Chapter02

확률 변수와 확률 분포함수

| 연속 확률 II

FASTCAMPUS ONLINE
금융공학/퀀트 |

강사. 장순용

I 키포인트

- 정규분포함수.
- 정규 확률변수의 합.
- 누적확률.
- 표준화와 표준정규분포함수.

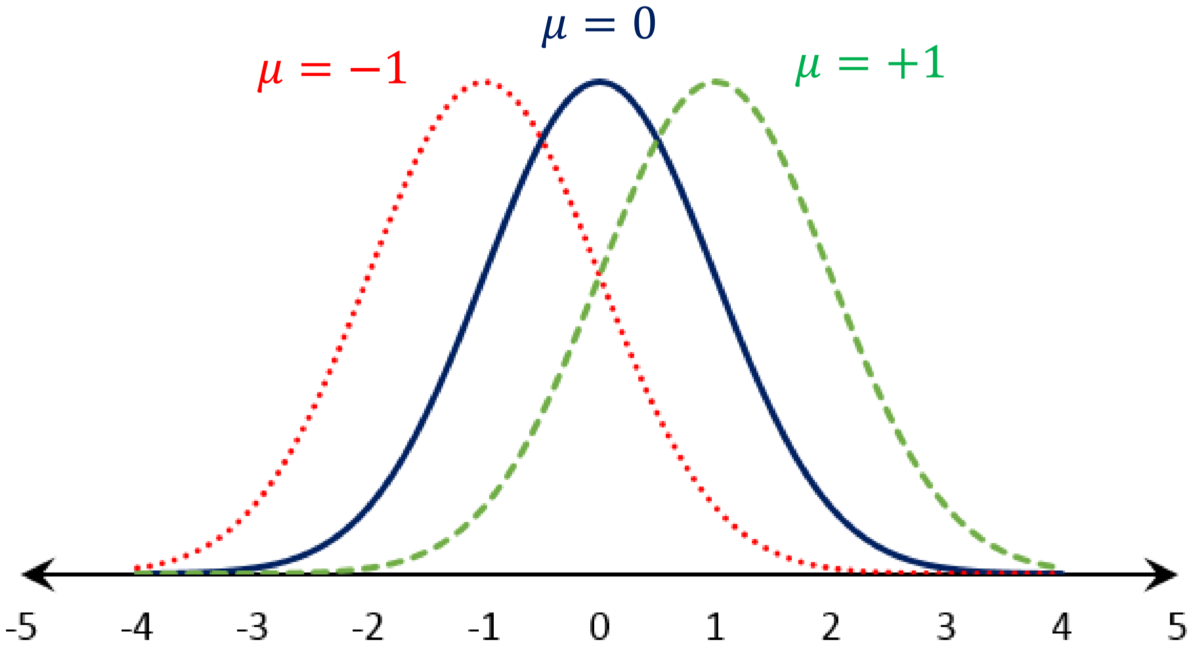
I 정규분포함수 (Normal)

- 정규분포함수는 구간 $(-\infty, +\infty)$에 대해서 정의되어 있다:

