Chapter02

확률 변수와 확률 분포함수

| 연속 확률 III

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트 |

강사. 장순용

I 키포인트

- 지수 확률분포함수.
- 카이제곱 확률분포함수.
- 카이제곱 확률변수의 합.

I 지수 확률분포함수 (Exponential)

- 푸아송 사건 사이의 거리(시간)을 확률로 모델링하는 함수이다.

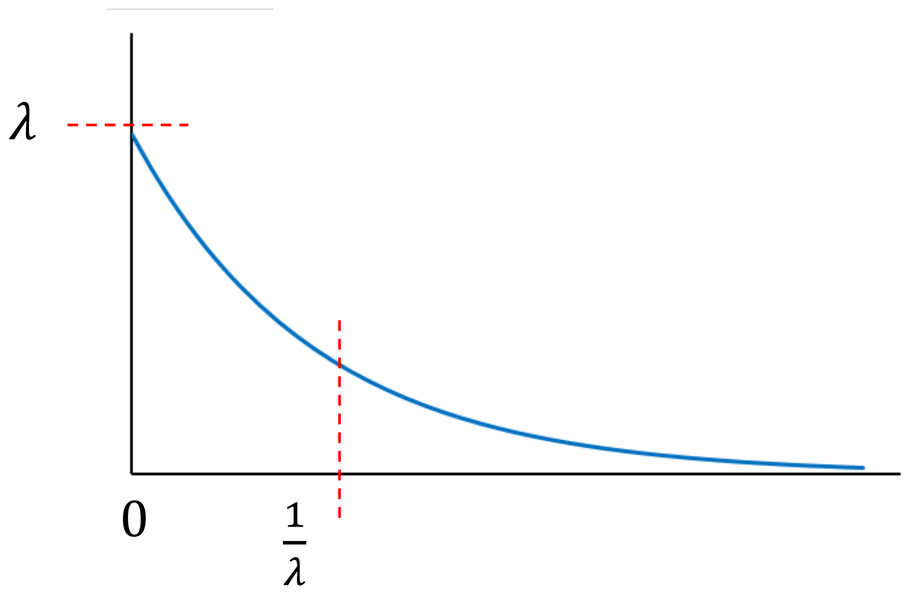
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- x는 양수이어야 한다 $(x \geq 0)$.
- λ는 유일한 파라미터이고 양의 수치여야 한다.
- 보통 $\frac{1}{\lambda}$는 시간의 의미를 갖는다.
- "확률변수 X가 지수확률분포를 따른다" $\Leftrightarrow$ $X \sim Exp(\lambda)$

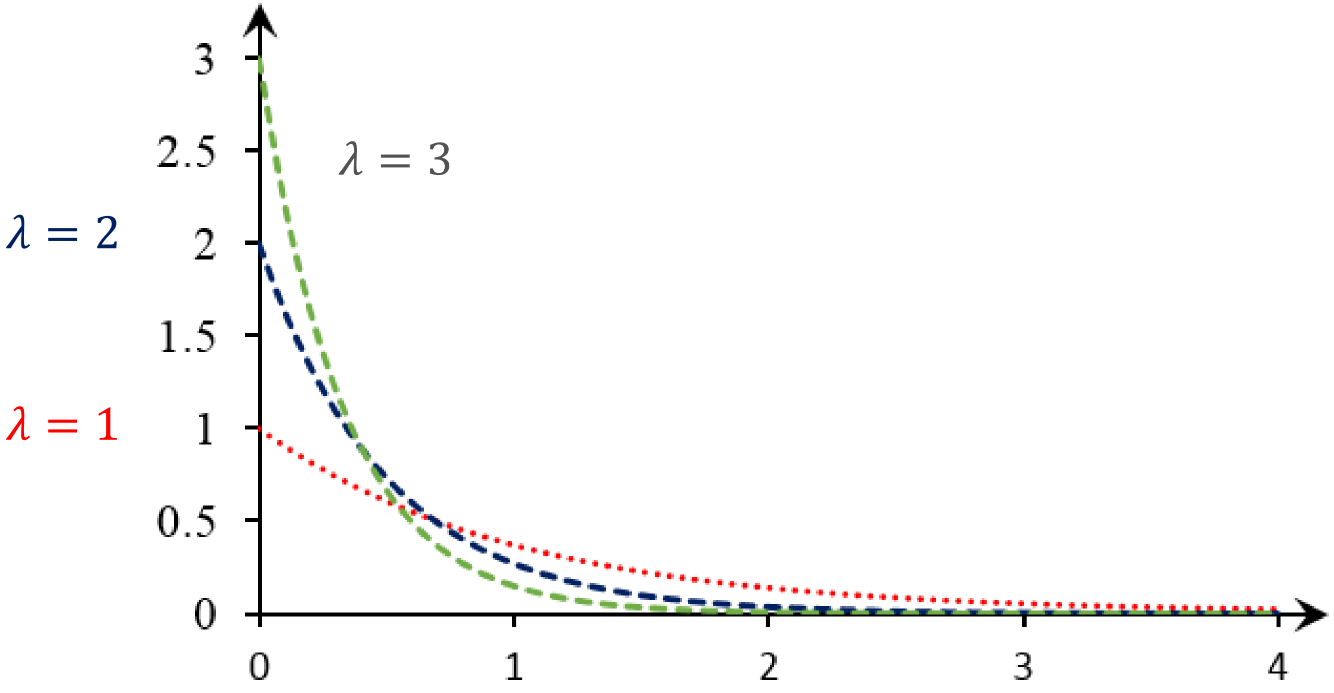
I 지수 확률분포함수 (Exponential)

