

I키포인트

• GARCH 모형 예측.

- 현재의 시간 스텝을 t라고 할때, 스텝 t+1에 대한 예측값은 $\frac{\sigma_{t+1}^2}{\sigma_{t+1}^2}$ 과 같이 hat 액센트로 표기하기로 한다.
- I가 과거 데이터(정보)를 의미할 때 예측값은 다음 조건부 기대값으로 구할 수 있다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = E[\sigma_{t+1}^2 | I]$$

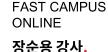
• 그런데, 과거와 현재 시점의 조건부 기대값은 다음과 같다.

$$E[\sigma_t^2|I] = \sigma_t^2$$
 (현재의 값 그대로)

$$E[\sigma_{t-1}^2|I] = \sigma_{t-1}^2$$
 (과거의 값 그대로)

$$E[\varepsilon_t^2|I] = \varepsilon_t^2$$
 (현실화된 값 그대로)

$$E[\varepsilon_{t-1}^2|I] = \varepsilon_{t-1}^2$$
 (현실화된 값 그대로)





• GARCH 모형에 의하면 스텝 t + 1에서는 다음 관계가 성립된다.

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \,\varepsilon_t^2 + \alpha_2 \,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3 \,\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \,\varepsilon_{t-p+1}^2$$
$$+ \beta_1 \sigma_t^2 + \beta_2 \,\sigma_{t-1}^2 + \beta_3 \,\sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q+1}^2$$

• 등호 양편의 조건부 기대값을 구하면 t+1 스탭의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \,\varepsilon_t^2 + \alpha_2 \,\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_3 \,\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \,\varepsilon_{t-p+1}^2$$
$$+ \beta_1 \sigma_t^2 + \beta_2 \,\sigma_{t-1}^2 + \beta_3 \,\sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q+1}^2$$

• 이제는 스텝 t + 2에 대한 예측을 하고자 하는데 impact의 기대값이 다음 과 같음에 유의한다.

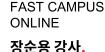
$$\hat{\varepsilon}_{t+1} = E[\varepsilon_{t+1}|I] = 0$$

$$\hat{\varepsilon}_{t+1}^2 = E[\varepsilon_{t+1}^2|I] = \hat{\sigma}_{t+1}^2$$

• 그러므로 스텝 t + 2에서의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \alpha_2 \, \varepsilon_t^2 + \alpha_3 \, \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \, \varepsilon_{t-p+2}^2$$

$$+ \beta_1 \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \beta_2 \, \sigma_t^2 + \beta_3 \, \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q+2}^2$$





FAST CAMPUS

ONLINE

IGARCH 모형의 예측

• 또 한 스텝 더 나가서, t + 3에서의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+3}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 + \alpha_2 \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \alpha_3 \varepsilon_t^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p+3}^2$$

$$+ \beta_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 + \beta_2 \hat{\sigma}_{t+1}^2 + \beta_3 \sigma_t^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q+3}^2$$

• 마지막으로, 먼 미래 ($h \to \infty$)의 예측은 unconditional mean으로의 수 렴을 의미한다.

$$\hat{\sigma}_{t+h}^2 \to E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j\right)}$$



- 이제는, GARCH(1,1) 모형의 예측에 대해서 자세히 알아본다.
- GARCH(1,1)모형은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

• 그리고, $\sigma^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1-\beta_1)$ 와 같은 unconditional mean의 조건을 대입해서 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 - \sigma^2 = \alpha_1 (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta_1 (\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2)$$



• 스텝 t + 1의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2 = \alpha_1 \left(\varepsilon_t^2 - \sigma^2 \right) + \beta_1 (\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \sigma^2 + \alpha_1 \left(\varepsilon_t^2 - \sigma^2 \right) + \beta_1 (\sigma_t^2 - \sigma^2)$$

• 다음 스텝 t + 2의 예측은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 - \sigma^2 = (\alpha_1 + \beta_1)(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_{t+2}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

• 한 스탭씩 미래의 예측값을 구해나가면 h 스탭에서는 다음과 같은 예측이 가능하다.

$$\hat{\sigma}_{t+h}^2 = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} (\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2)$$

- $\rightarrow 0 < \alpha_1 + \beta_1 < 1$ 와 같은 제약조건이 충족된다면 $(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \rightarrow 0$ 으로 수렴.
- \rightarrow 그러면 $\hat{\sigma}_{t+h}^2 \rightarrow \sigma^2$ 와 같이 수렴함을 쉽게 확인할 수 있다.

감사합니다.



FAST CAMPUS ONLINE

