Chapter. 05

리스크 관리

리스크의 척도

FASTCAMPUS
ONLINE
금융공학/퀀트

강사. 장순용

I 키포인트

- 금융 리스크.
- 리스크의 척도.
- 시간 단위의 변환.
- 샤프 비율.
- VaR (Value at Risk)와 ES (Expected Shortfall).
- 투자의 효용성과 확실성 등가.

| 리스크의 척도: 수익률의 표준편차

- 시시각각 변동하는 자산가를 s_t로 표기한다면, 수익률 r_t는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$r_t = \frac{s_t - s_{t-1}}{s_{t-1}} \quad \text{또는} \quad r_t = Log\left(\frac{s_t}{s_{t-1}}\right)$$

- 많이 사용되는 금융 리스크의 척도로 수익률의 표준편차 σ가 있다.

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_t \qquad \Leftarrow \text{평균}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_t - \bar{r})^2} \qquad \Leftarrow \text{표준편차}$$

ㅣ리스크의 척도: 시간단위

- 많이 사용되는 금융 리스크의 척도로 수익률의 표준편차 σ가 있다.

$\Rightarrow$ 수익률에는 시간단위 Δt가 내포되어 있음에 주의한다.

- 시간단위를 $\Delta t' = m \times \Delta t$ 와 같이 늘리는 경우 다음과 같이 조정한다.

$$\sigma' = \sqrt{m} \times \sigma$$

예) 1일 주기의 표준편차 (리스크) $\sigma_{\mathrm{day}} = 0.005$를 1년 주기로 변환해 본다.

$$\rightarrow \sigma_{year} = \sqrt{365} \times \sigma_{\mathrm{day}} \cong 0.1$$

I 리스크의 척도: 샤프 비율 (Sharpe ratio)

- 샤프 지수 S는 다음과 같은 수식을 따른다 (보통 1년 주기 수치 사용).

$$S = \frac{(r - r_0)}{\sigma}$$

$\Rightarrow r =$ 투자 대상의 평균 수익률.

$\Rightarrow r_0 =$ 리스크 부담이 없고 기준이 되는 수익률 (은행 이자 등).

$\Rightarrow \sigma =$ 투자 대상의 리스크 (수익률의 표준편차).

- 샤프 지수를 1과 비교하여 위험 대비 수익의 양호 여부를 확인할 수 있다.

I 리스크의 척도: 문제점

- 리스크의 척도로서 수익률의 표준편차는 미흡한 점이 많다.

⇒ 직관적인 의미의 금융 리스크는 손실 또는 손실의 가능성을 나타내는 것이 바람직하겠는데 수익률의 표준편차는 대칭적인 변동을 나타낸다.

⇒ 표준편차는 극한적 특성에 대해서는 아무런 정보를 제공하지 못한다.

⇒ 극한의 손실과 직결되는 VaR (Value at Risk), ES (Expected Shortfall) 등 사용.

ㅣ리스크의 척도: VaR (Value at Risk)

- $VaR(\alpha)$은 확률 α 안에서 발생할 수 있는 최소 손실을 나타낸다.

$\Rightarrow$ 보통 α 는 0에 가까운 작은 값이다 (0.01~0.05).

$\Rightarrow$ 표준편차로 표현할 수 없는 극한의 손실 리스크를 나타낸다.