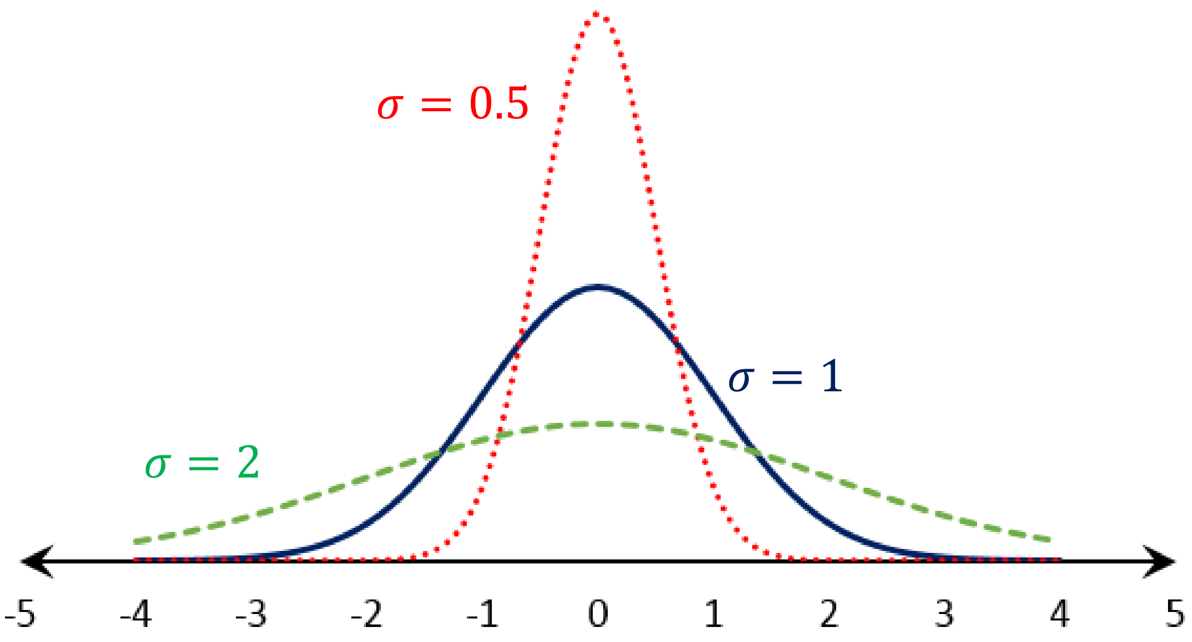
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- 평균 $= \mu$
- 분산 $= \sigma^2$
- 표준편차 $= \sigma$
- "확률변수 X가 정규확률분포를 따른다" $\Leftrightarrow$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

I 정규분포함수: μ의 역할



I 정규분포함수: σ의 역할



I 정규 확률변수의 합

- 확률변수 X와 Y가 서로 독립이며 정규확률분포를 따를 때,

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

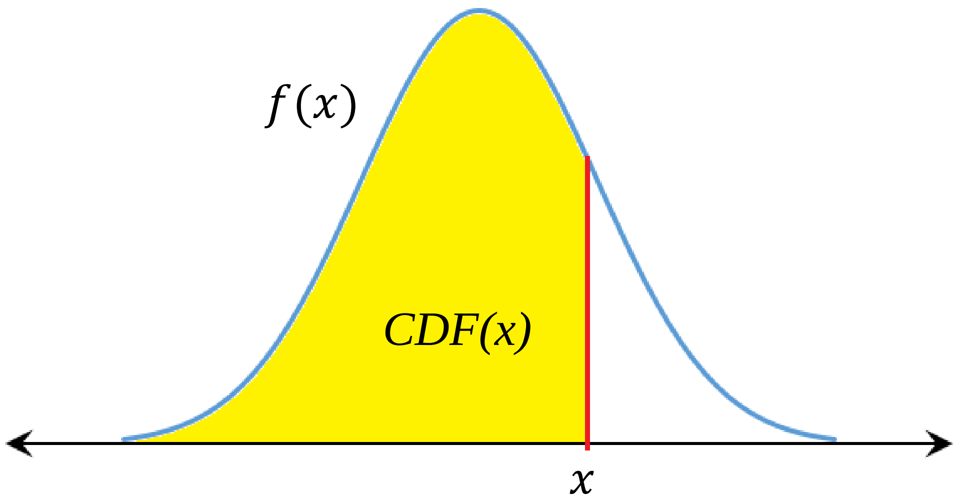
$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$이고,

$X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$이다.

I 정규분포의 누적확률 (Cumulative Distribution Function, CDF)

