群的性质(todo)

课上我们讲解了什么是群。请根据群定义，求解以下问题：

1. {Z, +} 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。

   答：是群，

   - 封闭性：根据整数加法的定义， 整数加上整数依然是整数
   - 结合性：根据整数加法的定义， 整数加法满足结合律
   - 幺元：幺元为0，
   - 逆：任意的整数a, 存在负整数-a ，使得 a + (-a) = 0, 幺元

2. {N, +} 是否为群？若是，验证其满足群定义；若不是，说明理由。 其中 Z 为整数集，N 为自然数集。

   答：不是群， 因为不满足可逆性， 对于大于0 的自然数a， 不存在自然数使得相加以后为0。

验证向量叉乘的李代数性质 (todo)

我们说向量和叉乘运算构成了李代数，现在请你验证它。书中对李代数的定义为：李代数由一个集合 $\mathbb{V}$，一个数域 $\mathbb{F}$ 和一个二元运算 $[,]$ 组成。如果它们满足以下几条性质，称 $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, [,])$ 为一个李代数，记作 $\mathfrak{g}$。

1. 封闭性　$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \in \mathbb{V}$.
2. 双线性　$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, a, b \in \mathbb{F}$, 有：

$$[a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}] = a[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] + b[\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}], \quad [\boldsymbol{Z}, a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}] = a[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}] + b[\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}].$$

3. 自反性[1]　$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}] = \mathbf{0}$.
4. 雅可比等价　$\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathbb{V}, [\boldsymbol{X}, [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}]] + [\boldsymbol{Y}, [\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}]] + [\boldsymbol{Z}, [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]] = \mathbf{0}$.

其中二元运算被称为**李括号**。

现取集合 $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$，数域 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，李括号为：

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

请验证 $\mathfrak{g} = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, \times)$ 构成李代数。

证 1. 封闭性：

由向量叉积的定义显然可知，2个三维向量的叉积依然是三维向量，其长度为 $|a||b|\sin\theta$，方向依右手或左手螺旋定则，与 a，b 垂直

2. 双线性，设 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$ $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ $Z=(z_1,z_2,z_3)^T$

用矩阵的方式来表示

$$(aX+bY)\times Z=\begin{bmatrix}0 & -ax_3-by_3 & ax_2+by_2\\ ax_3+by_3 & 0 & -ax_1-by_1\\ -ax_2-by_2 & ax_1+by_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$a[X,Z]+b[Y,Z]=\begin{bmatrix}0 & -ax_3 & ax_2\\ ax_3 & 0 & -ax_1\\ -ax_2 & ax_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -by_3 & by_2\\ by_3 & 0 & -by_3\\ -by_2 & by_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}$$

3. 自反性：

$$X\times X=\begin{bmatrix}0 & -x_3 & x_2\\ x_3 & 0 & -x_1\\ -x_2 & x_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0-x_2x_3+x_2x_3+x_1x_3+0+(-x_1x_3)+(-x_1x_2)+(x_1x_2)+0$$

$$=0$$

4. jacobi identity 的证明由syambol lab 导出 参见acobi identity prove generated by symbo lab.pdf

$$
\begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \right) +
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \right) +
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right)
$$

$$
= \begin{pmatrix} l_2 n_1 m_2 - l_2 n_2 m_1 + l_3 n_1 m_3 - l_3 n_3 m_1 \\ l_1 n_2 m_1 - l_1 n_1 m_2 + l_3 n_2 m_3 - l_3 n_3 m_2 \\ l_1 n_3 m_1 - l_1 n_1 m_3 + l_2 n_3 m_2 - l_2 n_2 m_3 \end{pmatrix} +
$$

$$
\begin{pmatrix} (-l_2 m_2 - l_3 m_3) n_1 + l_2 m_1 n_2 + l_3 m_1 n_3 \\ l_1 m_2 n_1 + (-l_3 m_3 - l_1 m_1) n_2 + l_3 m_2 n_3 \\ l_1 m_3 n_1 + l_2 m_3 n_2 + (-l_2 m_2 - l_1 m_1) n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