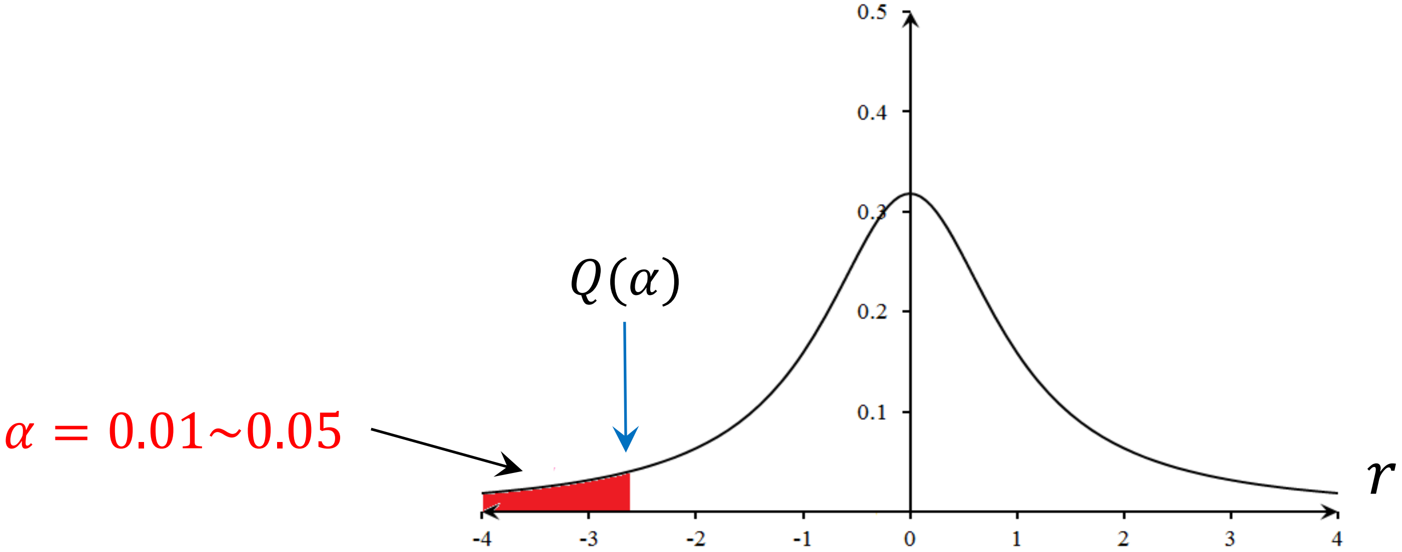
$\Rightarrow$ 시간단위 Δt는 투자 자산의 보유기간을 나타내며 데이터에 내포되어 있다.

ㅣ리스크의 척도: VaR (Value at Risk)

- $VaR(\alpha)$은 확률 α 안에서 발생할 수 있는 최소 손실을 나타낸다.

$\Rightarrow$ 수익률의 분위수 $Q(\alpha)$를 사용해서 계산할 수 있다.

$$VaR(\alpha) = -(\text{현재의 자산가}) \times Q(\alpha)$$



ㅣ리스크의 척도: ES (Expected Shortfall)

- $ES(\alpha)$은 확률 α 안에서 발생할 수 있는 평균 손실을 나타낸다.

  $\Rightarrow$ $VaR(\alpha)$을 사용해서 계산할 수 있다.

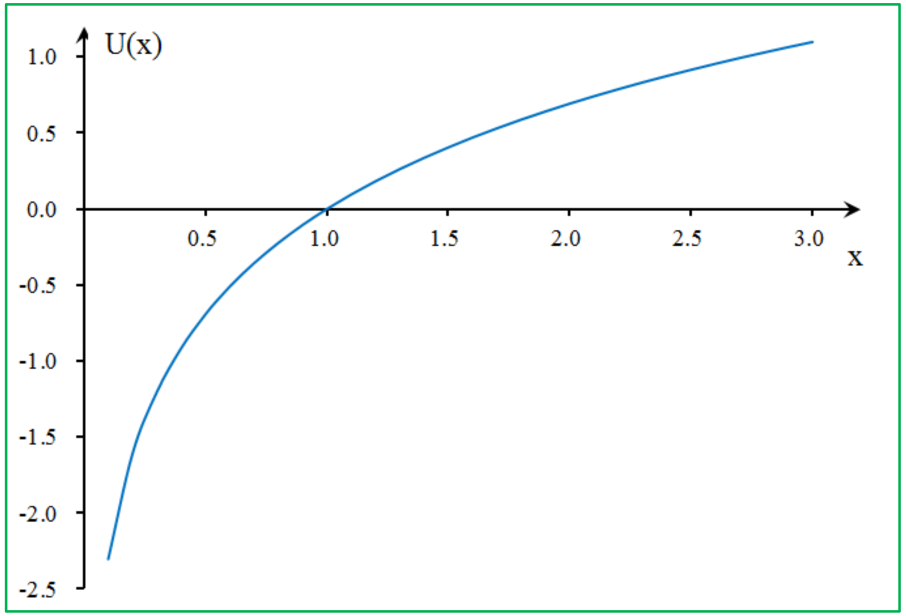
$$ES(\alpha) = \frac{\int_0^{\alpha} VaR(x)\,dx}{\alpha}$$

l 투자에 대한 효용성 (Utility)