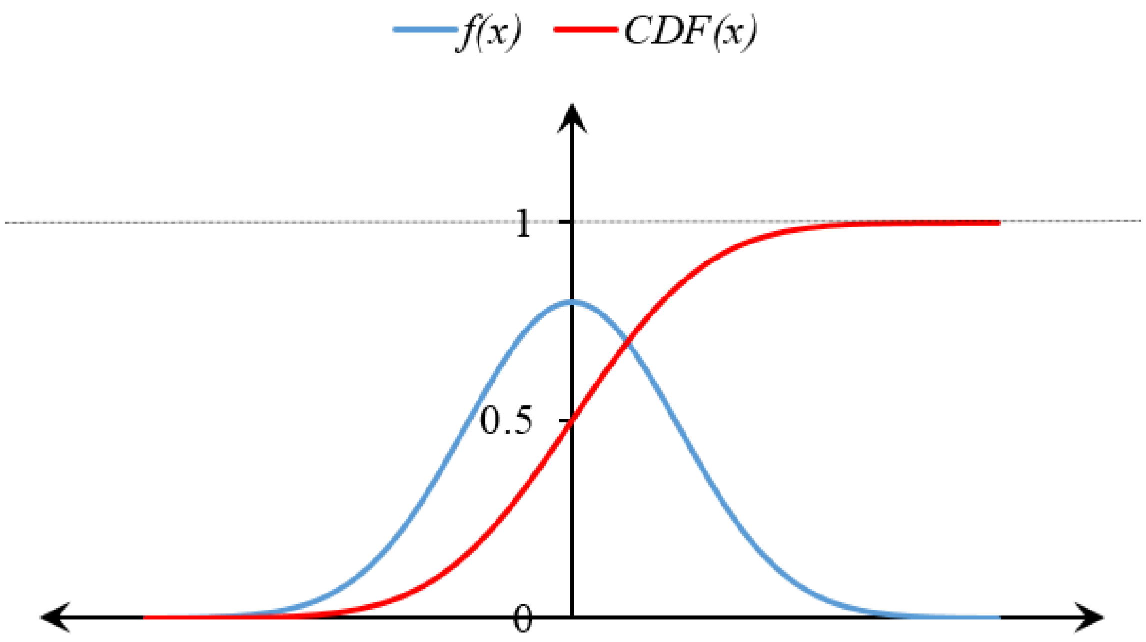
- 정규분포의 누적확률 $CDF(x)$는 구간 $(-\infty, x]$ 에서 $f(x)$ 아래의 면적과 같다. 즉, $CDF(x) = P(-\infty < X \le x)$이다.

$$CDF(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$



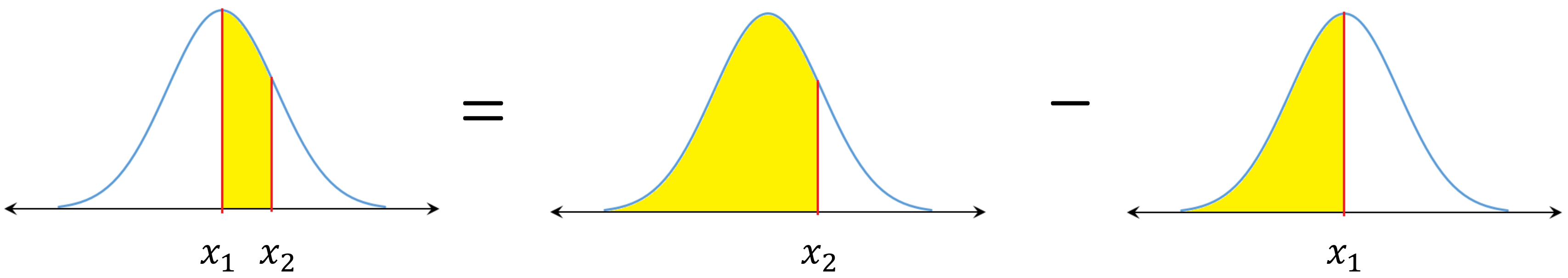
I 정규분포의 누적확률 (Cumulative Distribution Function, CDF)

- $CDF(x)$ 는 x가 증가하면 1로 수렴한다.



I 구간의 확률

- $P(x_1 \leq X \leq x_2)$와 같은 구간의 확률은 $CDF(x)$로 구할 수 있다.