推导 SE(3) 的指数映射

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导，但对于 SE(3)，仅介绍了结论，没有给出详细推导。请你完成 SE(3) 指数映射部分，有关左雅可比的详细推导。

设 $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\phi}]^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{se}(3)$，它的指数映射为：

$$
\exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}
$$

令 $\boldsymbol{\rho} = \theta \boldsymbol{a}$，那么：

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})^n = \frac{\sin\theta}{\theta} \boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} \boldsymbol{a}^{\wedge} \triangleq \boldsymbol{J}. \tag{3}
$$

这也正是课件里提到的左雅可比。

提示：类比于 SO(3) 的泰勒展开，然后合并奇偶数项级数即得。

$$\exp(\xi^\wedge) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^n$$

依依矩阵乘法易知

$$= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi)^\wedge & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

左上角与 $SO(3)$ 相等，现证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n \triangleq J$

依据课本公式我们有 $a^\wedge a^\wedge = aa^T - I$，

设 $\phi = \theta a$，

$a^\wedge a^\wedge a^\wedge = -a^\wedge$

则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (\phi^\wedge)^n = \theta a^\wedge + \frac{1}{2!} \theta^2 a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{3} \theta^3 a^\wedge a^\wedge a^\wedge \cdots$

$$= \frac{1}{2!} \theta a^\wedge + \frac{1}{3} \theta^2 a^{\wedge 2} + \cdots + \frac{1}{n!} \theta^{n-1} (a^\wedge)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4}\theta^3 + \frac{1}{6}\theta^5 - \cdots\right) a^\wedge + \left(\frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{5}\theta^4 + \cdots\right) a^\wedge a^\wedge$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{4}\theta^4 + \frac{1}{6}\theta^6 \cdots}{\theta}\right) a^\wedge + \left(\frac{\frac{1}{3}\theta^3 - \frac{1}{5}\theta^5 + \cdots}{\theta}\right) a^\wedge a^\wedge$$

$$= \left(\frac{1 - \cos\theta}{\theta}\right) a^\wedge + \left(\frac{1 - \sin\theta}{\theta}\right) (aa^T - I)$$

$$= J$$

伴随

在 SO(3) 和 SE(3) 上，有一个东西称为伴随（Adjoint）。下面请你证明 SO(3) 伴随的性质。

对于 SO(3)，有：

$$\boldsymbol{R}\exp\left(\boldsymbol{p}^{\wedge}\right)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\exp\left((\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\right). \tag{4}$$

此时称 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$。

提示：首先你需要证明 $\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3, \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^{\wedge}$，页面https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3提示了一种简洁的途径。

对于 SE(3)，有：

$$\boldsymbol{T}\exp(\boldsymbol{\xi}^{\wedge})\boldsymbol{T}^{-1}=\exp\left((\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\xi})^{\wedge}\right) \tag{5}$$

其中 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})$ 定义为：

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})=\left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}^{\wedge}\boldsymbol{R}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{R}\end{array}\right]. \tag{6}$$

这个性质将在后文的 Pose Graph 优化中用到。但是 SE(3) 的证明较为复杂，不作要求。

完整的 SO(3) 和 SE(3) 性质见1和2。

证明：我的想法是两边先取log， 然后利用$Ra^{\wedge}R^T=(Ra)^{\wedge}$ 化简左边的式子。 不过看不出来怎样化简， 群里有人提到矩阵级数但是图片已经过期。

轨迹的描绘

我们通常会记录机器人的运动轨迹，来观察它的运动是否符合预期。大部分数据集都会提供标准轨迹以供参考，如 kitti、TUM-RGBD 等。这些文件会有各自的格式，但首先你要理解它的内容。记世界坐标系为 W，机器人坐标系为 C，那么机器人的运动可以用 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 或 $\boldsymbol{T}_{CW}$ 来描述。现在，我们希望画出机器人在世界当中的运动轨迹，请回答以下问题：