- "효용함수"는 투자 결과에 대한 만족도를 수치로 나타낸다.
- 리스크 회피형 (risk adverse) 효용함수 $U(x)$는 다음과 같은 특성을 충족:

$$\frac{dU(x)}{dx} > 0$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} < 0$$



I 투자에 대한 효용성 (Utility)

- 리스크 회피형 효용함수로서 로그함수를 채택한다: $U(x) = Log(x)$.
- 로그함수가 리스크 회피형 효용함수임을 확인할 수 있다. (항상 $x > 0$)

$$\frac{d(Log(x))}{dx} = \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{d^2(Log(x))}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

- 효용성은 기대값 $E[U(X)]$이다.

$$\text{효용성} = E[U(X)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

I 투자에 대한 효용성 (Utility)

- 효용성은 기대값 $E[U(X)]$이다.

$$\text{효용성} = E[U(X)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U(x_i)$$

$\Leftarrow$ x_i 는 “수익배율”을 나타낸다: $x_i = \frac{s_i}{s_{i-1}}$

$\Leftarrow$ $E[U(X)]$는 $U(E[X])$와 다르니 주의!

I 투자에 대한 효용성 (Utility)

- 효용함수를 테일러 시리즈로 전개해 본다.

$$U(x) \cong Log(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2(x_0)^2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{3(x_0)^3}(x - x_0)^3 - \frac{1}{4(x_0)^4}(x - x_0)^4 + \cdots$$

- x_0에는 수익배율의 평균 μ을 대입하고 기대값을 구한다.

$$효용성 = E[U(X)] \cong Log(\boldsymbol{\mu}) - \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2\boldsymbol{\mu}^2}$$

$\Rightarrow$ 수익배율의 평균 $\boldsymbol{\mu}$이 클수록 효용성이 높아진다.

$\Rightarrow$ 수익배율의 표준편차 $\boldsymbol{\sigma}$가 작을수록 효용성이 높아진다.

I 효용성 등가 (Certainty equivalent)

- 리스크 있는 투자방법과 동일한 효용성을 제공하는 리스크 없는 수익.

⇒ μ_e로 표기하기로 한다.

- 이전 슬라이드의 수식을 적용하면 다음 등식을 의미한다.

$$Log(\mu_e) = Log(\mu) - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$$

⇒ 위 등식을 풀면 다음과 같으 수식을 구할 수 있다: $\mu_e = \mu\, e^{-\frac{\sigma^2}{2\mu^2}}$

I 효용성 등가 (Certainty equivalent)

문제: 김씨는 자본금의 일부를 펀드에 투자하는 것을 고려 중이다. 펀드의 1년 평균 수익률은 7%이고, 수익률의 표준편차는 30%가 된다고 한다. 그런데, 김씨는 연금리 4%의 정기적금에 가입하는 것도 고려하고 있다. 어느 쪽에 자산을 두는 것이 좋을까?

I 효용성 등가 (Certainty equivalent)

문제: 김씨는 자본금의 일부를 펀드에 투자하는 것을 고려 중이다. 펀드의 1년 평균 수익률은 7%이고, 수익률의 표준편차는 30%가 된다고 한다. 그런데, 김씨는 연금리 4%의 정기적금에 가입하는 것도 고려하고 있다. 어느 쪽에 자산을 두는 것이 좋을까?

⇒ 수익률 7%를 수익배율로 환산하면 1.07이다. 그리고 수익배율의 표준편차는 수익률의 그것, 즉 0.3과 같다. 그러므로, $\boldsymbol{\mu_e} = 1.07\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0.3}{1.07}\right)^2} = 1.029$이다.

⇒ 펀드의 확실성 등가는 2.9%인데 연금리 4%인 무위험 정기적금 보다는 미흡하다.

I 끝.

감사합니다.