500시간 이하일 확률은?

$$P(X \le 5500) = P(5000 \le X \le 5500)$$

$$= (5500 - 5000) \times f(x) = 500 \times 0.0005 = 0.25$$

ㅣ연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

3). 백열전구의 수명이 최소 사용시간 5500시간 이상일 확률은?

I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

3). 백열전구의 수명이 최소 사용시간 5500시간 이상일 확률은?

$$P(5500 \le X) = P(5500 \le X \le 7000)$$

$$= (7000 - 5500) \times f(x) = 1500 \times 0.0005 = 0.75$$

I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

4). 백열전구의 수명이 정확하게 6000시간일 확률은?

I 연속 균등분포 (Uniform distribution)

문제: 백열전구의 수명 X는 연속균등분포를 따르며 5000시간에서 7000시간 사이라고 한다. 다음 물음에 답하시오.

4). 백열전구의 수명이 정확하게 6000시간일 확률은?

$$P(X = 6000) = P(6000 \le X \le 6000)$$

$$= (6000 - 6000) \times f(x) = 0 \times 0.0005 = 0$$

I 끝.

감사합니다.

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.