$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = CDF(x_2) - CDF(x_1)$$

l 표준정규분포함수 (Standard Normal)

- 표준정규분포함수는 구간 $(-\infty, +\infty)$에 대해서 정의되어 있다:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- 평균 $= 0$
- 분산 $= 1$
- 표준편차 $= 1$
- "확률변수 X가 표준정규확률분포를 따른다" $\Leftrightarrow$ $X \sim N(0,1)$

I 표준화

- 확률변수 X가 정규분포를 따르는 경우 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 다음의 방식으로 X를 표준정규 확률변수로 변환할 수 있다. 그러면 $Z \sim N(0,1)$이다. 이것을 "표준화"라고 부른다.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- 표준화된 X의 값 z를 z-$score$ 즉 "표준점수"라고 부른다.

$$z - score = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

I 표준화

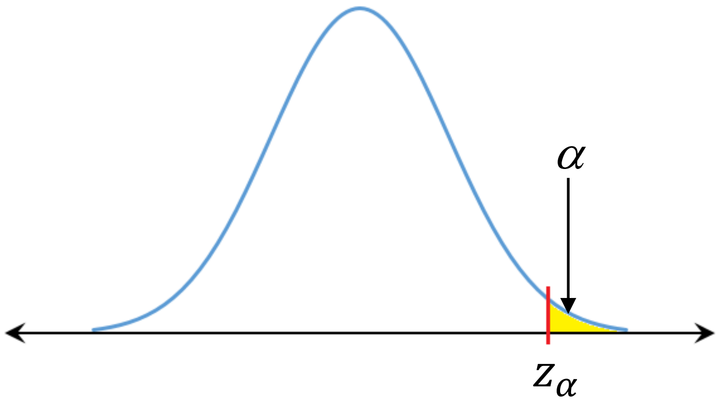
- 반대로 표준정규 확률변수 Z를 정규분포 $N(\mu,\sigma^2)$를 따르는 확률 변수로 변환할 수도 있다.

$$X = \sigma Z + \mu$$

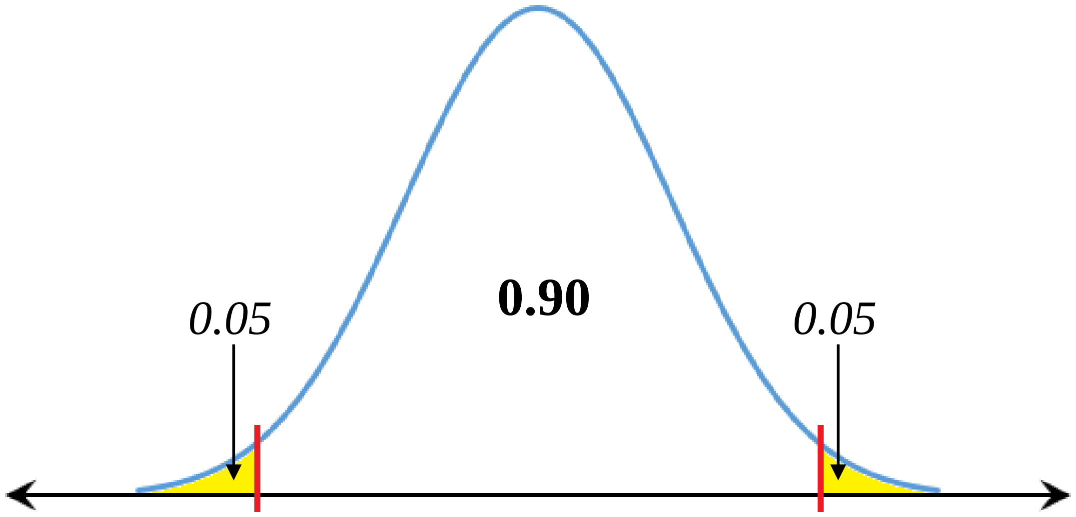
표준정규분포의 분위수 (Quantile of Standard Normal):

- 분위수 또는 백분위수는 신뢰구간 계산에 필요함.
- z_α라고 표기하고 우측 꼬리의 면적이 α와 같은 변수값을 의미함.