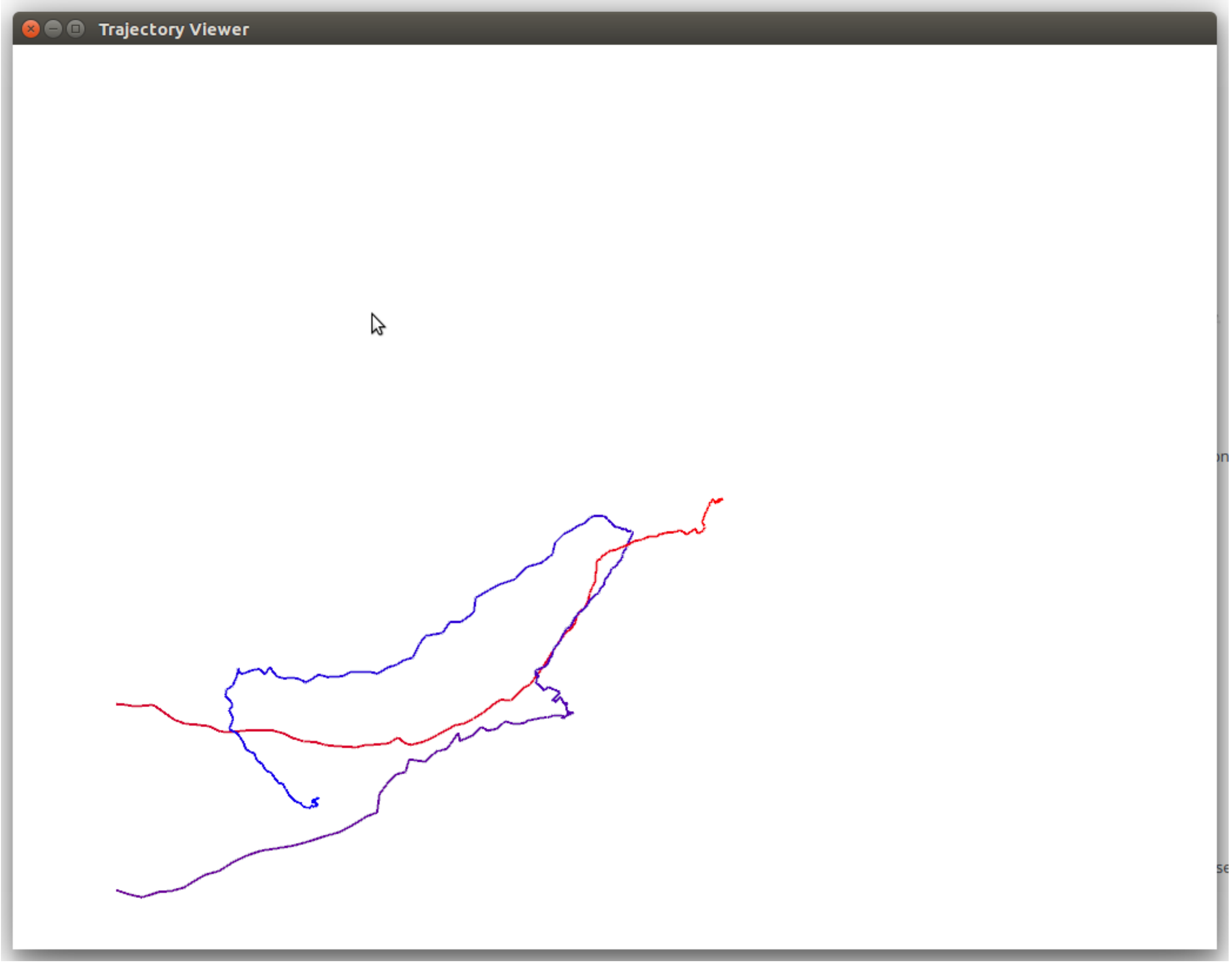
1. 事实上，$\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分即构成了机器人的轨迹。它的物理意义是什么？为何画出 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分就得到了机器人的轨迹？
2. 我为你准备了一个轨迹文件（code/trajectory.txt）。该文件的每一行由若干个数据组成，格式为