- 평균 $= \frac{1}{\lambda}$
- 분산 $= \frac{1}{\lambda^2}$
- 표준편차 $= \frac{1}{\lambda}$
- 지수분포의 누적확률: $CDF(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

l 지수 확률분포함수: λ의 역할



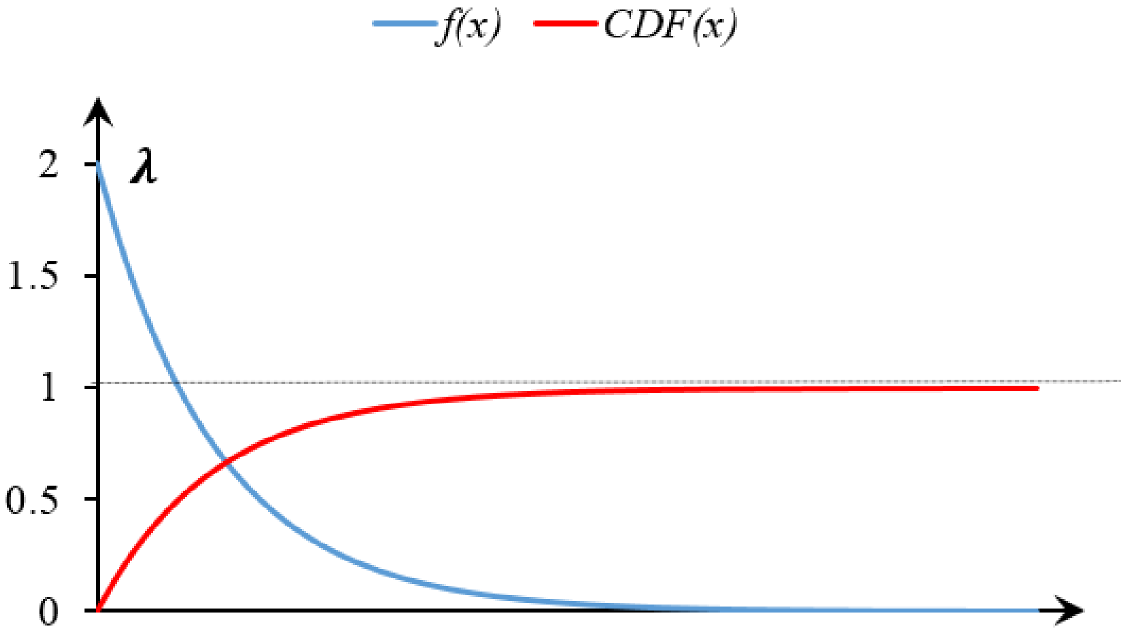
❙ 지수 확률분포함수: λ의 역할



I 지수분포의 누적확률함수 (Cumulative Density Function, CDF)

- $CDF(x)$ 는 x가 증가하면 1로 수렴한다.

예). $\lambda = 2$



I 지수 확률분포함수 (Exponential)

문제: 자동차가 20개월 마다 한번씩 고장난다는 전제로 지수확률분포로 모델링하여 고장 주기가 15개월과 20개월 사이일 확률을 구하시오.

l 지수 확률분포함수 (Exponential)

문제: 자동차가 20개월 마다 한번씩 고장난다는 전제로 지수확률분포로 모델링하여 고장 주기가 15개월과 20개월 사이일 확률을 구하시오.