$$P(z_\alpha < Z) = \alpha$$

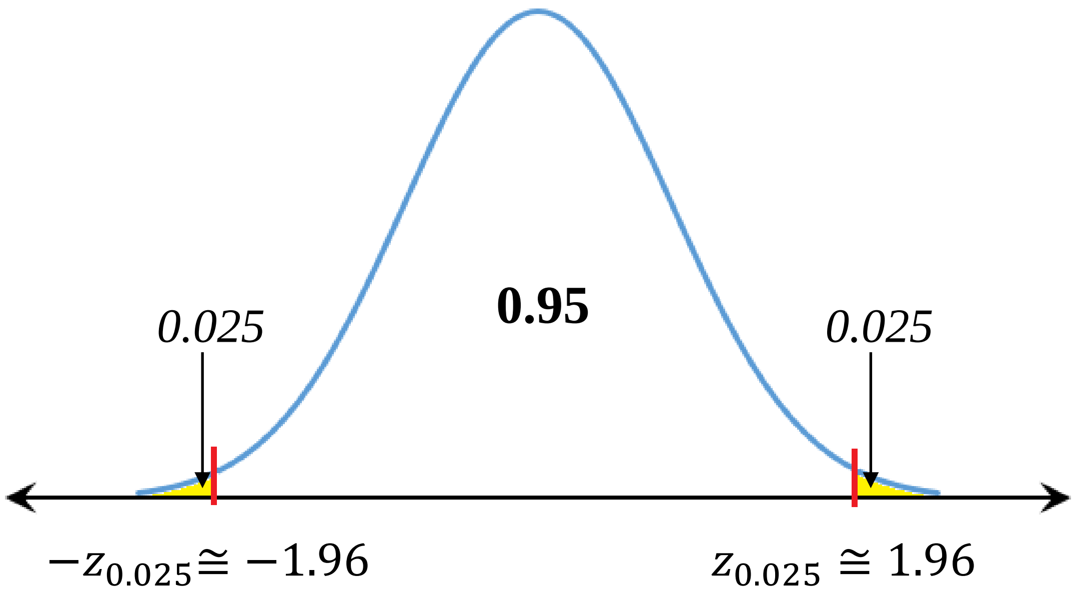


표준정규분포의 분위수 (Quantile of Standard Normal):



$-z_{0.05} \cong -1.645$ $\quad$ $z_{0.05} \cong 1.645$

I 표준정규분포의 분위수 (Quantile of Standard Normal):



표준정규분포

문제: A군이 시험문제를 푸는데 문항당 평균 50초가 걸리고 표준편차는 20초라고 한다. 48초과 54초 사이에 문항을 풀 확률은 얼마인가? 다음과 같은 표준정규분포의 CDF 표를 활용하시오.

z	CDF(z)
-0.2	0.4207
-0.1	0.4602
0	**0.5**
0.1	0.5398
0.2	0.5793

표준정규분포

문제: A군이 시험문제를 푸는데 문항당 평균 50초가 걸리고 표준편차는 20초라고 한다. 48초과 54초 사이에 문항을 풀 확률은 얼마인가? 다음과 같은 표준정규분포의 CDF 표를 활용하시오.

z	**CDF(z)**
-0.2	0.4207
-0.1	0.4602
0	**0.5**
0.1	0.5398
0.2	0.5793

먼저 $x_1 = 48$초와 $x_2 = 54$초를 표준화 한다.

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{48-50}{20} = -\frac{2}{20} = -0.1 \quad , \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{54-50}{20} = \frac{4}{20} = 0.2$$

표준정규분포

문제: A군이 시험문제를 푸는데 문항당 평균 50초가 걸리고 표준편차는 20초라고 한다. 48초과 54초 사이에 문항을 풀 확률은 얼마인가? 다음과 같은 표준정규분포의 CDF 표를 활용하시오.

z	CDF(z)
-0.2	0.4207
-0.1	0.4602
0	**0.5**
0.1	0.5398
0.2	0.5793

그리고, CDF 표를 활용하여 확률을 계산한다.

$$P(z_1 \le Z \le z_2) = CDF(z_2) - CDF(z_1) = CDF(0.2) - CDF(-0.1)$$

$$= 0.5793 - 0.4602 = 0.1191$$

I 끝.

감사합니다.

Fast campus

FAST CAMPUS
ONLINE
장순용 강사.