$$[t, t_x, t_y, t_z, q_x, q_y, q_z, q_w],$$

其中 t 为时间，t_x, t_y, t_z 为 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的平移部分，q_x, q_y, q_z, q_w 是四元数表示的 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的旋转部分，q_w 为四元数实部。同时，我为你提供了画图程序 draw_trajectory.cpp 文件。该文件提供了画图部分的代码，请你完成数据读取部分的代码，然后书写 CMakeLists.txt 以让此程序运行起来。注意我们需要用到 Pangolin 库来画图，所以你需要事先安装 Pangolin（如果你做了第一次作业，那么现在已经安装了）。CMakeLists.txt 可以参照 ORB-SLAM2 部分。

答：$\mathbf{T}_{WC}$ 的平移部分的物理含义是机器人在世界坐标系下的移动，因此显然画出$\mathbf{T}_{WC}$ 即可画出机器人的轨迹。

程序运行截图：



轨迹的误差

本题为附加题。

除了画出真实轨迹以外，我们经常需要把 SLAM 估计的轨迹与真实轨迹相比较。下面说明比较的原理，请你完成比较部分的代码实现。

设真实轨迹（ground-truth）为 $\boldsymbol{T}_g$，估计轨迹 $\boldsymbol{T}_e$。它们都以 $\boldsymbol{T}_{WC}$ 的形式存储，格式同上题。现在，你需要计算估计轨迹的误差。我们假设每一个 $\boldsymbol{T}_g$ 都与给定的 $\boldsymbol{T}_e$ 对应。那么，对于任意第 i 个位姿，它的误差可定义为：

$$e_i = \|\log(\boldsymbol{T}_{gi}^{-1}\boldsymbol{T}_{ei})^{\vee}\|_2. \tag{7}$$

即两个位姿之差的李代数二范数。于是，可以定义两条轨迹的均方根（Root-Mean-Square-Error, RMSE）误差为：

$$\mathrm{RMSE}(g,e) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2}. \tag{8}$$

我为你准备了 code/ground-truth.txt 和 code/estimate.txt 两条轨迹。请你根据上面公式，实现 RMSE 的计算代码，给出最后的 RMSE 结果。作为验算，参考答案为：2.207。

注：

1. 实际当中的轨迹比较还要更复杂一些。通常 ground-truth 由其他传感器记录（如 vicon），它的采样频率通常高于相机的频率，所以在处理之前还需要按照时间戳对齐。另外，由于传感器坐标系不一致，还需要计算两个坐标系之间的差异。这件事也可以用 ICP 解得，我们将在后面的课程中讲到。
2. 你可以用上题的画图程序将两条轨迹画在同一个图里，看看它们相差多少。

代码参见：https://github.com/jinxuan/SLAM-course/blob/master/week3/L3/code/trajectory_diff.cpp

运行截图如下：

```
LM-CHD-21016754:cmake-build-debug jinxwu$ make
Scanning dependencies of target trajectory_diff
[ 25%] Building CXX object CMakeFiles/trajectory_diff.dir/trajectory_diff.cpp.o
[ 50%] Linking CXX executable trajectory_diff
[ 50%] Built target trajectory_diff
[100%] Built target draw_trajectory
LM-CHD-21016754:cmake-build-debug jinxwu$ ./trajectory_diff
RMSE:2.20728
LM-CHD-21016754:cmake-build-debug jinxwu$
```