먼저 $\lambda = \frac{1}{20} = 0.05$, 그러므로 CDF를 활용하여 확률을 계산한다.

$$P(15 \leq X \leq 20) = CDF(20) - CDF(15) = (1 - e^{-0.05\times20}) - (1 - e^{-0.05\times15})$$

$$= 0.6321 - 0.5276 = 0.1045$$

I 카이제곱 분포함수 (Chi Square)

- k개의 표준정규분포를 따르는 독립적인 확률변수 $X_i \sim N(0,1)$가 있을때 카이제곱 확률변수 Q는 이들의 제곱의 합이다.

$$Q = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$$

- 여기에서 k를 “자유도”라고 부른다.
- “확률변수 Q가 카이제곱 확률분포를 따른다” $\Leftrightarrow$ $Q \sim \chi^2(k)$

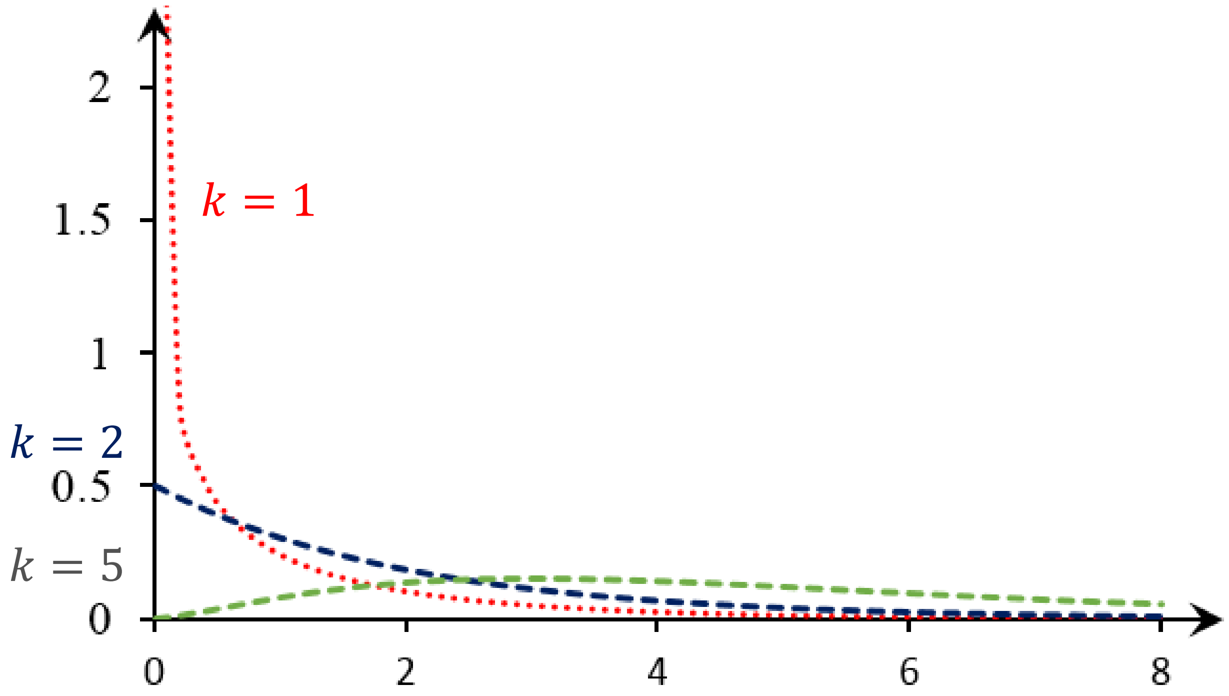
카이제곱 분포함수 (Chi Square)

- 카이제곱 확률분포함수는 구간 $(0, +\infty)$에 대해서 정의되어 있다:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

- 평균 $= k$
- 분산 $= 2k$
- 표준편차 $= \sqrt{2k}$

ㅣ카이제곱 분포함수: 자유도 k의 역할



I 카이제곱 확률변수의 합

- 확률변수 Q_1와 Q_2가 서로 독립적이며 다음과 같이 카이제곱 확률 분포를 따를 때,

$$Q_1 \sim \chi^2(\boldsymbol{k_1})$$

$$Q_2 \sim \chi^2(\boldsymbol{k_2})$$

$Q_1 + Q_2 \sim \chi^2(\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2})$이다.

I 카이제곱 확률변수의 합

- 증명은 다음과 같이 매우 간단하다.

$$Q_1 + Q_2 = \{X^2 + X^2 + \cdots + X^2\} + \{X^2 + \cdots + X^2\}$$

← $\boldsymbol{k_1}$ 개 → ← $\boldsymbol{k_2}$ 개 →

그러므로, $Q_1 + Q_2 \sim \chi^2(\boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2})$.

I 끝.

Life Changing Education

감사합니다.

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.