

## Chapter09

## 통계 모델링

# 마르코프 연쇄

M T W T F S S

FASTCAMPUS  
ONLINE

금융공학/퀀트 I

강사. 장순용

# I 키포인트

- 확률과정.
- 전이행렬.
- 마르코프 연쇄 (Markov chain).



## I 확률과정

- 시간이 지남에 따라서 변하는 확률변수의 집합.  
→ 상태가 확률적으로 변하고 이러한 정보를 모아놓은 집합.

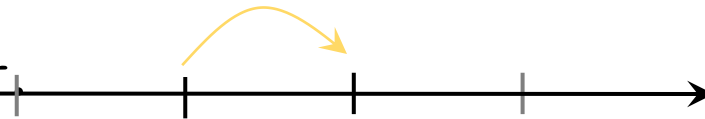
## I 마르코프 과정

- 미래의 확률이 바로 한 스텝 이전과 연결되며 더 오래된 과거는 필요없다.

$$P(x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_1) = P(x_{t+1}|x_t)$$

- 마르코프 연쇄는 시간이 이산적인 경우에 해당한다.

예). 오늘 S사의 주가가 상승했으면 내일도 95%의 확률로 주가가 오를것 이다. 또한, 오늘 S사의 주가가 하락했더라도 내일은 20%의 확률로 주가가 오를 것이다.



## I 전이행렬

- 다음 예에 해당하는 전이행렬을 구해본다:

예). 오늘 S사의 주가가 상승했으면 내일도 95%의 확률로 주가가 오를것 이다. 또한, 오늘 S사의 주가가 하락했더라도 내일은 20%의 확률로 주가가 오를 것이다.

$$\tilde{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{다음주} \\ \text{상승} & \text{하} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{상승} \\ \text{하락} \end{matrix} \end{matrix} \text{이번주}$$

# I 전이행렬

- 전이행렬의 원소는 상태  $s_i$  에서  $s_j$ 로 전이되는 확률을 나타낸다.

$$T_{i,j} = P(x_{t+1} = s_j | x_t = s_i)$$

- 전이행렬의 행방향으로 합은 1이 되어야 한다.

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

# I 전이행렬

- 전이행렬의 원소는 상태  $s_i$  에서  $s_j$ 로 전이되는 확률을 나타낸다.

$$T_{i,j} = P(x_{t+1} = s_j | x_t = s_i)$$

- 전이행렬의 행방향으로 합은 1이 되어야 한다.

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.95 & +0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = 1$$

## I 전이행렬

- 전이행렬의 원소는 상태  $s_i$  에서  $s_j$ 로 전이되는 확률을 나타낸다.

$$T_{i,j} = P(x_{t+1} = s_j | x_t = s_i)$$

- 전이행렬의 행방향으로 합은 1이 되어야 한다.

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & + 0.8 \end{bmatrix} = 1$$



# I 전이행렬

- 전이행렬은 현재 상태를 1 타임스텝 전진시켜 준다.

$$x_{t+1} = x_t \tilde{T}$$

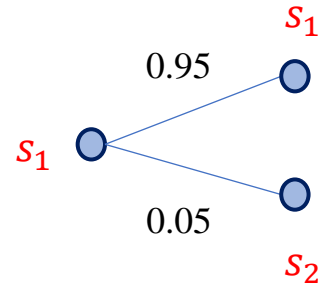
예).  $x_t = (1 \quad 0)$  이고  $\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$  라면,

$$x_{t+1} = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = (0.95 \quad 0.05)$$

## I 전이행렬과 확률나무

- 다음 전이행렬에 해당하는 확률나무를 만들어 본다.

$$\tilde{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{다음주} \\ \text{상승} & \text{하} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{이번주} \\ \text{상승} \\ \text{하락} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$s_1 = \text{상승 상태.}$

$s_2 = \text{하락 상태.}$

# I 전이행렬과 확률나무

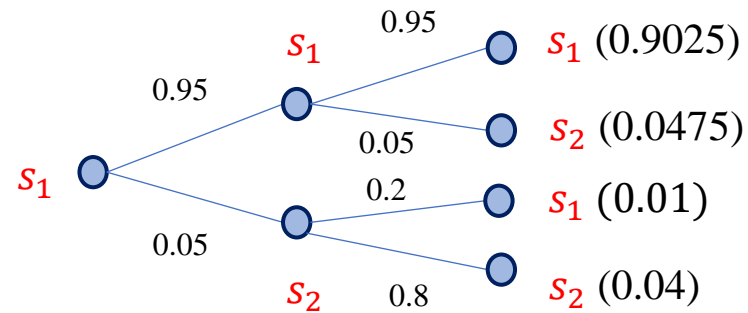
- 이틀 후의 확률변화는 전이행렬을 두번 적용 (곱하기).

$$\tilde{T}^2 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9125 & 0.0875 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$

## I 전이행렬과 확률나무

- 2 타임 스텝 전이행렬과 확률나무.

$$\tilde{T}^2 = \begin{bmatrix} 0.9125 & 0.0875 \\ 0.35 & 0.65 \end{bmatrix}$$



$S_1$  끼리 더하면 확률 = 0.9125

$S_2$  끼리 더하면 확률 = 0.0875

## I 전이행렬의 안정상태

- 전이행렬을 거듭해서 적용 (곱하기)하다 보면 다음과 같이 **변화가 멈춘 상태**가 될 수 있다. 이것을 **안정상태** (steady state)라 부른다.

$$\tilde{T}^i = \tilde{T}^{i+1} = \tilde{T}^{i+2} = \dots$$

예).  $\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{T}^{100} = \tilde{T}^{101} = \tilde{T}^{102} = \dots$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

I 끝.

감사합니다.

