Notes of ”Elementary Facts about Series”

Jinxin Wang

1 Overview

2 Examples

2.1 Series

Example 1 (x^p-series).

Example 2 ($\ln^p$-series).

Example 3 (Leibniz series).

Example 4 (组级数). 这类级数的特点是它的项以 k 个为一组循环出现。

和 *Leibniz series* 一样，这类级数可以具有比正项级数更慢的收敛于 *0* 的速度，因此常用来构造反例。

证明其收敛性的思路一般为证明 S_{kn}（按组求和）收敛，再证明 S_{kn+1}, S_{kn+2}, ..., S_{kn+n-1} 收敛到同一个值。

Eg:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{2\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \cdots$$

Proof of the convergence:

$$S_{3n} = 0, S_{3n+1} = \frac{1}{2\sqrt[3]{k}}, S_{3n+2} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \lim_{n\to\infty} S_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{3n+2} = 0$$

Hence,

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n = 0$$

The interesting part of this example is that $\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n^3$ *is divergent:*

$$\begin{aligned}\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n^3 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8k} + \frac{1}{8k} - \frac{1}{k} + \cdots \\ &= \Sigma_{k=1}^{\infty}(-\frac{3}{4k})\end{aligned}$$

Eg:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots$$

Proof of the convergence:

$$S_{3n} = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}), \lim_{n\to\infty} S_{3n} = \frac{1}{2}\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$S_{3n+1} = S_{3n} + \frac{1}{2k+1}, S_{3n+2} = S_{3n} + \frac{1}{4k+2}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{3n+2} = \lim_{n\to\infty} S_{3n}$$

这个级数是一个 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数，可以看到对于条件收敛的级数，更序级数与它的和可能不相同。因此它可以作为 *Reimann Theorem* 的一个例子。